

Capitolul 5

LIMITE DE FUNCȚII

5.1 Limita unei funcții într-un punct

Fie o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ne punem problema de a studia comportarea lui f în apropierea unui punct dat $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, în sensul de a observa dacă pentru valori x ale argumentului apropiate de x_0 valorile $f(x)$ ale funcției se apropie și ele de o valoare reală fixă sau sunt arbitrar de mari, respectiv arbitrar de mici.

Formulată în acest sens, suficient de intuitiv dar relativ imprecis, problema necesită unele clarificări și restricții. Din cele de mai sus, se poate observa faptul că sunt de interes valorile funcției f pentru argumente apropiate de x_0 și nu valoarea $f(x_0)$ însăși. De fapt, f poate nici să nu fie definită în x_0 , adică nu este necesar ca x_0 să aparțină lui D . Totuși, este necesar ca D să conțină valori x ale argumentului oricât de apropiate de x_0 , adică x_0 trebuie să fie punct de acumulare al lui D . Mai mult, nu este necesar ca x_0 să fie finit, el putând fi $-\infty$ sau $+\infty$.

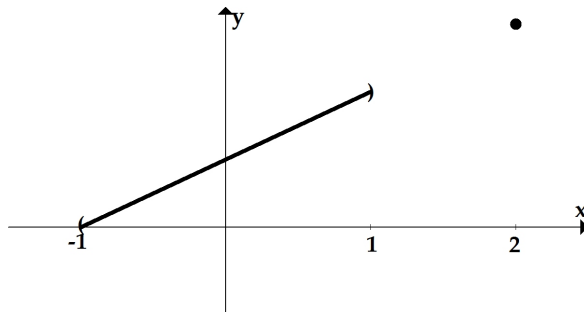
Pentru o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și pentru $x_0 \in D'$, vom spune că funcția f are limita $l \in \overline{\mathbb{R}}$ în x_0 dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l)$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$, $x \neq x_0$, urmează că $f(x) \in V$. În acest caz, vom nota $f(x) \rightarrow l$ pentru $x \rightarrow x_0$ sau $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, spunându-se și că $f(x)$ tinde la l pentru x tinzând la x_0 .

Se observă că dacă x_0 nu este punct de acumulare al lui D , adică dacă x_0 este punct izolat al lui D sau punct exterior lui D , atunci problema existenței limitei lui f în D nu are sens, întrucât D nu conține valori ale argumentului x oricât de apropiate de x_0 .

De asemenea, într-un mod similar demonstrației rezultatului corespunzător privind limite de șiruri, se poate demonstra că dacă limita unei funcții există, atunci aceasta este unică.

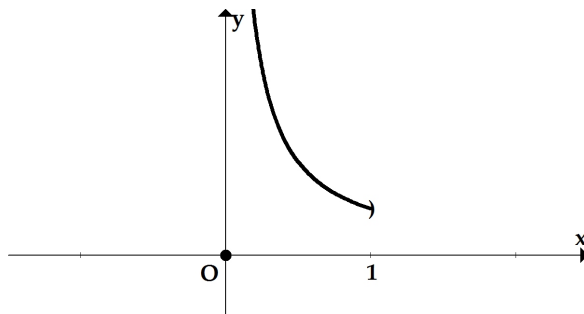
Exemple. 1. Fie $f : (-1, 1) \cup \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1$.

Atunci $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, iar $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, problema existenței limitei lui f în $x_0 = 1$ având sens, deoarece acesta este punct de acumulare al domeniului de definiție, chiar dacă nu aparține acestuia. În același timp, problema existenței limitei lui f în $x_0 = 2$ nu are sens, deoarece acesta este punct izolat al domeniului de definiție. În mod similar, problema existenței limitei lui f în $x_0 = 3$ nu are sens, deoarece acesta este punct exterior domeniului de definiție.



2. Fie $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0, 1) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Atunci $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, în timp ce $f(0) = 0$, deci o funcție poate avea într-un punct dat o limită diferită de valoarea funcției în acel punct. În general, dacă $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, iar $x_0 \in D'$, se poate întâmpla



ca $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$, adică valoarea limitei unei funcții într-un punct poate fi diferită de valoarea funcției în acel punct. Funcțiile care verifică egalitatea $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ se numesc *funcții continue în x_0* și vor fi studiate în capitolul următor.

5.1.1 Caracterizări analitice

Să presupunem pentru moment că $x_0 \in \mathbb{R}$ și să considerăm vecinătăți V ale lui l de tipul $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ dacă l este finit, respectiv $(M, +\infty]$ dacă $l = +\infty$ și $[-\infty, -M)$ dacă $l = -\infty$. Conform definiției de mai sus, obținem următoarea *teoremă de caracterizare analitică* a limitei unei funcții într-un punct, numită și *teorema de caracterizare cu $\varepsilon - \delta$* .

Teorema 5.1. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D' \cap \mathbb{R}$. Atunci au loc următoarele afirmații.

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca $|f(x) - l| < \varepsilon$ pentru orice $x \in D$, $x \neq x_0$ cu proprietatea că $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$.
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ Pentru orice $M > 0$ există $\delta_M > 0$ astfel ca $f(x) > M$ pentru orice $x \in D$, $x \neq x_0$ cu proprietatea că $|x - x_0| < \delta_M$.
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$ Pentru orice $M > 0$ există $\delta_M > 0$ astfel ca $f(x) < -M$ pentru orice $x \in D$, $x \neq x_0$ cu proprietatea că $|x - x_0| < \delta_M$.

