Metoda aproximatiilor succesive

Pentru rezolvarea ecuatiei $f(x) = 0$ cu metoda aproximatiilor succesive este necesar de rescris ecuatia in forma echivalenta $x = \varphi(x)$. Atunci metoda aproximatiilor succesive se construieste foarte simplu. Alegem iteratia initiala x_0 ca o valoare arbitrara din segmentul $[a,b]$: $x_0 \in [a,b]$ si generam sirul valorilor x_k dupa formula

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), k = 0,1,2,\ldots \tag{1}$$

Teorema despre convergenta metodei spune ca sirul $x_k, k = 0,1,2,\ldots$ converge la solutia exacta problemei daca se indepleneste conditia

$$|\varphi'(x)| \leq \alpha < 1, \forall x \in [a,b]. \tag{2}$$

Pentru evaluarea erorii metodei se foloseste conditia

$$|x_{k+1} - r| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}|x_{k+1} - x_k| \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha}|x_1 - x_0|, k \geq 1 \tag{3}$$

Modalitati de trecerea de la forma initiala a ecuatiei $f(x) = 0$ la forma $x = \varphi(x)$:

1. Adaugam variabila x la ecuatia $f(x) = 0$

   $$0 = f(x) \Leftrightarrow x = x + f(x) = \varphi(x) \tag{4}$$

   Daca derivata $\varphi'(x) = 1 + f'(x)$ satisfice conditiei de convergenta atunci aplicam formula (1). Daca nu – atunci se propune urmatoare modalitate
2. Inmultim ecuatia $f(x) = 0$ cu o functie arbitrara $g(x)$ ($g(x) \neq 0\ \forall x \in [a,b]$) si adaugam variabila x

   $$0 = f(x) \Leftrightarrow 0 = g(x)f(x) \Leftrightarrow x = x + g(x)f(x) = \varphi(x) \tag{5}$$

   Daca derivata $\varphi'(x) = 1 + g'(x)f(x) + g(x)f'(x)$ satisfice conditiei de convergenta atunci aplicam formula (1).
3. A treia modalite consta in folosirea formei concrete a functiei $f(x)$. In prelegerea 2 pe pagina 11 este prezentat un exemplu de trecerele posibile de la forma $f(x) = 0$ la $x = \varphi(x)$.
4. Daca toate trei modalitati nu dau functia $\varphi(x)$, care satisface conditiei (2), atunci se poate de folosit modalitatea universala. Pentru aceasta presupunem ca derivata $f'(x)$ este pozitiva, deci $f'(x) > 0\ \forall x \in [a,b]$ si $m \leq f'(x) \leq M$, unde M si m sunt doua constante pozitive. Daca $f'(x) < 0$ atunci consideram ecuatia $\{-f(x) = 0\}$. Se propune urmatoarea forma functiei $\varphi(x)$

