MMC, Modulul I
Note de curs
Vasile MORARU

Prelegerea nr. 2

II. REZOLVAREA NUMERICĂ A ECUAŢIILOR ALGEBRICE ŞI TRANSCENDENTE

Sumar

- *Introducere. Definiții*
- *Separarea rădăcinilor*
- *Metoda înjumătățirii intervalului*
- *Metoda aproximațiilor succesive*
- *Criterii de oprire în metodele iterative*

2.1. Introducere

În acest capitol este tratată problema rezolvării ecuațiilor neliniare de forma: $f(x)=0$, unde $f(x)$ este un polinom sau o funcție transcendentă.

Dacă $f(x)$ este un polinom sau în urma unor transformări poate fi adusă la forma polinomială, ecuația se numește ***algebrică***.

Exemple:

$$4x^5-12x^4+x^3-2x+10=0;$$

$$\sqrt{x+1}=x^2-2\,.$$

Cea de-a doua ecuație este tot algebrică, deoarece prin ridicare la pătrat şi ordonare devine:

$$x^4-4x^2-x+3=0.$$

O ecuație algebrică în forma generală se va scrie:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0 \qquad (2.1)$$

cu $n\geq 1$ şi coeficienții reali $a_0, a_1, \ldots, a_n$; $a_n\neq 0$.

Orice ecuație algebrică (2.1) are exact n rădăcini, fiecare rădăcină multiplă fiind socotită ca atâtea rădăcini confundate cât arată ordinul ei de multiplicitate. Această afirmație poartă denumirea de ***teorema fundamentală a algebrei*** şi pentru prima dată se întâlneşte în lucrările lui Gérard şi Descartes. Prima demonstrare completă a acestei teoreme a fost dată în anul 1799 de către Carl Gauss, unul din cei mai mari matematicieni germani din secolul al XIX-lea.

Ecuațiile care nu sunt algebrice se numesc ecuații ***transcendente***.

Exemple: x^2–sin x–1=0; 2^x–lg (x+1)=0.

Rezolvarea ecuației $f(x)=0$ (algebrică sau transcendentă) implică parcurgerea a două etape importante:

- separarea rădăcinilor, care constă în determinarea unui interval $[a, b]$, în care este situată o rădăcină reală a ecuației;
- calculul aproximativ al fiecărei rădăcini şi evaluarea erorii care s-a comis, considerând că separarea deja s-a efectuat.

Să presupunem, de exemplu, că în intervalul $[a, b]$ a fost separată rădăcina reală r pentru ecuația respectivă. Atunci graficul funcției $f(x)$ intersectează axa absciselor în punctul $x=r$. În general, prin ***rădăcină aproximativă*** se înțelege o valoare x_* suficient de apropiată de rădăcina exactă r. Cu alte cuvinte, trebuie să avem:

$$|x_* - r| < \varepsilon$$

unde $\varepsilon>0$ şi suficient de mic.

Se poate defini o rădăcină aproximativă şi altfel: numărul x_* cu proprietatea că $f(x_*)$ este aproape de zero, adică

$$|f(x_*)| < \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 > 0.$$

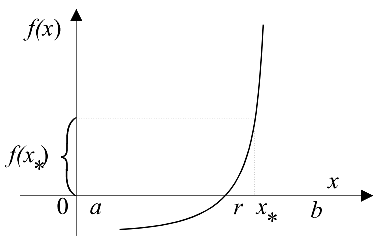


Fig. 2.1

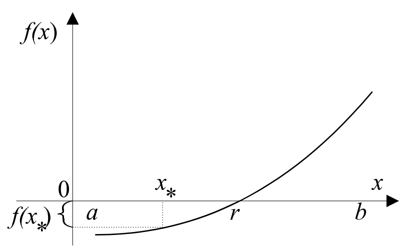


Fig. 2.2

Menționăm că aceste două moduri de definire a rădăcinii aproximative nu coincid, după cum se poate vedea din fig.2.1 și fig.2.2. Ecuația $f(x)=0$ este echivalentă ecuației $C \times f(x) = 0$ oricare ar fi constanta $C \neq 0$. De aceea nu se recomandă de aplicat ultima relație pentru determinarea rădăcinii aproximative, deoarece ea depinde în mare măsură de scara funcției $f(x)$.

În fig.2.1 valoarea lui $|x_* - r|$ este foarte mică, dar $|f(x_*)|$ nu este apropiată de zero. În fig. 2.2 $|f(x_*)|$ este un număr foarte mic, în timp ce $|x_* - r|$ este un număr mare. În general ar fi bine să fie satisfăcute ambele condiții.

