Prelegerea nr. 3

III. REZOLVAREA NUMERICĂ A ECUAŢIILOR ALGEBRICE ŞI TRANSCENDENTE (continuare)

Sumar

- *Metoda lui Newton (metoda tangentei)*
- *Metoda secantei*
- *Rezolvarea ecuațiilor algebrice*
- *Schema lui Horner*
- *Metoda Birge-Viète*
- *Alte metode numerice*

2.6. Metoda lui Newton (metoda tangentei)

Fie ecuația algebrică sau transcendentă $f(x)=0$ care admite o singură rădăcină reală r în intervalul

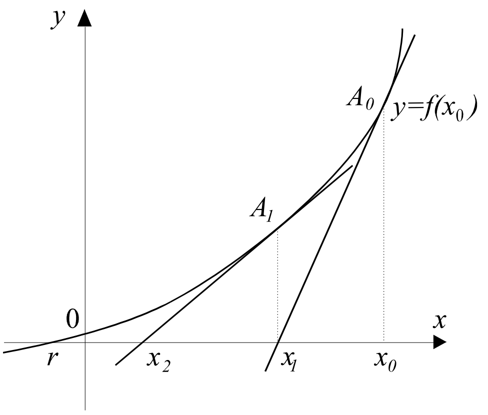

Fig. 2.20

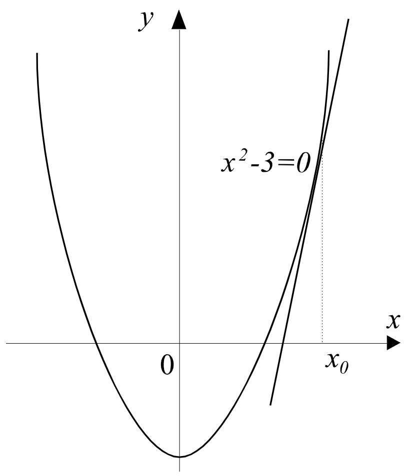

Fig. 2.21

$[a,b]$. Să presupunem în plus că derivatele $f'(x)$ şi $f''(x)$ păstrează un semn constant pe intervalul $[a, b]$. Ducem în punctul A_0 (fig.2.20) tangenta la curba $y=f(x)$.

Punctul x_1 în care tangenta întretaie axa Ox ne dă o valoare aproximativă a rădăcinii. Deoarece

$$x_1=x_0-p \quad \text{şi} \quad f'(x_0)=\frac{f(x_0)}{p}.$$

vom avea:

$$f'(x_0)p=f(x_0).$$

Prin urmare, abscisa punctului de intersecţie a acestei tangente cu axa Ox este

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Considerăm punctul de coordonate $A_1(x_1, f(x_1))$ şi construim tangenta la curbă în acest punct. În mod analog ca şi mai sus se arată că

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Procedeul se va repeta în mod asemănător. Se obține metoda tangentelor definită de următoarea formulă de iterare:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k=0, 1, 2, \ldots \tag{2.11}$$

Această metodă se mai numeşte şi *metoda lui Newton*.

Exemplu. Să aplicăm metoda lui Newton la calculul $\sqrt{3}$. Pentru aceasta scriem ecuația $x^2-3=0$ (fig.2.21). Formula de iterare a lui Newton este în acest caz

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 3}{2x_k},$$

sau

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{3}{x_k}\right).$$

Alegând $x_0=2$, obținem:

$$x_1=1{,}75;\ x_2=1{,}732;\ x_3=1{,}7320508.$$

Se observă că avem o convergență rapidă a şirului $x_1, x_2, \ldots$ către $\sqrt{3}$. Acest lucru nu este întâmplător. Analizăm cazul general. Fie dat $a>0$ şi să se găsească rădăcina ecuației:

$$x^2-a=0.$$

Atunci

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \frac{x_k}{2} + \frac{a}{2x_k}$$

şi

$$x_{k+1} - \sqrt{a} = \frac{x_k}{2} + \frac{a}{2x_k} - \sqrt{a} = \frac{(x_k - \sqrt{a})^2}{2x_k},$$

ori, utilizând eroarea relativă:

$$\frac{x_{k+1} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \left(\frac{\sqrt{a}}{2x_k}\right)\left(\frac{x_k - \sqrt{a}}{\sqrt{a}}\right)^2.$$

Astfel, în cazul rezolvării ecuaţiei $x^2 - a = 0$, putem spune că fiecare iteraţie în metoda lui Newton, în mod aproximativ, ridică eroarea la pătrat. Deci numărul cifrelor zecimale (sau binare) corecte aproape se dublează, la fiecare iteraţie. Acest rezultat este adevărat şi în cazul rezolvării ecuaţiilor scrise în forma generală. Se mai spune că metoda lui Newton este cu convergenta pătratică sau că este o metodă de ordinul al doilea.

