Funcții continue în punct şi pe o mulțime

Funcțiile continue sunt un caz particular de funcții care au limită. Conceptul de ***continuitate*** este o ipoteză fundamentală în studiul unor fenomene din realitate, dar de multe ori apar şi fenomene care prezintă discontinuități. Proprietățile unui ***fenomen discontinuu*** se vor studia prin ***aproximarea*** acestuia cu alt fenomen continuu suficient de asemănător în aspectele sale esențiale.

Definiția 3.6

Fie $A \subseteq \mathbf{R}, x_0 \in A$ şi $f : A \to \mathbf{R}$

1] ***Funcția f este continuă în $x_0 \in A$***

$\overset{def}{\Leftrightarrow} (1) \{\forall V \in \mathcal{V}(x_0), \exists U \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $\forall x \in A \cap U \Rightarrow f(x) \in V$

(definiția cu vecinătăți)

2] ***Funcția f este continuă pe A*** sau *f* este ***funcție continuă*** $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ *f* este continuă în $\forall x \in A$.

3] Dacă *f* nu este continuă în $x_0 \in A$, prin definiție, ***f este funcție discontinuă în x_0*** şi x_0 se numeşte ***punct de discontinuitate al funcției f din A***.

Teorema 3.6 (Teoremă de caracterizare pentru funcții continue)

Fie $A \subseteq \mathbf{R}, x_0 \in A$ şi $f : A \to \mathbf{R}$*, următoarele afirmații sunt echivalente:*

(i) f continuă în $x_0 \in A$ (definiție cu vecinătăți)

(ii) $(2) \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \text{ a.î. } \forall x \in A \text{ cu } d(x, x_0) = |x - x_0| < \delta \Rightarrow \\ \Rightarrow d[f(x), f(x_0)] = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \,(\text{definiția cu } (\delta - \varepsilon)) \end{cases}$

(iii) $(3) \begin{cases} \left(\forall (x_n)_{n\geq 0} \subset A \text{ cu } x_n \xrightarrow{\mathbf{R}} x_0\right) \Rightarrow \left(f(x_n) \xrightarrow{\mathbf{R}} f(x_0)\right) \\ \qquad\qquad (\text{definiția cu şiruri}) \end{cases}$

Demonstrația se obține din teorema de caracterizare a limitei în punct luând $x_0 \in A$, renunțând la $x \neq x_0$ ($x_n \neq x_0$) şi pentru $l = f(x_0) \in \mathbf{R}$.◄

Consecința 3.1. *Dacă $f : A \to \mathbf{R}$ este continuă în $x_0 \in A$, avem:*

$$(4) \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right)$$

Teorema 3.7 (Teoremă de caracterizare pentru funcții continue)

Fie $A \subseteq \mathbf{R}, x_0 \in A$ şi $f : A \to \mathbf{R}$*, atunci avem:*

1) Dacă $x_0 \in A \cap A'$, f continuă în $x_0 \Leftrightarrow (5) \exists \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

2) Dacă $x_0 \in A$ punct izolat, f este continuă în x_0.

Demonstrația este imediată folosind caracterizarea continuității cu şiruri (3) şi se obține 1) şi la fel pentru 2) folosind definiția unui punct izolat al *A*. ◄

Definiția 3.7

Fie $I \subset \mathbf{R}$ interval, $x_0 \in I$ punct interior şi $f : I \to \mathbf{R}$

1] Punctul $x_0 \in I$ este ***punct de discontinuitate de speța a I-a***

$$\overset{def}{\Leftrightarrow}(6)\begin{cases}\text{I } f \text{ este discontinuă în } x_0\\ \text{II } \exists f\left(x_0-0\right),\ f\left(x_0+0\right)\in\mathbf{R}\end{cases}$$

2] Punctul $x_0 \in I$ este ***punct de discontinuitate de speța a II-a***

$$\overset{def}{\Leftrightarrow}(7)\begin{cases}\text{I) } f \text{ este discontinuă în } x_0\\ \text{II) } f \text{ nu este punct de discontinuitate de speța a I - a}\end{cases}$$