2.2. *Separarea rădăcinilor*

Separarea rădăcinilor poate fi efectuată prin diferite metode. În continuare vom prezenta metoda grafică și metoda analitică de separare a rădăcinilor unei ecuații cu o singură necunoscută.

***Metoda grafică*.** Fie dată o ecuație $f(x)=0$. Construim graficul funcției $y=f(x)$. Abscisele punctelor în care graficul funcției intersectează axa Ox sunt rădăcinile ecuației. Aceste rădăcini pot fi citite într-o primă aproximare pe grafic și pentru fiecare rădăcină poate fi indicat un interval în care se află (fig.2.3).

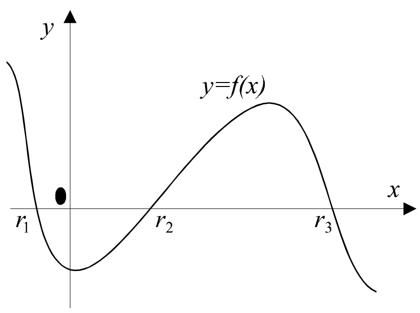


Fig. 2.3

Adeseori ecuația dată poate fi prezentată sub forma: $\varphi(x)=g(x)$. Rădăcinile ultimei ecuații sunt abscisele punctelor de intersecție ale curbelor y=g(x) *și* $y=g(x)$ (fig.2.4).

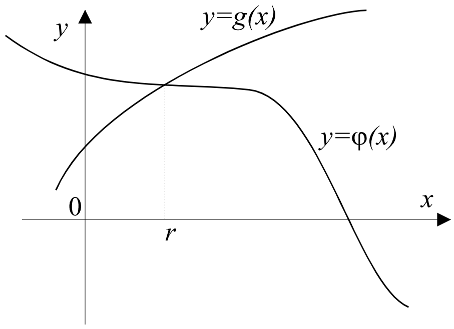


Fig. 2.4

Ecuația $f(x)=0$ este un caz particular al ecuației $\varphi(x)=g(x)$, și anume cazul în care $g(x)$ este funcția constantă zero. Graficul acestei funcții este axa Ox, care are acum rolul curbei $y=g(x)$.

Exemplu: Considerăm ecuația:

$$x^3-3x-1=0$$

Graficul funcției $y=x^3-3x-1$ se vede în fig.2.5. Deci ecuația dată are trei rădăcini reale: r_1, r_2, și r_3:

$$r_1\in(-2,-1),\ r_2\in(-1,0),\ r_3\in(1,2)$$

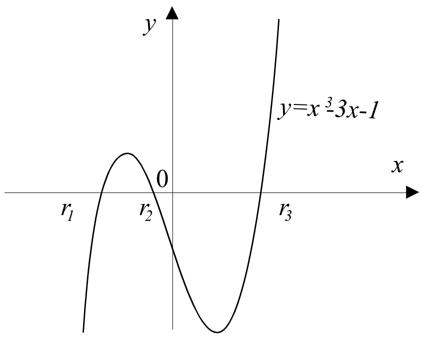


Fig. 2.5

Ecuația $x^3-3x-1=0$ poate fi pusă sub forma: $x^3=3x+1$.

Atunci rădăcinile ei sunt abscisele punctelor de intersecție ale curbei $y=x^3$ cu dreapta $y=3x+1$ (vezi fig.2.6).

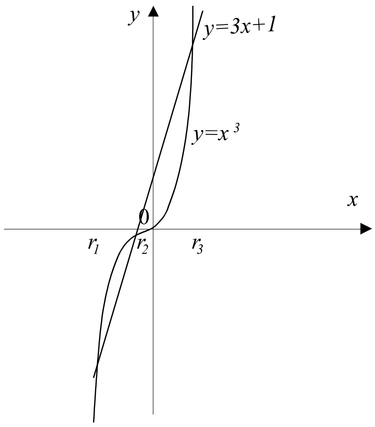


Fig. 2.6

Observație. În fig.2.7 este prezentat graficul funcției:

$$y=x^3-1.5x^2+0.5.$$

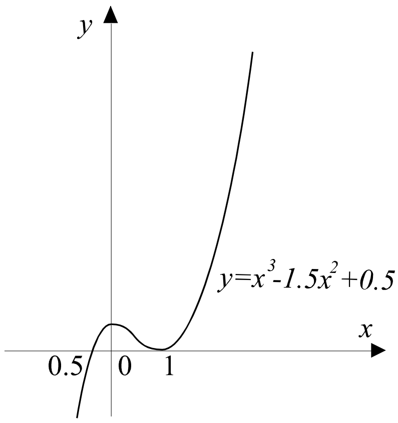


Fig. 2.7

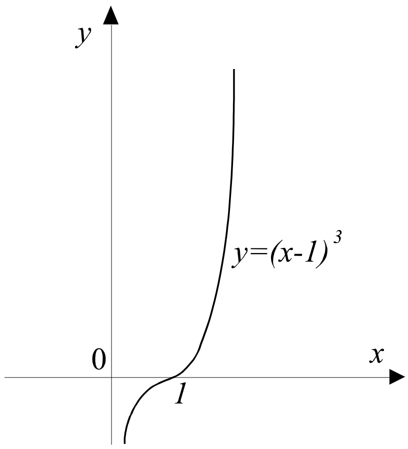


Fig. 2.8

Astfel ecuația $x^3-1.5x^2+0.5=0$ are trei rădăcini: $r_1=-0.5$, $r_2=r_3=1$. În punctul $r=1$ axa Ox este tangentă la graficul funcției date. Se spune că $r=1$ este o rădăcină dublă a ecuației considerate.

În general, dacă în descompunerea funcției în factori apare factorul $(x-r)^k$ şi nu apare o putere mai mare a lui $(x-r)$, se spune că numărul r este o ***rădăcină multiplă de ordinul k***. În exemplul de mai sus avem:

$$x^3-1.5x^2+0.5=(x-0.5)(x-1)^2.$$

Ecuația $x^3-3x^2+3x-1=0$ are o rădăcină triplă $r=1$ (fig.2.8), deoarece

$$x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3.$$

În cursul de analiză matematică se demonstrează că un număr r este o rădăcină multiplă de ordinul k a unei ecuații $f(x)=0$, dacă și numai dacă $f(r)=0$ şi primele sale $k-1$ derivate

$$f'(r)=f''(r)=\ldots=f^{(k-1)}(r)=0 \text{ şi } f^{(k)}(r)\neq 0.$$

O rădăcină care nu este multiplă se numeşte rădăcină *simplă.*

Metoda analitică**.** Se știe că o funcție continuă nu trece de la o valoare la alta fără să treacă prin toate valorile intermediare. Fie f o funcție continuă pe un interval închis $[a, b]$ și fie valorile funcției $f(x)$ la capetele acestui interval $f(a)$ şi $f(b)$ sunt de

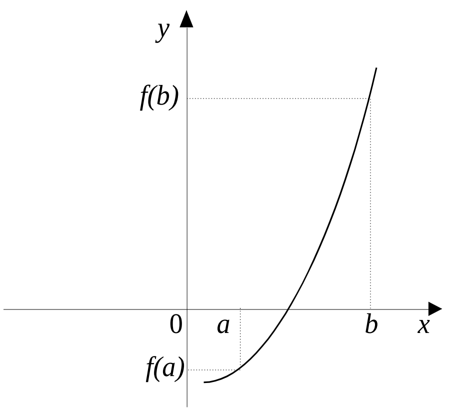


Fig. 2.9

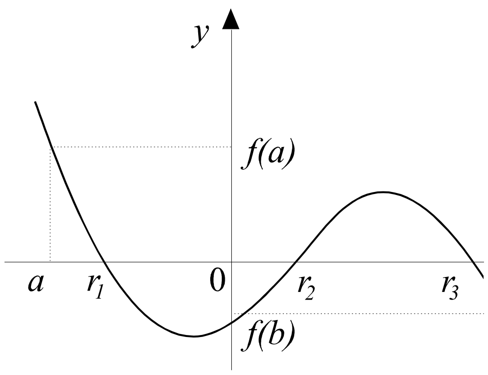


Fig. 2.10

semne contrare (pentru a exprima că valorile $f(a)$ și $f(b)$ sunt de semne contrare, se scrie $f(a)f(b)<0$). Atunci există între a și b cel puțin un punct r, astfel încât avem $f(r)=0$. În fig.2.9 și 2.10 se dă o justificare intuitivă a acestei afirmații.

Condiția $f(a)f(b)<0$ arată că ecuația $f(x)=0$ are un număr impar de rădăcini (cel puțin una) pe intervalul $[a, b]$.

Condiția de continuitate a funcției $f(x)$, după cum se vede din fig.2.11, este esențială în enunțul afirmației de mai sus.