Teoremă. Fie funcţia $f(x)$ definită şi de două ori derivabilă pe $[a, b]$. Presupunem că există $m>0$, $M<\infty$, astfel încât

$$|f'(x)| \geq m>0, \quad |f''(x)| \leq M<\infty, \ \forall\, x \in[a, b]$$

şi $r\in[a, b]$ este rădăcina ecuaţiei $f(x)=0$. Atunci şirul de iterare determinat de relaţia (2.11) converge către r dacă aproximaţia iniţială x_0 este aleasă într-o vecinătate a rădăcinii r. Eroarea este estimată de relaţia:

$$|x_{k+1}-r| \leq C\,|x_k-r|^2.$$

Demonstraţie. Se observă că metoda lui Newton este un caz particular al metodei aproximaţiilor succesive cu funcţia:

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Se verifică imediat că $r=\varphi(r)$ şi $\varphi'(r)=0$. Deci putem afirma că într-o vecinătate a rădăcinii r se îndeplineşte condiţia $|\varphi'(x)|\le\alpha<1$. Rezultă că şirul (2.11) converge (către rădăcina r), dacă aproximaţia iniţială x_0 este aleasă suficient de aproape de rădăcină.

Pentru a analiza viteza de convergenţă se evaluează diferenţa:

$$|x_{k+1}-r|=\left|x_k-r-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right|=\frac{1}{|f'(x_k)|}\left|f'(x_k)(x_k-r)-(f(x_k)-f(r))\right|.$$

Prin aplicarea repetată a teoremei de medie a lui Lagrange, ţinând seama de condiţiile din enunţ, rezultă:

$$|x_{k+1}-r|\le\frac{1}{m}\,|(f'(x_k)-f'(\xi_1))(x_k-r)|=\frac{1}{m}\,|f''(\xi_2)|\,|x_k-\xi_1|\,|x_k-r|,$$

unde

$$\xi_1=r+\theta_1(x_k-r),\quad \xi_2=\xi_1+\theta_2(x_k-\xi_1),\quad 0\le\theta_1,\ \theta_2\le 1\ .$$

Avem

$$|x_{k+1}-r|\le C|x_k-r|^2,\ C=\frac{(1-\theta_1)M}{m}$$

şi teorema este demonstrată.

O dificultate în aplicarea metodei lui Newton (şi în general a unei metode iterative) o reprezintă alegerea aproximaţiei iniţiale x_0. Să presupunem, de exemplu, că se rezolvă ecuaţia arctg x=0 (fig.2.22).

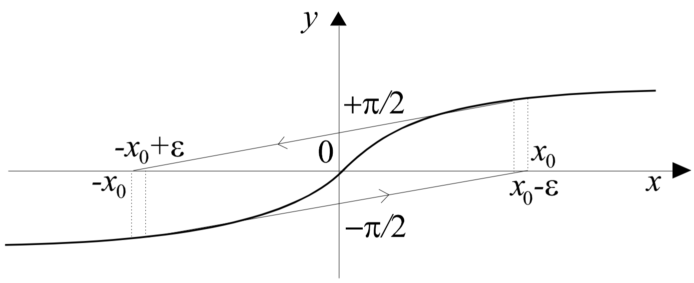

Fig. 2.22

Alegem ca aproximaţie iniţială punctul $x_0\in[1,39;\ 1,40]$. Atunci tangenta dusă în punctul $(x_0,\ f(x_0))$ va trece prin punctul de abscisă $-x_0$ şi apoi tangenta dusă în $(-x_0,\ f(-x_0))$ trece prin x_0. În acest caz, şirul x_k începe să "cicleze". Se numeşte *zonă de convergenţă* a rădăcinii r mulţimea tuturor aproximaţiilor iniţiale x_0 pentru care şirul iterativ $\{x_k\}$ tinde către r. În fig.2.22 zona de convergenţă a rădăcinii r=0 este intervalul $(-x_0+\varepsilon,\ x_0-\varepsilon)$. Alegerea aproximaţiei iniţiale în afara zonei de convergenţă a rădăcinii dorite nu permite să găsim această rădăcină (putem însă nimeri, eventual, în zona de convergenţă a altei rădăcini).

În cazul ecuaţiei $x^3-x=0$ zona de convergenţă a rădăcinii r=0 este intervalul deschis $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},\ \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ (fig.2.23).

