

# Capitolul 7

## DERIVATE. DIFERENȚIALE

Noțiunea de *derivată*, elementul fundamental al calculului diferențial, are o deosebită importanță în studiul matematic al mărimilor variabile. Problemele principale care au condus la introducerea noțiunii de derivată sunt problema tangentei, respectiv determinarea tangentei la o curbă într-un punct dat, fiind cunoscută ecuația curbei, și problema vitezei, respectiv determinarea vitezei unui punct mobil, fiind cunoscută legea de mișcare a acestuia. În cele ce urmează, vom formula aceste probleme în termeni matematici, cu ajutorul noțiunii de limită.

### Problema tangentei

Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă pe intervalul  $I$ , fie  $G_f$  graficul funcției  $f$  și fie  $A(a, f(a))$  un punct pe  $G_f$ . Dorim să determinăm ecuația tangentei în  $A$  la  $G_f$ .

Se poate observa că această tangentă poate intersecta  $G_f$  și într-un alt punct decât  $A$ , iar dreptele care intersectează  $G_f$  doar în  $A$  nu sunt neapărat tangente la  $G_f$ . Nu putem deci defini această tangentă ca dreapta care are în comun cu  $G_f$  doar pe  $A$ , așa cum s-a întâmplat pentru tangenta într-un punct la un cerc.

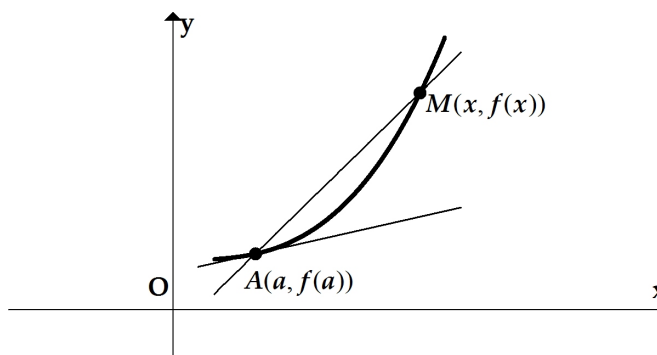


Figura 7.1: Tangenta în  $A$  la graficul funcției, respectiv secanta  $AM$

Fie  $M(x, f(x))$  un alt punct pe  $G_f$ . Dreapta  $AM$  care intersectează  $G_f$  cel puțin în  $A$  și  $M$ , se va numi dreaptă *secantă*; intuitiv, vom defini tangenta în  $A$  la  $G_f$  ca poziția limită a secantei  $AM$  atunci când  $M$  tinde la  $A$ .

Cum panta dreptei  $AM$  este  $m_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  (presupunem că  $AM$  nu este verticală, deci  $x \neq a$ ), urmează că panta tangentei în  $A$  la  $G_f$  este  $m_{tg} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ . În aceste condiții, ecuația tangentei în  $A$  la  $G_f$  este

$$y - f(a) = m_{tg}(x - a), \quad \text{sau} \quad y = f(a) + m_{tg}(x - a),$$

rămânând a fi interpretate ulterior situațiile în care  $m_{tg}$  (definită ca o limită) nu există, sau există, dar este infinită.

### Problema vitezei



Figura 7.2: Pozițiile punctului  $M$  la momentele  $t_0$ , respectiv  $t$

Considerăm un punct mobil  $M$  în mișcare rectilinie de-a lungul axei  $Ox$ , a cărui lege de mișcare este  $x = x(t)$ , unde  $t$  este timpul scurs de la momentul inițial, iar  $x$  este abscisa punctului  $M$ .

Fie  $[t_0, t]$  un interval de timp,  $t > t_0$ . În acest interval,  $M$  parcurge distanța  $x(t) - x(t_0)$ , deci viteza sa medie (viteza pe care ar trebui s-o aibă  $M$  pentru a parcurge distanța  $x(t) - x(t_0)$  în timpul  $t - t_0$ , dacă s-ar mișca uniform) este  $v_{[t_0, t]} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$ . Totuși, cu cât intervalul de timp  $[t_0, t]$  este mai mare, cu atât această viteză oferă mai puține informații despre viteza lui  $M$  la momentul  $t_0$ . Intuitiv, intervalul  $[t_0, t]$  trebuie să fie cât mai mic, iar viteza instantanee a lui  $M$  la momentul  $t_0$  este atunci  $v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$ .

## 7.1 Funcții derivabile. Funcții diferențiabile

### Derivata unei funcții într-un punct

Fie o funcție  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și fie  $x_0 \in D \cap D'$ . Vom spune că  $f$  are derivată în  $x_0$  dacă există limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , numită *derivata funcției  $f$  în punctul  $x_0$*  și

notată  $f'(x_0)$ , în vreme ce dacă această limită există și este finită vom spune că funcția  $f$  este *derivabilă în  $x_0$* .

Raportul  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$  se numește *raport incremental* și măsoară viteza de variație a funcției pe intervalul  $[x_0, x]$ ; prin analogie cu problema vitezei indicată mai sus, putem spune că  $f'(x_0)$  reprezintă *viteza de variație instantanee a funcției  $f$  în punctul  $x_0$* .

De asemenea, cu notația  $x = x_0 + h$ , obținem că

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

**Exemple.** 1. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ . Să studiem derivabilitatea funcției  $f$  în  $x_0 = 2$ . Observăm că

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4, \end{aligned}$$

deci  $f$  este derivabilă în  $x_0 = 2$ , iar  $f'(2) = 4$ .

2. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ . Să studiem derivabilitatea funcției  $f$  în  $x_0 = 0$ . Observăm că

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

deci  $f$  nu este derivabilă în  $x_0 = 0$ , dar are derivată în acest punct, iar  $f'(0) = +\infty$ .

Cu ajutorul noțiunii de derivată într-un punct, putem studia rezolvarea problemelor menționate anterior.

### Ecuția tangentei într-un punct la graficul unei funcții

Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  și fie  $a \in D \cap D'$ . Conform considerațiilor de mai sus, obținem următoarele

1. Dacă  $f$  este derivabilă în  $a$ , atunci ecuația tangentei în  $A(a, f(a))$  la  $G_f$  este

$$y - f(a) = f'(a)(x - a), \quad \text{sau} \quad y = f(a) + f'(a)(x - a),$$

observându-se că panta tangentei în  $A(a, f(a))$  este valoarea derivatei  $f'(a)$ .

2. Dacă  $f'(a) = +\infty$ , sau  $f'(a) = -\infty$ , atunci tangenta în  $A(a, f(a))$  la  $G_f$  este verticală, având ecuația  $x = a$ .

### Viteza unui punct material în mișcare

Fie un punct mobil  $M$  în mișcare rectilinie de-a lungul axei  $Ox$ , a cărei abscisă  $x$  este dată prin  $x = x(t)$ , unde  $t$  este timpul scurs de la momentul inițial. Atunci viteza instantanee a lui  $M$  la momentul  $t$  este  $v(t) = x'(t)$ .

### Derivate laterale

Substituind în definiția derivatei noțiunea de limită cu noțiunea de limită laterală, obținem noțiunea de *derivată laterală*.

Astfel, dacă  $x_0 \in D$  este punct de acumulare la stânga pentru  $D$ , vom spune că  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  are derivată la stânga în  $x_0$  dacă există limita  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , numită

*derivata la stânga a funcției  $f$  în punctul  $x_0$*  și notată  $f'_s(x_0)$ , în vreme ce dacă această limită există și este finită vom spune că funcția  $f$  este *derivabilă la stânga în  $x_0$* . Analog definim noțiunile de *derivată la dreapta*, respectiv *derivabilitate la dreapta*.

Cu notația  $x = x_0 + h$ , obținem că

$$f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h};$$

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Dacă  $x_0 \in D$  este punct de acumulare atât la dreapta cât și la stânga pentru  $D$ , atunci  $f$  are derivată în  $x_0$  dacă și numai dacă există ambele derivate laterale  $f'_s(x_0)$  și  $f'_d(x_0)$ , iar  $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$ . În aceste condiții,

$$f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0).$$

**Exemplu.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$ . Să studiem derivabilitatea funcției  $f$  în  $x_0 = 0$ . Observăm că

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-x}{x} = -1,$$

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{x} = 1.$$

Cum  $f'_s(0) \neq f'_d(0)$ ,  $f$  nu are derivată în  $x_0 = 0$ , neputând fi deci derivabilă în acest punct.

### Semitangente

Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  și  $a \in D$  punct de acumulare la stânga al lui  $D$ . Dacă există  $f'_s(a)$ , spunem că  $G_f$  admite *semitangente la stânga* în  $A(a, f(a))$ , înțelegând că există o dreaptă tangentă în  $A$  la partea din grafic aflată în stânga lui  $A$ . Ca mai sus, ecuația acestei semitangente este  $y - f(a) = f'_s(a)(x - a)$ , dacă  $f'_s(a)$  este finită, respectiv  $x = a$  dacă  $f'_s(a) = +\infty$  sau  $f'_s(a) = -\infty$ . În mod analog se definește noțiunea de semitangente la dreapta.

### Puncte unghiulare, puncte de întoarcere

Fie acum  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval deschis, și fie  $a \in I$  un punct în care  $f$  este continuă.

Dacă  $f'_s(a)$ ,  $f'_d(a)$  există și sunt infinite, dar diferite, semitangentele în  $A$  la  $G_f$  sunt în prelungire, spunându-se că  $A(a, f(a))$  este un *punct de întoarcere*.

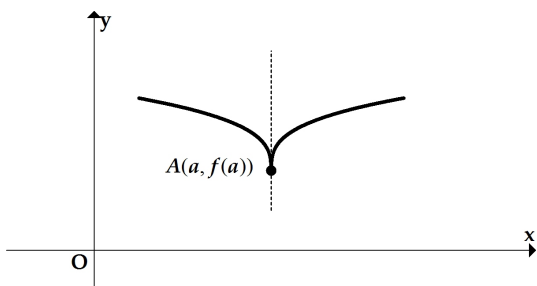


Figura 7.3:  $A(a, f(a))$  punct de întoarcere,  $f'_s(x_0) = -\infty$ ,  $f'_d(x_0) = +\infty$

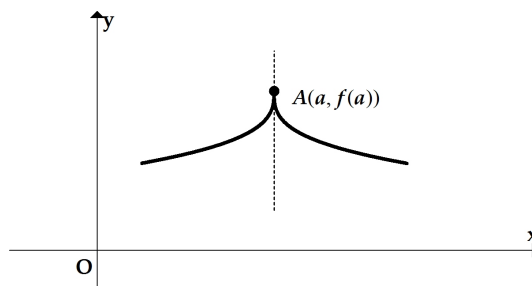


Figura 7.4:  $A(a, f(a))$  punct de întoarcere,  $f'_s(x_0) = +\infty$ ,  $f'_d(x_0) = -\infty$

Dacă  $f'_s(a)$ ,  $f'_d(a)$  există, sunt diferite, și măcar una dintre ele este finită, semitangentele în  $A$  la  $G_f$  nu sunt în prelungire, formând un unghi  $\alpha \in (0, \pi)$ . Se spune atunci că  $A(a, f(a))$  este un *punct unghiular*.

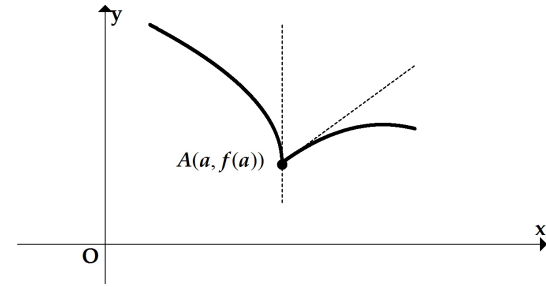
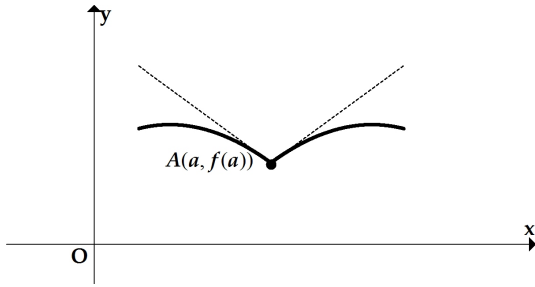


Figura 7.5:  $A(a, f(a))$  punct unghiular,  $f'_s(x_0), f'_d(x_0)$  finite și diferite      Figura 7.6:  $A(a, f(a))$  punct unghiular,  $f'_s(x_0) = -\infty, f'_d(x_0)$  finită

Din cele de mai sus, se observă că dacă  $A(a, f(a))$  este un punct de întoarcere sau un punct unghiular, atunci  $f$  nu este derivabilă în  $a$ .

### Funcții derivabile pe o mulțime

Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă  $f$  este derivabilă în fiecare punct al unei mulțimi  $A \subseteq D$ , spunem că  $f$  este derivabilă pe  $A$ . Dacă  $f$  este derivabilă în orice punct al domeniului său de definiție, atunci se spune simplu că  $f$  este derivabilă.

### Legătura între derivabilitate și continuitate

În cele ce urmează, vom demonstra că o funcție derivabilă într-un punct este neapărat continuă în acel punct.

**Teorema 7.1.** Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  și fie  $a \in D \cap D'$  astfel încât  $f$  este derivabilă în  $a$ . Atunci  $f$  este continuă în  $a$ .

**Demonstrație.** Deoarece

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a), \quad \text{pentru } x \neq a,$$

urmează că

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \left( f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) \right) \\ &= f(a) + \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \\ &= f(a) + f'(a) \cdot 0 \\ &= f(a), \end{aligned}$$

deci  $f$  este continuă în  $a$ . ■

În mod similar, se poate arăta că derivabilitatea la stânga (dreapta) a funcției  $f$  în  $a$  antrenează continuitatea la stânga (dreapta) a funcției în  $a$ .

### 7.1.1 Operații cu funcții derivabile

Se poate observa că operațiile uzuale cu funcții derivabile au ca rezultat funcții derivabile, în măsura în care ele sunt bine definite, fapt observat în teorema de mai jos.

**Teorema 7.2.** Fie  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in D \cap D'$ ,  $f, g$  derivabile în  $x_0$ . Atunci

1.  $f + g, f - g$  sunt derivabile în  $x_0$ , iar

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(derivata sumei este egală cu suma derivatelor), respectiv

$$(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$$

(derivata diferenței este egală cu diferența derivatelor).

2.  $\alpha f$  este derivabilă în  $x_0$  pentru orice  $\alpha \in \mathbb{R}$ , iar

$$(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$$

(constanta cu care se înmulțește trece înaintea derivatei).

3.  $fg$  este derivabilă în  $x_0$ , iar

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

4.  $\frac{f}{g}$  este derivabilă în  $x_0$  dacă  $g(x_0) \neq 0$ , iar

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

**Demonstrație.** Vom demonstra doar 4), celelalte formule obținându-se asemănă-

tor. Se observă că

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} \\
 &= \frac{1}{g(x_0)^2} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \\
 &= \frac{1}{g(x_0)^2} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))g(x_0)}{x - x_0} - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \right) \\
 &= \frac{1}{g(x_0)^2} (f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)),
 \end{aligned}$$

ceea ce trebuia demonstrat. ■

Se poate de asemenea demonstra prin inducție matematică faptul că proprietățile 1 și 3 din Teorema 7.3 rămân valabile și pentru mai mult de două funcții. În speță, are loc următorul rezultat.

**Teorema 7.3.** Fie  $f_1, f_2, \dots, f_n : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in D' \cap D$  astfel încât  $f_1, f_2, \dots, f_n$  sunt derivabile în  $x_0$ . Atunci

1. Funcția sumă  $f_1 + f_2 + \dots + f_n$  este derivabilă în  $x_0$  și

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_n)'(x_0) = f_1'(x_0) + f_2'(x_0) + \dots + f_n'(x_0).$$

2. Funcția produs  $f_1 f_2 \dots f_n$  este derivabilă în  $x_0$  și

$$\begin{aligned}
 (f_1 f_2 \dots f_n)'(x_0) &= f_1'(x_0) f_2(x_0) \dots f_n(x_0) + f_1(x_0) f_2'(x_0) \dots f_n(x_0) \\
 &\quad + \dots + f_1(x_0) f_2(x_0) \dots f_n'(x_0).
 \end{aligned}$$

## 7.1.2 Derivatele funcțiilor elementare

Vom calcula în cele ce urmează derivatele unor funcții uzuale.

### Funcția constantă

Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = c$ , unde  $c \in \mathbb{R}$ . Atunci

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0,$$



deci

$$c' = 0.$$

### Funcția putere

Fie  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^n$ . Atunci

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + x^{n-1})}{h} = nx^{n-1}, \end{aligned}$$

deci

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Caz particular

$$(x)' = 1.$$

Cu ajutorul unor raționamente asemănătoare, se pot deduce formulele corespunzătoare de derivarea unor alte funcții elementare, după cum urmează.

### Funcția radical

Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Atunci

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{x})' &= \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad x \neq 0, \text{ dacă } n \text{ este impar,} \\ (\sqrt[n]{x})' &= \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad x > 0, \text{ dacă } n \text{ este par.} \end{aligned}$$

Caz particular

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

### Funcția exponențială cu bază e

$$(e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

### Funcția exponențială cu bază oarecare

Fie  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . Atunci

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Funcția sinus**

$$(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Funcția cosinus**

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Funcția logaritmică cu bază  $e$** 

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

**Funcția logaritmică cu bază oarecare**

Fie  $a > 0, a \neq 1$ . Atunci

$$(\log_a x)' = \left( \frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x > 0$$

deci

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x > 0.$$

**Funcția tangentă**

Fie  $f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x$ . Atunci

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\sin x)(\cos x)'}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

deci

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Funcția cotangentă**

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**7.1.3 Derivata funcției compuse**

**Teorema 7.4.** Fie  $I_1, I_2$  două intervale din  $\mathbb{R}$ ,  $u : I_1 \rightarrow I_2$ ,  $f : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$  și fie  $x_0 \in I_1$  astfel încât  $u$  este derivabilă în  $x_0$ , iar  $f$  este derivabilă în  $u(x_0)$ . Atunci  $f \circ u$  este derivabilă în  $x_0$ , iar

$$(f \circ u)'(x_0) = f'(u(x_0))u'(x_0)$$

Egalitatea menționată în enunțul teoremei de mai sus se mai poate pune și sub forma prescurtată

$$(\mathbf{f}(\mathbf{u}))' = \mathbf{f}'(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}',$$

fiind deosebit de utilă pentru calculul derivatelor unor funcții care, fără a fi elementare, se pot obține prin compunerea unor funcții elementare. În aceste situații,  $u$  se definește adesea cu ajutorul **tuturor** termenilor dintr-o paranteză, de la exponent, de sub radical, de la numitor, ș.a.m.d.. După această înlocuire se identifică apoi  $f$ , ținând cont că funcția de plecare se scrie ca  $f(u)$ .