Observații

1. $x_0 \in I$ este punct de discontinuitate de speța a II-a a lui $f : A \to \mathbf{R}$

$\overset{def}{\Leftrightarrow} \nexists f\left(x_0-0\right)$ sau $\nexists f\left(x_0+0\right)$ sau $f\left(x_0-0\right)\notin\mathbf{R}$ sau $f\left(x_0+0\right)\notin\mathbf{R}$ sau

$\nexists f\left(x_0-0\right)$ şi $f\left(x_0+0\right)$ sau $f\left(x_0-0\right), f\left(x_0+0\right)\notin\mathbf{R}$

2. Pentru funcția $f : A \to \mathbf{R}$ are sens definiția limitei lui f în x_0 numai pentru $x_0 \in A' \cap \overline{\mathbf{R}}$. Continuitatea lui f în x_0 are sens numai pentru $x_0 \in A$. Dacă $x_0 \in A - A'$, funcția f poate fi continuă în x_0, dar nu are limită în acest punct.

3. Punctul $x_0 \in A$ şi $f : A \to \mathbf{R}$, x_0 se numeşte punct de ***discontinuitate aparentă*** sau ***neesențială*** sau ***eliminabilă*** dacă există $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. În acest caz se asociază lui f o funcție continuă pe A care diferă de f numai în punctul $x_0 \in A$.

4. Dacă există $(x_n)_{n\geq 0} \subset A$ cu $x_n \xrightarrow{\mathbf{R}} x_0$, $x_0 \in A$ şi şirul valorilor $\left(f\left(x_n\right)\right)_{n\geq 0} \subset \mathbf{R}$ nu are limită în $\mathbf{R}$ sau limita sa este diferită de $f(x_0)$, atunci f este discontinuă în $x_0 \in A$ (condiția (*iii*) din teorema 1.
(sau (3))).

5. Fie $f : A \subset \mathbf{R}$ şi $x_0 \in B \subset A \subseteq \mathbf{R}$, dacă f este continuă în x_0, atunci $f/_B$ este continuă în x_0 şi au loc cazurile speciale:

I $B = \{x \in A \mid x < x_0\} \subset A$ şi ***f este continuă la stânga în $x_0 \in A$***

$\overset{def}{\Leftrightarrow} f/_B$ este continuă în $x_0 \in A$.

II $B = \{x \in A \mid x > x_0\} \subset A$ şi ***f este continuă la dreapta în $x_0 \in A$***

$\overset{def}{\Leftrightarrow} f/_B$ este continuă în $x_0 \in A$.

6. Din teorema 2 şi observația 5, rezultă echivalențele:

$$(8)\ f \text{ continuă în } x_0 \in A \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ continuă la stânga în } x_0 \in A\\ \text{şi}\\ f \text{ continuă la dreapta în } x_0 \in A\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = f(x_0-0) = f(x_0) \\ \text{şi} \\ \exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = f(x_0+0) = f(x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad (5)$$

Exemple.

1° Fie f: [-1,1] $\to$ **R** cu $f(x) = 3$, $\forall x \in A = [-1,1] \Rightarrow f$ continuă pe A.

2° $f(x) = \varphi_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1\,;\, x \in A \\ 0\,;\, x \notin A \end{cases}$ funcţia caracteristică a mulţimii

$A = [0,1]$ este continuă pe (0,1) şi are puncte de discontinuitate de speţa a I-a în: $x_0 = 0$ şi $x_0 = 1$.

Pentru $x_0 \in \mathbf{R} - \{0,1\}$ fixat şi $(x_n)_{n\geq 0} \subset \mathbf{R}$ cu $x_n \xrightarrow{\mathbf{R}} x_0$, avem:

I Dacă $x_0 \in (0,1)$ atunci există $n_0 \in \mathbf{N}$, $n_0 \geq 1$ a.î. $x_n \in (0,1)$ şi pentru $n \geq n_0 \Rightarrow f(x_n) = 1 \to f(x_0) = 1 \Rightarrow f$ continuă în $\forall x_0 \in (0,1)$.