Pentru $x_0 = +\infty$, se obține în mod similar următoarea caracterizare a funcțiilor cu limită la $+\infty$, un rezultat asemănător având loc și pentru $x_0 = -\infty$.

Teorema 5.2. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu $+\infty \in D'$. Atunci au loc următoarele afirmații.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca $|f(x) - l| < \varepsilon$ pentru orice $x \in D$, $x > \delta_\varepsilon$.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ Pentru orice $M > 0$ există $\delta_M > 0$ astfel ca $f(x) > M$ pentru orice $x \in D$, $x > \delta_M$.
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$ Pentru orice $M > 0$ există $\delta_M > 0$ astfel ca $f(x) < -M$ pentru orice $x \in D$, $x > \delta_M$.

5.1.2 Teorema de caracterizare cu șiruri

Teorema următoare, denumită și *teorema de caracterizare cu șiruri a limitei unei funcții într-un punct* sau *teorema de caracterizare Heine a limitei unei funcții într-un punct*, permite transferul unor proprietăți și reguli de calcul ale limitelor de șiruri la limite de funcții.

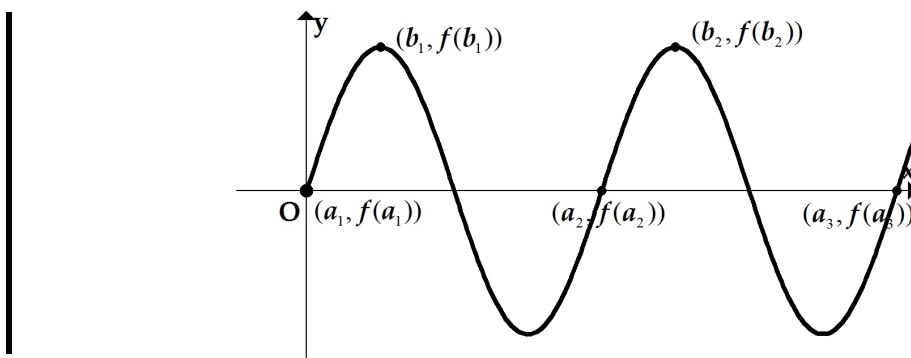
Teorema 5.3. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$. Atunci f are limita l în x_0 (finită sau infinită) dacă și numai dacă pentru orice șir $(a_n)_{n \geq 0}$ cu limita x_0 astfel încât $a_n \in D$, $a_n \neq x_0$ pentru orice $n \geq 0$, urmează că șirul valorilor $(f(a_n))_{n \geq 0}$ are limita l .

Condiții suficiente ca o funcție să nu aibă limită într-un punct

Conform teoremei de mai sus, se observă că dacă este îndeplinită una dintre condițiile următoare, atunci funcția $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nu are limită în $x_0 \in D'$.

1. Există două șiruri $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ cu limita x_0 astfel ca $a_n, b_n \in D$, $a_n, b_n \neq x_0$ pentru orice $n \geq 0$, iar șirurile de valori $(f(a_n))_{n \geq 0}$, $(f(b_n))_{n \geq 0}$ au limite diferite l_1 și l_2 .
2. Există un șir $(a_n)_{n \geq 0}$ cu limita x_0 astfel ca $a_n \in D$, $a_n \neq x_0$ pentru orice $n \geq 0$, iar șirul valorilor $(f(a_n))_{n \geq 0}$ nu are limită.

Exemplu. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ nu are limită la $+\infty$. În acest sens, să observăm că pentru șirul $(a_n)_{n \geq 0}$, $a_n = 2n\pi$, cu limita $+\infty$, șirul valorilor $(f(a_n))_{n \geq 0}$ are limita 0, fiind constant nul, în timp ce pentru șirul $(b_n)_{n \geq 0}$, $b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, de asemenea cu limita $+\infty$, șirul valorilor $(f(b_n))_{n \geq 0}$ are limita 1, fiind constant egal cu 1.



De fapt, cu un raționament asemănător se poate observa că are loc următoarea proprietate mai generală.

Teorema 5.4. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodică și neconstantă. Atunci f nu are limită la $+\infty$ sau $-\infty$.

În particular, teorema de mai sus atestă faptul că funcțiile trigonometrice directe uzuale nu au limită la $\pm\infty$.

5.1.3 Limite laterale

În situația în care argumentul x se apropie de punctul x_0 dat doar prin valori mai mici, respectiv mai mari decât x_0 , se obține conceptul de limită laterală.

Pentru o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și pentru $x_0 \in (D \cap (-\infty, x_0))'$ (adică pentru x_0 punct de acumulare la stânga al mulțimii D), vom spune că funcția f are limita la stânga $l_s \in \overline{\mathbb{R}}$ în x_0 dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l_s)$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$, $x < x_0$, urmează că $f(x) \in V$. În acest caz, vom nota

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l_s, \text{ sau } \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = l_s, \text{ sau } f(x_0 - 0) = l_s.$$

Similar, vom spune că funcția f are limita la dreapta $l_d \in \overline{\mathbb{R}}$ în $x_0 \in (D \cap (x_0, +\infty))'$ (adică pentru x_0 punct de acumulare la dreapta al mulțimii D) dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l_d)$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$, $x > x_0$, urmează că $f(x) \in V$. În acest caz, vom nota

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l_d, \text{ sau } \lim_{x \searrow x_0} f(x) = l_d, \text{ sau } f(x_0 + 0) = l_d.$$

Limitele la stânga și la dreapta ale unei funcții într-un punct x_0 se mai numesc și *limite laterale* în x_0 .