**Exemple.** 1.  $(\sin(x^2 + x + 2))'$ .

Putem defini  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u(x) = x^2 + x + 2$  (folosim toți termenii din paranteză), iar în acest caz  $f$  este dată de  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x$ , deoarece după înlocuire  $f(u) = \sin u$ . Atunci

$$\begin{aligned} (\sin(x^2 + x + 2))' &= \sin'(x^2 + x + 2) \cdot (x^2 + x + 2)' \\ &= \cos(x^2 + x + 2) \cdot (2x + 1). \end{aligned}$$

Echivalent,

$$\begin{aligned} (\sin(x^2 + x + 2))' &= (\sin u)' = \cos u \cdot u' = \cos(x^2 + x + 2) \cdot (x^2 + x + 2)' \\ &= \cos(x^2 + x + 2) \cdot (2x + 1). \end{aligned}$$

2.  $((3x + 2)^5)'$

Putem defini  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u(x) = 3x + 2$  (folosim toți termenii din paranteză), iar în acest caz  $f$  este dată de  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^5$ , deoarece după înlocuire  $f(u) = u^5$ . Atunci

$$((3x + 2)^5)' = (u^5)' = 5u^4 \cdot u' = 5(3x + 2)^4(3x + 2)' = 15(3x + 2)^4.$$

$$3. (\sqrt{x^2 + 1})'$$

Putem defini  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u(x) = x^2 + 1$  (folosim toți termenii de sub radical), iar în acest caz  $f$  este dată de  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$ , deoarece după înlocuire  $f(u) = \sqrt{u}$ . Atunci

$$(\sqrt{x^2 + 1})' = (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} (x^2 + 1)' = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

### 7.1.4 $(f^g)'$

Formula de derivare a funcției compuse se poate aplica cu succes și pentru derivarea funcțiilor exponențiale în care atât baza cât și exponentul conțin variabila. În acest sens, fie  $I$  un interval și fie  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $f(x) > 0$  pentru orice  $x \in D$ . Putem defini atunci funcția  $f^g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f^g(x) = (f(x))^{g(x)}$ .

Deoarece  $f(x)^{g(x)} > 0$  pentru orice  $x \in D$ , au loc relațiile

$$f^g = e^{\ln(f^g)} = e^{g \ln f},$$

de unde, ținând seama că  $(e^u)' = e^u \cdot u'$ , obținem că

$$\begin{aligned} (f^g)' &= (e^{g \ln f})' = e^{g \ln f} \cdot (g \ln f)' = e^{g \ln f} (g' \ln f + g (\ln f)') \\ &= f^g \left( g' \ln f + g \frac{f'}{f} \right), \end{aligned}$$

formulă care se poate scrie și sub forma

$$(f^g)' = f^g \ln f \cdot g' + g f^{g-1} \cdot f'.$$

Se poate observa că  $(f^g)'$  este suma a doi termeni, primul reprezentând valoarea derivatei atunci când  $f$  este privită ca o constantă (iar  $f^g$  reprezintă în consecință o funcție exponențială), iar al doilea reprezentând valoarea derivatei atunci când  $g$  este privită ca o constantă (iar  $f^g$  reprezintă în consecință o funcție putere).

### 7.1.5 Derivata unui determinant funcțional

Fie  $f_{ij} : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , funcții derivabile pe  $D$ . Atunci determinantul funcțional definit cu ajutorul acestor funcții,

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad F = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix},$$

este la rândul său o funcție derivabilă pe  $D$  și

$$F' = \begin{vmatrix} f'_{11} & f'_{12} & \cdots & f'_{1n} \\ f'_{21} & f'_{22} & \cdots & f'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{n1} & f'_{n2} & \cdots & f'_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f'_{21} & f'_{22} & \cdots & f'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{n1} & f'_{n2} & \cdots & f'_{nn} \end{vmatrix},$$

$$= \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n,$$

în determinantul  $\Delta_i$  din membrul drept,  $1 \leq i \leq n$ , fiind derivate doar funcțiile de pe linia  $i$ . Demonstrația se poate realiza cu ajutorul formulei de dezvoltare a unui determinant.

**Exercițiu.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{vmatrix} \sin(x+a) & \sin(x+b) & \sin(x+c) \\ \cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c) \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix}$ , unde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Demonstrați că  $f'(x) = 0$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

**Soluție.** Conform formulei de mai sus,

$$f'(x) = \left( \begin{vmatrix} \sin(x+a) & \sin(x+b) & \sin(x+c) \\ \cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c) \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix} \right)'$$

$$= \begin{vmatrix} \cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c) \\ \cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c) \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin(x+a) & \sin(x+b) & \sin(x+c) \\ -\sin(x+a) & -\sin(x+b) & -\sin(x+c) \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \sin(x+a) & \sin(x+b) & \sin(x+c) \\ \cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c) \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

deoarece atât determinanții în care două linii sunt proporționale cât și determinanții în care toate elementele de pe o linie sunt egale cu 0 sunt nuli.

### 7.1.6 Derivata funcției inverse

Fie  $I, J$  intervale din  $\mathbb{R}$  și fie  $f : I \rightarrow J$  o funcție continuă și bijectivă. Atunci  $f$  este inversabilă, având loc relațiile

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{pentru orice } x \in I,$$

respectiv

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{pentru orice } y \in J,$$

iar  $f^{-1}$  este de asemenea continuă.

Ne propunem să determinăm transmiterea derivabilității de la  $f$  la  $f^{-1}$ . Derivând (formal, pentru moment) relația  $f^{-1}(f(x)) = x$  cu ajutorul formulei de derivare a funcției compuse, obținem că  $(f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1$ , deci

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Rămâne acum să dăm acestei formule un sens mai riguros.

**Teorema 7.5.** Fie  $I, J$  intervale din  $\mathbb{R}$  și fie  $f : I \rightarrow J$  o funcție continuă și bijectivă. Dacă  $f$  este derivabilă în  $x_0$ , iar  $f'(x_0) \neq 0$ , atunci  $f^{-1} : J \rightarrow I$  este derivabilă în  $y_0 = f(x_0)$ , iar

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

**Exercițiu.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + 2x$ . Demonstrați că  $f$  este bijectivă și calculați  $(f^{-1})'(3)$ .

**Soluție.** Mai întâi, să observăm faptul că  $f$  este continuă și strict crescătoare, fiind suma a două funcții continue și strict crescătoare. Fiind strict monotonă,  $f$  este injectivă. Cum  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , iar  $f$  transformă un interval într-un interval, fiind continuă, urmează că  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , deci  $f$  este surjectivă. Cum  $f$  este atât injectivă cât și surjectivă, urmează că ea este bijectivă, deci și inversabilă.

Deoarece  $f'(x) = 3x^2 + 2 \neq 0$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , urmează că  $f^{-1}$  este derivabilă în orice  $y = f(x) \in \mathbb{R}$ , iar  $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ .

Pentru  $y = 3$ , urmează că  $x^3 + 2x = 3$ , deci  $x = 1$  (cum  $f$  este injectivă, soluția ecuației  $f(x) = 3$  este unică). Urmează că  $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5}$ .

### 7.1.7 Diferențiala unei funcții

Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $I$  este un interval, și fie  $x \in I$ . Să presupunem că  $f$  este derivabilă în  $x_0$ . În acest caz, conform definiției derivatei unei funcții într-un

punct, se obține că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0$$

Să considerăm atunci funcția  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0), & x \neq x_0 \\ 0, & x = x_0 \end{cases}$$

și să observăm că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0,$$

deci  $\alpha$  este continuă în  $x_0$ . În plus, pentru  $x \neq x_0$ , avem că

$$\begin{aligned} & f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \alpha(x)(x - x_0) \\ &= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) (x - x_0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

această egalitate fiind valabilă și pentru  $x = x_0$ . Aceste considerații motivează introducerea definiției următoare.

### Funcții diferențiabile într-un punct

Vom spune că funcția  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  este *diferențiabilă* în  $x_0 \in I$  dacă există numărul  $A \in \mathbb{R}$  și funcția  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ , continuă și nulă în  $x_0$ , astfel ca

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0).$$

Conform celor de mai sus, dacă  $f$  este derivabilă în  $x_0$ , atunci  $f$  este diferențiabilă în  $x_0$ , iar  $A = f'(x_0)$ . Reciproc, să presupunem că  $f$  este diferențiabilă în  $x_0$ . Atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (A + \alpha(x)) = A,$$

deci  $f$  este derivabilă în  $x_0$ , iar  $f'(x_0) = A$ . Se obține de aici următorul rezultat.

**Teorema 7.6.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Atunci  $f$  este derivabilă în  $x_0 \in I$  dacă și numai dacă este diferențiabilă în  $x_0 \in I$ .

Conform celor de mai sus, o funcție derivabilă într-un punct  $x_0$  admite în acel punct următoarea dezvoltare de ordinul întâi

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), \quad \text{cu } \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$$

(de fapt, vom vedea ulterior că această dezvoltare reprezintă formula lui Taylor de ordinul întâi asociată funcției  $f$  în punctul  $x_0$ ). Cum  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ , termenul  $\alpha(x)(x - x_0)$  este de ordin mai mic decăt  $f'(x_0)(x - x_0)$  pentru  $x$  apropiat de  $x_0$ . Ignorînd acest termen, obținem următoarea formulă de aproximare

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{pentru } x \approx x_0,$$

exprimabilă și sub forma

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{pentru } x - x_0 \approx 0,$$

sau, cu notația  $x - x_0 = h$ ,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0)h, \quad \text{pentru } h \approx 0,$$

în care diferența  $f(x_0 + h) - f(x_0)$  reprezintă variația funcției atunci când argumentul variază de la  $x_0$  la  $x_0 + h$ . Suntem atunci conduși de considerentele de aproximare de mai sus la a defini următorul concept de diferențială a unei funcții.

### Diferențiala unei funcții într-un punct

Fiind dată o funcție  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabilă în  $x_0 \in I$ , vom numi *diferențială a funcției  $f$  în  $x_0$*  funcția liniară  $df(x_0)$  definită prin

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)h, \quad \text{pentru } h \in \mathbb{R}.$$

Urmează atunci că

$$f(x) - f(x_0) \approx df(x_0)(h), \quad \text{pentru } h \approx 0,$$

în loc de  $df(x_0)(h)$  folosindu-se și notația  $df(x_0; h)$ .



Pentru funcția identică  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x$ , urmează că

$$dx(x_0)(h) = h, \quad \text{pentru orice } x_0 \in \mathbb{R},$$

iar întrucât  $dx(x_0)$  este independent de  $x_0$ , se va folosi în cele ce urmează notația simplificată  $dx$ . Cu notațiile de mai sus,

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)dx(h), \quad \text{pentru } h \in \mathbb{R},$$

de unde obținem următoarea egalitate de funcții liniare

$$df(x_0) = f'(x_0)dx,$$

care conduce la următoarea notație diferențială alternativă a derivatei unei funcții într-un punct

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Pentru un punct arbitrar  $x$ , obținem deci

$$df(x) = f'(x)dx, \quad \text{respectiv} \quad f'(x) = \frac{df(x)}{dx}. \quad (7.1)$$

### 7.1.8 Operații cu funcții diferențiabile

Datorită relației (7.1), regulile de calcul ale derivatelor unor funcții se transmit și la diferențiale.

**Teorema 7.7.** Fie  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \in I$ ,  $f, g$  derivabile în  $x$ . Atunci

1.  $f + g, f - g$  sunt diferențiabile în  $x$ , iar

$$d(f + g)(x) = (f + g)'(x)dx = df(x) + dg(x),$$

respectiv

$$d(f - g)(x) = (f - g)'(x)dx = df(x) - dg(x).$$

2.  $\alpha f$  este diferențiabilă în  $x$  pentru orice  $\alpha \in \mathbb{R}$ , iar

$$d(\alpha f)'(x) = (\alpha f)'(x)dx = \alpha df(x).$$

3.  $fg$  este diferențiabilă în  $x_0$ , iar

$$d(fg)(x) = (fg)'(x)dx = df(x)g(x) + f(x)dg(x).$$

4.  $\frac{f}{g}$  este diferențiabilă în  $x$  dacă  $g(x) \neq 0$ , iar

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \left(\frac{f}{g}\right)'(x)dx = \frac{df(x)g(x) - f(x)dg(x)}{g(x)^2}$$

Regulile de calcul de mai sus se mai pot scrie și sub următoarele forme prescurtate, prin omiterea punctului curent

$$\begin{aligned} d(f + g) &= df + dg, & d(f - g) &= df - dg, & d(\alpha f) &= \alpha df, \\ d(fg) &= df \cdot g + f \cdot dg, & d\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}. \end{aligned}$$

**Exemple.** 1.  $d(\sin x) = (\sin x)'dx = \cos x dx$ .

$$2. d(\cos^3 x) = (\cos^3 x)'dx = 3 \cos^2 x (\cos x)'dx = -3 \cos^2 x \sin x dx$$

$$3. d(x^2 e^x) = (x^2 e^x)'dx = (2x e^x + x^2 e^x)dx.$$

$$4. d(x^2 e^x) = d(x^2) \cdot e^x + x^2 \cdot d(e^x) = 2x e^x dx + x^2 e^x dx = (2x + x^2) e^x dx.$$

### 7.1.9 Diferențiala funcției compuse

Are de asemenea loc și o formulă de diferențiere a funcției compuse similară celei de derivare.

**Teorema 7.8.** Fie  $I_1, I_2$  două intervale din  $\mathbb{R}$ ,  $u : I_1 \rightarrow I_2$ ,  $f : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$  și fie  $x \in I_1$  astfel încât  $u$  este diferențiabilă în  $x$ , iar  $f$  este diferențiabilă în  $u(x)$ . Atunci  $f \circ u$  este diferențiabilă în  $x$ , iar

$$d(f \circ u)(x) = (f \circ u)'(x)dx = f'(u(x))du(x).$$

Prin omiterea punctului curent, regula de mai sus se poate scrie sub următoarea formă prescurtată

$$d(f \circ u) = f'(u)du.$$

De remarcat faptul că diferențiala funcției compuse se calculează ca și cum  $u$  ar fi variabilă independentă.

**Exemple.** 1.  $d(\cos^3 x) = d(u^3) = 3u^2 du = 3 \cos^2 x d(\cos x) = -3 \cos^2 x \sin x dx$ .

2.  $d(e^{\sin x}) = d(e^u) = e^u du = e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} \cos x dx$ .

## 7.2 Derivate și diferențiale de ordin superior

### 7.2.1 Derivate de ordin superior

Fie  $I$  un interval și fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție derivabilă pe o vecinătate a lui  $x_0 \in I$ . Dacă  $f'$  este la rândul său derivabilă în  $x_0$ , vom spune că  $f$  este *de două ori derivabilă în  $x_0$*  iar derivata lui  $f'$  în  $x_0$  se va numi *derivata a doua a lui  $f$*  sau *derivata de ordinul al doilea a lui  $f$* , fiind notată  $f''(x_0)$  sau  $\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$ . Conform definiției,

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă  $f$  este de două ori derivabilă în orice  $x \in I$ , atunci  $f$  se numește *de două ori derivabilă pe  $I$* .

În mod inductiv, dacă  $f$  este derivabilă de  $n - 1$  ori pe o vecinătate a lui  $x_0$ , iar derivata de ordinul  $n - 1$  este la rândul său derivabilă în  $x_0$ , vom spune că  $f$  este de  $n$  ori derivabilă în  $x_0$ . Derivata de ordinul  $n$  a lui  $f$  în  $x_0$ , notată prin  $f^{(n)}(x_0)$  sau  $\frac{d^n f(x_0)}{dx^n}$ , este definită ca derivată a derivatei de ordinul  $n - 1$ , în sensul că

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

Similar, dacă  $f$  este de  $n$  ori derivabilă în orice  $x \in I$ , atunci  $f$  se numește *de  $n$  ori derivabilă pe  $I$* .

**Exemplu.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{x^2+3x}$ . Atunci

$$f'(x) = (2x + 3)e^{x^2+3x},$$

$$f''(x) = \left( (2x + 3)e^{x^2+3x} \right)' = (4x^2 + 12x + 11)e^{x^2+3x}$$

$$f'''(x) = ((4x^2 + 12x + 11)e^{x^2+3x})' = (8x^3 + 36x^2 + 66x + 45)e^{x^2+3x}.$$

### Funcții de clasă $C^k$ . Difeomorfisme

Vom nota

$$C^n(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ de } n \text{ ori derivabilă pe } I, f^{(n)} \text{ continuă pe } I\}$$

$$C^\infty(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ derivabilă de orice ordin pe } I\}.$$

Dacă  $f \in C^n(I)$  (respectiv  $f \in C^\infty(I)$ ), atunci  $f$  se va numi *de clasă  $C^n$  pe  $I$*  (respectiv *de clasă  $C^\infty$  pe  $I$* , sau *indefinit derivabilă pe  $I$* ). Dacă  $f : I \rightarrow J$ ,  $f$  inversabilă este în așa fel încât atât  $f$  cât și  $f^{-1}$  sunt derivabile pe domeniile lor (respectiv sunt de clasă  $C^n$  pe domeniile lor),  $f$  se va numi *difeomorfism* (respectiv  *$C^n$ -difeomorfism* sau *difeomorfism de clasă  $C^n$* ) pe  $I$ .

**Exemple.** 1. Funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$  (funcția polinomială de gradul al doilea) este indefinit derivabilă pe  $\mathbb{R}$ , iar  $f'(x) = 2ax + b$ ,  $f''(x) = 2a$ ,  $f^{(m)}(x) = 0$  pentru  $m \geq 3$ .

2. Funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ ,  $a_n \in \mathbb{R}^*$  (funcția polinomială de gradul  $n$ ) este indefinit derivabilă pe  $\mathbb{R}$ , iar  $f^{(n)}(x) = n! a_n$ ,  $f^{(m)}(x) = 0$  pentru  $m > n$ .

3. Funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x$  este indefinit derivabilă pe  $\mathbb{R}$ , iar  $f'(x) = e^x$ ,  $f''(x) = e^x$ , putându-se demonstra prin inducție că  $f^{(n)}(x) = e^x$  pentru  $x \in \mathbb{R}$  și  $n \geq 1$ .

4. Funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x$  este indefinit derivabilă pe  $\mathbb{R}$ , iar  $f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ ,  $f''(x) = -\sin x = \sin(x + \frac{2\pi}{2})$ , putându-se demonstra prin inducție că

$$\sin^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2}), \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R} \text{ și } n \geq 1.$$

Altfel, se poate observa că

$$\begin{aligned} \sin^{(4k)}(x) &= \sin x, & \sin^{(4k+1)}(x) &= \cos x \\ \sin^{(4k+2)}(x) &= -\sin x, & \sin^{(4k+3)}(x) &= -\cos x \end{aligned}$$

pentru  $x \in \mathbb{R}$  și  $k \geq 0$ .

5. Funcția  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \cos x$  este indefinit derivabilă pe  $\mathbb{R}$ , iar  $f'(x) = -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ ,  $f''(x) = -\cos x = \cos(x + \frac{2\pi}{2})$ , putându-se demonstra prin inducție că

$$\cos^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2}), \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R} \text{ și } n \geq 1.$$

Altfel, se poate observa că

$$\begin{aligned} \cos^{(4k)}(x) &= \cos x, & \cos^{(4k+1)}(x) &= -\sin x \\ \cos^{(4k+2)}(x) &= -\cos x, & \cos^{(4k+3)}(x) &= \sin x \end{aligned}$$

pentru  $x \in \mathbb{R}$  și  $k \geq 0$ .

6. Funcția  $f : \mathbb{R} \setminus \{-a\}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x+a}$  este indefinit derivabilă pe  $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$ , iar  $f'(x) = -\frac{1}{(x+a)^2}$ ,  $f''(x) = \frac{2}{(x+a)^3}$ , putându-se demonstra prin inducție că

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+a)^{n+1}} \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\} \text{ și } n \geq 1.$$

## 7.2.2 Formula lui Leibniz

Fiind date  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  de clasă  $C^n$  pe  $I$ , ne propunem să determinăm o formulă pentru derivata de ordinul  $n$  a produsului  $fg$  al acestora.

**Teorema 7.9.** Fie  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  de clasă  $C^n$  pe  $I$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Atunci  $fg$  este de clasă  $C^n$  pe  $I$ , iar

$$(fg)^{(n)} = C_n^0 f^{(n)} g + C_n^1 f^{(n-1)} g' + C_n^2 f^{(n-2)} g'' + \dots + C_n^n f g^{(n)}.$$

Formula de calcul a derivatei de ordinul  $n$  a unui produs demonstrată mai sus poartă numele de *formula lui Leibniz*. Remarcăm asemănarea între această formulă și formula binomială

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n b^n.$$

În aplicații, formula se utilizează în special pentru funcții produs în care unul dintre factori este o funcție polinomială (și deci pentru care derivatele de la un

anumit ordin încolo sunt nule, micșorând numărul termenilor nenuli din sumă), iar celălalt factor are derivatele de ordin superior ușor de determinat.

**Exercițiu.** Determinați  $(x^2 e^{2x})^{(50)}$ .

**Soluție.** Considerând  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = e^{2x}$ , observăm că  $f^{(k)}(x) = 0$  pentru orice  $k \geq 3$ , iar  $g^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$  pentru orice  $k \geq 0$ . Atunci

$$\begin{aligned} (x^2 e^{2x})^{(50)} &= C_{50}^{48} (x^2)'' (e^{2x})^{(48)} + C_{50}^{49} (x^2)' (e^{2x})^{(49)} + C_{50}^{50} x^2 (e^{2x})^{(50)} \\ &= C_{50}^{48} 2 \cdot 2^{48} e^{2x} + C_{50}^{49} 2x \cdot 2^{49} e^{2x} + C_{50}^{50} x^2 \cdot 2^{50} e^{2x} \\ &= 2^{49} e^{2x} (1225 + 100x + 2x^2). \end{aligned}$$

### 7.2.3 Diferențiale de ordin superior

Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  și fie  $x_0 \in I$ . Vom spune că  $f$  este *de două ori diferențiabilă în  $x_0$*  dacă  $f$  este derivabilă într-o vecinătate a lui  $x_0$ , iar  $f'$  este diferențiabilă în  $x_0$ . În aceste condiții, vom numi *diferențiala de ordinul al doilea a funcției  $f$  în  $x_0$* , notată  $d^2 f(x_0)$ , funcția de gradul al doilea definită prin

$$d^2 f(x_0)(h) = f''(x_0)h^2, \quad \text{pentru } h \in \mathbb{R}.$$

Obținem atunci următoarea egalitate de funcții de gradul al doilea

$$d^2 f(x_0) = f''(x_0)dx^2,$$

care conduce la următoarea notație diferențială alternativă a derivatei de ordinul al doilea a unei funcții într-un punct

$$f''(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}.$$

Aici, prin  $dx^2$  se va înțelege  $dx \cdot dx$ . Inductiv, vom spune că  $f$  este *de  $n$  ori diferențiabilă în  $x_0$*  dacă  $f$  este derivabilă de  $n - 1$  ori într-o vecinătate a lui  $x_0$ , iar  $f^{(n-1)}$  este diferențiabilă în  $x_0$ . În aceste condiții, vom numi *diferențiala de ordinul  $n$  a funcției  $f$  în  $x_0$* , notată  $d^n f(x_0)$ , funcția de gradul  $n$  definită prin

$$d^n f(x_0)(h) = f^{(n)}(x_0)h^n, \quad \text{pentru } h \in \mathbb{R}.$$

Obținem atunci următoarea egalitate de funcții de gradul  $n$

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)dx^n,$$

care conduce la următoarea notație diferențială alternativă a derivatei de ordinul  $n$  a unei funcții într-un punct

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n f(x_0)}{dx^n}.$$

Pentru un punct arbitrar  $x$ , obținem deci

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n, \quad \text{respectiv} \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

**Exemple.** 1.  $d^n(e^{ax}) = (e^{ax})^{(n)}dx^n = a^n e^{ax}dx^n$ , pentru  $x \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

2.  $d^n(\ln(ax+b)) = (\ln(ax+b))^{(n)}dx^n = \frac{(-1)^{n-1}a^n(n-1)!}{(ax+b)^n}dx^n$ , pentru  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $ax+b > 0$ .

### 7.3 Teoremele fundamentale ale calculului diferențial

În această secțiune vom prezenta câteva proprietăți importante ale funcțiilor derivabile și unele aplicații ale acestora în studiul monotoniei și aproximării funcțiilor. Începem prin a defini noțiunea de punct de extrem.

#### Puncte de minim local. Valori minime locale

Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval. Vom spune că  $x_0 \in I$  este un *punct de minim local* dacă există o vecinătate  $V \in \mathcal{V}(x_0)$  astfel ca  $f(x_0) \leq f(x)$  pentru orice  $x \in V \cap I$ , adică valoarea  $f(x_0)$  a lui  $f$  în  $x_0$  este cea mai mică valoare a acestei funcții pe o vecinătate a lui  $x_0$ . În aceste condiții  $f(x_0)$  se numește *valoare minimă locală*.

#### Puncte de maxim local. Valori maxime locale

Similar, vom spune că  $x_0 \in I$  este un *punct de maxim local* dacă există o vecinătate  $V \in \mathcal{V}(x_0)$  astfel ca  $f(x_0) \geq f(x)$  pentru orice  $x \in V \cap I$ , adică valoarea  $f(x_0)$  a lui  $f$  în  $x_0$  este cea mai mare valoare a acestei funcții pe o vecinătate a lui  $x_0$ . În aceste condiții  $f(x_0)$  se numește *valoare maximă locală*.

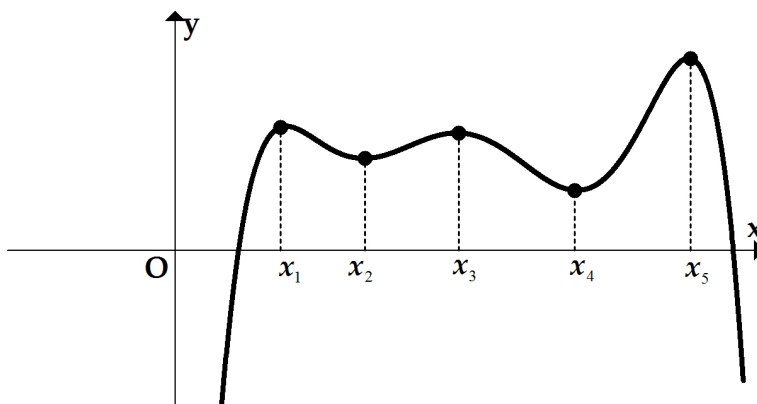


Figura 7.7:  $x_2, x_4$  puncte de minim local,  $x_1, x_3, x_5$  puncte de maxim local

### Puncte de extrem local. Valori extreme locale

Dacă  $x_0$  este un punct de minim sau maxim local al funcției  $f$ , se spune atunci că  $x_0$  este un *punct de extrem local* al funcției  $f$ , valorile funcției  $f$  în punctele de extrem local numindu-se *valori extreme locale* ale funcției  $f$ . De asemenea, dacă  $x_0$  este un punct de minim (maxim) local al funcției  $f$ , punctul corespunzător  $(x_0, f(x_0))$  de pe graficul funcției  $f$  se numește *punct de minim (maxim) local al graficului*.

### Puncte de extrem global. Valori extreme globale

Dacă  $x_0$  este în așa fel încât  $f(x_0) \leq f(x)$  pentru orice  $x \in I$ , vom spune că  $x_0$  este *punct de minim global* al lui  $f$ , iar dacă  $f(x_0) \geq f(x)$  pentru orice  $x \in I$ , vom spune că  $x_0$  este *punct de maxim global* al lui  $f$ . Dacă  $x_0$  este un punct de minim sau maxim global al funcției  $f$ , se spune atunci că  $x_0$  este un *punct de extrem global* al funcției  $f$ , valorile funcției  $f$  în punctele de extrem local numindu-se *valori extreme globale* ale funcției  $f$ . De asemenea, dacă  $x_0$  este un punct de minim (maxim) global al funcției  $f$ , punctul corespunzător  $(x_0, f(x_0))$  de pe graficul funcției  $f$  se numește *punct de minim (maxim) global al graficului*.

Se observă că orice punct de extrem global este și punct de extrem local, nu însă și reciproc. De exemplu 2 este punct de minim local al funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x - 1)(x - 2)^2$ , deoarece  $f(2) = 0$ , iar pe o vecinătate suficient de mică a sa  $f$  ia doar valori pozitive, dar nu este punct de minim global, deoarece  $f$  ia și valori negative (de exemplu,  $f(0) = -4$ ).



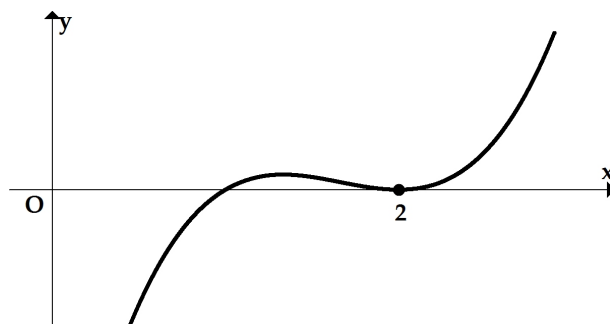


Figura 7.8: Graficul funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x - 1)(x - 2)^2$

Se poate observa că o funcție  $f$  poate admite mai multe puncte de minim sau maxim local, putând exista deasemenea valori minime locale mai mari decât valori maxime locale.

- Exemple.**
1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  are 0 ca punct de minim global, deoarece  $f(0) = 0$ , iar  $f(x) \geq 0$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ . În concluzie, 0 este și punct de minim local. Se observă de asemenea că  $f'(0) = 0$ .
  2.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x - 1)^2(x - 2)(x - 3)^2$  are 1 ca punct de maxim local, deoarece  $f(1) = 0$ , iar  $f(x) \leq 0$  pentru  $x$  apropiat de 1 și pe 3 ca punct de minim local, deoarece  $f(3) = 0$ , iar  $f(x) \geq 0$  pentru  $x$  apropiat de 3. Totuși, acestea nu sunt puncte de extrem global, deoarece  $f$  ia atât valori strict negative (de exemplu  $f(0) = -18$ ), cât și valori strict pozitive (de exemplu  $f(4) = 18$ ).

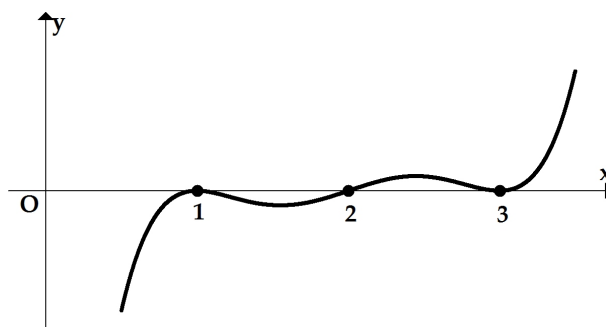


Figura 7.9: Graficul funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x - 1)^2(x - 2)(x - 3)^2$

### 7.3.1 Teorema lui Fermat

Vom preciza în cele ce urmează un principiu de localizare a punctelor de extrem ale unei funcții date, cunoscut sub numele de *teorema lui Fermat*

**Teorema 7.10.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval, și fie  $x_0$  un punct de extrem interior lui  $I$  în care  $f$  este derivabilă. Atunci  $f'(x_0) = 0$ .

Se poate observa că dacă  $x_0$  este un punct de extrem care nu este interior intervalului  $I$ , atunci  $f'(x_0)$  poate să nu fie 0. În acest sens, fie  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$ . Atunci 0 și 1 sunt puncte de minim global, respectiv de maxim global, deoarece  $f$  este strict crescătoare pe  $[0, 1]$ , deci sunt și puncte de extrem local. Totuși,  $f'(x) = 1 \neq 0$  pentru orice  $x \in [0, 1]$ .

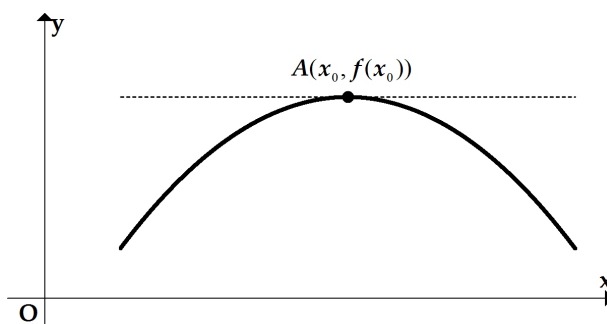
De asemenea, reciproca teoremei lui Fermat nu este adevărată, în sensul că dacă  $f'(x_0) = 0$ , atunci  $x_0$  nu este neapărat punct de extrem, chiar dacă este interior intervalului  $I$ . În acest sens, fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$ . Atunci  $f$  este derivabilă pe  $\mathbb{R}$  și  $f'(x) = 3x^2$ , pentru  $x \in \mathbb{R}$ , deci  $f'(0) = 0$ . Totuși, 0 nu este punct de extrem, deoarece  $f(0) = 0$ , iar  $f$  ia în orice vecinătate a lui 0 atât valori strict negative (pentru  $x < 0$ ), cât și valori strict pozitive (pentru  $x > 0$ ).

În fine, să observăm și că o funcție poate avea puncte de extrem în care nu este derivabilă. În acest sens, fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$ . Atunci  $0 = f(0) \leq f(x)$  pentru  $x \in \mathbb{R}$ , deci 0 este punct de minim global, dar  $f'_s(0) = -1 \neq f'_d(0) = 1$ , deci  $f$  nu este derivabilă în 0.

Să remarcăm următoarea *interpretare geometrică* a teoremei lui Fermat.

#### Interpretarea geometrică a teoremei lui Fermat

Dacă  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0$  este un punct de extrem interior lui  $I$  în care  $f$  este derivabilă, atunci tangenta la grafic în punctul de extrem corespunzător  $A(x_0, f(x_0))$  al graficului, de pantă  $f'(x_0) = 0$ , este paralelă cu  $Ox$ .



### Puncte critice

Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Vom spune că  $x_0$  este un *punct critic* al lui  $f$  dacă  $f$  este derivabilă în  $x_0$ , iar  $f'(x_0) = 0$ .

Altfel spus, punctele critice ale lui  $f$  sunt rădăcinile lui  $f'$ . Cu această precizare, teorema lui Fermat arată că punctele de extrem ale unei funcții situate în interiorul domeniului de definiție și în care acea funcție este derivabilă se găsesc printre punctele critice. Totuși, s-a observat anterior că nu orice punct critic este punct de extrem.

Cu ajutorul teoremei lui Fermat, se poate demonstra și următorul rezultat.

**Teorema 7.11.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval,  $f$  derivabilă pe  $I$ . Atunci  $f'$  are proprietatea lui Darboux pe  $I$ .

## 7.3.2 Teorema lui Rolle

### Funcție Rolle pe un interval

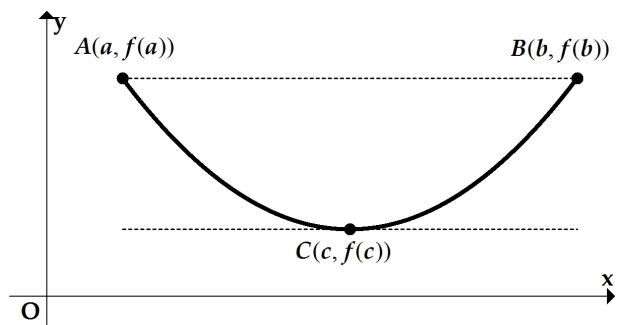
Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Vom spune că  $f$  este *funcție Rolle* pe  $[a, b]$  dacă  $f$  este continuă pe  $[a, b]$  și derivabilă pe  $(a, b)$ . Următorul rezultat poartă numele de *teorema lui Rolle*.