II Fie $x_n < 0$ cu $x_n \xrightarrow{\mathbf{R}} 0$ şi (x_n) fixat, atunci $f(x_n) = 0$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = f(0-0) = 0$,

iar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0+0) = 1 \Rightarrow$ deci $x_0=0$ este punct de discontinuitate de speţa a I-a.

La fel se arată că $x_0 = 1$ este punct de discontinuitate de speţa a I-a.

3° ***Funcţia Dirichlet*** $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1\,;\, x \in \mathbf{Q} \\ 0\,;\, x \in \mathbf{R}\text{ - }\mathbf{Q} \end{cases}$ este discontinuă în

$\forall x_0 \in \mathbf{R}$ şi x_0 este punct de discontinuitate de speţa a II-a. Fie $\forall x_0 \in \mathbf{R}$ fixat şi presupunem, prin reducere la absurd, că f este continuă în x_0. Pentru $\forall x_n \in \mathbf{Q}$ $(n\geq 0)$ şi $x_n \xrightarrow{\mathbf{R}} x_0$, avem: $f(x_n) = 1 \xrightarrow{\mathbf{R}} f(x_0)$, deci $f(x_0) = 1$.

Pentru $\forall x_n^{'} \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ şi $x_n^{'} \xrightarrow{\mathbf{R}} x_0$ avem $f(x_n^{'}) = 0 \xrightarrow{\mathbf{R}} f(x_0)$ deci $f(x_0) = 0$ cum $f(x_0) \in \mathbf{R}$ şi avem $f(x_0) = 1 \neq f(x_0) = 0$ este absurd, deci f nu este continuă în x_0. Cum pentru $x_n \xrightarrow{\mathbf{R}} x_0$ cu $x_n \in \mathbf{Q}$ şi $x_n < x_0$ avem $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = f(x_0 - 0) = 1$ şi pentru $x_n^{'} \to x_0$ cu $x_n^{'} \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, $x_n^{'} < x_0$ avem $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = f(x_0 - 0) = 0$, rezultă că nu există $f(x_0 - 0)$. La fel se arată că nu există $f(x_0 + 0)$.

4° Funcția $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ cu $F(x)=\begin{cases}x\,;\,x\in\mathbf{Q}\\0\,;\,x\in\mathbf{R}\text{-}\mathbf{Q}_n\end{cases}=xf(x)$ cu f funcția Dirichlet de la 3°. Funcția F este continuă în x_0 = 0. Pentru $\forall x_n\in\mathbf{R}$ cu $x_n\xrightarrow{\mathbf{R}}x_0$ avem: $F(x_n)$ = x_n, dacă $x_n\in\mathbf{Q}$ şi $F(x_n)\xrightarrow{\mathbf{R}}0=F(x_0)$; iar pentru $x_n'\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ avem $F(x_n')=0\xrightarrow{\mathbf{R}}0=F(x_0)$. Deci există $\lim\limits_{x\to0}F(x)=F(x_0)=0$. Funcția F este discontinuă în $\forall x_0\in\mathbf{R}^*$.

Definiția 3.8. Fie $A\subset B\subseteq\mathbf{R}$ două mulțimi şi $f:A\to\mathbf{R}$ o funcție continuă pe A.

1] Funcția f ***poate fi prelungită prin continuitate pe* B**, dacă există $g:B\to\mathbf{R}$ continuă astfel încât $f=g/_A$.

2] Dacă $B=A\cup\{x_0\}$, funcția f ***poate fi prelungită prin continuitate în x_0***, dacă există $g:B\to\mathbf{R}$ continuă astfel încât $f=g/_A$.