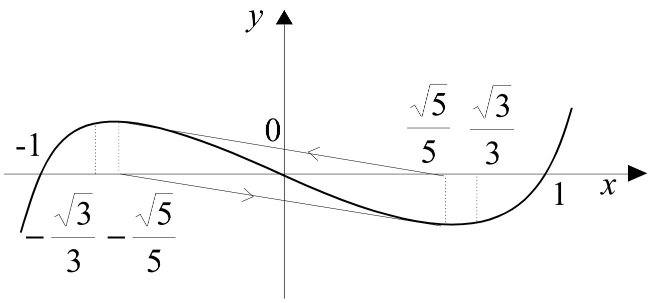

Fig. 2.23

Pentru $x_0=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ vom avea $x_1=-x_0$, $x_2=-x_1=x_0$, $x_3=-x_2=-x_0$, … , un şir care "ciclează". Dacă $x_0=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, atunci $f'(x_0)=0$ şi deci tangenta la curba dată în aceste puncte este paralelă cu axa Ox. Alegând aproximaţia iniţială $x_0<-\sqrt{3}/3$, vom vedea că şirul iterativ $\{x_k\}$ tinde către rădăcina $r=-1$; alegând $x_0>\sqrt{3}/3$, se asigură convergenţa către rădăcina $r=1$. În practică se recomandă de a alege valoarea aproximativă iniţială x_0 astfel ca

$$f(x_0)\, f''(x_0) > 0.$$

Această alegere a punctului de start asigură aplicarea metodei lui Newton, după cum se observă din fig.2.20-fig.2.23.

Drept criteriu de oprire al iteraţiilor poate servi următorul: iteraţiile se întrerup atunci când $|x_{k+1}-x_k|$ şi (sau) $|f(x_{k+1})|$ devine mai mic decât $\varepsilon>0$, o eroare maximă pe care o fixăm pentru determinarea rădăcinii.

Am văzut că în cazul rădăcinilor simple ($f'(r)\neq 0$) metoda lui Newton are gradul doi de convergenţă. Dacă r este o rădăcină multiplă, atunci convergenţa şirului $\{x_k\}$ este liniară.

Exemplu. Fie dată ecuaţia $x^2=0$ cu rădăcina dublă $r=0$. Potrivit metodei lui Newton putem scrie:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2}{2x_k}=\frac{1}{2}x_k.$$

Prin urmare

$$|x_{k+1}-r|=\frac{1}{2}|x_k-r|.$$

Dacă se cunoaşte gradul de multiplicitate a rădăcinii, atunci putem accelera convergenţa şirului construit prin metoda lui Newton. Dacă r este o rădăcină multiplă de gradul p, adică

$$f'(r)=f''(r)=\ldots=f^{(p-1)}(r)=0,\quad f^{(p)}(r)\neq 0,$$

se recomandă de a efectua calculele conform formulei de iterare:

$$x_{k+1}=x_k-p\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad k=0, 1, \ldots$$

2.7. Metoda secantei

În metoda lui Newton fiecare "pas" necesită calculul valorilor funcției f şi ale derivatei f' în punctele x_k. Există funcții pentru care calculul valorilor derivatei este dificil sau aproape imposibil, de exemplu, când nu se cunoaște expresia analitică a lui f, ci este definită cu ajutorul unui tabel de valori. Pentru astfel de funcții pentru care derivatele se evaluează greu, o alegere mai bună este metoda secantei.

Metoda secantei se deduce din metoda lui Newton, înlocuind derivata:

$$f'(x_k)\approx\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}.$$

Obținem:

$$x_{k+1}=x_k-f(x_k)\frac{x_k-x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})},\quad k=1, 2, \ldots \tag{2.12}$$

Pentru startul iterațiilor în metoda secantei sunt necesare două aproximații inițiale x_0 şi x_1. Valoarea x_{k+1} este abscisa punctului de intersecție dintre secanta

$$\frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k} = \frac{y - f(x_k)}{f(x_{k-1}) - f(x_k)}$$

care trece prin punctele (x_{k-1}, $f(x_{k-1})$) şi (x_k, $f(x_k)$) şi Ox (fig.2.24); de aici şi denumirea metodei.