**Teorema 7.12.** Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  funcție Rolle pe  $[a, b]$ , pentru care  $f(a) = f(b)$ . Atunci există  $c \in (a, b)$  astfel încât  $f'(c) = 0$ .

### Interpretarea geometrică a teoremei lui Rolle

Să remarcăm următoarea *interpretare geometrică* a teoremei lui Rolle.

Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție Rolle pe  $[a, b]$  pentru care  $f(a) = f(b)$ , atunci există pe graficul funcției  $f$  un punct  $C(c, f(c))$  în care tangenta la grafic este paralelă cu  $Ox$ .



Teorema lui Rolle admite două consecințe importante privind localizarea unor rădăcini ale derivatei, respectiv ale funcției.

**Corolar 7.12.1.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval,  $f$  derivabilă pe  $I$ . Între două rădăcini ale lui  $f$  se află cel puțin o rădăcină a lui  $f'$ .

**Demonstrație.** Fie  $x_1, x_2 \in I$ ,  $x_1 < x_2$ , astfel că  $f(x_1) = f(x_2) = 0$ . Atunci  $f$  este funcție Rolle pe  $[x_1, x_2]$  și aplicând teorema lui Rolle pe acest interval obținem că există  $c \in (x_1, x_2)$  astfel încât  $f'(c) = 0$ , ceea ce trebuia demonstrat. ■

**Corolar 7.12.2.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval,  $f$  derivabilă pe  $I$ . Între două rădăcini consecutive ale lui  $f'$  se află cel mult o rădăcină a lui  $f$ .

**Demonstrație.** Fie  $x_1, x_2 \in I$ ,  $x_1 < x_2$  rădăcini consecutive ale lui  $f'$ . Presupunem prin reducere la absurd că există două rădăcini  $a, b$  ale lui  $f$ ,  $a < b$ , situate între  $x_1$  și  $x_2$ , deci  $x_1 < a < b < x_2$ . Conform Corolarului 7.12.1, există cel puțin încă o rădăcină  $x_3$  a lui  $f'$  situată între  $a$  și  $b$ , ceea ce înseamnă că  $x_1, x_2$  nu sunt rădăcini consecutive, contradicție. ■

Cu ajutorul acestor corolarii se va preciza un algoritm de determinare a numărului rădăcinilor unei ecuații situate într-un interval dat.

### Șirul lui Rolle

Fiind dată funcția derivabilă  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval, dorim să determinăm numărul rădăcinilor ecuației  $f(x) = 0$ . În acest scop, procedăm în următoarele etape.

1. Rezolvăm ecuația  $f'(x) = 0$  și determinăm rădăcinile  $c_1, c_2, \dots, c_n$  ale lui  $f'$ .
2. Determinăm  $f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_n)$  și limitele  $l_1$  și  $l_2$  în capătul inferior, respectiv superior al lui  $I$ .
3. Construim șirul  $R_0 = \operatorname{sgn}(l_1), R_1 = \operatorname{sgn} f(c_1), R_2 = \operatorname{sgn} f(c_2), \dots, R_n = \operatorname{sgn} f(c_n), R_{n+1} = \operatorname{sgn} f(l_2)$ , numit *șirul lui Rolle*, cu convenția că  $\operatorname{sgn}(+\infty) = 1, \operatorname{sgn}(-\infty) = -1$ , întrucât limitele  $l_1$  și  $l_2$  pot fi și infinite. De asemenea, în acest șir se pot trece  $+$  și  $-$  în loc de  $+1$  și respectiv  $-1$ . Dacă doi termeni consecutivi  $R_i$  și  $R_{i+1}$  sunt identici, atunci între abscisele care le corespund nu se află nicio rădăcină a lui  $f$ . Dacă  $R_i$  și  $R_{i+1}$  sunt diferiți, dar nenuli, atunci între abscisele care le corespund se află exact o rădăcină a lui  $f$ . În fine, dacă un termen  $R_i$  este nul, aceasta înseamnă că abscisa care-i corespunde este rădăcină de ordinul cel puțin 2 a lui  $f$ , pentru determinarea exactă a ordinului de multiplicitate fiind necesară determinarea valorilor derivatelor de ordin superior în acest punct.

**Exercițiu.** Determinați numărul de rădăcini reale ale ecuației  $2x^3 - 12x^2 + 18x + 3 = 0$ .

**Soluție.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 2$ . Atunci  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 24x + 18 = 0$ , de unde  $x_1 = 1, x_2 = 3$ , iar  $f(x_1) = 11, f(x_2) = 3$ . Cum  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ , urmează că șirul lui Rolle este  $- + + +$ , schimbarea de semn petrecându-se între  $R_0$  (corespunzător lui  $x = -\infty$ ) și  $R_1$  (corespunzător lui  $x_1 = 1$ ). Atunci ecuația dată are o singură rădăcină reală, situată în intervalul  $(-\infty, 1)$ .

$x$	$-\infty$	$1$	$3$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$+$	$+$	$+$

**Exercițiu.** Determinați numărul de rădăcini reale ale ecuației  $x^2 - 2 \ln x + m = 0$  în funcție de valorile parametrului real  $m$ .

**Soluție.** Fie  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2 \ln x + m$ . Atunci  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{2}{x} = 0$ , de unde  $x_1 = 1$  (rădăcina  $x_2 = -1$  nu convine, întrucât nu aparține domeniului de definiție al logaritmului natural), iar  $f(x_1) = 1 + m$ . De asemenea,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	+	$1+m$	+

Dacă  $m < -1$ , șirul lui Rolle este  $+ - +$ , schimbările de semn petrecându-se între  $R_0$  (corespunzător lui  $x = 0$ ) și  $R_1$  (corespunzător lui  $x_1 = 1$ ), respectiv între  $R_1$  (corespunzător lui  $x_1 = 1$ ) și  $R_2$  (corespunzător lui  $x = +\infty$ ). Atunci ecuația dată are două rădăcini reale, situată în intervalele  $(0, 1)$  și respectiv  $(1, \infty)$ .

Dacă  $m = 1$ , șirul lui Rolle este  $+ 0 +$ ,  $x_1 = 1$  fiind rădăcină de ordinul cel puțin 2. Cum  $f''(x) = 2 + \frac{2}{x^2}$ , urmează că  $f''(1) \neq 0$ , iar  $x_1 = 1$  este rădăcină dublă a ecuației date, aceasta neavând alte rădăcini reale.

Dacă  $m > -1$ , șirul lui Rolle este  $+ + +$ , fără schimbări de semn. Urmează că ecuația dată nu are rădăcini reale.

### 7.3.3 Teorema lui Lagrange

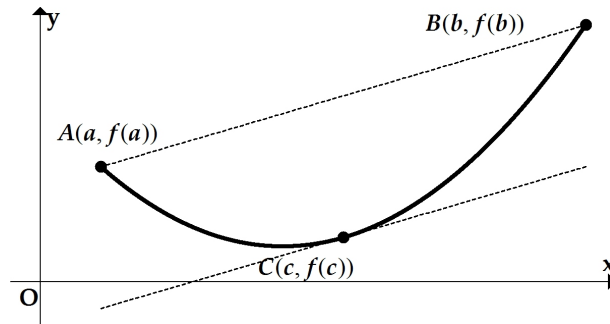
Teorema lui Rolle este un caz particular al următorului rezultat, numit *teorema lui Lagrange* sau *teorema creșterilor finite*.

**Teorema 7.13.** Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  funcție Rolle pe  $[a, b]$ . Atunci există  $c \in (a, b)$  astfel încât  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .

#### Interpretarea geometrică a teoremei lui Lagrange

Să remarcăm următoarea *interpretare geometrică* a teoremei lui Lagrange.

Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție Rolle pe  $[a, b]$ , atunci există pe graficul funcției  $f$  un punct  $C(c, f(c))$  în care tangenta la grafic este paralelă cu coarda  $AB$ , unde  $A(a, f(a))$  și  $B(b, f(b))$  sunt capetele graficului lui  $f$ .



Teorema lui Lagrange are consecințe importante în studiul monotoniei funcțiilor, enunțate în următorul rezultat.

**Corolar 7.13.1.** 1. Dacă  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval, este derivabilă pe  $I$ , iar derivata sa este identic nulă pe  $I$ , atunci  $f$  este constantă pe  $I$ .

2. Dacă  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval, sunt derivabile pe  $I$ , iar derivatele lor sunt egale pe  $I$ , atunci  $f$  și  $g$  diferă printr-o constantă pe  $I$ .

3. Dacă  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval, este derivabilă pe  $I$ , iar derivata sa este pozitivă (respectiv strict pozitivă) pe  $I$ , atunci  $f$  este crescătoare (respectiv strict crescătoare) pe  $I$ . Dacă  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval, este derivabilă pe  $I$ , iar derivata sa este negativă (respectiv strict negativă) pe  $I$ , atunci  $f$  este descrescătoare (respectiv strict descrescătoare) pe  $I$ .

**Exemplu.** Prima parte a Corolarului 7.13.1 se poate folosi pentru demonstrarea unor identități. În acest sens, să demonstrăm că

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}, \quad \text{pentru } x \in (-1, 1).$$

Fie  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$ . Atunci  $f$  este derivabilă pe  $(-1, 1)$ , iar

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2 + (1-x)^2} \frac{-2}{(1+x)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0, \end{aligned}$$

de unde  $f$  este constantă pe  $(-1, 1)$ . Pentru a determina valoarea acestei constante, dăm lui  $x$  o valoare din intervalul  $(-1, 1)$ , de exemplu  $x = 0$ . Cum

$$f(0) = \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg} 1 = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$

urmează concluzia.

**Exemplu.** Cea de-a treia parte a Corolarului 7.13.1 este instrumentală în de-

monstrarea multor inegalități. În acest sens, să demonstrăm că

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \quad \text{pentru } x > 0.$$

Fie  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$ . Urmează că  $f$  este derivabilă pe  $(0, \infty)$ , iar

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0, \quad \text{pentru } x > 0,$$

deci  $f$  este strict crescătoare pe  $(0, \infty)$ . Cum  $f$  este și continuă în  $x = 0$ , urmează că  $f(x) > f(0) = 0$  pentru  $x > 0$ , de unde rezultă prima parte a inegalității, cea de-a doua parte demonstrându-se analog.

**Exercițiu.** Aplicând teorema lui Lagrange funcției  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x$  pe un interval  $[a, b]$ ,  $0 < a < b$ , demonstrați că

$$\frac{b-a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b-a}{a}.$$

**Soluție.** Cum  $f$  este funcție Rolle pe  $[a, b]$ , urmează conform teoremei lui Lagrange că există  $c \in (a, b)$  astfel încât  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ , deci  $\frac{1}{c} = \frac{\ln b - \ln a}{b-a}$ , sau  $\ln b - \ln a = \frac{1}{c}(b-a)$ . Cum  $c \in (a, b)$ , iar  $a, b > 0$ , urmează că  $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$ , de unde concluzia.

### Existența derivatelor laterale într-un punct

Cu ajutorul teoremei lui Lagrange se poate determina de asemenea existența derivatei laterale a unei funcții într-un punct, obținută ca limită a unor alte derivate.

**Corolar 7.13.2.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval, și fie  $x_0 \in I$  cu proprietatea că există  $\varepsilon > 0$  astfel ca  $(x_0 - \varepsilon, x_0) \subseteq I$ ,  $f$  este derivabilă pe  $(x_0 - \varepsilon, x_0)$  și continuă la stânga în  $x_0$ . Dacă există  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f'(x) = \lambda$ , atunci  $f$  are derivată la stânga în  $x_0$ , iar  $f'_s(x_0) = \lambda$ .

Un rezultat asemănător se poate formula în ceea ce privește existența derivatei la dreapta într-un punct.



**Corolar 7.13.3.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval, și fie  $x_0 \in I$  cu proprietatea că există  $\varepsilon > 0$  astfel ca  $(x_0, x_0 + \varepsilon) \subseteq I$ ,  $f$  este derivabilă pe  $(x_0, x_0 + \varepsilon)$  și continuă la dreapta în  $x_0$ . Dacă există  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f'(x) = \lambda$ , atunci  $f$  are derivată la dreapta în  $x_0$ , iar  $f'_d(x_0) = \lambda$ .

Prin combinarea acestor corolarii se obține următorul rezultat.

**Corolar 7.13.4.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval, și fie  $x_0 \in I$  cu proprietatea că  $f$  este derivabilă pe  $V \setminus \{x_0\}$ , unde  $V \in \mathcal{V}(x_0)$ , continuă în  $x_0$  și există  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \lambda$ . Atunci  $f$  este derivabilă în  $x_0$ , iar  $f'(x_0) = \lambda$ .

**Exemplu.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x|x^3 - a|$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Să determinăm  $a$  astfel încât  $f$  să fie derivabilă pe  $\mathbb{R}$ .

Se observă că  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x(x^3 - a), & x \geq \sqrt[3]{a} \\ x(a - x^3), & x < \sqrt[3]{a} \end{cases}$ , deci

$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 - a, & x > \sqrt[3]{a} \\ a - 4x^3, & x < \sqrt[3]{a} \end{cases}$ . Atunci  $\lim_{\substack{x \rightarrow \sqrt[3]{a} \\ x < \sqrt[3]{a}}} f'(x) = -3a$ , deci, conform Coro-

larului 7.13.2,  $f'_s(\sqrt[3]{a}) = -3a$ . Similar, conform Corolarului 7.13.3,  $f'_d(\sqrt[3]{a}) = 3a$ . Ca  $f$  să fie derivabilă în  $\sqrt[3]{a}$ , este necesar și suficient ca valorile acestor derivate laterale să fie egale, deci  $-3a = 3a$ , iar  $a = 0$ . Se observă atunci că

$f(x) = \begin{cases} x^4, & x \geq 0 \\ -x^4, & x < 0 \end{cases}$ , fiind derivabilă și pentru orice  $x \neq 0$ .

### Funcții Lipschitz. Contractii

Cu ajutorul teoremei lui Lagrange, se poate demonstra că orice funcție derivabilă cu derivata mărginită este o funcție Lipschitz. Mai precis, are loc următorul rezultat.

**Corolar 7.13.5.** Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  funcție Rolle pe  $[a, b]$ . Dacă există  $L \geq 0$  astfel încât  $|f'(c)| \leq L$  pentru orice  $c \in (a, b)$ , atunci  $f$  este funcție Lipschitz pe  $[a, b]$ . Dacă, în plus,  $L < 1$ , atunci  $f$  este o contracție pe  $[a, b]$ .

**Demonstrație.** Fie  $x, y \in [a, b]$ ,  $x < y$ . Conform teoremei lui Lagrange, aplicată pe intervalul  $[x, y] \subseteq [a, b]$ , pe care  $f$  este de asemenea funcție Rolle, urmează că există  $c \in (x, y)$  astfel ca  $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$ . Atunci

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)| \cdot |x - y| \leq L|x - y|,$$

deci  $f$  este funcție Lipschitz pe  $[a, b]$ . Dacă  $L < 1$ , conform definiției,  $f$  este o contracție pe  $[a, b]$ . ■

În particular, acest corolar poate fi utilizat pentru a stabili convergența unor șiruri recurente.

**Exemplu.** Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$ :  $x_n = \frac{2x_n^2 + 1}{3x_n}$ ,  $x_0 = 2$ . Să demonstrăm că  $(x_n)_{n \geq 0}$  este convergent și să-i determinăm limita.

Fie  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{3x}$ . Mai întâi, se observă că  $x_n > 0$  pentru orice  $n \geq 0$ , iar recurența dată se poate scrie sub forma  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Totuși,  $(0, \infty)$  nu este o mulțime închisă, neputându-se aplica direct teorema de punct fix a lui Banach, deși  $f$  transformă mulțimea  $(0, \infty)$  în ea însăși. Conform inegalității mediilor,

$$f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3x} \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}x \cdot \frac{1}{3x}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \text{pentru } x > 0.$$

Deoarece

$$f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3x} \leq \frac{2}{3}x + \frac{1}{3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}} < \frac{2}{3}x + 1, \quad \text{pentru orice } x \geq \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

se poate observa că  $f(x) \leq 3$  pentru orice  $x \in \left[\frac{2\sqrt{2}}{3}, 3\right]$ , deci  $f$  transformă intervalul  $D = \left[\frac{2\sqrt{2}}{3}, 3\right]$  în el însuși. Deoarece  $f'(x) = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{1}{x^2}\right)$ , urmează că  $\frac{7}{21} \leq f'(x) \leq \frac{17}{27}$  pentru orice  $x \in D$ , deci  $f$  este o contracție pe acest interval. Cum și  $x_0 \in D$ , urmează conform teoremei de punct fix a lui Banach (teorema 6.14) că șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  este convergent la punctul fix  $l$  al lui  $f$  pe  $D$ . Din condiția de punct fix,  $l = \frac{2l^2 + 1}{3l}$ , deci  $l^2 = 1$ , iar  $l = 1$ , deoarece  $l_1 = -1 \notin D$ . Atunci șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  este convergent, iar limita sa este 1.

### 7.3.4 Teorema lui Cauchy

Următorul rezultat, atribuit lui Cauchy, constituie o generalizare a teoremei lui Lagrange.

**Teorema 7.14.** Fie  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g$  funcții Rolle pe  $[a, b]$ . Dacă  $g'(x) \neq 0$  pentru orice  $x \in (a, b)$ , atunci  $g(b) \neq g(a)$  și există  $c \in (a, b)$  astfel încât

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

### 7.3.5 Regulile lui L'Hôpital

În unele dintre situațiile în care calculul limitelor unor funcții conduce la cazuri de nedeterminare de tipul  $\frac{0}{0}$  sau  $\frac{\infty}{\infty}$ , pot fi utilizate cu succes așa-numitele *reguli ale lui L'Hôpital*.