Teorema 3.8 *Fie $A\subset\mathbf{R}$, $f:A\to\mathbf{R}$ o funcție continuă. Există o funcție unică $g:\overline{A}\to\mathbf{R}$ continuă astfel încât $g/_A=f$, dacă şi numai dacă, în orice x_0 punct de acumulare pentru $A\left(x_0\in A'\subseteq\overline{A}\right)$ şi $x_0\notin A$, există $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ finită.*

Demonstrație Fie $B=\overline{A}$ (închiderea lui A), $g:B\to\mathbf{R}$ funcție continuă cu $g/_A=f$, atunci pentru $\forall x_0\in B'$ (punct de acumulare pentru B) cu $x_0\notin A$, există $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$ şi avem $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g/_A(x)=g(x_0)\in\mathbf{R}$ şi f este prelungită prin continuitate în x_0. Dacă $x_0\in A'\cap A$, avem $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=g(x_0)$.◄

Exemple.

1° $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, $x\in\mathbf{R}^*$ se poate prelungi prin continuitate în x_0 = 0 ∈ **R**, deoarece există $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

2° $f(x)=\operatorname{sign}x, x\in\mathbf{R}^*$ nu poate fi prelungită prin continuitate în x_0 = 0 $\left(f(0+0)=1\neq f(0-0)=-1\text{ şi nu există }\lim\limits_{x\to0}f(x)\right)$.

3° $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ cu $x\in\mathbf{R}^*$ nu poate fi prelungită prin continuitate în x_0 = 0, deoarece $\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty\notin\mathbf{R}$.

Teorema 3.9 *Fie* $A\subseteq\mathbf{R}$, $x_0\in A$ şi $f,g:A\to\mathbf{R}$ *funcții continue în*

$x_0 \in A$, atunci funcțiile: $f \pm g, \lambda f\ (\forall \lambda \in \mathbf{R}), f \cdot g, \dfrac{f}{g}\ (g \neq 0 \text{ pe } A)$,

$|f|, \max\{f, g\}, \min\{f, g\}, f^g$ *sunt continue în $x_0 \in A$.*

Demonstrația este imediată folosind (*iii*) (3) din teorema 3.6 şi operațiile cu şiruri convegente din **R**. ◄

Teorema 3.10 $A, B \subset \mathbf{R}$, şi $f : A \to B, g : B \to \mathbf{R}$ *funcții. Dacă f este continuă în $x_0 \in A$ şi g este continuă în $y_0 = f(x_0) \in B$, atunci $g \circ f : A \to \mathbf{R}$ este continuă în $x_0 \in A$.*

Demonstrație. Fie $\forall (x_n)_{n\geq 1} \subset A$ cu $x_n \xrightarrow{\mathbf{R}} x_0 \in A$ şi cum *f* este continuă în $x_0 \in A$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = f(x_0) = y_0$. Funcția *g* este continuă în $y_0 \in B$ şi avem:

$\lim\limits_{n\to\infty} (g \circ f)(x_n) = g\left[\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\right] = g\left[f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)\right] = g(y_0) = (g \circ f)(x_0)$ şi g este continuă în $x_0 \in A$. Conform teoremei 1 ((*iii*) (3)), dacă *f* continuă pe *A* şi *g* continuă pe *B*, atunci $g \circ f$ este continuă pe *A*. ◄

Proprietăți ale funcțiilor continue pe mulțimi din R

Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ şi în unele cazuri $A = I$ interval, iar $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție.

Teorema 3.11 (Teorema lui Bolzano)

Dacă $f : I \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă, atunci $f(I) \subset \mathbf{R}$ este interval.

Demonstrație. Fie $I = f(I) \subseteq \mathbf{R}$ şi să dovedim că *I* este interval.

După definiție: $\forall y_1, y_2 \in J$ cu $y_1 < y_2$ şi $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ cu $y_1 < \lambda < y_2$ să aratăm că $\lambda \in J$. Dacă $y_1 = f(a), y_2 = f(b)$ cu $a, b \in I$ şi $a < b$, se dovedeşte că există $c \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = \lambda$ şi atunci $[y_1, y_2] \subseteq J$, deci *J* este interval. ◄

Consecința 3.2 (Teorema intersecției a lui Cauchy)

Dacă $f' : I \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă şi pentru $x_1, x_2 \in I$ avem $f(x_1) f(x_2) < 0$, atunci există cel puțin un punct c între x_1 şi x_2 astfel încât $f(c) = 0$.