Caracterizarea cu șiruri a limitelor laterale într-un punct

În mod analog teoremei de caracterizare cu șiruri a limitei unei funcții într-un punct se poate demonstra următorul rezultat.

Teorema 5.5. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Au loc următoarele afirmații.

1. Funcția f are limita la stânga $l_s \in \overline{\mathbb{R}}$ în $x_0 \in (D \cap (-\infty, x_0))'$ dacă și numai dacă pentru orice șir $(a_n)_{n \geq 0}$ cu limita x_0 astfel încât $a_n \in D$, $a_n < x_0$ pentru orice $n \geq 0$, urmează că șirul valorilor $(f(a_n))_{n \geq 0}$ are limita l_s .
2. Funcția f are limita la dreapta $l_d \in \overline{\mathbb{R}}$ în $x_0 \in (D \cap (x_0, +\infty))'$ dacă și numai dacă pentru orice șir $(a_n)_{n \geq 0}$ cu limita x_0 astfel încât $a_n \in D$, $a_n > x_0$ pentru orice $n \geq 0$, urmează că șirul valorilor $(f(a_n))_{n \geq 0}$ are limita l_d .

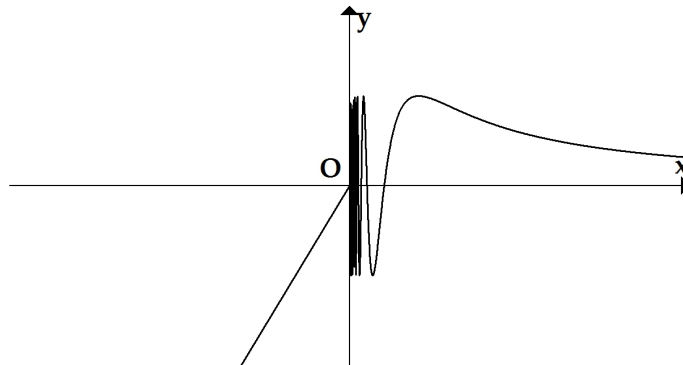
Se poate observa că existența uneia dintre limitele laterale într-un punct nu antrenează automat și existența celeilalte. În anumite situații, se poate întâmpla ca una dintre limitele laterale să existe, în timp ce problema existenței celeilalte nici măcar să nu aibă sens.

Exemplu. 1. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$. Se observă că, pentru

$x_0 = 0$, $l_s = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x = 0$. Totuși, l_d nu există, deoarece pentru $(a_n)_{n \geq 0}$,

$a_n = \frac{1}{2n\pi}$, $a_n \rightarrow 0$ pentru $n \rightarrow \infty$, $a_n > 0$ pentru $n \geq 0$, $f(a_n) = \sin 2n\pi = 0$, deci $f(a_n) \rightarrow 0$ pentru $n \rightarrow \infty$, în vreme ce pentru $(b_n)_{n \geq 0}$,

$b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $b_n \rightarrow 0$ pentru $n \rightarrow \infty$, $b_n > 0$ pentru $n \geq 0$, $f(b_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1$, deci $f(b_n) \rightarrow 1$ pentru $n \rightarrow \infty$.



2. Fie $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Se observă că pentru $x_0 = 0$, $l_d = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0$, în vreme ce problema existenței lui l_s nu are sens, deoarece 0 nu este punct de acumulare la stânga al lui $[0, 2]$.

Caracterizarea limitei unei funcții într-un punct cu ajutorul limitelor laterale

Se poate observa că definiția limitei într-un punct conține condiții mai restrictive decât definițiile limitelor laterale, fiind necesar ca $f(x) \in V$ pentru orice $x \in U \cap D$, $x \neq x_0$, nu doar pentru $x \in U \cap D$, $x < x_0$ (respectiv $x > x_0$). Urmează că dacă x_0 este simultan punct de acumulare la stânga și la dreapta al unei mulțimi D , iar funcția $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are limita l în x_0 , atunci are în mod necesar și limite laterale în x_0 și acestea sunt egale tot cu l . Reciproca nu este neapărat adevărată, în sensul că o funcție poate avea limite laterale într-un punct fără să aibă neapărat limită în acel punct.

Totuși, se poate demonstra că dacă limitele laterale într-un punct sunt egale, atunci funcția are limită în acel punct, fapt descris de următoarea teoremă.

Teorema 5.6. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și fie $x_0 \in (D \cap (-\infty, x_0))' \cap (D \cap (x_0, +\infty))'$ (adică x_0 este simultan punct de acumulare la stânga și la dreapta al mulțimii D). Atunci f are limită în x_0 dacă și numai dacă f are limite laterale în x_0 și

$$l_s = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l_d.$$

În acest caz, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ este egală cu valoarea comună a limitelor.

Exercițiu. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax + 1, & x \leq 2 \\ x + 3, & x > 2 \end{cases}$. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel ca f să aibă limită în $x_0 = 2$.

Soluție. Cum

$$l_s = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (ax + 1) = 2a + 1; \quad l_d = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 3) = 5,$$

pentru existența limitei funcției f în $x_0 = 2$ este necesar și suficient ca $2a + 1 = 5$, deci $a = 2$.

5.1.4 Criterii de existență a limitei unei funcții într-un punct

Criteriu de existență a unei limite finite

Ca și în cazul limitelor de șiruri, pentru a arăta că limita unei funcții $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ în $x_0 \in D'$ este $l \in \mathbb{R}$, poate fi studiată diferența dintre valorile $f(x)$ ale funcției pentru x apropiat de x_0 și limita l . În situația în care modulul acestei diferențe este „mic”, în sensul că poate fi majorat cu o funcție cu limita 0 în x_0 , atunci funcția f are limita l în x_0 , fapt observat în următorul rezultat, numit și *criteriul majorării*.