#### Regula lui L'Hôpital pentru cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$

**Teorema 7.15.** Fie  $x_0$  un punct de acumulare (finit sau infinit) al unui interval  $I$  și fie  $f, g$  două funcții definite pe  $I$ , cu excepția eventuală a lui  $x_0$ . Presupunem că sunt îndeplinite următoarele condiții

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ .
2.  $f, g$  sunt derivabile pe  $I$ , cu excepția eventuală a lui  $x_0$ .
3.  $g'(x) \neq 0$  pentru orice  $x \in I, x \neq x_0$ .
4. Există limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , finită sau infinită.

Atunci  $g(x) \neq 0$  pentru orice  $x \in I, x \neq x_0$ , funcția  $\frac{f}{g}$  are limită în  $x_0$  și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Exemplu.** Să determinăm valoarea limitei  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$ . În acest scop, să observăm că funcțiile

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - \operatorname{arctg} x, \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^3,$$

sunt în așa fel încât  $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \operatorname{arctg} x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$ ,  $f, g$  sunt derivabile pe  $\mathbb{R}$

iar  $g'(x) = 3x^2 \neq 0$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}^*$ . În plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \operatorname{arctg} x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3}'$$

de unde obținem că  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \frac{1}{3}$ .

Uneori, este necesar să se aplice de mai multe ori succesiv regula lui L'Hôpital, întrucât noua limită  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  este tot de tip  $\frac{0}{0}$ .

**Exemplu.** Să determinăm valoarea limitei  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ . În acest scop, să observăm că funcțiile

$$f : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - e^{-x} - 2x, \quad g : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x - \sin x,$$

sunt în așa fel încât  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - e^{-x} - 2x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x - \sin x) = 0$ ,  $f, g$  sunt derivabile pe  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  iar  $g'(x) = 1 - \cos x \neq 0$  pentru orice  $x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$ . În plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x} - 2x)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}.$$

Funcțiile

$$f_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = e^x + e^{-x} - 2, \quad g_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, g_1(x) = 1 - \cos x$$

sunt în așa fel încât  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + e^{-x} - 2) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0$ ,  $f_1, g_1$  sunt derivabile pe  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  iar  $g_1'(x) = \sin x \neq 0$  pentru orice  $x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$ . În plus,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + e^{-x} - 2)'}{(1 - \cos x)'} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot 2x}{\frac{\sin x}{x} \cdot x} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Urmează că

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = 2.$$

**Regula lui L'Hôpital pentru cazul de nedeterminare  $\frac{\infty}{\infty}$**

**Teorema 7.16.** Fie  $x_0$  un punct de acumulare (finit sau infinit) al unui interval  $I$  și fie  $f, g$  două funcții definite pe  $I$ , cu excepția eventuală a lui  $x_0$ . Presupunem că sunt îndeplinite următoarele condiții

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$ .
2.  $f, g$  sunt derivabile pe  $I$ , cu excepția eventuală a lui  $x_0$ .
3.  $g'(x) \neq 0$  pentru orice  $x \in I, x \neq x_0$ .
4. Există limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , finită sau infinită.

Atunci funcția  $\frac{f}{g}$  are limită în  $x_0$  și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Exemplu.** Să calculăm limita  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(\sin(ax))}{\ln(\sin(bx))}$ ,  $a, b \in (0, \infty)$ . În acest scop, să observăm că funcțiile

$$f : (0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(\sin(ax)), \quad g : (0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \ln(\sin(bx))$$

sunt în așa fel încât  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(\sin(bx)) = -\infty$ ,  $f, g$  sunt derivabile pe  $(0, \varepsilon)$  iar

$g'(x) = \frac{b \cos bx}{\sin bx} \neq 0$  pentru orice  $x \in (0, \varepsilon)$ . În plus,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(\ln(\sin(ax)))'}{(\ln(\sin(bx)))'} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{a \cos ax}{\sin ax}}{\frac{b \cos bx}{\sin bx}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{a \cos ax}{b \cos bx} \cdot \frac{\sin bx}{\sin ax}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{a \cos ax}{b \cos bx} \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{\sin bx}{bx} \cdot bx}{\frac{\sin ax}{ax} \cdot ax} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Urmează că

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(\sin(ax))}{\ln(\sin(bx))} = 1.$$

### Alte cazuri de nedeterminare

Regulile lui L'Hôpital sunt destinate în mod explicit calculului limitelor unor rapoarte de funcții ce conduc la cazurile de nedeterminare  $\frac{0}{0}$  și  $\frac{\infty}{\infty}$ . Totuși, după rearanjarea unor termeni sau executarea unor operații de logaritmare, și alte cazuri de nedeterminare pot fi tratate prin intermediul acestor reguli.

### Cazul $0 \cdot \infty$

În situația în care calculul limitei  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x))$  conduce la cazul de nedeterminare  $0 \cdot \infty$  (adică  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$ ), atunci se încearcă scrierea produsului ca un raport. Folosind formula  $\mathbf{fg} = \frac{\mathbf{f}}{\frac{1}{\mathbf{g}}}$  se obține cazul de nedeterminare  $\frac{0}{0}$ , iar folosind formula  $\mathbf{fg} = \frac{\mathbf{g}}{\frac{1}{\mathbf{f}}}$  se obține cazul de nedeterminare  $\frac{\infty}{\infty}$ .

**Exercițiu.** Determinați  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^3 \ln x$ .

**Soluție.** Deoarece  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^3 = 0$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ , limita se încadrează în cazul de nedeterminare  $0 \cdot \infty$ . Atunci

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^3 \ln x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-3}{x^4}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^3}{-3} = 0.$$

### Cazul $\infty - \infty$

În situația în care calculul limitei  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x))$  conduce la cazul de nedeterminare  $\infty - \infty$  (adică  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$  sau  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ ), atunci se încearcă obținerea unui factor comun. Folosind formulele  $\mathbf{f} - \mathbf{g} = \mathbf{f}(\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{f}} - 1)$  sau  $\mathbf{f} - \mathbf{g} = \mathbf{g}(\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}} - 1)$ , limita dată se transformă într-un

produs, iar folosind formula  $f - g = \frac{f-g}{\frac{1}{fg}} = \frac{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}}{\frac{1}{fg}}$  se obține cazul de nedeterminare  $\frac{0}{0}$ .

**Exercițiu.** Determinați  $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x)$ .

**Soluție.** Se va da factor comun  $e^x$ , deoarece acesta crește mai rapid decât  $x$  pentru  $x \rightarrow \infty$ . Se obține că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \left(1 - \frac{x}{e^x}\right)$$

De asemenea

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0,$$

de unde

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x) = \infty(1 - 0) = \infty.$$

**Exercițiu.** Determinați  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$ .

**Soluție.** Mai întâi, se observă că

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x \cdot x^2},$$

limita inițială fiind transformată într-o limită în cazul de nedeterminare  $\frac{0}{0}$ . Totuși, în locul aplicării directe a regulii lui L'Hôpital, se recomandă simplificarea preliminară prin aplicarea limitelor fundamentale. Se obține că

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x \cdot x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \operatorname{tg} x)(x - \operatorname{tg} x)}{x \cdot x \operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{tg} x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x \operatorname{tg}^2 x \cdot x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x^3} \\ &\stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{3x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3 \cos^2 x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} \\ &\stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x \cos x}{2x} = -\frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

**Cazurile  $1^\infty, 0^0, \infty^0$** 

În situația în care calculul limitei  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)^{g(x)})$  conduce la unul dintre aceste cazuri de nedeterminare, iar  $f(x) > 0$  pe o vecinătate a lui  $x_0$ , se folosește formula  $f^g = e^{\ln(f^g)} = e^{g \ln f}$ . Pentru cazul de nedeterminare  $1^\infty$ , se poate ține seama și de faptul că  $\lim_{f \rightarrow 1} \frac{\ln f}{f-1} = 1$ .

**Exercițiu.** Determinați  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ .

**Soluție.** Deoarece  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\cos 2x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ , limita dată este în cazul de nedeterminare  $1^\infty$ . Atunci

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln \frac{\cos x}{\cos 2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x - \ln \cos 2x}{x^2}} \stackrel{\left[ \frac{0}{0} \right]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} 2x}{2x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left( -\frac{\operatorname{tg} x}{x} + 2 \frac{\operatorname{tg} 2x}{2x} \cdot 2 \right)} = e^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

**Exercițiu.** Determinați  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$ .

**Soluție.** Deoarece  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{1}{x} \right| = \infty$ , limita dată este în cazul de nedeterminare  $1^\infty$ . Atunci

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(x + e^x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + e^x)}{x + e^x - 1}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + e^x - 1}{x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{e^x - 1}{x} \right)} = e^2.$$

**Exercițiu.** Determinați  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 - \cos x}{1 - \cos x} \right)^{\sin^2 x}$ .

**Soluție.** Deoarece  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 - \cos x}{1 - \cos x} \right) = \infty$ , iar  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x = 0$ , limita dată este în cazul de nedeterminare  $\infty^0$ . Atunci

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 - \cos x}{1 - \cos x} \right)^{\sin^2 x} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x \ln \left( \frac{2 - \cos x}{1 - \cos x} \right)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x^2 (\ln(2 - \cos x) - \ln(1 - \cos x))} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \ln(2 - \cos x)) - \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \ln(1 - \cos x))} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= e^{-\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \ln(1 - \cos x))} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \cos x)}{\frac{1}{x^2}}} \\
&\stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{1 - \cos x}}{\frac{-2}{x^3}}} = e^{\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin x}{1 - \cos x}} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} e^{\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \sin x + x^3 \cos x}{\sin x}} \\
&= e^{\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 + \frac{x}{\sin x} \cdot x^2 \cos x)} = e^0 = 1.
\end{aligned}$$

**Exercițiu.** Determinați  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x)^{x - \frac{\pi}{2}}$ .

**Soluție.** Deoarece  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (x - \frac{\pi}{2}) = 0$ , limita dată este în cazul de nedeterminare  $0^0$ . Atunci

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x)^{x - \frac{\pi}{2}} &= e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (x - \frac{\pi}{2}) \ln(1 - \sin x)} = e^{\lim_{u \rightarrow 0} u \ln(1 - \sin(u + \frac{\pi}{2}))} \\
&= e^{\lim_{u \rightarrow 0} u \ln(1 - \cos u)} = e^{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \cos u)}{\frac{1}{u}}} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} e^{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin u}{1 - \cos u}}{-\frac{1}{u^2}}} \\
&= e^{-\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^2 \sin u}{1 - \cos u}} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} e^{-\lim_{u \rightarrow 0} \frac{2u \sin u + u^2 \cos u}{\sin u}} \\
&= e^{-\lim_{u \rightarrow 0} (2u + \frac{u}{\sin u} \cdot u \cos u)} = e^0 = 1.
\end{aligned}$$

### 7.3.6 Formula lui Taylor

Conform definiției diferențiabilității, a fost observat anterior că dacă  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  este derivabilă în  $x_0 \in I$ , atunci există  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  cu  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0$ , astfel ca

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0),$$

iar în concluzie

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{pentru } x \approx x_0.$$

#### Polinomul lui Taylor de ordinul $n$

În cele ce urmează, dorim să extindem această formulă de aproximare la una cu acuratețe superioară. Să presupunem că  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  este derivabilă de ordinul  $n$  în  $x_0 \in I$ ,  $n \geq 1$ . Atunci derivatele de ordin până la  $n - 1$  inclusiv există pe o

vecinătate a lui  $x_0$ ; pentru simplitatea expunerii, să presupunem că acestea există pe întreg  $I$ . Funcția polinomială  $T_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

se numește *polinomul lui Taylor de grad  $n$*  atașat funcției  $f$  în punctul  $x_0$ .

### Restul formulei lui Taylor de ordinul $n$

Fie acum  $R_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x), \quad \text{pentru orice } x \in I.$$

Atunci

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad \text{pentru orice } x \in I,$$

sau

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

relație numită *formula lui Taylor de ordinul  $n$*  corespunzătoare funcției  $f$  în punctul  $x_0$ . Funcția  $R_n$  astfel definită poartă numele de *restul formulei lui Taylor de ordinul  $n$*  și măsoară eroarea cu care polinomul  $T_n$  aproximează funcția  $f$ .

În ceea ce urmează, vom încerca să obținem forme ale restului  $R_n$  care să precizeze mai multe informații despre precizia aproximării. Să observăm mai întâi că, în definiția diferențiabilității într-un punct  $x_0$ ,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0),$$

funcția polinomială de gradul 1

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

reprezintă de fapt polinomul Taylor  $T_1$ . Cum  $R_1 = \alpha(x)(x - x_0)$ , urmează că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} = 0.$$

Vom demonstra o proprietate similară pentru restul de ordin  $n$ . În acest scop, să calculăm mai întâi derivatele polinomului Taylor  $T_n$ . Se obține că

$$T_n'(x) = f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(3)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} \\
T_n''(x) &= f''(x_0) + \frac{f^{(3)}(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f^{(4)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \\
& + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} \\
& \dots\dots \\
T_n^{(n-1)}(x) &= f^{(n-1)}(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{1!}(x-x_0), \quad T_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x_0) \\
T_n^{(m)}(x) &= 0, \quad \text{pentru } m > n.
\end{aligned}$$

Putem obține de aici următoarele evaluări ale restului de ordin  $n$  și ale derivatelor sale în  $x_0$

$$R_n(x_0) = R_n'(x_0) = R_n''(x_0) = \dots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Să notăm  $g : I \rightarrow R$ ,  $g(x) = (x - x_0)^n$ . Analog relațiilor de mai sus, se observă că

$$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n-1)}(x_0) = 0; \quad g^{(n)}(x_0) = n!.$$

Fie  $x \in I$  arbitrar. Aplicând teorema lui Cauchy funcțiilor  $R_n$  și  $g$  pe intervalul  $[x_0, x]$  (sau  $[x, x_0]$ ), obținem că există  $c_1$  între  $x_0$  și  $x$  astfel ca  $\frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{R_n'(c_1)}{g'(c_1)}$ , iar cum  $R_n(x_0) = g(x_0) = 0$ , urmează că

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n'(c_1)}{g'(c_1)}.$$

Aplicând încă o dată teorema lui Cauchy funcțiilor  $R_n'$  și  $g'$  pe intervalul  $[x_0, c_1]$  (sau  $[c_1, x_0]$ ), obținem că în mod similar că există  $c_2$  între  $x_0$  și  $c_1$ ) astfel ca

$$\frac{R_n'(c_1)}{g'(c_1)} = \frac{R_n''(c_2)}{g''(c_2)},$$

deci

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n''(c_2)}{g''(c_2)}.$$

Aplicând în mod iterativ teorema lui Cauchy, obținem că există  $c_{n-1}$  între  $x_0$  și  $x$  astfel încât

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n^{(n-1)}(c_{n-1})}{g^{(n-1)}(c_{n-1})}.$$

Fie acum  $(\bar{x}_k)_{k \geq 0}$  un șir convergent la  $x_0$ ,  $\bar{x}_k \neq x_0$ . Conform celor de mai sus, există  $c_{k,n-1}$  între  $x_0$  și  $\bar{x}_k$  astfel încât

$$\frac{R_n(\bar{x}_k)}{g(\bar{x}_k)} = \frac{R_n^{(n-1)}(c_{k,n-1})}{g^{(n-1)}(c_{k,n-1})} = \frac{\frac{R_n^{(n-1)}(c_{k,n-1}) - R_n^{(n-1)}(x_0)}{c_{k,n-1} - x_0}}{\frac{g^{(n-1)}(c_{k,n-1}) - g^{(n-1)}(x_0)}{c_{k,n-1} - x_0}}.$$

Prin trecere la limită, obținem că

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{R_n(\bar{x}_k)}{g(\bar{x}_k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{R_n^{(n-1)}(c_{k,n-1}) - R_n^{(n-1)}(x_0)}{c_{k,n-1} - x_0}}{\frac{g^{(n-1)}(c_{k,n-1}) - g^{(n-1)}(x_0)}{c_{k,n-1} - x_0}}$$

Cum  $c_{k,n-1}$  se află între  $x_0$  și  $\bar{x}_k$ , urmează că  $\lim_{k \rightarrow \infty} c_{k,n-1} = x_0$ , de unde

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{R_n^{(n-1)}(c_{k,n-1}) - R_n^{(n-1)}(x_0)}{c_{k,n-1} - x_0} &= R_n^{(n)}(x_0) = 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g^{(n-1)}(c_{k,n-1}) - g^{(n-1)}(x_0)}{c_{k,n-1} - x_0} &= g^{(n)}(x_0) = n!, \end{aligned}$$

iar

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{R_n(\bar{x}_k)}{g(\bar{x}_k)} = 0.$$

Deoarece  $(\bar{x}_k)_{k \geq 0}$  era un șir arbitrar convergent la  $x_0$ , urmează conform definiției limitei că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Considerațiile de mai sus conduc la următorul rezultat.

**Teorema 7.17.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval. Dacă  $f$  este derivabilă de  $n$  ori în  $x_0 \in I$ , atunci există o funcție  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0$  și

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &\quad + \frac{\alpha(x)}{n!}(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

**Demonstrație.** Să considerăm atunci funcția  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin

$$\alpha(x) = \begin{cases} n! \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n}, & x \neq x_0 \\ 0, & x = x_0 \end{cases}$$

și să observăm că  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0$ , conform celor de mai sus. În plus,  $R_n(x) = \frac{\alpha(x)}{n!}(x - x_0)^n$ , pentru orice  $x \in I$  (chiar și pentru  $x = x_0$ , deoarece ambii membri sunt 0), de unde concluzia. ■

Restul de ordin  $n$  din formula de mai sus,

$$R_n(x) = \frac{\alpha(x)}{n!}(x - x_0)^n$$

se numește *restul lui Peano*.

În teorema precedentă s-a presupus că  $f$  este derivabilă de  $n$  ori în punctul  $x_0$ , obținându-se cu acest prilej o estimare a restului formulei lui Taylor. Vom presupune în cele ce urmează că  $f$  este derivabilă de  $n + 1$  ori pe întreg intervalul  $I$ , lucru care ne va ajuta să obținem exprimări mai precise ale restului.

Fie  $x_0, x \in I$ . Fie deasemenea  $p \in \mathbb{N}^*$  și fie  $C \in \mathbb{R}$  definit prin

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + C(x - x_0)^p.$$

Definim  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  prin

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x - t) + \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n + C(x - t)^p.$$

Atunci

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) = f(x),$$

și aplicând teorema lui Rolle funcției  $\varphi$  pe intervalul  $[x_0, x]$  (sau  $[x, x_0]$ ) obținem existența lui  $c$  situat între  $x_0$  și  $x$  (dependent de  $x_0, x, n$  și  $p$ ) astfel încât  $\varphi'(c) = 0$ .