Demonstrația este directă din teorema 3.11 pentru $\lambda = 0$. ◄

Consecința 3.3 (Teorema valorilor intermediare)

Fie $I \subset \mathbf{R}$ interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ funcție continuă, atunci f are proprietatea Darboux (proprietatea valorilor intermediare) pe I.

Demonstrație. Dacă $I_1 \subseteq I$ este interval, după teorema 1, $f(I_1)$ este interval şi deci *f* are proprietatea Darboux ($\forall a, b \in I$ cu $[a, b] = I_1$, atunci $f(I_1) = J_1$ interval, adică pentru $\forall \lambda$ între $f(a)$ şi $f(b)$ există $c \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = \lambda$).◄

Consecința 3.4

Dacă f : I $\to \boldsymbol{R}$ *este funcție continuă pe intervalul I și* $f(x) \neq 0, \forall x \in I$,
atunci f are semn constant pe I (fie f > 0 pe I, fie f < 0 pe I).

Teorema 3.12 (Teorema de invarianță a mulțimilor compacte)

Fie A $\subset \boldsymbol{R}$ *o mulțime compactă și f : A* $\to \boldsymbol{R}$. *Dacă f este funcție continuă pe A, atunci f (A)* $\subset \boldsymbol{R}$ *este mulțime compactă.*

Demonstrație $A \subset \mathbf{R}$ este mulțime compactă $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ A este închisă și mărginită $\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\geq 0} \subset A$ conține un subșir $\left(x_{n_k}\right)_{k\geq 1} \subset (x_n)_{n\geq 1}$ cu
$x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathbf{R}} x_0 \in A$. Fie $\forall y_n \in f(A)$ pentru $\forall n \geq 1$ și un subșir al său
$\left(y_{n_k}\right)_{k\geq 1} \subset (y_n)_{n\geq 1} \subset f(A)$ cu $y_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathbf{R}} y_0 \in f(A)$.
Dacă $y_n \in f(A)$ pentru $n \geq 1$, atunci există $x_n \in A$ pentru $n \geq 1$ a.î.
$y_n = f(x_n)$ și cum A este compactă există $\left(x_{n_k}\right)_{k\geq 1} \subset (x_n)_{n\geq 1} \subset A$ a.î.
$\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = f\left[\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}\right] = f(x_0) \in f(A)$ deci
$y_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathbf{R}} y_0 = f(x_0) \in A$ și $f(A)$ este mulțime compactă. ◄

Teorema 3.13 (Teorema lui Weierstrass)

Fie A $\subset \boldsymbol{R}$ *o mulțime compactă și f : A* $\to \boldsymbol{R}$ *o funcție continuă, atunci f este mărginită și își atinge marginile pe A.*

Demonstrație $\begin{cases} A \subset \mathbf{R} \text{ compactă} \\ f \text{ continuă pe } A \end{cases} \overset{T\ \mathrm{II}}{\Rightarrow} f(A) \subset \mathbf{R} \text{ compactă} \overset{def}{\Rightarrow} f(A)$
mărginită și închisă $\Rightarrow f$ mărginită pe A (conform definiției) și
$\sup f(A), \inf f(A) \in f(A)$, adică există $x_1, x_2 \in A$ a.î. $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \forall x \in A$ și $f(x_1) = \inf f(A), f(x_2) = \sup f(A)$. ◄

Consecința 3.5

Fie I $\subset \boldsymbol{R}$ *interval compact și f : I* $\to \boldsymbol{R}$ *funcție continuă, atunci*
f (I) $\subset \boldsymbol{R}$ *este interval compact.*

Consecința 3.6

Fie I $\subset \boldsymbol{R}$ *interval și f : I* $\to \boldsymbol{R}$ *funcție monotonă pe I.*
Pentru $\forall x_0 \in I$, *există* $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0) \in \mathbf{R}$ *cu*
$f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0)$ *și f are numai puncte de discontinuitate de spața a I-a pe I.*

Teorema 3.14

Fie I $\subset \boldsymbol{R}$ *interval și f : I* $\to \boldsymbol{R}$ *funcție monotonă, iar* $f(I) \subset \mathbf{R}$ *este interval, atunci f este continuă pe I.*

