Analiza algoritmilor recursivi

- Cel mai important câştig al exprimării recursive este faptul că ea este naturală şi compactă, fără să ascundă esenţa algoritmului prin detaliile de implementare.
- Pe de altă parte, apelurile recursive trebuie folosite cu discernământ, deoarece solicită şi ele resursele calculatorului (timp şi memorie).
- Analiza unui algoritm recursiv implică rezolvarea unui sistem de recurențe.

Relații recurente

- Când un algoritm conţine o apelare recursivă la el însuşi, timpul său de execuţie poate fi descris adesea printr-o recurenţă.
- O *recurenţă* este o ecuaţie sau o inegalitate care descrie întregul timp de execuţie al unei probleme de dimensiune *n* cu ajutorul timpilor de execuţie pentru date de intrare de dimensiuni mici.
- Există instrumente matematice pentru a rezolva problema de recurenţă şi pentru a obţine margini ale performanţei algoritmului.

Metoda ecuaţiilor caracteristice

Există câteva tipuri de recurențe:

- Recurențe liniare omogene
- Recurențe liniare neomogene
- Recurențe neliniare

Recurenţe liniare omogene

Vom considera recurenţe liniare omogene, de forma

$$\boldsymbol{a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{n-k} = 0 \ (1)}$$

unde t_i sunt valorile pe care le căutăm, iar coeficienţii a_i sunt constante.

Vom căuta soluţii de forma

$$\boldsymbol{t_n = x^n}$$

unde x este o constanta (deocamdată necunoscută)

Recurenţe liniare omogene

Încercăm aceasta soluţie în (1) şi obţinem

$$\boldsymbol{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_k x^{n-k} = 0}$$

Soluţiile acestei ecuaţii sunt fie soluţia triviala $x = 0$, care nu ne interesează, fie soluţiile ecuaţiei

$$\boldsymbol{a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k = 0 \ (2)}$$

care este ***ecuaţia caracteristica*** a recurenţei (1).

Recurenţe liniare omogene

Presupunând deocamdată ca cele k rădăcini r_1, r_2, ..., r_k ale acestei ecuaţii caracteristice sunt distincte, orice combinaţie liniară

$$t_n = \sum_{i=1}^{k} c_i r_i^n$$

este o ***soluţie*** a recurenţei (1), unde constantele c_1, c_2, ..., c_k sunt determinate de condiţiile iniţiale.

Este remarcabil că (1) are numai soluţii de aceasta formă.

Exemplu

Recurenţa care defineşte şirul lui Fibonacci:

$$t_n = t_{n-1} + t_{n-2} \qquad n \geq 2$$

iar $t_0 = 0, t_1 = 1$

Putem să rescriem această recurenţa sub forma

$$t_n - t_{n-1} - t_{n-2} = 0$$

care are ***ecuaţia caracteristica***

$$x^2 - x - 1 = 0$$

cu rădăcinile $r_{1,2} =$

Exemplu

Recurenţa care defineşte şirul lui Fibonacci:

$$t_n = t_{n-1} + t_{n-2} \qquad n \geq 2$$

iar $t_0 = 0,\ t_1 = 1$

Putem să rescriem această recurenţa sub forma

$$t_n - t_{n-1} - t_{n-2} = 0$$

care are ***ecuaţia caracteristica***

$$x^2 - x - 1 = 0$$

cu rădăcinile $r_{1,2}$ = (1+sqrt5)/2, (1- sqrt5)/2

Exemplu

Soluţia generala are forma

$$t_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$$

Impunând condiţiile iniţiale, obţinem

$c_1 + c_2 = 0, \qquad n = 0$

$r_1 c_1 + r_2 c_2 = 1, \qquad n = 1$

de unde determinăm

Exemplu

Soluţia generala are forma

$$t_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$$

Impunând condiţiile iniţiale, obţinem

$c_1 + c_2 = 0,$ $\quad n = 0$

$r_1 c_1 + r_2 c_2 = 1,$ $\quad n = 1$

de unde determinăm c_1=1/sqrt5, c_2 =-1/sqrt5

Exemplu

Rezolvați recurența

$$\boldsymbol{t_n - 3t_{n\text{-}1} - 4t_{n\text{-}2} = 0,}$$

unde $n \geq 2$, iar $t_0 = 0$, $t_1 = 1$

r1= 4, r2=-1

Recurențe liniare omogene cu rădăcini multiple

- Ce facem însă atunci când rădăcinile ecuației caracteristice nu sunt distincte?
- Se poate arăta ca, daca r este o rădăcină de multiplicitate m a ecuației caracteristice, atunci

$$t_n = r^n,\ t_n = nr^n,\ t_n = n^2r^n,\ \ldots,\ t_n = n^{m-1}r^n$$

sunt soluții pentru recurența (1).

- Soluția generală pentru o astfel de recurențî este atunci o combinație liniară a acestor termeni și a termenilor proveniți de la celelalte rădăcini ale ecuației caracteristice.
- Din nou, sunt de determinat exact k constante din condițiile inițiale.