Dacă $f(a)f(b)>0$, adică $f(a)$ şi $f(b)$ au acelaşi semn, aceasta încă nu înseamnă că

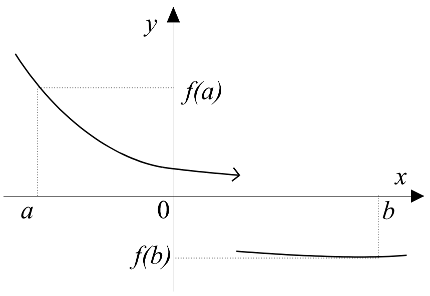


Fig. 2.11

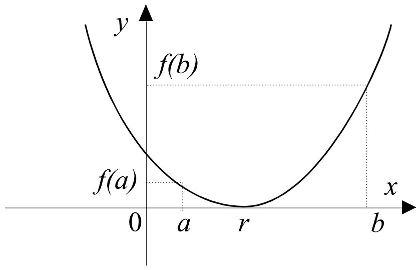


Fig. 2.12

ecuația $f(x)=0$ nu are pe intervalul $[a, b]$ o rădăcină reală (fig.2.12).

În cursul de analiză matematică se demonstrează, că între două rădăcini reale consecutive ale derivatei funcției $f(x)$ există cel mult o rădăcină reală a ecuației $f(x)=0$. Interpretarea geometrică a acestei afirmații este dată în fig.2.13.

De asemenea, între două rădăcini consecutive ale ecuației $f(x)=0$ există cel

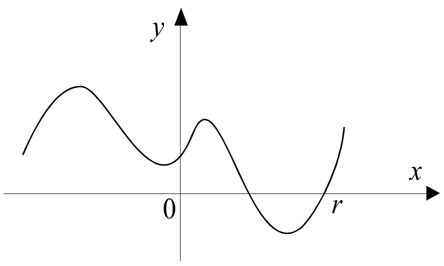


Fig. 2.13

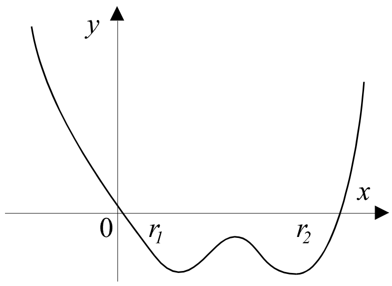


Fig. 2.14

puțin o rădăcină a ecuației $f'(x)=0$ (fig.2.14).

Fie $a<x_1<x_2<\ldots<x_k<b$ rădăcinile ecuației $f'(x)=0$, așezate în ordine crescătoare. Șirul

$$f(a),\ f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_k),\ f(b)$$

se numește ***şirul lui Rolle***.

Ecuația $f(x)=0$ are atâtea rădăcini reale, câte variații de semn prezintă șirul lui Rolle. Într-adevăr, în fiecare interval

$$(a, x_1),\ (x_1, x_2),\ \ldots,(x_{k-1}, x_k),\ (x_k, b),$$

conform celor enunțate mai sus, se află cel mult o rădăcină reală a funcției, numai dacă la capetele intervalului funcția ia valori de semne contrare.

De aici rezultă următorul procedeu de separare a rădăcinilor unei ecuații $f(x)=0$. Se scriu în ordine crescătoare rădăcinile derivatei, $x_1, x_2, \dots, x_k$, precum capetele a și b ale intervalului dat, iar dedesubt valorile corespunzătoare ale funcției.

x	a	x_1	x_2	…	x_k	b
$f(x)$	$f(a)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	…	$f(x_k)$	$f(b)$

Dacă la capetele unuia dintre intervalele (a, x_1), (x_1, x_2), … ,(x_k, b) funcția $f(x)$ ia valori de semne contrare (prezintă o variație), ecuația are în acel interval o singură rădăcină reală; în caz contrar ecuația nu are în acel interval nici o rădăcină reală.

Exemplu. Fie ecuația algebrică:

$$f(x)=x^4-x^3-2x^2+3x-3=0.$$

Derivata $f'(x)=4x^3-3x^2-4x+3=4x(x^2-1)-3(x^2-1)=(x^2-1)(4x-3)$ se anulează pentru $x_1=-1$, $x_2=3/4$, $x_3=1$. Șirul lui Rolle este următorul

x	–2	–1	3/4	1	2
$f(x)$	7	–6	–1.98	–2	3

La extremitățile intervalului (–2, –1) funcția are valori de semne contrare, deci în acest interval ecuația are o singură rădăcină reală; în intervalul (–1, 2) situația este aceeași; la extremitățile intervalului (–1, 3/4) și (3/4, 1) funcția are același semn, deci în acest interval ecuația nu are nici o rădăcină reală.

Prin urmare, avem două variații de semn, deci ecuația propusă are două rădăcini reale, r_1 și r_2, și anume:

$$r_1 \in (-2, -1),\ r_2 \in (1, 2).$$

Celelalte două rădăcini sunt complexe.

2.3. *Metoda înjumătățirii intervalului*

Fie ecuația

$$f(x)=0, \tag{2.2}$$

unde funcția $f(x)$ este continuă pe $[a, b]$, are o singură rădăcină reală în acest interval și $f(a)f(b)<0$.