Teorema 5.7. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ și $l \in \mathbb{R}$. Dacă există o funcție $\alpha : D \rightarrow [0, \infty)$ și o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca

$$|f(x) - l| \leq \alpha(x) \quad \text{pentru orice } x \in V \cap D, x \neq x_0,$$

iar $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

Exercițiu. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$. Demonstrați că

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Soluție. Cum $|f(x) - l| = |x \sin \frac{1}{x} - 0| \leq |x|$ pentru orice $x \neq 0$, iar $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, urmează conform celor de mai sus că $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Criteriu de existență a unei limite infinite

De asemenea, pentru a arăta că o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are limita $+\infty$ în $x_0 \in D'$, este suficient să se demonstreze că valorile lui f sunt minorate pe o vecinătate a lui x_0 de valorile unei funcții g , cu o expresie posibil mai simplă, iar $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$. Similar, pentru a arăta că o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are limita $-\infty$ în $x_0 \in D'$ este suficient să se demonstreze că valorile lui f sunt majorate pe o vecinătate a lui x_0 de valorile unei funcții g , cu o expresie posibil mai simplă, iar $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$.

Teorema 5.8. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și fie $x_0 \in D'$.

1. Dacă există $g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca $f(x) \geq g(x)$ pentru orice $x \in V \cap D$, $x \neq x_0$, iar $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.
2. Dacă există $g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca $f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in V \cap D$, $x \neq x_0$, iar $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Exercițiu. Demonstrați că $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x + \sin x) = -\infty$.

Soluție. Cum $-x + \sin x \leq -x + 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, iar $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x + 1) = -\infty$, urmează conform celor de mai sus că $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x + \sin x) = -\infty$.

A se nota că, în exemplul de mai sus, $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x + \sin x)$ există, deși funcția sinus, ca funcție de sine stătătoare, nu are limită la $+\infty$.

Criteriul Cauchy-Bolzano

În cazul șirurilor de numere reale, se putea demonstra că un șir $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent fără a-i cunoaște limita, arătând că acesta este șir Cauchy. În cazul funcțiilor, se poate obține un criteriu analog de existență a unei limite finite într-un punct, numit *criteriul Cauchy-Bolzano*.

Teorema 5.9. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D' \cap \mathbb{R}$. Atunci f are limită finită în x_0 dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pentru orice $x, y \in D$, $x, y \neq x_0$, astfel ca $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, $|y - x_0| < \delta_\varepsilon$.

5.1.5 Proprietăți ale funcțiilor cu limită

În situația în care o funcție are limită finită într-un punct x_0 , valorile sale $f(x)$ sunt apropiate de valoarea (finită) a limitei pentru valori x ale argumentului suficient de apropiate de x_0 , neputând deveni arbitrar de mari, respectiv arbitrar de mici, pentru aceste valori ale argumentului. Acest lucru este exprimat în următoarea teoremă.

Mărginirea funcțiilor cu limită

Teorema 5.10. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$ astfel încât f are limită finită în x_0 . Atunci există o vecinătate a lui x_0 pe care f este mărginită.

Demonstrație. Fie $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ și fie $V = (l - 1, l + 1)$ o vecinătate a lui l . Conform definiției limitei, există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca $f(x) \in V$ pentru orice $x \in U \cap D, x \neq x_0$. Atunci $|f(x)| < |l| + 1$ pentru orice $x \in U \cap D, x \neq x_0$, deci f este mărginită pe U . ■

Proprietatea de păstrare a semnului

Teorema 5.11. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$ astfel încât f are limită nenulă în x_0 . Atunci există o vecinătate a lui x_0 pe care f păstrează semnul limitei.

Trecerea la limită în inegalități

Teorema ce urmează, numită și *teorema de trecere la limită în inegalități* exprimă faptul că inegalitățile (nestrict) dintre două funcții se păstrează prin trecere la limită.

Teorema 5.12. Fie două funcții $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$ cu proprietățile

1. Există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{pentru } x \in V \cap D, x \neq x_0.$$

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \in \overline{\mathbb{R}}, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci $l_1 \leq l_2$.

Inegalitățile nestrict dintre termenii a două funcții nu se păstrează neapărat prin trecere la limită. Aceasta se poate observa considerând funcțiile $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ și $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{2}{x}$ pentru care $f(x) < g(x)$ pentru orice $x > 0$, dar $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$, inegalitatea strictă dintre valorile lui f și g transformându-se în egalitate.

Teorema cleștelui

Teorema de mai jos, numită și *teorema cleștelui* (pentru funcții), ne permite să calculăm limita într-un punct a unei funcții care, pe o vecinătate a aceluși punct,

poate fi încadrată între alte două funcții având aceeași limită.

Teorema 5.13. Fie trei funcții $a, f, b : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$ cu proprietățile

1. Există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca

$$a(x) \leq f(x) \leq b(x) \quad \text{pentru } x \in V \cap D, x \neq x_0.$$

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} a(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} b(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, iar $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

Limita funcției compuse

Următoarea teoremă de calcul a *limitei funcției compuse* stă la baza calculului limitelor cu ajutorul schimbărilor de variabilă.