Însă

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= f'(t) + \left( \frac{f''(t)}{1!}(x - t) - \frac{f'(t)}{1!} \right) + \left( \frac{f'''(t)}{2!}(x - t)^2 - \frac{f''(t)}{1!}(x - t) \right) + \dots \\ &\quad + \left( \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x - t)^{n-1} \right) - pC(x - t)^{p-1} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n - pC(x - t)^{p-1} \end{aligned}$$

și atunci

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n - pC(x - c)^{p-1} = 0,$$

de unde

$$C = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!p} (x - c)^{n-p+1}$$

Se obține atunci că restul  $R_n$  al formulei Taylor de ordinul  $n$  are forma

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!p} (x - x_0)^p (x - c)^{n-p+1}.$$

Pus sub această formă generală, restul  $R_n$  al formulei Taylor de ordinul  $n$  se numește *restul lui Schlömilch-Roche*. Prin particularizarea lui  $p$  în expresia de mai sus obținem alte forme importante ale restului de ordin  $n$ . Astfel, pentru  $p = 1$  obținem *restul lui Cauchy*, sub forma

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x - x_0)(x - c)^n,$$

în vreme ce pentru  $p = n + 1$  obținem *restul lui Lagrange*, sub forma

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Deoarece  $c$  se află între  $x_0$  și  $x$ , există  $\theta \in (0, 1)$  (dependent de  $x_0$ ,  $x$  și  $n$ ) astfel încât

$$c = x_0 + \theta(x - x_0),$$

iar cu notația  $h = x - x_0$ , formula lui Taylor se poate scrie astfel

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n,$$

unde  $R_n$  se poate pune sub una dintre următoarele forme

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{n!p} h^{n+1} (1 - \theta)^{n-p+1} && \text{(Schlömilch-Roche)} \\ R_n &= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{n!} h^{n+1} (1 - \theta)^n && \text{(Cauchy)} \\ R_n &= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!} h^{n+1} && \text{(Lagrange)}. \end{aligned} \tag{7.2}$$

**Formula lui MacLaurin**

Dacă în formula lui Taylor punem  $x_0 = 0$ , obținem *formula lui MacLaurin*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n,$$

$R_n$  obținându-se din formulele (7.2) pentru  $x_0 = 0$ . De asemenea, pentru  $n = 0$ , formula lui Taylor cu restul lui Lagrange reprezintă chiar teorema lui Lagrange.

**Exemple.** 1. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x$ . Cum

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

avem că  $f^{(n)}(0) = 1$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , iar

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n,$$

unde

$$R_n = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \theta \in (0, 1).$$

2. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x$ . Cum

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

avem că  $f^{(n)}(0) = \sin \frac{n\pi}{2}$ , deci  $f^{(2k)} = 0$ , iar  $f^{(2k+1)} = (-1)^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . De aici,

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n,$$

unde

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1} \sin\left(\theta x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \quad \theta \in (0, 1).$$

3. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \cos x$ . Cum

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

avem că  $f^{(n)}(0) = \cos \frac{n\pi}{2}$ , deci  $f^{(2k+1)} = 0$ , iar  $f^{(2k)} = (-1)^{k+1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

De aici,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2n!} + R_n,$$

unde

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1} \cos\left(\theta x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(2n+2)!} x^{2n+2}, \quad \theta \in (0, 1).$$

**Exemple.** 1. Fie  $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(1+x)$ . Cum

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*,$$

avem că  $f^{(n)}(0) = (-1)^{(n-1)}(n-1)!$ . De aici,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + R_n,$$

unde

$$R_n = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(1+\theta x)^n}, \quad \theta \in (0, 1).$$

2.  $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (1+x)^p$ . Cum

$$f^{(n)}(x) = p(p-1)\dots(p-n+1)(1+x)^{p-n}, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

avem că  $f^{(n)}(0) = p(p-1)\dots(p-n+1)$ . De aici,

$$(1+x)^p = 1 + \frac{px}{1!} + \frac{p(p-1)x^2}{2!} + \dots + \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)x^n}{n!} + R_n$$

unde

$$R_n = \frac{p(p-1)\dots(p-n)(1+\theta x)^{p-n-1}}{(n+1)!}, \quad \theta \in (0, 1).$$

### 7.3.7 Puncte de extrem ale unei funcții. Condiții necesare și suficiente

Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval. S-a observat anterior că punctele de extrem care sunt interioare lui  $I$  și în care  $f$  este derivabilă se găsesc printre punctele critice ale



funcției  $f$ , dar nu orice punct critic al unei funcții este neapărat punct de extrem. De exemplu, fie  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_1(x) = x^3$ . Atunci  $f_1'(x) = 3x^2$ , deci  $x = 0$  este punct critic al lui  $f_1$ . Totuși, acesta nu este punct de extrem, deoarece  $f_1(0) = 0$ , iar în orice vecinătate a lui 0 funcția  $f$  ia atât valori negative cât și valori pozitive. În cele ce urmează, vom obține condiții de extrem cu ajutorul derivatelor de ordin superior.

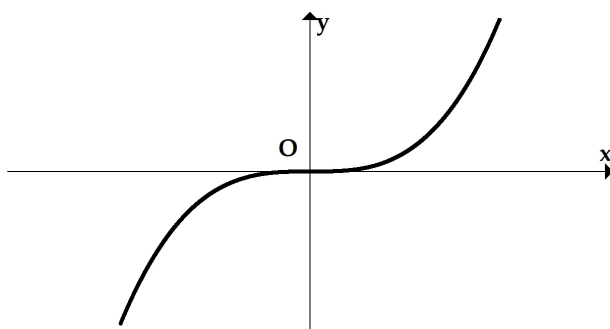


Figura 7.10: Graficul funcției  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_1(x) = x^3$ .  $x = 0$  este punct critic, dar nu este punct de extrem

**Teorema 7.18.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  și fie  $x_0 \in I$  astfel încât

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

1. Dacă  $n = 2k$ , atunci  $x_0$  este punct de extrem local.
  - (a) Dacă  $n = 2k$ , iar  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , atunci  $x_0$  este punct de minim local.
  - (b) Dacă  $n = 2k$ , iar  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , atunci  $x_0$  este punct de maxim local.
2. Dacă  $n = 2k + 1$ , iar  $x_0$  este punct interior lui  $I$ , atunci  $x_0$  nu este punct de extrem local.

**Demonstrație.** Conform formulei lui Taylor cu restul lui Peano, în care primele  $n - 1$  derivate în  $x_0$  se anulează conform ipotezei, obținem că

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \frac{\alpha(x)}{n!} (x - x_0)^n,$$

cu  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0$ . Atunci

$$f(x) - f(x_0) = \left( f^{(n)}(x_0) + \alpha(x) \right) \frac{(x - x_0)^n}{n!},$$

cu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)) = f^{(n)}(x_0).$$

Dacă  $n = 2k$ , iar  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , există  $V \in \mathcal{V}(x_0)$  astfel ca

$$f^{(n)}(x_0) + \alpha(x) > 0, \quad \text{pentru orice } x \in V,$$

iar deoarece  $(x - x_0)^{2k} \geq 0$  pentru orice  $x \in V$ , urmează că

$$f(x) - f(x_0) \geq 0, \quad \text{pentru orice } x \in V,$$

deci

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \text{pentru orice } x \in V,$$

iar  $x_0$  este punct de minim local.

Similar, dacă  $n = 2k$ , iar  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , există  $V \in \mathcal{V}(x_0)$  astfel încât

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \text{pentru orice } x \in V,$$

iar  $x_0$  este punct de maxim local.

Fie acum  $n = 2k + 1$  și fie  $x$  interior lui  $I$ . Dacă  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , există  $V \in \mathcal{V}(x_0)$  o vecinătate a lui  $x_0$  astfel ca

$$f^{(n)}(x_0) + \alpha(x) > 0, \quad \text{pentru orice } x \in V,$$

iar deoarece  $(x - x_0)^{2k+1} < 0$  pentru orice  $x \in V, x < x_0$ , respectiv  $(x - x_0)^{2k+1} > 0$  pentru orice  $x \in V, x > x_0$ , urmează că

$$f(x) - f(x_0) \leq 0 \quad \text{pentru orice } x \in V, \quad x < x_0$$

deci

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \text{pentru orice } x \in V, \quad x < x_0,$$

iar

$$f(x) - f(x_0) \geq 0, \quad \text{pentru orice } x \in V, \quad x > x_0,$$

deci

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \text{pentru orice } x \in V, \quad x > x_0,$$

iar  $x_0$  nu este punct de extrem local. Cazul în care  $f^{(n)}(x_0) < 0$  se tratează analog. ■

Pentru  $n = 2$ , se obține următorul corolar foarte util în studiul variației funcțiilor.

**Corolar 7.18.1.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabilă de două ori în  $x_0 \in I$  astfel încât  $f'(x_0) = 0$  și  $f''(x_0) \neq 0$ .

1. Dacă  $f''(x_0) > 0$ , atunci  $x_0$  este punct de minim local.
2. Dacă  $f''(x_0) < 0$ , atunci  $x_0$  este punct de maxim local.

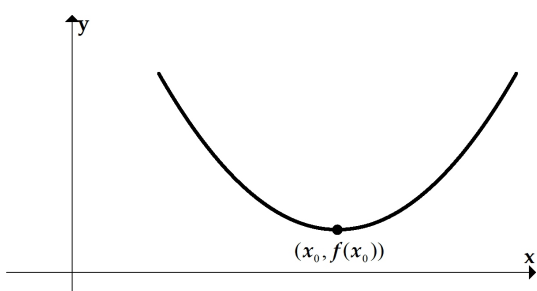


Figura 7.11:  $f'(x_0) = 0$  și  $f''(x_0) > 0$ .  
 $x_0$  este punct de minim local

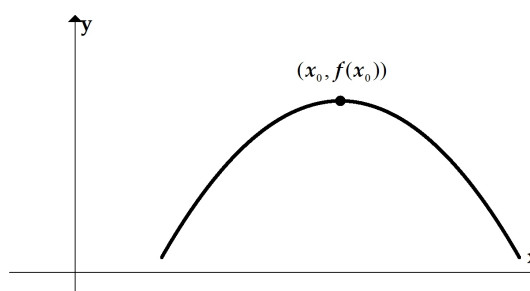


Figura 7.12:  $f'(x_0) = 0$  și  $f''(x_0) < 0$ .  
 $x_0$  este punct de maxim local

**Exercițiu.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 3x$ . Determinați punctele de extrem ale lui  $f$ .

**Soluție.** Cum  $f$  este derivabilă pe întreg  $\mathbb{R}$ , iar toate punctele domeniului sunt puncte interioare acestuia, urmează conform teoremei lui Fermat că punctele de extrem sunt printre punctele critice. Deoarece  $f'(x) = 3x^2 - 3$ ,  $f'$  se anulează pentru  $x_1 = -1$  și  $x_2 = 1$ . Cum  $f''(x) = 6x$ , urmează că  $f''(-1) = -6 < 0$ , iar  $f''(1) = 6 > 0$ , deci  $-1$  este un punct de maxim local, iar  $1$  este un punct de minim local.

## 7.4 Aspecte grafice în studiul variației funcțiilor

### 7.4.1 Asimptote

În situația în care este necesar să se studieze aspectul graficului unei funcții sau viteza ei de creștere, devine adesea important să se determine dacă acest grafic

are o formă apropiată de cea a unei linii drepte, respectiv dacă funcția are o creștere de un anumit tip precizat, de exemplu echivalentă cu cea a unei funcții de gradul întâi. Dreapta de care se „apropie” graficul funcției se va numi *asimptotă*, iar în funcție de poziția acesteia se vor obține, respectiv, noțiunile de asimptotă orizontală, verticală sau oblică.

### Asimptote orizontale

Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $+\infty$  (respectiv  $-\infty$ ) fiind punct de acumulare al mulțimii  $D$ . Vom spune că dreapta  $y = l$ ,  $l \in \mathbb{R}$ , este *asimptotă orizontală* la graficul funcției  $f$  spre  $+\infty$  (respectiv spre  $-\infty$ ) la graficul funcției  $f$  dacă  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  (respectiv  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ ).

Altfel spus, graficul unei funcții  $f$  are asimptotă orizontală spre  $+\infty$  (respectiv spre  $-\infty$ ) dacă  $f$  are o limită finită  $l$  la  $+\infty$  (respectiv la  $-\infty$ ). În această situație, graficul funcției se apropie foarte mult de dreapta orizontală  $y = l$  spre  $+\infty$  (respectiv spre  $-\infty$ ), această dreaptă fiind asimptotă orizontală la graficul funcției spre  $+\infty$  (respectiv spre  $-\infty$ ).

Desigur, dacă o funcție nu are limită la  $+\infty$ , atunci graficul acesteia nu are asimptotă orizontală către  $+\infty$ . Mai departe, dacă  $+\infty$  nu este punct de acumulare pentru domeniul funcției (de exemplu, dacă acesta este un interval de tip  $(-\infty, a)$ , cu  $a \in \mathbb{R}$ ), atunci de asemenea nu putem vorbi despre asimptotă orizontală la graficul acesteia spre  $+\infty$ , afirmații similare putându-se face și despre asimptotele orizontale spre  $-\infty$ .

**Exemple.** 1. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 - 3x + 2}$ . Deoarece

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = \frac{1}{2},$$

deci dreapta  $y = \frac{1}{2}$  este asimptotă orizontală la graficul funcției  $f$  spre  $+\infty$ . Printr-un calcul similar, se obține că această dreaptă este asimptotă orizontală la graficul funcției  $f$  și spre  $-\infty$ .

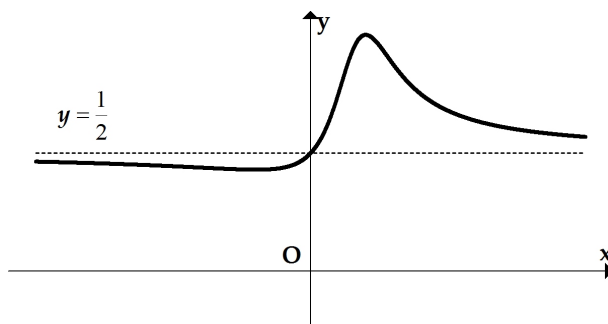


Figura 7.13: Graficul funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 - 3x + 2}$

2. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ . Deoarece

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -1, \end{aligned}$$

urmează că dreapta  $y = -1$  este asimptotă orizontală la graficul funcției  $f$  spre  $-\infty$ . Printr-un calcul similar, se obține că dreapta  $y = 1$  este asimptotă orizontală la graficul funcției  $f$  spre  $+\infty$ , cele două asimptote orizontale, către  $-\infty$  respectiv către  $+\infty$ , fiind diferite între ele.

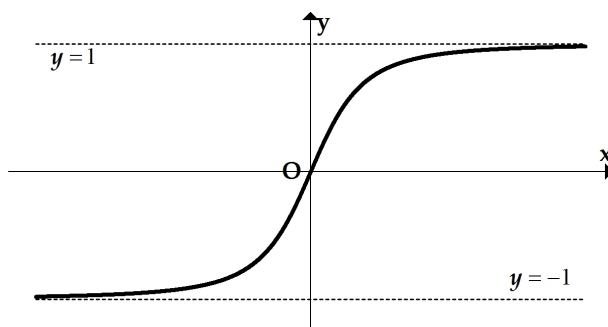


Figura 7.14: Graficul funcției  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

3. Fie  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x$ . Deoarece  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$  nu există, graficul funcției  $f$  nu are asimptotă orizontală către  $+\infty$ . Nu putem

vorbi despre asimptotă orizontală către  $-\infty$ , deoarece  $-\infty$  nu este punct de acumulare pentru domeniul funcției.

### Asimptote oblice

Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $+\infty$  fiind punct de acumulare al mulțimii  $D$ . Vom spune că dreapta  $y = mx + n$ ,  $m \in \mathbb{R}^*$ ,  $n \in \mathbb{R}$ , este *asimptotă oblică* la graficul funcției  $f$  spre  $+\infty$  dacă

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m, \quad \text{iar} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = n.$$

Similar, fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $-\infty$  fiind punct de acumulare al mulțimii  $D$ . Vom spune că dreapta  $y = mx + n$ ,  $m \in \mathbb{R}^*$ ,  $n \in \mathbb{R}$ , este *asimptotă oblică* la graficul funcției  $f$  spre  $-\infty$  la graficul funcției  $f$  dacă

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m, \quad \text{iar} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = n.$$

În aceste situații, graficul funcției se apropie foarte mult de dreapta oblică  $y = mx + n$  spre  $+\infty$ , respectiv spre  $-\infty$ .

Să notăm că, deoarece  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$ , o condiție necesară (dar nu și suficientă) ca graficul unei funcții să aibă asimptotă oblică spre  $+\infty$  este ca acea funcție să aibă limită infinită la  $+\infty$ . În concluzie, existența unei asimptote oblice spre  $+\infty$  exclude existența unei asimptote orizontale spre  $+\infty$  și reciproc, un raționament similar putând fi efectuat relativ la existența asimptotelor orizontale sau oblice spre  $-\infty$ .

**Exemple.** 1. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^3 + x - 1}{x^2 + x + 1}$ . Atunci

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x - 1}{x(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3})}{x^3(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})} = 1,$$

iar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + x - 1}{x^2 + x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 - 1}{x^2 + x + 1} = -1.$$

De aici, dreapta  $y = x - 1$  este asimptotă oblică la graficul funcției  $f$  spre  $+\infty$ . Printr-un calcul similar, se obține că această dreaptă este asimptotă oblică la graficul funcției  $f$  și spre  $-\infty$ .