Metoda constă în construirea recurentă a unui șir de subintervale $[a_k, b_k]$ și a unui șir de puncte $c_k=(a_k+b_k)/2$, astfel ca

$$f(a_k)f(b_k)<0 \tag{2.3}$$

și

$$b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b-a). \tag{2.4}$$

Fie $a_0=a$, $b_0=b$ și $c_0=(a_0+b_0)/2$ jumătatea intervalului $[a_0, b_0]$. Dacă $f(c_0)=0$, atunci c_0 este chiar rădăcina căutată. Dacă nu, atunci rădăcina reală se găsește într-unul din intervalele $[a_0, c_0]$, acolo unde funcția ia valori de semne contrare la capetele intervalului. Fie acesta notat cu $[a_1, b_1]$, unde

$$a_1 = \begin{cases} c_0, \text{dacă} & sign\ f(a_0) = sign\ f(c_0) \\ a_0, \text{dacă} & sign\ f(a_0) \neq sign\ f(c_0) \end{cases}$$

$$b_1 = \begin{cases} c_0, \text{dacă} & sign\ f(b_0) = sign\ f(c_0) \\ b_0, \text{dacă} & sign\ f(b_0) \neq sign\ f(c_0) \end{cases}$$

Evident că $sign\ f(a_1) = sign\ f(a_0)$ și $sign\ f(b_1) = sign\ f(b_0)$ și prin urmare $f(a_1)f(b_1)<0$. Continuând, se obține succesiunea de subintervale

$$[a, b]=[a_0, b_0]\supset[a_1, b_1]\supset[a_2, b_2]\supset \dots \supset[a_k, b_k]\supset\dots\supset \dots$$

la extremitățile cărora funcția ia valori de semne contrare,

$$c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$$

şi

$$a_{k+1} = \begin{cases} c_k, \text{dacă} & sign\ f(a_k) = sign\ f(c_k) \\ a_k, \text{dacă} & sign\ f(a_k) \neq sign\ f(c_k) \end{cases}$$

$$b_{k+1} = \begin{cases} c_k, \text{dacă} & sign\ f(b_k) = sign\ f(c_k) \\ b_k, \text{dacă} & sign\ f(b_k) \neq sign\ f(c_k) \end{cases}$$

Se obțin astfel șirul $\{a_k\}$ nedescrescător, mărginit superior, și șirul $\{b_k\}$ nedescrescător mărginit inferior. Trecând la limită în egalitatea (2.4), obținem:

$$r = \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k \qquad (2.5)$$

Din (2.3) și (2.5) rezultă că

$$\lim_{k\to\infty} f(a_k) f(b_k) = [f(r)]^2 \leq 0,$$

de unde concluzionăm că șirurile $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ și $\{c_k\}$ sunt convergente către rădăcina ecuației (2.2) și avem:

$$|c_k - r| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}.$$

În fig. 2.15. este ilustrat procesul de înjumătățire a intervalului.

Fie $\varepsilon > 0$ marginea superioară a erorii absolute, care se admite. Dacă

$$|b_k - a_k| < 2\varepsilon,$$

atunci c_k aproximează rădăcina r cu eroarea dorită, deoarece $|c_k - r| < \varepsilon$.

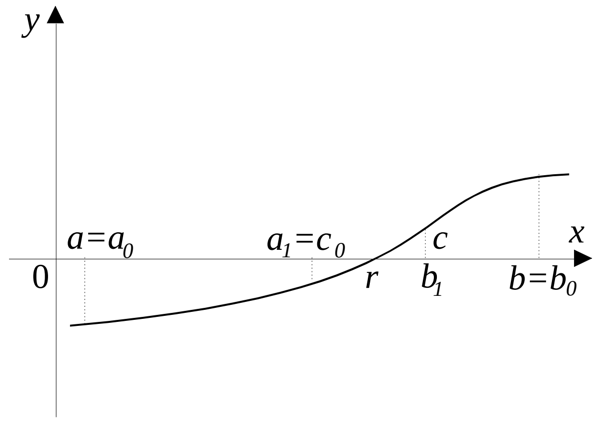


Fig. 2.15. Metoda înjumătățirii intervalului

Dacă vrem ca precizia să fie foarte mare (eroarea mică), atunci numărul k de înjumătățiri crește. În cazul când au fost separate mai multe rădăcini, algoritmul expus anterior poate fi utilizat pentru calculul aproximativ al fiecărei rădăcini în parte.