Teorema 5.14. Fie $u : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E$, $f : E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$ astfel încât $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u_0$ și $u(x) \neq u_0$ pentru $x \in V \cap D$, $x \neq x_0$, unde $V \in \mathcal{V}(x_0)$ este o vecinătate a lui x_0 , iar $\lim_{y \rightarrow u_0} f(y) = l$. Atunci funcția compusă $f \circ u : D \rightarrow \mathbb{R}$ are limită în x_0 , iar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(u(x))) = \lim_{y \rightarrow u_0} f(y) = l.$$

Corolar 5.14.1. Dacă $u : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E$, $f : E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$ astfel încât $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u_0$, iar $\lim_{y \rightarrow u_0} f(y) = f(u_0)$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(u(x))) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)).$$

Corolar 5.14.2. Dacă $u : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E$, $f : E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$ astfel încât $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u(x_0)$, iar $\lim_{y \rightarrow u_0} f(y) = f(u_0)$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u_0$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(u(x))) = f(u(x_0)).$$

Limitele funcțiilor monotone

Pentru cazul șirurilor, s-a demonstrat că orice șir monoton are limită, finită sau nu. Acest lucru va rămâne adevărat și în cazul funcțiilor monotone, cu precizarea că de această dată este asigurată doar existența limitelor laterale. În acest sens,

teorema următoare precizează faptul că funcțiile monotone au limite laterale în orice punct de acumulare al domeniului lor de definiție.

Teorema 5.15. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f monotonă, și $x_0 \in D'$. Atunci există limitele laterale $l_s = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ și $l_d = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$, finite sau nu.

Cum limita într-un punct a unei funcții este influențată doar de valorile funcției pentru argumente dintr-o vecinătate a aceluși punct, se poate observa că în teorema de mai sus este de fapt suficient ca funcția să fie monotonă doar pe o vecinătate a aceluși punct.

Produsul dintre o funcție cu limita 0 și o funcție mărginită

Teorema 5.16. Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$. Dacă f este mărginită pe o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$, iar $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$.

În teorema de mai sus, trebuie remarcat faptul că nu este necesar ca f să aibă limită în x_0 .

Exercițiu. Determinați $\lim_{x \rightarrow 0} (x \sin^2 \frac{1}{x})$.

Soluție. Deoarece $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 \frac{1}{x}$, este mărginită pe o vecinătate a lui $x_0 = 0$ (de fapt, f este mărginită pe întreg domeniul de definiție, deoarece $|f(x)| \leq 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$), iar $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x$ are limita 0 în $x_0 = 0$, urmează că $\lim_{x \rightarrow 0} (x \sin^2 \frac{1}{x}) = 0$, conform celor de mai sus.

5.2 Proprietăți de calcul ale limitelor de funcții

5.2.1 Operații cu limite de funcții

Cu ajutorul teoremei de caracterizare cu șiruri a limitelor de funcții, se pot deduce următoarele proprietăți ale operațiilor cu limite de funcții cu ajutorul proprietăților corespunzătoare ale operațiilor cu limite de șiruri.

Teorema 5.17. Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$ astfel încât există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$.

1. Dacă suma $l_1 + l_2$ a limitelor are sens, atunci funcția sumă $f + g$ are limită în x_0 și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) + \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right)$$

(caz exceptat: una dintre limitele l_1, l_2 este $+\infty$ iar cealaltă $-\infty$).

2. Dacă produsul $l_1 l_2$ al limitelor are sens, atunci funcția produs fg are limită în x_0 și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right)$$

(caz exceptat: una dintre limitele l_1, l_2 este 0 iar cealaltă este $+\infty$ sau $-\infty$).

3. αf are limită în x_0 pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, iar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x)) = \alpha \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right), \text{ pentru } \alpha \neq 0,$$

iar $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x)) = 0$, pentru $\alpha = 0$.

4. Dacă raportul $\frac{l_1}{l_2}$ al limitelor are sens, iar $\frac{f}{g}$ este bine definită pe o vecinătate a lui x_0 , atunci $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)}{\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right)}$$

(cazuri exceptate: l_2 este 0, sau ambele limite l_1, l_2 sunt infinite).

5. Dacă $l_1^{l_2}$ are sens, iar f^g este bine definită pe o vecinătate a lui x_0 atunci f^g are limită în x_0 și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)^{g(x)}) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right)}$$

(cazuri exceptate: $(l_1, l_2) = (0, 0)$, $(l_1, l_2) = (+\infty, 0)$, $(l_1, l_2) = (1, +\infty)$).

Pentru studiul limitei raportului a două funcții, se poate observa că are loc și următorul rezultat care completează (parțial) teorema de mai sus pentru cazul în

care $l_2 = 0$.

Teorema 5.18. Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$ astfel încât există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \neq 0$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

1. Dacă $\frac{f}{g}$ este bine definită pe o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$, iar $g(x) > 0$ pentru orice $x \in V \cap D$, $x \neq x_0$, atunci $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = +\infty \cdot \operatorname{sgn}(l_1)$$

2. Dacă $\frac{f}{g}$ este bine definită pe o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$, iar $g(x) < 0$ pentru orice $x \in V \cap D$, $x \neq x_0$, atunci $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = -\infty \cdot \operatorname{sgn}(l_1)$$

Cazurile exceptate din teoremele de mai sus, numite, pe scurt, și *cazuri de nedeterminare*, pot fi exprimate pe scurt sub forma $\infty - \infty$ (pentru sumă), $0 \cdot \infty$ (pentru produs), $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{0}{0}$ (pentru raport), 0^0 , ∞^0 , 1^∞ (pentru exponențiere).