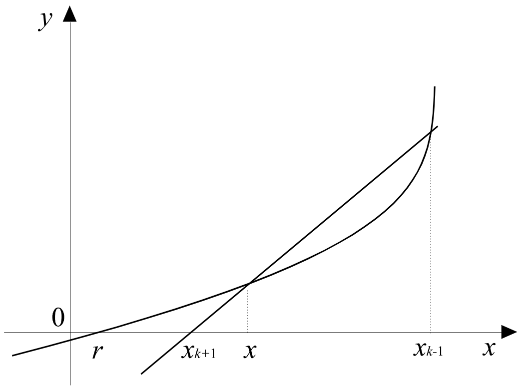

Fig. 2.24. Metoda secantei

Un criteriu de oprire a algoritmului, după cum am stabilit în 2.5, este verificarea inegalităților:

$$|f(x_{k+1})| < \varepsilon_1, \quad |x_{k+1} - x_k| < \varepsilon_2, \quad \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 > 0.$$

Dacă se cunoaşte

$$m = \min_{x \in [a,b]} |f'(x)| > 0$$

şi dorim să determinăm rădăcina cu eroarea $\varepsilon > 0$, vom întrerupe calculele când $|f(x_k)|/m < \varepsilon$. În cazul când se ştie şi constanta

$$M = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| < \infty$$

calculele le vom opri, dacă

$$\frac{M}{2m} |x_{k+1} - x_k| |x_k - x_{k-1}| < \varepsilon,$$

ceea ce garantează inegalitatea $|x_{k+1} - r| < \varepsilon$.

Să studiem în continuare viteza de convergență a metodei secantei, presupunând că se îndeplinesc condițiile: $f(r)=0$, $f'(r) \neq 0$, iar $f''(x)$ sunt funcţii continue şi păstrează un semn constant pe intervalul $[a, b]$. Pentru aceasta se dezvoltă funcţia $f(x)$ în serie Taylor în vecinătatea punctului $x=r$:

$$f(x) = f(r) + (x - r) f'(r) + \frac{(x - r)^2}{2} f''(r) + \ldots$$

Notăm prin $\varepsilon_{k-1} = x_{k-1} - r$, $\varepsilon_k = x_k - r$, $\varepsilon_{k+1} = x_{k+1} - r$. În dezvoltarea Taylor vom pune succesiv $x = x_{k-1}$ şi $x = x_k$, apoi o trunchiem după termenul al doilea (ţinând seama că $f(r)=0$):

$$f(x_{k-1}) \approx \varepsilon_{k-1} f'(r) + \frac{\varepsilon_{k-1}^2}{2} f''(r),$$

$$f(x_k) \approx \varepsilon_k f'(r) + \frac{\varepsilon_k^2}{2} f''(r).$$

Înlocuind în formula de iterare (2.13), obţinem:

$$\varepsilon_{k+1} \approx \varepsilon_k - \frac{[\varepsilon_k f(r) + \frac{\varepsilon_k^2}{2} f''(r)](\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1})}{(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) f'(r) + \frac{\varepsilon_k^2 - \varepsilon_{k-1}^2}{2} f''(r)},$$

sau

$$\varepsilon_{k+1} \approx \frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f'(r)}\varepsilon_k \varepsilon_{k-1}.$$

Deci putem scrie:

$$x_{k+1} - r \approx a(x_k - r)(x_{k-1} - r),\ a = \frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f'(r)}. \qquad (2.13)$$

Relaţia de recurenţă (2.13) o vom pune sub forma:

$$x_{k+1} - r = a^{\alpha}(x_k - r)^{\beta},$$

unde α şi β urmează a fi determinate. Substituind această formă în (2.13), vom obţine (pentru demonstraţie vezi [18,27]):

$$\alpha\beta=1, \quad \beta^2-\beta-1=0. \qquad (2.14)$$

Se va lua numai rădăcina pozitivă a ecuaţiei pătrate (2.14), deoarece numai ea garantează convergenţa şirului $\{x_k\}$. Prin urmare, pentru metoda secantei vom avea:

$$x_{k+1} - r \approx a^{1/\beta}(x_k - r)^{\beta}$$

unde $\beta = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) \approx 1.62$, $1/\beta \approx 0.62$.

În metoda lui Newton (vezi paragraful 2.6) $\beta=2$ şi deci metoda lui Newton converge mai repede decât metoda secantei. Pe de altă parte, metoda lui Newton reclamă necesitatea evaluării funcţiei şi a derivatei sale, iar metoda secantei necesită numai calculul funcţiei. De aceea la aceeaşi cantitate de operaţii în metoda secantei se poate face de două ori mai mulţi "paşi" şi deci se poate obţine rădăcina cu o precizie mai înaltă.

Să observăm că la fiecare pas nou în metoda secantei se calculează o singură valoare nouă pentru funcţia f. Formula (2.12) se mai poate pune sub forma:

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})},$$

care nu se recomandă la programare, deoarece dacă $f(x_k)\ f(x_{k-1})>0$ şi $x_k \approx x_{k-1}$, atunci poate avea loc o neutralizare a termenilor.

2.8. *Rezolvarea ecuaţiilor algebrice*

Considerăm ecuaţia algebrică

$$P_n(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \qquad (2.15)$$

unde coeficienţii $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt reali, $a_n>0$.