***Observație*.** În programele de calculator operația de înjumătățire se recomandă de scris astfel: $c=a+(b–a)/2$ (a s vedea 1.6.1). În sistemele de calcul cu rotunjirea prin tăiere formula $c=(a+b)/2$ ne poate scoate în afara intervalului $[a, b]$. De exemplu, fie o aritmetică a virgulei mobile $\beta=10$ şi $t=3$. Atunci pentru $a=0.982$ și $b=0.987$ vom avea :

$$c=(a+b)/2=(0.982+0.987)/2=1.96/2=0.980<a.$$

2.4. *Metoda aproximațiilor succesive*

Fie

$$f(x)=0 \tag{2.6}$$

o ecuație algebrică sau transcendentă care admite o singură rădăcină reală în intervalul $[a, b]$.

Ecuația (2.6) o punem sub forma echivalentă:

$$x=\varphi(x). \tag{2.7}$$

Rescrierea ecuaţiei (2.6) sub forma (2.7) se poate face utilizând diferite artificii de calcul.

***Exemplu* .** Ecuația $x^3–2x–9=0$ poate fi scrisă:

$$x = x^3–x–9, \qquad x=\sqrt[3]{2x+9},$$

$$x=\frac{2x+9}{x^2}, \qquad x=\frac{9}{x^2-2}.$$

Plecând de la o valoare inițială arbitrară $x_0\in[a, b]$, generăm șirul x_k conform regulii:

$$x_{k+1}= \varphi(x_k), \qquad k=0, 1, 2, \ldots, \tag{2.8}$$

adică $x_1= \varphi(x_0)$, $x_2= \varphi(x_1)$, … , $x_k= \varphi(x_{k-1})$, ….

Șirul definit mai sus prin relația (2.8) se numește ***șir de iterare***.

Să presupunem că există $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = r$. În acest caz se spune că şirul de iterare este ***convergent*** şi ***converge către r***.

Dacă $\varphi(x)$ este o funcție continuă, atunci avem:

$$r = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \varphi(r),$$

deci limita r este chiar rădăcina ecuației (2.7).

Din punct de vedere geometric, rădăcina reală r este abscisa punctului de intersecție a curbei $y= \varphi(x)$ cu dreapta $y=x$. Modul cum șirul aproximațiilor succesive $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$ conduce spre soluția exactă este ilustrat în fig.2.16 și 2.17 (în funcție de forma curbei $y=\varphi(x)$).

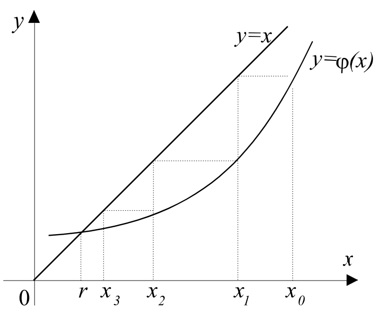


Fig. 2.16

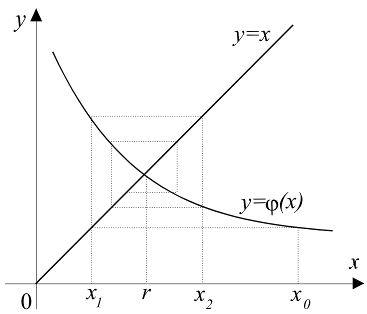


Fig. 2.17

Dacă graficul funcției $\varphi(x)$ are forma din fig.2.18 sau din fig.2.19, atunci șirul de iterare $\{x_k\}$ nu converge către rădăcina căutată, deci șirul este divergent și se spune că ***metoda diverge***.

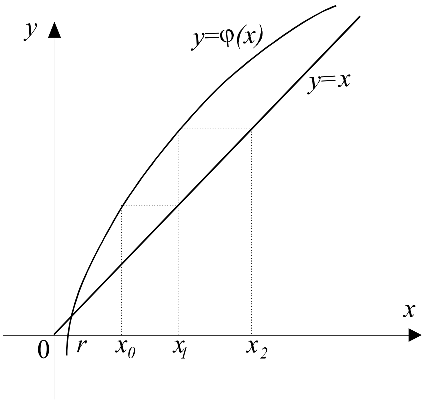
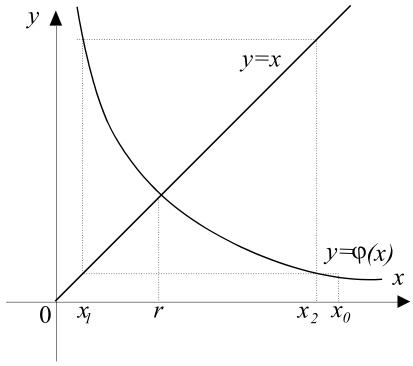


Fig. 2.18



Fif. 2.19

Deci șirul de iterare poate fi divergent chiar dacă x_0 se alege oricât de apropiat de rădăcină. O condiție suficientă de convergență este dată de următoarea teoremă.