Demonstrația în bibliografie ([10], [13], [16]). ◄

Teorema 3.15

În mulțimea **R** *au loc următoarele limite fundamentale:*

$$(a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad (b)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \qquad (c)\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$$(d)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad (e)\ \lim_{x\to a}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\ (a>0;\ a\neq 1)$$

$$(f)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \qquad (g)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln x}{x}=-\infty$$

$$(h)\ \lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=1 \qquad (i)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x^{\frac{1}{x}}=0$$

Demonstrația în bibliografie ([11]; [13]; [16]). ◄

Definiția 3.9

Fie $I\subset \mathbf{R}$ interval şi $f: I\to \mathbf{R}$ o funcție.

1] f este ***funcție uniform continuă pe A*** $\Leftrightarrow (9)\begin{cases}\forall\varepsilon>0, \exists\delta(\varepsilon)>0 \text{ (independent de } x)\\ \text{a.î. } \forall x_1,x_2\in A \text{ cu } |x_1-x_2|=\\ =d(x_1,x_2)<\delta\Rightarrow d[f(x_1),f(x_2)]<\varepsilon\end{cases}$

2] f este ***funcție Lipschitz*** sau ***funcție lipschitziană pe A*** $(10)\begin{cases}\exists L>0 \text{ a.î. } \forall x_1,x_2\in A\Rightarrow\\ \Rightarrow d[f(x_1),f(x_2)]=|f(x_1)-f(x_2)|\leq\\ \leq L|x_1-x_2|=Ld(x_1,x_2)\end{cases}$

Pentru $L\in(0,1)$ f se numeşte ***contracție pe A***.

Observații.

1. Noțiunea de funcție continuă în $x_0\in A$ este cu caracter local, depinde de $x\in A\cap V$ cu $V\in\mathcal{V}(x_0)$.
2. Noțiunea de funcție uniform continuă pe A are caracter global, este valabilă pe toată mulțimea A.
3. Funcția f nu este uniform continuă pe A, dacă şi numai dacă avem:

$$(11)\begin{cases}\exists\varepsilon_0>0 \text{ a.î. } \forall\delta(\varepsilon)>0 \text{ (independent de } x), \exists x_1,x_2\in A\\ \text{cu } d(x_1,x_2)=|x_1-x_2|<\delta(\varepsilon)\Rightarrow d[f(x_1),f(x_2)]=\\ =|f(x_1)-f(x_2)|\geq\varepsilon\end{cases}$$

Teorema 3.16 *Dacă $f: I\to \mathbf{R}$ este funcție Lipschitz pe A, atunci f este uniform continuă pe A.*

Demonstrație. Avem:

$\forall\varepsilon>0, \delta(\varepsilon)=\dfrac{\varepsilon}{L}(L)$ şi avem $|f(x_1)-f(x_2)|\leq L|x_1-x_2|\leq L\delta(\varepsilon)=$

$= L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon, \forall x_1, x_2 \in A$ cu $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow f$ este uniform continuă pe A.◄

Teorema 3.17 *Dacă $f : I \to \mathbf{R}$ este funcție uniform continuă pe A, atunci f este continuă pe A.*

Demonstrație $\forall x_0 \in A$ fixat şi $\forall x \in A$, cum f este uniform continuă pe A, avem: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall x_0, x \in A$ cu

$|x - x_0| = \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow f$ continuă în $\forall x_0 \in A \Rightarrow f$ continuă pe A. ◄

Observații

1. Din teoremele IV şi V rezultă implicațiile: f contracție pe $A \Rightarrow f$ este funcție Lipschitz pe $A \Rightarrow f$ uniform continuă pe $A \Rightarrow f$ continuă pe A.
2. Facă f este uniform continuă pe $B \subset A$ cu $B \neq A$, nu rezultă obligatoriu f continuă pe B.