Se poate de asemenea demonstra prin inducție matematică faptul că proprietățile 1 și 3 din Teorema 5.17 rămân valabile și pentru mai mult de două funcții. În speță, are loc următorul rezultat.

Teorema 5.19. Fie $f_1, f_2, \dots, f_n : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$ astfel încât există $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = l_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = l_2, \dots, \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = l_n$.

1. Dacă suma $l_1 + l_2 + \dots + l_n$ a limitelor are sens, atunci funcția sumă $f_1 + f_2 + \dots + f_n$ are limită în x_0 și

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)) \\ = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x). \end{aligned}$$

2. Dacă produsul $l_1 l_2 \dots l_n$ al limitelor are sens, atunci funcția produs $f_1 f_2 \dots f_n$

are limită în x_0 și

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x)f_2(x) \dots f_n(x)) \\ = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) \right) \cdot \dots \cdot \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right). \end{aligned}$$

În particular,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x)^n) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \right)^n.$$

5.2.2 Limitele funcțiilor elementare

Limitele funcțiilor polinomiale

Fie P o funcție polinomială de grad $k \geq 1$,

$$P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_k \neq 0.$$

Pentru calculul limitei $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, se observă că, pentru orice $l \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (a_l x^l) = a_l \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x^l \right) = a_l \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x \right)^l = a_l x_0^l.$$

Se obține că

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_k x^k) + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_{k-1} x^{k-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_1 x) + a_0 \\ &= a_k x_0^k + a_{k-1} x_0^{k-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 \\ &= P(x_0). \end{aligned}$$

De aici, valoarea limitei funcției polinomiale într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}$ se obține calculând valoarea funcției polinomiale în acel punct.

Exemple. 1. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 4x + 5) = 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 5 = 25.$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} (4x^3 - 2x^2 + 6) = 4 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 6 = 8.$

La fel ca și în cazul șirurilor, pentru calculul limitei $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x)$ se va scoate factor comun forțat x^k ($k = \text{grad } P$). Se obține că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} x^k \left(a_k + a_{k-1} \frac{1}{x} + \dots + a_1 \frac{1}{x^{k-1}} + a_0 \frac{1}{x^k} \right) \\
&= \infty \cdot a_k = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } a_k > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } a_k < 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Să observăm că limita termenului de grad maxim al lui P este de asemenea

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a_k x^k = \infty \cdot a_k = \lim_{x \rightarrow \infty} P(x),$$

de unde se poate remarca faptul că *limita la $+\infty$ a lui $P(x)$ este egală cu limita termenului de grad maxim al lui P .*

Cu un raționament similar, se poate obține că

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = (-\infty)^k \cdot a_k$$

deci și *limita la $-\infty$ a lui $P(x)$ este egală cu limita termenului de grad maxim al lui P .*

Exemple. 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 + 3x^2 - 2x + 1) = (+\infty)^5 = +\infty.$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 3x^2 - \frac{1}{3}x + \sqrt{3}) = -2(-\infty)^3 = +\infty.$

Limitele funcțiilor raționale

Fie P, Q două funcții polinomiale de grad k , respectiv l , unde $k, l \geq 1$,

$$P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_k \neq 0,$$

$$Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, Q(x) = b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \dots + b_1 x + b_0, \quad b_l \neq 0.$$

Pentru calculul limitei $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right)$ într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}$ în care numitorul nu se anulează ($Q(x_0) \neq 0$), se observă că, datorită proprietăților operațiilor cu limite de funcții și celor demonstrate mai sus privitoare la limita unui polinom într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

De aici, *valoarea limitei funcției raționale într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}$ în care nu se anulează numitorul se obține calculând valoarea funcției polinomiale în acel punct.*

Dacă x_0 este rădăcină a lui Q ($Q(x_0) = 0$), atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)^p P_1(x)}{(x - x_0)^q Q_1(x)},$$

unde p, q sunt ordinele de multiplicare ale rădăcinii x_0 pentru funcțiile polinomiale P , respectiv Q , iar $P_1(x_0) \neq 0, Q_1(x_0) \neq 0$. Se obține că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right) = \begin{cases} 0, & p > q \\ \frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}, & p = q \\ +\infty \cdot \frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}, & q > p, q - p \text{ par} \\ \text{nu există,} & q > p, q - p \text{ impar} \end{cases}.$$

Exemple. 1.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x + 1}{2x^4 - 5x + 9} = \frac{2^3 + 2 \cdot 2 + 1}{2 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2 + 9} = \frac{13}{31}.$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2(x - 3)}{(x - 1)^2(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 3}{x + 2} = -\frac{2}{3}.$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - 3)}{(x - 1)^2(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 3}{(x - 1)(x + 2)}.$$

Atunci $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2}$ nu există, deoarece $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2} = \frac{-2}{(0+) \cdot 3} =$

$$-\infty, \text{ iar } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2} = \frac{-2}{(0-) \cdot 3} = +\infty.$$

Considerăm limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right)$. La fel ca și în cazul șirurilor, pentru calculul acestuia se va scoate factor comun forțat x^k de la numărător ($k = \text{grad } P$), respectiv x^l de la numitor ($l = \text{grad } Q$). Se obține că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k \left(a_k + a_{k-1} \frac{1}{x} + \dots + a_1 \frac{1}{x^{k-1}} + a_0 \frac{1}{x^k} \right)}{x^l \left(b_l + b_{l-1} \frac{1}{x} + \dots + b_1 \frac{1}{x^{l-1}} + b_0 \frac{1}{x^l} \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{k-l} \frac{a_k}{b^l} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } k < l \\ \frac{a_k}{b^l}, & \text{dacă } k = l. \\ +\infty \frac{a_k}{b^l}, & \text{dacă } k > l \end{cases}
\end{aligned}$$

Să observăm că limita raportului termenilor de grad maxim este de asemenea

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_k x^k}{b_l x^l} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{k-l} \frac{a_k}{b^l},$$

de unde se poate remarca faptul că limita lui $\frac{P(x)}{Q(x)}$ este egală cu limita raportului termenilor de grad maxim ai lui P și Q , pentru $x \rightarrow +\infty$. Cu un raționament similar, se poate obține că același lucru se întâmplă și pentru $x \rightarrow -\infty$.