Teoremă. Fie funcția $\varphi(x)$ definită pe intervalul $[a, b]$ și $\varphi(x)\in[a, b]$ pentru $\forall x\in[a, b]$. Dacă funcția $\varphi(x)$ este derivabilă și derivata sa $\varphi'(x)$ satisface inegalitatea $|\varphi'(x)| \leq \alpha<1$, oricare ar fi $x\in[a, b]$, atunci ecuația (2) are în $[a, b]$ o singură rădăcină reală r, putem forma șirul de iterare $x_0, x_1, \ldots x_k, \ldots$ după regula (2.8), astfel încât $x_k\in[a, b]$ pentru $k=0, 1, 2, \ldots$ și acest șir converge către rădăcina r. În plus eroarea este evaluată prin

$$|x_k - r| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}|x_k - x_{k-1}| \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha}|x_1 - x_0|, \quad k\geq 1.$$

Demonstrație. Datorită faptului că $\varphi(x)\in[a, b]$, $\forall x\in[a, b]$, rezultă că $\varphi(a)\geq a$ și $\varphi(b)\leq b$. Punem $g(x)= \varphi(x)-x$. Atunci $g(a)\geq 0$, $g(b)\leq 0$ și deoarece $g(x)$ este continuă, rezultă că există cel puțin un punct $r\in[a, b]$, astfel încât $g(r)=0$, adică r este rădăcina ecuației inițiale (2.7) în intervalul $[a, b]$. Să considerăm acum diferența:

$$x_{k+1}-r=\varphi(x_k)- \varphi(r).$$

Aplicând teorema lui Lagrange, se obține:

$$x_{k+1} - r = \phi'(\xi_k)(x_k - r), \quad \xi_k \in(x_k, r).$$

Deoarece

$$|\varphi'(x)| \le \alpha, \quad \forall x \in [a, b],$$

avem:

$$|x_{k+1} - r| \le \alpha |x_k - r|.$$

Atunci, pentru orice $k \ge 0$, avem:

$$|x_1 - r| \le \alpha |x_0 - r|,$$

$$|x_2 - r| \le \alpha^2 |x_0 - r|,$$

....

$$|x_{k+1} - r| \le \alpha^{k+1} |x_0 - r|.$$

Din ultima relație rezultă (fiindcă $0 \le \alpha < 1$):

$$\lim_{k\to\infty} x_k = r,$$

Dar $\lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \varphi(\lim_{k\to\infty} x_k)$, întrucât funcția $\varphi(x)$ este continuă. Prin urmare,

$$r = \varphi(r).$$

Să arătăm că rădăcina astfel obținută este unică. Într-adevăr, fie s o altă rădăcină a ecuației (2.7) în intervalul $[a, b]$. Atunci $s = \varphi(s)$. Evaluăm diferența:

$$r - s = \varphi(r) - \varphi(s) = \varphi'(\xi)(r - s), \quad \xi \in (r, s) \subset [a, b].$$

Deci

$$(r - s)[1 - \varphi'(\xi)] = 0,$$

de unde rezultă că $r = s$.

Pentru a analiza cum se propagă eroarea în calcule vom scrie:

$$x_{k-1} - r = x_{k-1} - x_k + \varphi(x_{k-1}) - \varphi(r) = x_{k-1} - x_k + \varphi'(\xi)(x_{k-1} - r), \quad \xi \in (x_{k-1}, r).$$

Datorită inegalității din enunțul teoremei, se obține:

$$|x_{k-1} - r| \le |x_{k-1} - x_k| + \alpha |x_{k-1} - r|,$$

sau

$$|x_{k-1}-r| \le \frac{1}{1-\alpha}|x_k - x_{k-1}|.$$

Prin urmare:

$$|x_k - r| = |\varphi(x_{k-1}) - \varphi(r)| \le \alpha |x_{k-1} - r| \le \frac{\alpha}{1-\alpha}|x_k - x_{k-1}|.$$

Teorema este demonstrată.

Deci, pentru rezolvarea ecuației (2.6) prin metoda aproximațiilor succesive va trebui să o aducem, în prealabil, la forma (2.7), alegându-l pe $\varphi(x)$ în mod special, ca să se satisfacă condiția de convergență.