2.8.1. *Proprietăţile ecuaţiilor algebrice*

Fără a putea rezolva ecuaţia algebrică (2.15) se poate stabili câte rădăcini are ecuaţia, unele relaţii între coeficienţii polinomului $P_n(x)$ şi rădăcinile ecuaţiei (2.15) etc. În cele ce urmează vom aduce unele dintre aceste proprietăţi:

- O ecuaţie algebrică (2.15) de gradul n are exact n rădăcini (printre care pot fi atât reale, cât şi complexe), fiecare rădăcină multiplă fiind considerată ca atâtea rădăcini confundate cât indică ordinul ei de multiplicitate.
- Între coeficienţii ecuaţiei algebrice (2.15) şi rădăcinile ei $r_1, r_2, \ldots, r_n$ există relaţiile (formulele lui Viète):

$$r_1+r_2+\ldots+r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$r_1r_2+r_1r_3+\ldots+r_{n-1}r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$r_1r_2r_3+r_1r_3r_4+\ldots+r_{n-2}r_{n-1}r_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n},$$

....

$$r_1 r_2 \ldots r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

- Rădăcinile complexe ale ecuaţiei algebrice (2.15) cu coeficienţi reali sunt conjugate două câte două. (Numărul $a-ib$, $i=\sqrt{-1}$, se numeşte conjugatul lui $a+ib$).
- Dacă o ecuaţie algebrică (2.15) cu coeficienţi raţionali admite ca rădăcină un iraţional pătratic $m+n\sqrt{p}$ (m, $n\in Q$, $n\neq 0$, $p\in N$), ea admite şi conjugatul său, $m-n\sqrt{p}$, ca rădăcină.
- Ecuaţia algebrică (2.15) de ordin n par şi cu $a_0<0$ are cel puţin două rădăcini reale de semne diferite.
- Rădăcinile reale şi complexe ale ecuaţiei algebrice (2.15) sunt situate în inelul circular $R_1<|x|<R_2$, unde

$$R_1 = \frac{1}{1+\frac{1}{|a_0|}\max\limits_{1\le k\le n}|a_k|};\quad R_2 = 1+\frac{1}{|a_n|}\max\limits_{0\le k\le n-1}|a_k|.$$

Aceste şi alte proprietăţi ale ecuaţiilor algebrice sunt tratate în manualele de algebră superioară.

2.8.2. Schema lui Horner

Schema lui Horner constituie un procedeu efectiv de calcul al valorii unui polinom şi al derivatelor lui.

Considerăm polinomul de gradul n:

$$P_n(x)\equiv a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 .$$

Pentru stabilirea schemei lui Horner se transcrie polinomul astfel:

$$P_n(x)=a_0+x(a_1+x(a_2+ \ldots + x((a_{n-1}+ xa_n) \ldots)).$$

Deci putem afla valoarea acestui polinom în punctul $x=\xi$, calculând succesiv mărimile:

$$b_n=a_n,$$

$$b_{n-1}=a_{n-1}+\xi b_n=a_{n-1}+\xi a_n,$$

$$b_{n-2}=a_{n-2}+\xi b_{n-1}=a_{n-2}+\xi(a_{n-1}+\xi a_n),$$

....

$$b_0=a_0+\xi b_1=a_0+\xi(a_1+\ldots+\xi(a_{n-1}+\xi a_n)\ldots)=P_n(\xi).$$

Această schemă de obţinere a şirului finit $\{b_i\}$ se numeşte *schema lui Horner*. Ea necesită cel mult $2n$ operaţii aritmetice. Se demonstrează că, în cazul general, când toţi coeficienţii polinomului dat $P_n(x)$ sunt diferiţi de zero, nu există o schemă mai eficientă de calcul, decât cea a lui Horner.

Câtul împărţirii lui $P_n(x)$ la $x-\xi$ este dat de polinomul $P_{n-1}(x)$ de gradul $n-1$ cu coeficienţii b_1, b_2, ... , b_n:

$$P_{n-1}(x)=b_n x^{n-1}+b_{n-1}x^{n-2}+\ldots+b_2 x+b_1,$$

adică

$$P_n(x)=(x-\xi)P_{n-1}(x)+P_n(\xi).$$

Ultima relaţie ne dă:

$$P_{n-1}(x)=\frac{P_n(x)-P_n(\xi)}{x-\xi}.$$

Trecând la limită în această identitate, obținem:

$$P'_n(\xi)=P_{n-1}(\xi).$$

Prin urmare, cu ajutorul lui $P_{n-1}(x)$ putem calcula valoarea derivatei polinomului $P_n(x)$ în punctul $x=\xi$. Valoarea derivatei de asemenea se obține cu ajutorul schemei lui Horner:

$$\begin{aligned}
&c_n=b_n=a_n,\\
&c_{n-1}=b_{n-1}+\xi c_n=a_{n-1}+2a_n\xi,\\
&c_{n-2}=b_{n-2}+\xi c_{n-1}=a_{n-2}+2a_{n-1}\xi+3a_n\xi^2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&c_1=b_1+\xi c_2=a_1+2a_2\xi+\dots+na_{n-1}\xi^{n-1}=P'_n(\xi).
\end{aligned}$$

Procedeul poate fi continuat obținând-se valorile oricărei derivate a lui $P_n(x)$ într-un punct fixat $x=\xi$.