Exemplu Fie $A = \mathbf{R}$, $B = [0,1] \subset A$ şi $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funcția caracteristică a lui B; f este uniform continuă pe B şi totuşi f nu este continuă în $x_1 = 0$ şi $x_2 = 1$, deci f nu este continuă pe B.

3. Dacă f este continuă pe A, nu implică f uniform continuă pe A.

Exemplu

$f(x) = \frac{1}{x}$ este continuă pe $A=(0,1)$, dar f nu este uniform continuă pe A.

Teorema 3.18 (Teorema lui Cantor)

Fie $A \subset \mathbf{R}$ şi $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție continuă pe A. Dacă A este mulțime compactă din $\mathbf{R}$ (închisă şi mărginită) atunci f este uniform continuă pe A.

Demonstrația prin metoda reducerii la absurd din bibliografie ([10], [11], [13]). ◄

Exemple

1° $f(x) = ax + b, x \in \mathbf{R}$ şi $a, b \in \mathbf{R}$ cu $a \neq 0$. Pentru $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, avem:

$|f(x_1) - f(x_2)| = |a||x_1 - x_2| < \varepsilon$ dacă $|x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{|a|} = \delta(\varepsilon) \Rightarrow f$ este uniform continuă pe $\mathbf{R}$. De fapt f este funcție Lipschitz pe $\mathbf{R}$ cu $L = |a| > 0$ şi după teorema IV este uniform continuă pe $\mathbf{R}$.

2° $f(x) = \sin x, x \in \mathbf{R}$ este funcție Lipschitz pe $\mathbf{R}$ cu $L = 1$, avem:

$|f(x_1) - f(x_2)| = |\sin x_1 - \sin x_2| \leq |x_1 - x_2|, \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R} \Rightarrow f$ este uniform continuă pe $\mathbf{R}$.

3° $f(x) = \frac{1}{x}$ cu $x \in A = (0,1) \subset \mathbf{R}$ nu este uniform continuă pe A. Prin reducere la absurd, presupunem că f este uniform continuă pe A. Pentru $\varepsilon = 1, \exists \delta_1 > 0$ cu $0 < \delta < 1$ a.î. $\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| < 1, \forall x_1, x_2 \in (0,1)$ dacă

$|x_1 - x_2| < \delta < 1$; în aceste condiții avem $\left|\frac{1}{x}\right| \le 1 + \frac{1}{\delta}$ pentru $\forall x \in (0,\delta)$.

Fie $x = \frac{\delta}{2} \in (0,1)$ şi avem: $\frac{1}{\delta} < 1 \Rightarrow \delta > 1$ este absurd, deoarece $\delta \in (0,1) \Rightarrow f$ nu este uniform continuă pe A.

4° $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,\infty)$ şi fie $x_1 = x \ge 0$, iar $x_2 = x + h$ cu $\forall h > 0$.

Avem: $|f(x+h) - f(x)| = |f(x_1) - f(x_2)| = \sqrt{x+h} - \sqrt{x} = \frac{h}{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}} <$

$< \frac{h}{\sqrt{h}} = \sqrt{h}$. Dacă luăm $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) = \varepsilon^2 > 0$ şi pentru $0 < h < \delta = \varepsilon^2$

$\Rightarrow |f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$, deci f este uniform continuă pe $[0,\infty)$.

Modulul 3.2 - Derivate şi diferențiale de ordin I pentru funcții reale de o variabila reală. Aplicații

Derivata şi ***diferențiala*** sunt două concepte fundamentale ale matematicii, care reprezintă o sinteză pe plan matematic a unor probleme concrete din: geometrie, fizică, economie, informatică, tehnică etc.

Derivata permite ***studiul vitezei de variație a unor procese care depind de mărimi variabile din realitatea fizică***; din punct de vedere matematic, derivata reprezintă *"**viteza de variație a unei funcții** în **raport cu variația argumentului**"*.

Diferențiala este intim legată de ***problema aproximării locale a unor procese neliniare prin procese liniare***; în limbaj matematic, diferențiala permite ***"aproximarea locală a unor funcții prin funcții liniare"*** (sau funcții polinomiale de gradul întâi).