Exemple. 1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x + 2}{2x^2 - 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(3 + 4\frac{1}{x} + 2\frac{2}{x^2} \right)}{x^2 \left(2 - 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{3}{2}.$$

2.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 + 3x^2 + x - 1}{3x^2 + 4x + 6} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(-2 + 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)}{x^2 \left(3 + 4\frac{1}{x} + 6\frac{1}{x^2} \right)} \\
&= (-\infty) \cdot \frac{-2}{3} = +\infty.
\end{aligned}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 2}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(3 + 4\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)}{x^3 \left(4 + 3\frac{1}{x} + 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right)} = 0 \cdot \frac{3}{4} = 0.$$

Limitele radicalilor

Se poate observa că, dacă $x_0 \in \mathbb{R}$ și n este un număr natural impar, atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{\frac{1}{n}}) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x \right)^{\frac{1}{n}} = x_0^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x_0},$$

iar, cu același raționament,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty.$$

În mod similar, dacă $x_0 > 0$ și n este un număr natural par, $n \geq 2$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = +\infty.$$

Exercițiu. Determinați valoarea limitei

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x).$$

Soluție. Deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + x^2 + 1) = +\infty$, urmează, conform teoremei limitei funcției compuse și celor de mai sus, că $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} = +\infty$, ceea ce înseamnă că limita de mai sus prezintă o nedeterminare de forma $\infty - \infty$. Pentru înlăturarea acesteia se amplifică cu expresia conjugată celei din enunț. Urmează că

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x)(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}^2 + \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} \cdot x + x^2)}{\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}^2 + \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} \cdot x + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 + 1 - x^3}{\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}^2 + \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} \cdot x + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 + \frac{1}{x^2})}{x^2(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} + 1} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Limitele funcțiilor exponențiale

Fie $a > 0$, $a \neq 1$, și fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$. Se poate observa că, dacă $x_0 \in \mathbb{R}$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} a \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} x} = a^{x_0}.$$

Pentru $a > 1$, se observă că f este strict crescătoare, iar

$$a^x \geq a^{[x]} = (1 + (a - 1))^{[x]} \geq 1 + (a - 1)[x],$$

conform inegalității lui Bernoulli, de unde urmează conform criteriului majorării că $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = +\infty$. De asemenea,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{a^{-x}} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{a^u} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

cu notația $u = -x$, conform teoremei limitei funcției compuse.

Dacă $a \in (0, 1)$, atunci f este strict descrescătoare, iar $a = \frac{1}{b}$, $b > 1$. Urmează că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{b^x} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

cu un raționament asemănător obținându-se că $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$.

Adăugând și cazul $a = 1$, în cazul în care f este identic egală cu 1, discuția de mai sus se poate sistematiza sub următoarea formă

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & a \in (0, 1) \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ \infty, & a \in (0, 1) \end{cases}.$$

Limitele funcțiilor logaritmice

Fie $a > 0$, $a \neq 1$, și fie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$. Mai întâi, se observă că f este strict crescătoare pentru $a > 1$, respectiv strict descrescătoare pentru $a \in (0, 1)$.

Dacă $x_0 \in \mathbb{R}$, atunci, cum f este strict monotonă, ea are limite laterale în x_0 . Mai mult, deoarece $a^{\log_a x} = x$ pentru orice $x \in (0, \infty)$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (a^{\log_a x}) = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0.$$

Deoarece

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} (a^{\log_a x}) = \left(\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} a \right)^{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} (\log_a x)} = a^{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} (\log_a x)},$$

urmează că $a^{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} (\log_a x)} = x_0$, deci $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} (\log_a x) = \log_a x_0$. În mod similar se de-

monstrează că $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} (\log_a x) = \log_a x_0$, deci există $\lim_{x \rightarrow x_0} (\log_a x) = \log_a x_0$, deoarece limitele laterale sunt ambele egale cu această valoare.

Cu un raționament analog celui realizat pentru $x_0 \in \mathbb{R}$, obținem că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ -\infty, & a \in (0, 1) \end{cases}, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & a > 1 \\ \infty, & a \in (0, 1) \end{cases}.$$

Limitele unor funcții trigonometrice

Mai întâi, reamintim inegalitatea

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad \text{pentru } x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Ținând seama că $\sin(-x) = -\sin x$ și $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ pentru $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, urmează că

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\operatorname{tg} x|, \quad \text{pentru } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

De asemenea,

$$|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|, \quad \text{pentru } x \in (-\infty, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, +\infty)$$

deci

$$|\sin x| \leq |x|, \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R}.$$

Funcția sinus

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ și fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Se observă că

$$|\sin x - \sin x_0| = 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| = |x - x_0|,$$

de unde, conform criteriului majorării,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0 \quad \text{pentru } x_0 \in \mathbb{R}.$$

S-a observat deja că funcția sinus nu are limită nici la $+\infty$ nici la $-\infty$. Într-adevăr, pentru șirul $(a_n)_{n \geq 0}$, $a_n = 2n\pi$, cu limita $+\infty$, șirul valorilor $(\sin(a_n))_{n \geq 0}$ are limita 0, fiind constant nul, în timp ce pentru șirul $(b_n)_{n \geq 0}$, $b_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, de asemenea cu limita $+\infty$, șirul valorilor $(\sin(b_n))_{n \geq 0}$ are limita 1, fiind constant egal cu 1, deci funcția sinus nu are limită la $+\infty$, în mod analog demonstrându-se că funcția sinus nu are limită nici la $-\infty$.