Pentru ușurință calculelor coeficienți polinoamelor

$$P_n',P_n'',\dots,P_n^{(n)}$$

se pot determina cu ajutorul schemei concise a lui Horner.

Schema concisă a lui Horner

a_n $\Downarrow$ (o) $\Downarrow$	a_{n-1} $\Downarrow$ ξb_n $\Downarrow\nearrow$	a_{n-2} $\Downarrow$ ξb_{n-1} $\Downarrow\nearrow$	... ...	a_2 $\Downarrow$ ξb_3 $\Downarrow\nearrow$	a_1 $\Downarrow$ ξb_2 $\Downarrow\ \nearrow$	a_0 $\Downarrow$ ξb_1 $\Downarrow$
b_n $\Downarrow$ (o) $\Downarrow$	b_{n-1} $\Downarrow$ ξc_n $\Downarrow\nearrow$	b_{n-2} $\Downarrow$ ξc_{n-1} $\Downarrow\ \nearrow$	.. ..	b_2 $\Downarrow$ $\xi c_3\ \nearrow$ $\Downarrow$	b_1 $\Downarrow$ $\xi c_2\ \nearrow$ $\Downarrow$	$b_0=\boldsymbol{P}_n(\xi)$
c_n $\vdots$	c_{n-1} $\vdots$	c_{n-2} $\vdots$	....	c_2 $\vdots$	$c_1=1/1!\boldsymbol{P}'_n(\xi)$ $\vdots$	
s_n $\Downarrow$ $(0)\Downarrow$	s_{n-1} $\Downarrow$ ξq_n $\Downarrow\nearrow$	$s_{n-2}=\dfrac{1}{(n-2)!}\times$ $\times\boldsymbol{P}_n^{(n-2)}(\xi)$ $\Downarrow$				
q_n $\Downarrow$ (0) $\Downarrow$	$q_{n-1}=\dfrac{1}{(n-1)!}\boldsymbol{P}_n^{(n-1)}(\xi)$ $\Downarrow\quad\nearrow$					
$r_n=\dfrac{1}{n!}\boldsymbol{P}_n^{(n)}(\xi)$						

2.8.3. *Metoda lui Newton (*Birge-Viète)

Fie dată ecuația algebrică

$$P_n(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

cu coeficienți reali.

Vom folosi metoda lui Newton pentru a determina o rădăcină reală a ecuaţiei date. Şirul de iterare Newton (vezi paragraful 2.6) devine:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{P_n(x_k)}{P'_n(x_k)}, \quad k=1, 2, 3, \ldots$$

Valorile lui $P_n(x)$ şi $P_n'(x)$ în punctele fixate x_k, k=0, 1, 2, ... , se calculează cu ajutorul schemei lui Horner (vezi 2.8.2):

$$b_n = a_n,$$

$$b_j = a_j + x_k b_{j+1}, \; j=n-1, \ldots, 0,$$

$$P_n(x_k) = b_0,$$

$$c_n = b_n,$$

$$c_j = b_j + x_k c_{j+1}, \; j=n-1, \ldots, 1,$$

$$P'_n(x_k) = c_1.$$

Prin urmare, expresia şirului de iterare va fi

$$x_{k+1} = x_k - \frac{b_0}{c_1}, \quad k=0, 1, 2, \ldots \tag{2.16}$$

Cu ajutorul acestei metode pot fi calculate toate rădăcinile reale ale ecuaţiei algebrice date. Într-adevăr, fie r_1 rădăcina (simplă) obţinută prin metoda lui Newton (2.16). Atunci

$$P_n(x) = (x - r_1) P_{n-1}(x).$$

Deci, pentru a găsi o altă rădăcină reală, avem ecuaţia algebrică de gradul n–1:

$$P_{n-1}(x) \equiv b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \ldots + b_2 x + b_1 = 0.$$

Ultima ecuaţie o rezolvăm reluând metoda lui Newton şi schema lui Horner după cum s-a arătat anterior. Astfel se calculează toate rădăcinile reale.