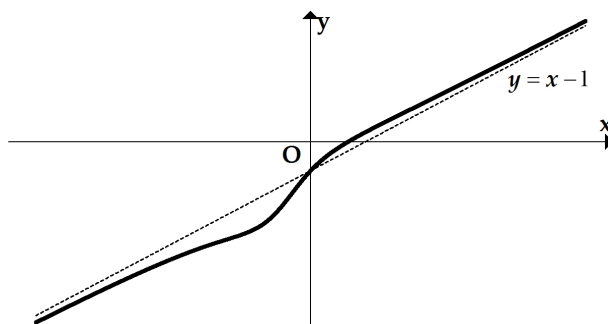


Figura 7.15: Graficul funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^3+x-1}{x^2+x+1}$

2. Fie  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = xe^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ . Atunci

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1,$$

iar

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( xe^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \infty \cdot 1 = +\infty. \end{aligned}$$

Cum  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = +\infty$ , urmează că graficul lui  $f$  nu are asimptote oblice spre  $+\infty$ . Nu putem vorbi despre asimptote oblice spre  $-\infty$  deoarece  $-\infty$  nu este punct de acumulare pentru domeniul funcției.

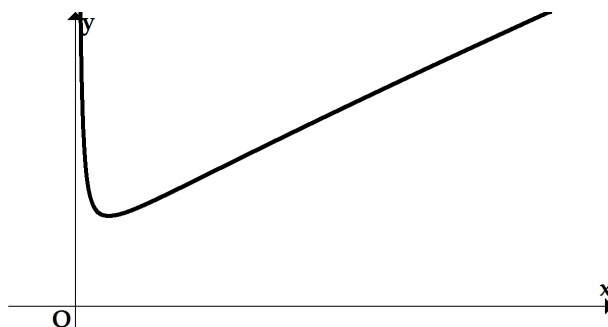


Figura 7.16: Graficul funcției  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = xe^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

**Asimptote verticale**

Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  fiind punct de acumulare la stânga al mulțimii  $D$ . Vom spune că dreapta  $x = a$  este *asimptotă verticală* la stânga spre  $+\infty$  (respectiv spre  $-\infty$ ) la graficul funcției  $f$  dacă

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = +\infty, \quad (\text{respectiv } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = -\infty).$$

Similar, fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  fiind punct de acumulare la dreapta al mulțimii  $D$ . Vom spune că dreapta dreapta  $x = a$  este *asimptotă verticală* la dreapta spre  $+\infty$  (respectiv spre  $-\infty$ ) la graficul funcției  $f$  dacă

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty, \quad (\text{respectiv } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = -\infty).$$

În aceste situații, graficul funcției  $f$  se apropie foarte mult de dreapta verticală  $x = a$ , în circumstanțele precizate. Să notăm că existența asimptotelor verticale nu exclude nici existența asimptotelor orizontale, nici a celor oblice, deoarece acestea din urmă sunt determinate cu ajutorul unor limite pentru  $x \rightarrow +\infty$  sau  $x \rightarrow -\infty$ , nu pentru  $x$  tinzând la valori finite, așa cum este cazul asimptotelor verticale. De asemenea, întrucât existența asimptotelor verticale presupune existența unor limite infinite, graficele funcțiilor mărginite pe domeniile de definiție nu au asimptote verticale, iar asimptotele verticale ale funcțiilor nemărginite se caută în punctele "patologice" ale domeniului de definiție sau funcției, de exemplu zerouri ale unor numitori sau ale unor argumente de funcții logaritmice.

**Exemple.** 1. Fie  $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ . Atunci

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x+1}{x-1} = -\infty,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x+1}{x-1} = \infty,$$

iar dreapta  $x = 1$  este asimptotă verticală la stânga la graficul funcției  $f$  spre  $-\infty$ , respectiv la dreapta spre  $+\infty$ .



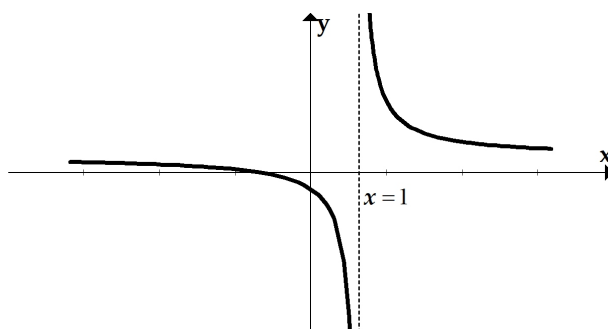


Figura 7.17: Graficul funcției  $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

2. Fie  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x$ . Atunci

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty,$$

iar dreapta  $x = 0$  este asimptotă verticală la dreapta la graficul funcției  $f$  spre  $-\infty$ . Să notăm că  $0$  nu este punct de acumulare la stânga pentru domeniul lui  $f$  (de fapt,  $f$  nici măcar nu este definită pentru  $x < 0$ ), dreapta  $x = 0$  nefiind și asimptotă verticală la stânga la graficul funcției  $f$ .

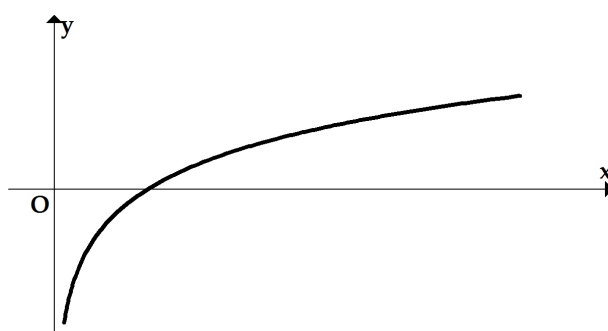


Figura 7.18: Graficul funcției  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x$

**Exercițiu.** Determinați asimptotele funcției  $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}}$ .

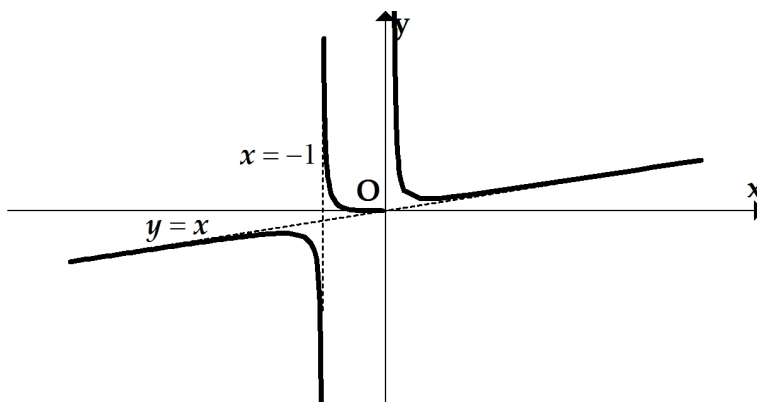


Figura 7.19: Graficul funcției  $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}}$

**Soluție.** Deoarece

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = \infty \cdot 1 = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = -\infty \cdot 1 = -\infty,$$

graficul funcției nu are asimptote orizontale.

Studiem acum existența asimptotelor oblice, începând cu cea spre  $+\infty$ . Se observă că

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = 1 \cdot 1 = 1,$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}} - x^2 - x}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x+1} (e^{\frac{1}{x}} - 1) - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} - 1 = 1 - 1 = 0,$$

deci dreapta  $y = x$  este asimptotă oblică la graficul funcției  $f$  spre  $+\infty$ . Un calcul similar arată că această dreaptă este asimptotă oblică la graficul funcției  $f$  și spre  $-\infty$ .

În ceea ce privește existența asimptotelor verticale, observăm că

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{0^-} e^{-1} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{0+} e^{-1} = +\infty,$$

deci dreapta  $x = -1$  este asimptotă verticală la stânga la graficul funcției  $f$  spre  $-\infty$ , respectiv asimptotă verticală la dreapta la graficul funcției  $f$  spre  $+\infty$ . Similar,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = \frac{0}{1} \cdot e^{\frac{1}{0^-}} = 0 \cdot 0 = 0,$$

în vreme ce

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{x+1} \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = 1 \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{y} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{1} = \infty,$$

deci dreapta  $x = 0$  este asimptotă verticală la dreapta (nu însă și la stânga) la graficul funcției  $f$  spre  $+\infty$ .

## 7.4.2 Convexitate. Concavitare

Adesea, informațiile oferite de prima derivată a unei funcții nu sunt suficiente pentru descrierea precisă a modului de variație a acelei funcții. În special, aceste informații pot fi insuficiente pentru determinarea formei graficului funcției. În cele ce urmează, vom studia rolul derivatei a doua a unei funcții în precizarea formei graficului acelei funcții.

### Funcții convexe și strict convexe

Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval. Vom spune că  $f$  este *convexă* pe  $I$  dacă oricare ar fi  $x, y \in I$  și oricare ar fi  $t \in [0, 1]$  are loc inegalitatea

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

De asemenea, vom spune că  $f$  este *strict convexă* pe  $I$  dacă oricare ar fi  $x, y \in I$  și oricare ar fi  $t \in (0, 1)$  are loc inegalitatea

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y).$$

### Interpretarea geometrică a convexității

Deoarece  $M(tx + (1-t)y, f(tx + (1-t)y))$  este punctul de pe graficul funcției corespunzător abscisei  $tx + (1-t)y$ , iar  $N(tx + (1-t)y, tf(x) + (1-t)f(y))$  este punctul cu aceeași abscisă de pe segmentul determinat de  $A(x, f(x))$  și  $B(y, f(y))$ , observăm că  $f$  este convexă dacă și numai dacă pentru orice două puncte  $A, B$  de pe graficul funcției, porțiunea de grafic dintre  $A$  și  $B$  se află sub segmentul  $AB$  determinat de acestea.

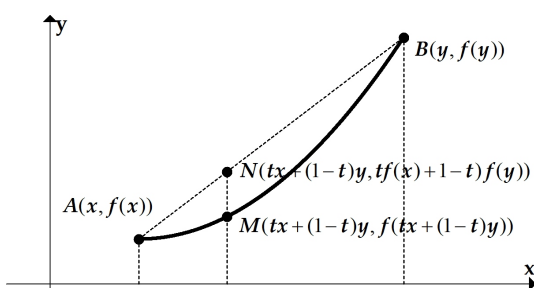


Figura 7.20: Graficul unei funcții convexe

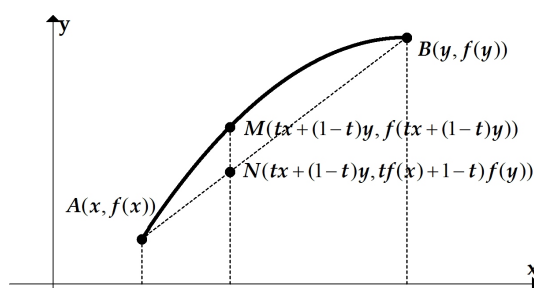


Figura 7.21: Graficul unei funcții concave

### Funcții concave și strict concave

Similar, vom spune că  $f$  este *concavă* pe  $I$  dacă oricare ar fi  $x, y \in I$  și oricare ar fi  $t \in [0, 1]$  are loc inegalitatea

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y),$$

respectiv că  $f$  este *strict concavă* pe  $I$  dacă oricare ar fi  $x, y \in I$  și oricare ar fi  $t \in (0, 1)$  are loc inegalitatea

$$f(tx + (1-t)y) > tf(x) + (1-t)f(y).$$

Se observă că  $f$  este (strict) concavă dacă și numai dacă  $-f$  este (strict) convexă.

### Interpretarea geometrică a concavității

Prin analogie cu interpretarea geometrică a convexității unei funcții, se observă că  $f$  este concavă dacă și numai dacă pentru orice două puncte  $A, B$  de pe graficul funcției, porțiunea de grafic dintre  $A$  și  $B$  se află deasupra segmentului  $AB$  determinat de acestea.

### O proprietate de monotonie

În cele ce urmează, se va observa că proprietatea unei funcții de a fi convexă implică monotonia unui anumit raport incremental.

**Teorema 7.19.** Fie  $I \subseteq \mathbb{R}$  un interval și fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  convexă pe  $I$ . Fie deasemenea  $a \in \mathbb{R}$ . Atunci funcția  $g_a : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ , este crescătoare.

### Continuitatea funcțiilor convexe

Cu ajutorul proprietății de mai sus, putem deduce că o funcție convexă este continuă pe interiorul domeniului ei de definiție.

**Teorema 7.20.** Fie  $I \subseteq \mathbb{R}$  un interval și fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  convexă pe  $I$ . Fie deasemenea  $a \in \overset{\circ}{I}$ . Atunci  $f$  este continuă în  $a$ .

### O altă interpretare grafică a noțiunii de convexitate

Tot cu ajutorul Teoremei 7.19, putem demonstra următorul rezultat.

**Teorema 7.21.** Fie  $I \subseteq \mathbb{R}$  un interval și fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  convexă pe  $I$ . Fie de asemenea  $a \in I$  un punct în care  $f$  este derivabilă lateral. Atunci

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq f'_s(a) \leq f'_d(a) \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \quad \text{pentru } x < a < y \in I.$$

În particular, dacă  $f$  este derivabilă în  $a$ , urmează că

$$f(x) - f(a) \geq f'(a)(x - a), \quad \text{pentru } x \in I,$$

deci

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a), \quad \text{pentru } x \in I. \quad (7.3)$$

Cum  $B(x, f(a) + f'(a)(x - a))$  este punctul de pe tangenta la graficul funcției  $f$  în  $A(a, f(a))$  corespunzător abscisei  $x$ , urmează că o funcție derivabilă  $f$  este convexă pe  $I$  dacă și numai dacă pentru orice punct  $A(a, f(a))$  de pe grafic, graficul funcției este situat deasupra tangentei în  $A$  la grafic.

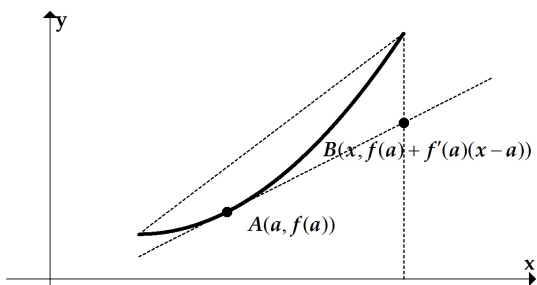


Figura 7.22: Graficul unei funcții convexe

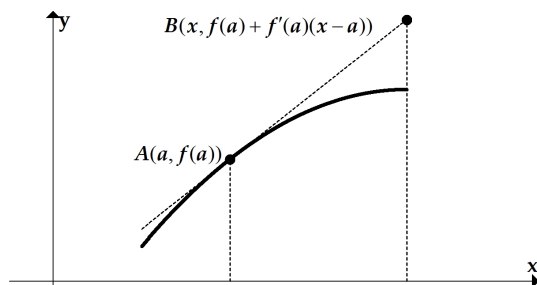


Figura 7.23: Graficul unei funcții concave

### Studiul convexității și concavității cu ajutorul derivatei de ordinul al doilea

În cele ce urmează, vom vedea că se poate preciza convexitatea sau concavitățile unei funcții cunoscând semnul derivatei de ordinul al doilea.

**Teorema 7.22.** Fie  $I \subseteq \mathbb{R}$  un interval și fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de două ori derivabilă pe  $I$ . Atunci au loc următoarele afirmații.

1.  $f''(x) \geq 0$  pentru orice  $x \in I$  dacă și numai dacă  $f$  este convexă pe  $I$ .
2.  $f''(x) \leq 0$  pentru orice  $x \in I$  dacă și numai dacă  $f$  este concavă pe  $I$ .

Se poate observa că dacă  $f'' > 0$  pe  $I$ , atunci  $f$  este strict convexă pe  $I$ .

- Exemple.**
1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  este convexă pe  $\mathbb{R}$ , deoarece  $f''(x) = 2 > 0$  pentru  $x \in \mathbb{R}$ .
  2.  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x$  este concavă pe  $(0, \infty)$ , întrucât  $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$  pentru  $x \in (0, \infty)$ .
  3.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^3}{6}$ , este convexă pe  $[0, \infty)$  și concavă pe  $(-\infty, 0]$ , întrucât  $f''(x) = x$ ,  $f''(x) \geq 0$  pentru  $x \in [0, \infty)$ ,  $f''(x) \leq 0$  pentru  $x \in (-\infty, 0]$ .

### Inegalitatea lui Jensen

Pornind de la definiția convexității, se poate demonstra prin inducție matematică faptul că dacă  $f$  este convexă pe  $I$ , atunci

$$f(p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n) \leq p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \dots + p_nf(x_n)$$

pentru orice  $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$  și orice  $t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, 1]$  cu  $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$ , inegalitate cunoscută sub numele de *inegalitatea lui Jensen*, pentru funcții concave având loc inegalitatea inversă.

În particular, pentru  $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 1/n$ , se obține că

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n},$$

pentru orice  $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ , pentru funcții concave având loc inegalitatea inversă.

**Exemple.** 1. Deoarece  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x$  este concavă pe  $[0, \pi]$ , urmează că dacă  $A, B, C$  sunt unghiuri ale unui triunghi, atunci

$$\sin \frac{A + B + C}{3} \geq \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3},$$

de unde, ținând seama că  $A + B + C = \pi$ , obținem că

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

2. Deoarece  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x$  este concavă pe  $(0, \infty)$ , urmează că

$$\begin{aligned} \ln \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} &\geq \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n}{n} \\ &= \ln \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}, \end{aligned}$$

pentru orice  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, \infty)$  ceea ce înseamnă că

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n},$$

pentru orice  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, \infty)$ , ceea ce, împreună cu observația că inegalitatea rămâne adevărată și atunci când unul sau mai mulți  $x_i$  sunt nuli, demonstrează validitatea inegalității mediilor.

### Puncte de inflexiune

Fie  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^3$ . Observăm că, deoarece  $g''(x) = 6x$ ,  $g$  este concavă pe  $(-\infty, 0]$  și convexă pe  $[0, \infty)$ , în  $x_0 = 0$  schimbându-se convexitatea funcției. Graficul funcției  $f$  are tangentă în punctul corespunzător  $(x_0, g(x_0)) = (0, 0)$ ,

porțiunea din graficul lui  $g$  corespunzătoare lui  $x \geq 0$  aflându-se deasupra acestei tangente, iar porțiunea din graficul lui  $g$  corespunzătoare lui  $x \leq 0$  aflându-se dedesubtul acesteia. În cele ce urmează, vom încadra această situație tipică într-un cadru mai general.