Exemplu. Fie dată ecuația:

$$x^3 - 2x - 9 = 0.$$

Prin metoda grafică sau prin metoda analitică se stabilește că ecuația admite o singură rădăcină reală în intervalul (2, 3). Rescriem ecuația sub forma echivalentă:

$$x = \sqrt[3]{2x+9}$$

Pentru a verifica condiția de convergență, calculăm derivata:

$$\varphi'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(2x+9)^2}}.$$

Condiția de convergență $|\varphi'(x)| < 1$ este îndeplinită pentru intervalul (2, 3) și deci șirul de iterare este dat de

$$x_{k+1} = \sqrt[3]{2x_k + 9}, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

cu valoarea inițială (de start) $x_0 \in (2, 3)$.

De remarcat că dacă am fi rearanjat ecuație inițială

$$x^3 - 2x - 9 = 0$$

în felul următor: $x = x^3 - x - 9$ și deci am fi folosit șirul de iterare:

$$x_{k+1} = x_k^3 - x_k - 9,$$

atunci metoda aproximațiilor succesive diverge, condiția suficientă de convergență nefiind îndeplinită:

$$|\phi'(x)| = |3x^2 - 1| > 1|, \forall x \in (2, 3).$$

Din teorema demonstrată mai sus rezultă că pentru determinarea rădăcinii aproximative x_* cu eroarea $\varepsilon>0$ procesul de calcul îl vom opri când

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\,|x_{k+1}-x_k|<\varepsilon.$$

Acest criteriu pentru terminarea calculelor necesită aprecierea parametrului subunitar α, care nu se cunoaște, în mod general, apriori. În 2.5 ne vom ocupa de examinarea altor criterii de stopare în metodele iterative de rezolvare a ecuațiilor algebrice și transcendente.

În încheiere remarcăm că metoda aproximațiilor succesive se utilizează cu succes şi pentru studiul aplicațiilor numite contracții în așa-numitele spații metrice.

2.5. Criterii de oprire în metodele iterative

În metodele iterative oprirea procesului de calcul se face prin trunchierea șirului de iterare $\{x_k\}$ la un indice m, astfel încât termenul x_m să constituie aproximația satisfăcătoare a rădăcinii exacte. Definirea apropierii rădăcinii aproximative x_* de rădăcina exactă r este o chestiune delicată şi e departe a fi perfectă.

Presupunem că rădăcina simplă r a ecuației $f(x)=0$ este izolată într-un interval $[a, b]$. Vom deduce o estimare a erorii, care să fie independentă de metoda de rezolvare a ecuației considerate. Fie funcția $f(x)$ continuă și derivabilă pe intervalul $[a, b]$ și fie

$$m=\min|f'(x)|>0, \quad x\in(a, b).$$

Aplicând teorema lui Lagrange, se obține:

$$f(x_k)-f(r)=(x_k-r)\,f'(\xi), \quad \xi\in(x_k, r)\subset[a, b],$$

de unde rezultă

$$|x_k-r|\le\frac{|f(x_k)|}{m}.$$

Această relație evidențiază, în primul rând, că dacă $|f'(r)|$ este mic, atunci $|f(x_k)|/m$ este mare și perturbații slabe în x_k pot produce perturbații mari în rădăcină; în acest caz se spune că problema determinării lui r este rău condiționată. Pentru ilustrare a se vedea fig.2.2 din paragraful 2.1. În al doilea rând, dacă dorim să determinăm rădăcina *r* cu eroarea prescrisă $\varepsilon>0$ am putea opri iterațiile de îndată ce

$$|f(x_k)|<\varepsilon m,$$

ceea ce presupune cunoașterea majorantei *m* a derivatei $f'(x)$.

Deoarece derivatele, în caz general, sunt greu de estimat, înclinăm să facem câteva iterații în plus, decât să folosim formulele de mai sus sau alte formule complicate de evaluare a erorii.

În practică, rezolvând problema la calculatorul electronic, putem folosi următorul criteriu de stopare. Fie

$$|f(x_{k+1})|<\varepsilon_1, \tag{2.9}$$

unde $\varepsilon_1>0$ și este suficient de mic; de exemplu, $\varepsilon_1=\sqrt{\varepsilon_M}$, unde ε_M este unitatea de rotunjire a calculatorului. Atunci putem termina iterațiile și accepta x_{k+1} ca rădăcină aproximativă, dacă

$$|x_{k+1}-x_k|<\varepsilon_2. \tag{2.10}$$

Aici $\varepsilon_2>0$ şi se alege astfel încât $\varepsilon_2\geq\varepsilon_1$. În cazul când se verifică inegalitățile (2.9) și (2.10) cantitatea $|x_{k+1}-x_k|$ este, de regulă, o bună estimare a lui $|x_k-r|$. Menționăm că în practică cel mai des este utilizat în calitate de criteriu de oprire a algoritmului cel care verifică doar inegalitatea (2.10) cu $\varepsilon_2>0$ şi suficient de mic.