Această metodă pentru determinarea rădăcinilor reale ale ecuaţiilor algebrice se mai numeşte metoda iterativă Birge-Viète (vezi[16]).

Exemplu [30]. Să se calculeze rădăcina reală a ecuaţiei:

$$P_3(x) = x^3 - x - 1 = 0$$

utilizând x_0=1.3.

Folosind schema concisă a lui Horner, se obţine:

1	0	–1	–1
0	1.3	1.69	0.897
1	1.3	0.69	$-0.103 = b_0 = P_3(1.3)$
0	1.3	3.38	
1	2.6		$4.07 = c_1 = P'_3(1.3)$

$$x_1 = x_0 - \frac{b_0}{c_1} = 1.3 - \frac{-0.103}{4.07} = 1.325$$

1	0	–1	–1
0	1.3 25	1.75 5625	1.001203
1	1.3 25	0.75 5625	0.001203 = b_0 = P_3(1.325)
0	1.3 25	3.51 1375	
1	2.6 5		4.267=c_1=P'_3(1.325)

$$x_2 = x_1 - \frac{b_0}{c_1} = 1.325 - \frac{0.001203}{4.267} = 1.3247181$$

1	0	–1	–1
0	1.3 24718	1.154 878	1.0000004
1	1.3 24718	0.154 878	0.0000004 = b_0 = P_3(1.324718)
0	1.3 24718	4.109 756	
1	2.6 49436		4. 264634 = c_1 = P'_3(1.324718)

$$x_3 = x_2 - \frac{b_0}{c_1} = 1.324718 - \frac{0.0000004}{4.264634} = 1.3247179$$

Deci, una din rădăcinile reale ale polinomului $P_3(x)$ este r_1=1.324718 cu şapte cifre semnificative corecte.

.

2.9. Alte metode numerice

Considerăm o ecuaţie algebrică sau transcendentă

$$f(x)=0.$$

Presupunem că am stabilit printr-un mijloc oarecare că ea are o singură rădăcină reală r în intervalul [a, b] şi $f(a)\, f(b)<0$.

Metoda coardei este o variantă a metodei secantei, în care se alege coarda care trece prin (a, $f(a)$) şi (x_k($f(x_k)$) sau (b, $f(b)$) şi (x_k($f(x_k)$), unde se alege capătul a sau b, dacă $f(a)\, f(x_k)<0$ sau $f(b)\, f(x_k)<0$. Figurile 2.25-2.28 arată toate cazurile posibile

.