Fie  $I \subseteq \mathbb{R}$  un interval,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  și fie  $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ . Atunci  $x_0$  se numește *punct de inflexiune al funcției  $f$*  dacă

1.  $f$  este continuă în  $x_0$ ;
2.  $f$  are derivată în  $x_0$ , finită sau infinită;
3. Există  $a, b \in I, a < x_0 < b$  astfel încât

$f$  este convexă pe  $(a, x_0)$  și concavă pe  $(x_0, b)$ , sau  
 $f$  este concavă pe  $(a, x_0)$  și convexă pe  $(x_0, b)$ .

În această situație, se spune că punctul corespunzător  $A(x_0, f(x_0))$  este *punct de inflexiune al graficului funcției  $f$* .

Din punct de vedere geometric, faptul că  $x_0$  este punct de inflexiune al funcției  $f$  înseamnă că graficul funcției  $f$  are tangentă în  $A(x_0, f(x_0))$ , iar tangenta în  $A$  „traversează” graficul funcției  $f$ , în sensul că de o parte a lui  $A$  tangenta se află sub grafic, iar de cealaltă parte se află deasupra graficului.

Având în vedere caracterizarea convexității unei funcții cu ajutorul semnelui derivatei de ordinul al doilea, se obține următorul rezultat.

**Teorema 7.23.** Fie  $I \subseteq \mathbb{R}$  un interval,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  și fie  $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ . Dacă sunt îndeplinite condițiile

1.  $f$  este continuă în  $x_0$ ;
2.  $f$  are derivată în  $x_0$ , finită sau infinită;
3. Există  $a, b \in I, a < x_0 < b$  astfel încât

$f''(x) \geq 0$  pe  $(a, x_0)$  și  $f''(x) \leq 0$  pe  $(x_0, b)$ , sau



$$f''(x) \leq 0 \text{ pe } (a, x_0) \text{ și } f''(x) \geq 0 \text{ pe } (x_0, b),$$

atunci  $x_0$  este punct de inflexiune al funcției  $f$ .

În condițiile acestei teoreme, putem spune că  $x_0$  este punct de inflexiune numai dacă  $f''$  își schimbă semnul la trecerea de la stânga lui  $x_0$  la dreapta lui  $x_0$ . De asemenea, are loc următorul rezultat.

**Teorema 7.24.** Fie  $I \subseteq \mathbb{R}$  un interval,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabilă de două ori pe  $I$ , iar  $x_0 \in \overset{\circ}{I}$  un punct de inflexiune al lui  $f$ . Atunci  $f''(x_0) = 0$ .

**Exemple.** 1. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 3x + 2$ . Atunci  $f$  este de două ori derivabilă pe  $\mathbb{R}$ , iar  $f''(x) = 6x$ . Atunci  $f$  este concavă pe  $(-\infty, 0]$ , respectiv convexă pe  $[0, \infty)$ . Cum  $f$  este continuă în 0, iar  $f$  are derivată în 0,  $f'(0) = -3$ , urmează că 0 este punct de inflexiune.

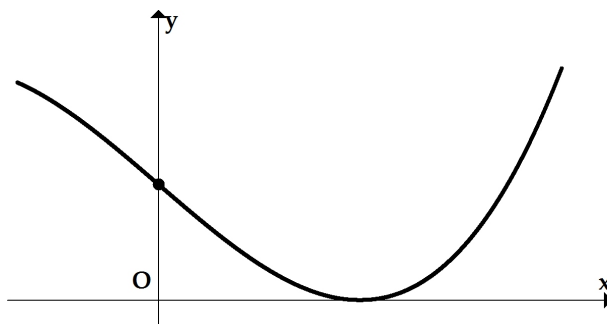


Figura 7.24: 0 este punct de inflexiune pentru  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 3x + 2$

2. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$ . Atunci  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$  și derivabilă de două ori pe  $\mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ , iar

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-2)^5}}.$$

Cum  $f$  are derivată în 2,  $f'(2) = +\infty$ , iar  $f$  este convexă pe  $(-\infty, 2)$  respectiv concavă pe  $(2, \infty)$ , 2 este punct de inflexiune.

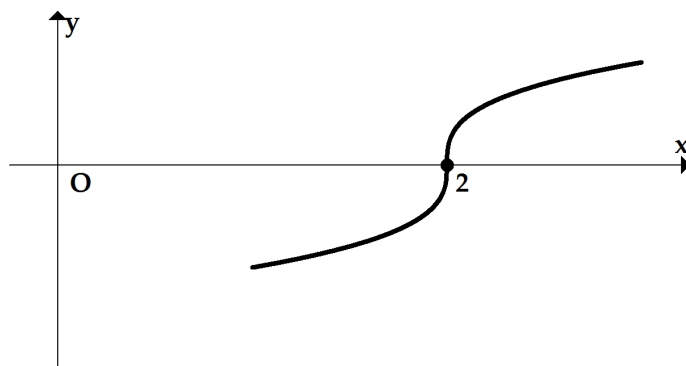


Figura 7.25: 2 este punct de inflexiune pentru  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x-2}$

## Aplicații

7.1. Cu ajutorul formulei de derivare  $(x^k)' = kx^{k-1}$ , determinați valoarea sumei  $\sum_{k=1}^n kx^{k-1}$ .

7.2. Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} a^2 + x + 1, & x > 0 \\ a \sin x + b \cos x, & x \leq 0 \end{cases}$ . Determinați  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât  $f$  să fie derivabilă în  $x_0 = 0$ .

7.3. Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} ax + b, & x > 0 \\ e^x + 2, & x \leq 0 \end{cases}$ . Determinați  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât  $f$  să fie derivabilă în  $x_0 = 0$ .

7.4. Fie  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 + |x|, g(x) = 1 - |x|$ . Demonstrați că  $f, g$  nu sunt derivabile în  $x_0 = 0$ , dar  $f + g$  este derivabilă în  $x_0 = 0$ .

7.5. Fie  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f$  pară și derivabilă în  $x_0 = 0$ . Demonstrați că  $f'(0) = 0$ .

7.6. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f$  derivabilă în  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Determinați

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n (f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0))$ ; 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (f(x_0 + \frac{1}{n^2}) - f(x_0 - \frac{1}{n^2}))$ ;
- 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n (f(x_0 + \frac{1}{n}) + f(x_0 + \frac{2}{n}) + f(x_0 + \frac{3}{n}) - 3f(x_0))$ .

7.7. Determinați (dacă există) punctele de pe graficul funcțiilor  $f$  următoare,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , în care tangenta este paralelă cu axa  $Ox$

- 1)  $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 1$ ; 2)  $f(x) = x^5 + 2x + 1$ ; 3)  $f(x) = 4x + 2$ .

**7.8.** Fie  $f : (\frac{2}{3}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(3x - 2)$ . Determinați punctele de pe graficul funcției  $f$  în care tangenta este paralelă cu dreapta  $y = 3x + 4$ .

**7.9.** Determinați ecuațiile tangentelor la graficul funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - x^2$  în punctele de abscise respectiv  $0$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $1$  și precizați unghiurile pe care aceste tangente le fac cu axa  $Ox$ .

**7.10.** Să se arate că dreapta  $y = 7x - 2$  este tangentă la curba  $y = x^3 + 4x$ .

**7.11.** Determinați cea mai mică pantă posibilă a tangentei la curba  $y = x^3 - 3x^2 + 7x$ .

**7.12.** Demonstrați că funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ , este continuă în  $x_0 = 0$ , dar graficul său nu are tangentă în  $A(0, 0)$ .

**7.13.** Fie funcțiile  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + 1$ ,  $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{x+1}{x}$ . Determinați  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât graficele celor două funcții să aibă tangentă comună într-un punct de abscisă  $1$ .

**7.14.** Precizați dacă graficele funcțiilor  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_1(x) = |1 - x^2|$ ,  $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_2(x) = \sqrt{|1 - x^2|}$ ,  $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_3(x) = \max(x^2 + 5x, 4x + 2)$ , au puncte unghiulare sau de întoarcere.

**7.15.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2 - 4}$ . Demonstrați că  $f$  verifică relația

$$f(x)f'(x) = x\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}}, \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}.$$

**7.16.** Fie  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $f(x) = e^{2\sqrt{x}} + e^{-2\sqrt{x}}$ . Demonstrați că  $f$  verifică relația

$$xf''(x) + f'(x) - f(x) = 0, \quad \text{pentru } x \in (0, \infty).$$

**7.17.** Demonstrați că

$$(\ln(ax + b))^{(n)} = \frac{(-1)^n (n-1)! a^n}{(ax + b)^n}, \quad \text{pentru } n \geq 1.$$

**7.18.** Folosind eventual o descompunere în fracții simple, demonstrați că

$$\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{2n!} \left[ \frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right], \quad \text{pentru } n \geq 1.$$

**7.19.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{x^2}$ . Demonstrați că  $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{x^2}$ , unde  $P_n$  este un polinom de gradul  $n$  și determinați o formulă de recurență pentru calculul lui  $P_n$ .

**7.20.** Determinați

$$1) (x \ln(3x - 1))^{(n)}; \quad 2) (x^2 \cos x)^{(n)}; \quad 3) ((x^2 + x + 3)e^{2x})^{(n)}; \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

**7.21.** Fie  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $f(x) = x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$ . Demonstrați că  $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{f(x)}{x^{2n}}$ .

**7.22.** Fie  $f : [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x}$ . Demonstrați că  $f$  este strict crescătoare și precizați mulțimea valorilor funcției.

**7.23.** Fie  $f : (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ ,  $f(x) = e^x + x^2 + 3x$ . Demonstrați că  $f$  este strict crescătoare, bijectivă și calculați  $(f^{-1})'(e^2 + 10)$ .

**7.24.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ,  $f(x) = \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x}$ . Demonstrați că  $f$  este strict descrescătoare, bijectivă și calculați  $(f^{-1})'(2)$ .

**7.25.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{ax + a - 2}{x^2 + 1}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât  $x_0 = 1$  să fie punct de extrem.

**7.26.** Fie  $a, b, c \in (0, \infty)$ . Dacă  $a^x + b^x + c^x \geq 3$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , demonstrați folosind teorema lui Fermat că  $abc = 1$ .

**7.27.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție polinomială de gradul  $n$ ,  $n \geq 2$ , cu  $n$  rădăcini reale distincte. Demonstrați că ecuația  $f'(x) = 0$  are exact  $n - 1$  rădăcini reale distincte.

**7.28.** Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Demonstrați că ecuația

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \dots + \frac{1}{x-(n+1)} = 0,$$

are exact  $n$  rădăcini reale.

**7.29.** Determinați numărul de rădăcini reale ale ecuațiilor

$$1) x^3 + 3x^2 - 5 = 0; \quad 2) x^4 - 14x^2 + 24x - 6 = 0; \quad 3) x^5 - 5x + 1 = 0;$$

$$4) 3x \ln x + 2 = 0; \quad 5) xe^x - 2 = 0$$

**7.30.** Demonstrați că ecuația  $2x^3 + 3x + m = 0$  are o unică rădăcină reală indiferent de valoarea parametrului  $m \in \mathbb{R}$ .

**7.31.** Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție Rolle pe  $[a, b]$  cu proprietatea că  $f(a)^2 + b^2 = f(b)^2 + a^2$ . Să se demonstreze că ecuația  $f(x)f'(x) = x$  are măcar o rădăcină în intervalul  $(a, b)$ .

**7.32.** Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție Rolle pe  $[a, b]$ .

1. Demonstrați că  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = (x - a)(x - b)f(x)$ , este de asemenea o funcție Rolle pe  $[a, b]$ .

2. Demonstrați că există  $c \in (a, b)$  astfel încât  $\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{1}{a - c} + \frac{1}{b - c}$ .

**7.33.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ . Determinați punctele în care funcția nu este derivabilă.

**7.34.** 1. Demonstrați că  $e^x \geq 1 + x$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

2. Folosind această inegalitate, demonstrați că

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n},$$

pentru orice  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$  (inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică a  $n$  numere pozitive).

**7.35.** Folosind teorema lui Lagrange, demonstrați inegalitățile

1.  $na^{n-1}(b - a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b - a)$ ,  $0 \leq a < b$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

2.  $\frac{b-a}{\cos^2 a} < \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a < \frac{b-a}{\cos^2 b}$ ,  $0 \leq a < b < \frac{\pi}{2}$ .

3.  $3^p + 6^p > 4^p + 5^p$ ,  $p > 1$ .

4.  $(x + 1) \cos \frac{\pi}{x+1} - x \cos \frac{\pi}{x}$ , pentru  $x \geq 2$ .

**7.36.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{x^6+5}$ . Demonstrați cu ajutorul teoremei lui Lagrange că  $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$  pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**7.37.** Folosind teorema lui Lagrange, demonstrați că  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^{\sin x}}{\operatorname{tg} x - \sin x} = 1$ .

**7.38.** Folosind teorema lui Lagrange, arătați că ecuația  $3^x + 4^x = 2^x + 5^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , are doar soluțiile  $x = 0$  și  $x = 1$ .

**7.39.** Fie  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  două funcții derivabile cu proprietățile că  $f(2012) = g(2012)$  și  $f' \cdot g^2 = g' \cdot f^2$ . Demonstrați că  $f = g$ .

**7.40.** Demonstrați că pe intervalele indicate funcțiile următoare diferă printr-o constantă, a cărei valoare se cere

1.  $f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, g(x) = \operatorname{arctg} x$  pe  $\mathbb{R}$ .

2.  $f(x) = \operatorname{arctg}(x+2), g(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{(x+1)^2}{2}$  pe  $\mathbb{R}$ .

**7.41.** Fie  $f, g : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 \operatorname{arctg} x, g(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ . Demonstrați că  $f$  și  $g$  au aceeași derivată pe  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ , dar  $(f-g)(\sqrt{3}) = \pi, (f-g)(-\sqrt{3}) = -\pi$ , deci  $f$  și  $g$  nu diferă printr-o constantă. Cum explicați?

**7.42.** Demonstrați inegalitățile

1.  $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ , pentru orice  $x > 0$ .

2.  $e^x + e^{-x} \geq 2 + x^2$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

3.  $2x \operatorname{arctg} x \geq \ln(1+x^2)$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

4.  $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

5.  $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$ , pentru orice  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

**7.43.** Fie  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x}$ . Determinați valoarea maximă a lui  $f$  și deduceți de aici că  $e^x \geq x^e$  pentru orice  $x \in (0, \infty)$ .

**7.44.** Determinați valorile limitelor

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ ; 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x}{\sin(\operatorname{tg} x)}$ ; 3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1 - n(x-1)}{(x-1)^2}$ ;  
 4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$ ; 5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(4 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{4x})}$ ; 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{\sin x}}$ ; 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\arcsin x} - \frac{1}{x} \right)$ ;  
 8)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$ ; 9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ ; 10)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \ln \frac{1}{x-2}$ ; 11)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)^x$ ;  
 12)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$ ; 13)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^{\frac{2}{3+4 \ln x}}$ .

**7.45.** Dezvoltați funcția polinomială  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$  după puterile lui  $x - 2$ .

**7.46.** Determinați polinomul lui Taylor de ordinul  $n$  asociat următoarelor funcții în punctele date

1)  $f(x) = e^{-3x}$ ;  $x_0 = -\frac{1}{3}$ ; 2)  $f(x) = \ln(1 + 3x)$ ;  $x_0 = \frac{1}{3}$ ; 3)  $f(x) = \sqrt{4x - 3}$ ;  $x_0 = 1$ ; 4)  $f(x) = \cos^2 x$ ;  $x = \frac{\pi}{6}$ ; 5)  $f(x) = \operatorname{sh} x$ ;  $x_0 = 1$ .

**7.47.** Determinați asimptotele funcțiilor

1.  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x}$ ;

2.  $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - \ln(1 + x)$ ;

3.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{(x-1)(x-2)}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \\ 0, & x = 1 \text{ sau } x = 2 \end{cases}$ ;

4.  $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{\left| \frac{x^3 - x}{x + 2} \right|}$ ;

5.  $f : (-3, 3) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$ ;

6.  $f : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2 - 1}$ ;

7.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin^2 x + 2 \cos 3x$ ;

8.  $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x - 2|^{\frac{1}{x-1}}$ .

**7.48.** Determinați  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât graficul funcției  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$  să aibă dreapta  $y = 1$  ca asimptotă orizontală.

**7.49.** Determinați  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât graficul funcției  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + ax + a}$ , să aibă o unică asimptotă verticală.

**7.50.** Determinați  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât graficul funcției  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x + 2}$  să aibă dreapta  $y = x + 2$  ca asimptotă oblică spre  $+\infty$ .

**7.51.** Determinați  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât graficul funcției  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt[3]{ax^2 + bx}$  să aibă dreapta  $y = 2x + 1$  ca asimptotă oblică spre  $+\infty$ .

**7.52.** Demonstrați că graficul unei funcții polinomiale de grad  $n$ ,  $n \geq 2$ , nu are asimptote.

**7.53.** Determinați o funcție  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  care să aibă ca asimptote verticale toate dreptele  $x = k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**7.54.** Fie  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval, două funcții convexe. Demonstrați că  $f + g$  este o funcție convexă. Se poate spune același lucru și despre  $f - g$ ?

**7.55.** Determinați intervalele de convexitate și concavitate pentru funcțiile

1.  $f : (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$ ,  $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ ;

2.  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 \ln x$ ;

3.  $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{1-x}$ ;

4.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{3} \sin x + 2 \cos x$ ;

5.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{-x^2}$ .

Au aceste funcții puncte de inflexiune?

**7.56.** Studiind eventual convexitatea funcției  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^n$ , demonstrați că  $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leq \frac{x^n+y^n}{2}$ , pentru orice  $x, y \geq 0$  și orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

**7.57.** Studiind eventual convexitatea funcției  $f : [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $f(x) = \sqrt{\sin x}$ , demonstrați că în orice triunghi  $ABC$  există relația  $\sqrt{\sin \frac{A}{2}} + \sqrt{\sin \frac{B}{2}} + \sqrt{\sin \frac{C}{2}} \leq 3\sqrt{\frac{2}{2}}$ .

**7.58.** Studiind eventual convexitatea funcției  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \ln x$ , demonstrați că  $\ln \frac{x+y}{2} < \frac{x}{x+y} \ln x + \frac{y}{x+y} \ln y$ , pentru orice  $x, y > 0$ .