Exemplu

Rezolvați recurența

$$t_n = 5t_{n\text{-}1} - 8t_{n\text{-}2} + 4t_{n\text{-}3} \ ,$$

unde $n \geq 3$, iar $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$

Exemplu

Rezolvați recurența

$$t_n = 5t_{n-1} - 8t_{n-2} + 4t_{n-3} \text{ ,}$$

unde $n \geq 3$, iar $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$

$$t_n = c_1 1^n + c_2 2^n + c_3 n 2^n$$

$c_1 = -2$, $c_2 = 2$, $c_3 = -1/2$

$t_n = -2\,(1^n) + 2\,(2^n) + (-1/2)(n2^n)$

Recurențe liniare neomogene

Considerăm acum recurenţe de următoarea formă mai generală

$$\boldsymbol{a_0 t_n + a_1 t_{n\text{-}1} + \ldots + a_k t_{n\text{-}k} = b^n p(n)} \qquad (3)$$

unde b este o constantă, iar $p(n)$ este un polinom în n de grad d.

Recurențe liniare neomogene

Se poate arăta că, pentru a rezolva (3), este suficient să luăm următoarea ecuaţie caracteristică:

$$(a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k)(x-b)^{d+1} = 0 \quad (4)$$

Odată ce s-a obţinut această ecuaţie, se procedează ca in cazul recurențelor omogene.

Recurențe liniare neomogene

De exemplu, o astfel de recurenţa poate fi:

$$t_n - 2t_{n-1} = 3^n$$

In acest caz, $b = 3$ si $p(n) = 1$, un polinom de grad 0.

Ecuaţia caracteristică este:

$(x-2)(x-3) = 0$ cu rădăcinile $r_1 = 2$, $r_2 = 3$

Soluția generală va fi

$$t_n = c_1 2^n + c_2 3^n$$

Recurențe liniare neomogene

Rezolvați recurențele:

1. $t_n - 2t_{n-1} = 2^n$
2. $t_n - 2t_{n-1} = n3^n$
3. $t_n - t_{n-1} = n$

Schimbarea variailei

Vom analiza în continuare recurenţe de forma

$$\boldsymbol{T(n)= aT(n/b)+ f(n)} \qquad \textbf{(5)}$$

unde $a\geq 1$ şi $b>1$sunt constante, iar $f(n)$ este o funcţie asimptotic pozitivă.

Schimbarea variailei

Recurenţa (5) descrie timpul de execuţie al unui algoritm care împarte o problemă de dimensiune n în a subprobleme, fiecare de dimensiune n/b, unde a şi b sunt constante pozitive.

Cele a subprobleme sunt rezolvate recursiv, fiecare în timp $T(n/b)$.

Costul divizării problemei şi al combinării rezultatelor subproblemelor este descris de funcţia $f(n)$ (Adică, utilizând notaţia $f(n)=D(n) + C(n)$).

Din punctul de vedere al corectitudinii tehnice, recurenţa nu este, de fapt, bine definită, deoarece n/b ar putea să nu fie întreg.

Schimbarea variabilei

Uneori, printr-o schimbare de variabilă, putem rezolva recurenţe de tipul (5).

În continuare, vom nota cu $\boldsymbol{T(n)}$ termenul general al recurenţei şi cu $\boldsymbol{t_k}$ termenul noii recurenţe obţinute printr-o schimbare de variabilă.

Presupunem pentru început ca $\boldsymbol{n}$ este o putere a lui $\boldsymbol{b}$.

Exemplu

Fie recurenţa $T(n) = 4T(n/2) + n$, $n > 1$ în care înlocuim pe n cu 2^k, notăm $t_k = T(2^k) = T(n)$ şi obţinem

$$t_k = 4t_{k-1} + 2^k$$

$$t_k - 4t_{k-1} = 2^k$$

Ecuaţia caracteristică a acestei recurenţe liniare este

$$(x-4)(x-2) = 0 \text{ cu } r_1 = 4 \text{ şi } r_2 = 2 \text{ deci,}$$

$$t_k = c_1 4^k + c_2 2^k.$$

Înlocuim la loc pe k cu $\log_2 n$ şi obţinem

$$T(n) = c_1 4^{\log n} + c_2 2^{\log n}$$

$$T(n) = c_1 n^2 + c_2 n$$

Exemplu

Rezolvați recurențele

1. $T(n) = 2T(n/2) + n, \ \ n > 1$
2. $T(n) = 8T(n/2) + n, \ \ n > 1$
3. $T(n) = 9T(n/3) + n^2, \ \ n > 1$
4. $T(n) = 2T(n/2) + n\log n$

Lucru individual

- Eficienţa ***asimptotică*** a algoritmilor
- ***Timp asimptotic de execuţie a unui algoritm***
- Notații asimptotice Θ, O , o , Ω, ω