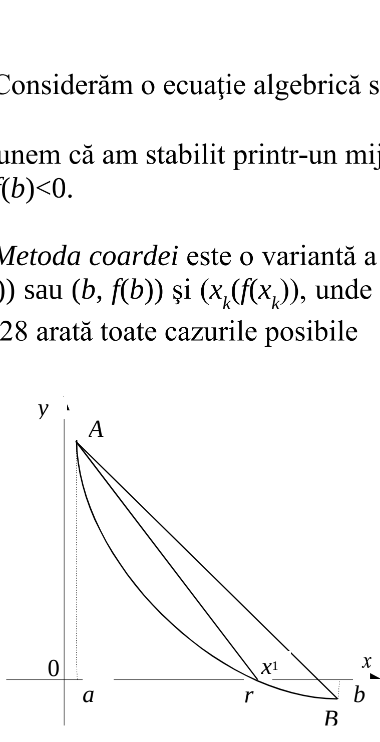

Fig. 2.25

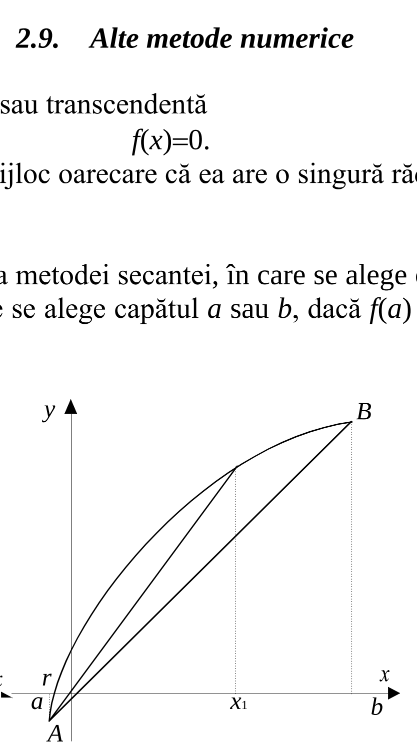

Fig. 2.26

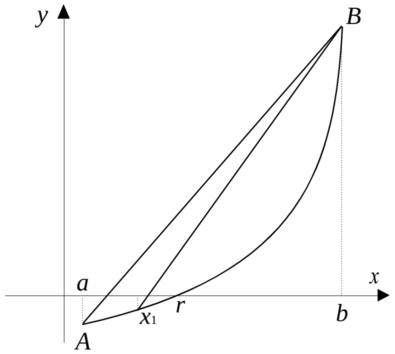

Fig. 2.27

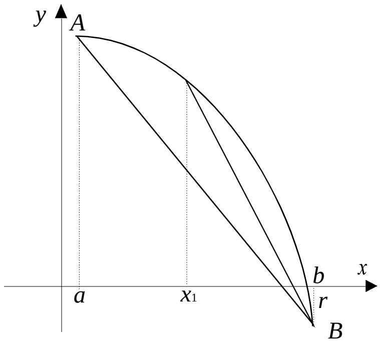

Fig. 2.28

Ecuaţia dreptei care trece prin punctele *A* şi *B* este:

.

Pentru a calcula abscisa punctului de intersecţie a coardei *AB* cu axa *Ox* punem *y*=0 şi deci

$$x_1 = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)},$$

sau

$$x_1 = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Punctul x_1 împarte (*a*, *b*) în două intervale (a, x_1) şi (x_1, b). Din (a, x_1) şi (x_1, b) este ales acel interval la extremităţile căruia funcţia *f*(*x*) are semne contrare şi procedura se repetă în mod analog. Concis, formulele de iterare a metodei coardei pentru generarea şirului de aproximaţii ale lui *r*, plecând de la aproximaţia iniţială x_0, se scriu astfel:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\cdot\frac{b-x_k}{f(b)-f(x_k)}, \quad x_0=a, \quad k=0, 1, 2, \ldots \qquad (2.17)$$

sau

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\cdot\frac{x_k-a}{f(x_k)-f(a)}, \quad x_0=b, \quad k=0, 1, 2, \ldots \qquad (2.18)$$

În dependenţă de forma funcţiei pe intervalul [*a*, *b*] se va alege una sau alta din formulele de iterare a metodei coardei. Fie intervalul [*a*, *b*], astfel încât derivata a doua $f''(x)$ să păstreze acelaşi semn, când *x* variază de la *a* la *b*, adică curba este tot timpul convexă sau tot timpul concavă. Dacă

$$f'(x)\,f''(x)<0, \quad \forall x\in[a, b],$$

(vezi fig.2.25 şi fig.2.26), atunci se aplică formula (2.18). În caz contrar (vezi fig.2.27 şi fig.2.28) se va aplica formula (2.17).

Această metodă se mai numeşte şi *regula falsei poziţii*.

Avantajul metodei coardei este că ea produce un şir care, pentru funcţiile continue, este întotdeauna convergent (spre deosebire de metoda secantei sau metoda lui Newton). După cum se vede din fig.2.25 - fig.2.28 convergenţa şirului construit prin metoda coardei către rădăcina ecuaţiei nu este rapidă. Deci metoda coardei este o metoda bună de start, dar nu trebuie utilizată în vecinătatea rădăcinii.

În metoda lui Newton gradul de convergenţă este pătratic, adică eroarea la fiecare iteraţie este proporţională cu pătratul erorii de la iteraţia anterioară. Pentru metoda secantei gradul de convergenţă este aproximativ egal cu 1.618. Metoda coardei, în general, este de ordinul întâi. Se demonstrează, în ipoteze foarte slabe, că nici o metodă iterativă care foloseşte doar o evaluare a funcţiei la fiecare pas nu poate avea ordinul doi de convergenţă.

O metodă de ordinul doi care foloseşte la fiecare pas două evaluări pentru funcţie, dar nici una pentru derivate, este *metoda lui Steffensen*:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \cdot \frac{f(x_k)}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}, \quad k=0, 1, 2, \ldots$$

Există şi alte metode de ordin superior (vezi [36]), adică metode în care şirul de iterare să tindă mai repede către rădăcina r decât şirul Newton sau Steffensen.

Metode de ordinul trei de convergenţă:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) - \dfrac{f(x_k) f''(x_k)}{2 f'(x_k)}};$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left[1 + \frac{f(x_k) f''(x_k)}{2 f'^2(x_k)} \right].$$

Metode de ordinul patru de convergenţă:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) f'^2(x_k) - \frac{1}{2} f^2(x_k) f''(x_k)}{f'^3(x_k) - f(x_k) f'(x_k) f''(x_k) + \frac{1}{6} f^2(x_k) f''(x_k)};$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k)} - \frac{f^2(x_k) f''(x_k)}{2 f'^3(x_k)} +$$
$$+ f^3(x_k) \left(\frac{f''(x_k)}{6 f'^4(x_k)} - \frac{f''^2(x_k)}{2 f'^5(x_k)} \right).$$