   $$\varphi(x) = x - \frac{1}{M}f(x) \tag{6}$$

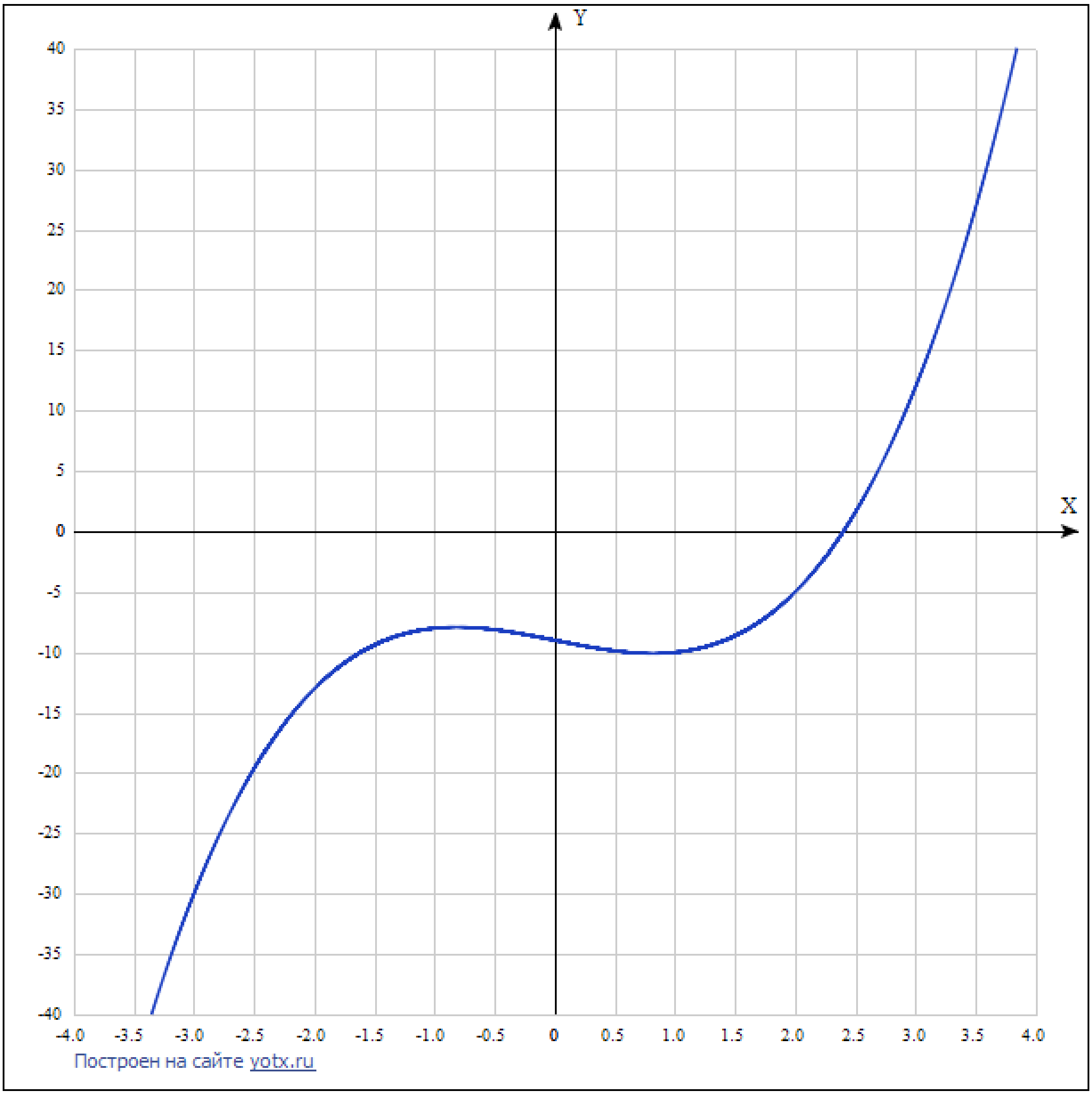
   Demonstram ca functia $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{M}f'(x)$ satisface conditiei (2).

   $$m \leq f'(x) \leq M \Leftrightarrow \frac{m}{M} \leq \frac{1}{M}f'(x) \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{m}{M} \geq -\frac{1}{M}f'(x) \geq -1 \Leftrightarrow$$
   $$1 - \frac{m}{M} \geq 1 - \frac{1}{M}f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow\ 0 \leq \varphi'(x) \leq 1 - \frac{m}{M} = \alpha < 1$$

Exemplu pe pagina 11 din prelegerea 2**.** Fie data ecuatia algebrica

$$f(x) = x^3 - 2x - 9 = 0 \tag{7}$$

Separarea radacinelor efectuam prin metoda grafica. Desenam graficul $y = f(x)$



Fin desenul se vede ca ecuatia are singura radacina pe segmentul $[a, b] = [2,3]$.

In exemplu de pe pagina 11 sunt propuse 4 forme posibile pentru functia $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = x^3 - x - 9; \ \varphi(x) = \sqrt[3]{2x + 9};$$

$$\varphi(x) = \frac{2x+9}{x^2}; \ \varphi(x) = \frac{9}{x^2-2}. \tag{8}$$

Pentru toate patru forme functiei $\varphi(x)$ derivata $|\varphi'(x)| > 1, \forall x \in [2,3]$.

Daca aplicam modalitatea universala, obtinem.

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \Longrightarrow 10 \le f'(x) \le 25, \forall x \in [2,3] \tag{9}$$

Deci $m = 10, \mathrm{M} = 25$ si din (6) obtinem

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{M} f(x) = x - \frac{1}{25}(x^3 - 2x - 9) = -\frac{1}{25}(x^3 - 27x - 9), \tag{10}$$

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{25}(3x^2 - 27) \Longrightarrow |\varphi'(x)| = \frac{1}{25}(27 - 3x^2), \forall x \in [2,3] \tag{11}$$

$$0 \le |\varphi'(x)| = \frac{1}{25}(27 - 3x^2) \le 0.6 < 1, \forall x \in [2,3] \tag{12}$$