Problema centrală a "**Calculului diferențial în R**" şi în general în $\mathbf{R}^n$ ($n \ge 1$), constă în ***aproximarea unei funcții date în vecinătatea unui punct, cu o funcție liniară***, astfel încât eroarea pe care o facem sa fie un infinit mic de ordin superior față de variația argumentului.

Fie $D \subseteq \mathbf{R}$ o ***mulțime deschisă*** (notație consacrată în text pentru această clasă de mulțimi), $x_0 \in \mathbf{R}$ un punct de acumulare pentru D, $x_0 \in D' \cap \mathbf{R}$ şi în acest caz s-a definit ***noțiunea de limită în punct*** pentru $f : D \to \mathbf{R} : \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbf{R}$. Dacă $x_0 \in \mathbf{R} \cap D \cap D'$, atunci s-a definit ***noțiunea de funcție continuă în punct***. Noțiunea de funcție continuă în punct se poate caracteriza astfel:

f continuă în $x_0 \in D \cap D' \Leftrightarrow$ există $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow$ pentru $x \overset{\mathbf{R}}{\to} x_0$, avem $f(x) \overset{\mathbf{R}}{\to} f(x_0) \Leftrightarrow$ pentru $(x - x_0) \overset{\mathbf{R}}{\to} 0$, avem

$\left[f(x)-f(x_0)\right]\xrightarrow{\mathbf{R}}0$.

În punctele de acumulare $x_0 \in D \cap D'$ există o legătură intrinsecă între creşterea (variaţia) argumentului notată $\Delta x = x - x_0$ şi creşterea (variaţia) funcţiei în punctul x_0, notată $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$. Vom evalua comportarea lui $\Delta f(x_0)$ faţă de comportarea lui Δx în două moduri diferite:

I raportul

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ sau } \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, h \in \mathbf{R}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x = x - x_0 = h \in \mathbf{R} \\ \Delta f(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0) \end{pmatrix}$$

II diferenţa

$\Delta f(x_0) - A\Delta x = \left[f(x)-f(x_0)\right] - A(x-x_0)$ cu $A \in \mathbf{R}$ sau

$\Delta f(x_0) - Ah = \left[f(x_0+h)-f(x_0)\right] - Ah, \forall h \in \mathbf{R}; (A \in \mathbf{R})$, care vor conduce la ***noţiunea de funcţie derivabilă în punct*** şi respectiv ***noţiunea de funcţie diferenţiabilă în punct***

$f : D \to \mathbf{R}$ şi $x_0 \in D \cap D' \subseteq \mathbf{R}$.

Definiţia 3.10

Fie $D \subseteq \mathbf{R}$ mulţime deschisă, $x_0 \in D' \cap D \subset \mathbf{R}$ şi $f : D \to \mathbf{R}$.

1] ***Funcţia f are derivată în $x_0 \in D$***, elementul notat $f'(x_0)$ dat prin:

$$(1)\ f'(x_0) \stackrel{def}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in \overline{\mathbf{R}}$$

2] Funcţia ***f este derivabilă în $x_0 \in D$***, dacă există $f'(x_0) \in \mathbf{R}$.

3] Funcţia f este ***derivabilă pe D***, dacă este derivabilă în orice $x_0 \in D$ şi îi asociem funcţia:

$$(2)\ f' : D \to \mathbf{R} \text{ cu } f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \forall x_0 \in D \text{ numită } f'$$

funcţia derivată sau ***derivata*** lui f pe D.

4] Dacă există $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \stackrel{not}{=} f_s'(x_0) \in \overline{\mathbf{R}}$, f are ***derivată la stânga în $x_0 \in D$*** şi în cazul $f_s'(x_0) \in \mathbf{R}$ ***f este derivabilă la stânga*** în $x_0 \in D$.

Dacă există $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \stackrel{not}{=} f_d'(x_0) \in \overline{\mathbf{R}}$, f are ***derivată la dreapta în $x_0 \in D$*** şi în cazul $f_d'(x_0) \in \mathbf{R}$ ***f este derivabilă la dreapta*** în $x_0 \in D$.