Funcția cosinus

În mod similar celor de mai sus se demonstrează că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0, \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R},$$

în vreme ce nici funcția cosinus nu are limită nici la $+\infty$ nici la $-\infty$.

Funcția tangentă

Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$. Conform inegalităților

$$|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x_0| \leq \left| \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin x_0}{\cos x_0} \right| = \left| \frac{\sin(x - x_0)}{\cos x \cos x_0} \right|,$$

valabile pentru $x, x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N}\}$, urmează că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0, \quad \text{pentru } x_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

De asemenea,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + n\pi \\ x < \frac{\pi}{2} + n\pi}} \operatorname{tg} x = \lim_{\substack{u \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ u < \frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg}(u + n\pi) = \lim_{\substack{u \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ u < \frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} u = +\infty$$

ținând seama de teorema limitei funcției compuse și de faptul că funcția tangentă este periodică de perioadă π . În mod similar se demonstrează că

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + n\pi \\ x > \frac{\pi}{2} + n\pi}} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

Se poate observa că funcția tangentă nu are limită nici la $+\infty$ nici la $-\infty$. Într-adevăr, pentru șirul $(a_n)_{n \geq 0}$, $a_n = n\pi$, cu limita $+\infty$, șirul valorilor $(\operatorname{tg}(a_n))_{n \geq 0}$ are limita 0, fiind constant nul, în timp ce pentru șirul $(b_n)_{n \geq 0}$, $b_n = \frac{\pi}{4} + n\pi$, de asemenea cu limita $+\infty$, șirul valorilor $(\operatorname{tg}(b_n))_{n \geq 0}$ are limita 1, fiind constant egal cu 1, deci funcția tangentă nu are limită la $+\infty$, în mod analog raționându-se pentru $x \rightarrow -\infty$.

Funcția cotangentă

Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{n\pi, n \in \mathbb{N}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$. Ca mai sus, se obține că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0 \quad \text{pentru } x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi, n \in \mathbb{N}\}.$$

De asemenea,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow n\pi \\ x > n\pi}} \operatorname{ctg} x = \infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow n\pi \\ x < n\pi}} \operatorname{ctg} x = -\infty.$$

Se poate observa că nici funcția cotangentă nu are limita nici la $+\infty$ nici la $-\infty$.

Funcția arcsinus

Fie funcția $f : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \arcsin x$. Folosind un raționament analog celui utilizat pentru a stabili limitele funcției logaritmice, se poate obține că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \arcsin x = \arcsin x_0, \quad \text{pentru } x_0 \in [-1, 1].$$

Funcția arccosinus

Fie funcția $f : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, $f(x) = \arccos x$. Ca mai sus, se poate obține că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \arccos x = \arccos x_0, \quad \text{pentru } x_0 \in [-1, 1].$$

Funcția arctangentă

Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Ca mai sus, se poate obține că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0, \quad \text{pentru } x_0 \in \mathbb{R},$$

în vreme ce

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Funcția arcotangentă

Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$, $f(x) = \operatorname{arcctg} x$. Ca mai sus, se poate obține că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} x_0 \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R},$$

în vreme ce

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arcctg} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi.$$

5.2.3 Limite fundamentale

Au loc relațiile:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1,$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1,$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$
- 6) $\lim_{y \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{y})^y = e,$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e,$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$
- 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$
- 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$
- 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p, p \in \mathbb{R}^*.$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Deoarece $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ pentru $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, urmează că

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{pentru } x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

de unde, conform criteriului cleștelui, urmează că $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x} = 1$. Cu un raționament asemănător, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sin x}{x} = 1$, de unde $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, limitele laterale fiind ambele egale cu 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

Cu schimbarea de variabilă $\arcsin x = u$, urmează că $x = \sin u$, iar $u \rightarrow 0$ pentru $x \rightarrow 0$. Conform teoremei limitei funcției compuse, urmează că

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin u}{u}} = \frac{1}{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u}} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

Deoarece $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ pentru $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, urmează că

$$1 < \frac{\operatorname{tg} x}{x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{pentru } x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

de unde, conform criteriului cleștelui, urmează că $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$. Cu un raționament asemănător, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$, de unde $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$, limitele laterale fiind ambele egale cu 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

Cu schimbarea de variabilă $\operatorname{arctg} x = u$, urmează că $x = \operatorname{tg} u$, iar $u \rightarrow 0$ pentru $x \rightarrow 0$. Conform teoremei limitei funcției compuse, urmează că

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\operatorname{tg} u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{tg} u}{u}} = \frac{1}{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} u}{u}} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

A fost demonstrat în Capitolul 2 că $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$. Fie $x > 0$. Să notăm $n = [\frac{1}{x}]$. Cum $[\frac{1}{x}] \leq \frac{1}{x} < [\frac{1}{x}] + 1$, urmează că $n \leq \frac{1}{x} < n + 1$, deci $\frac{1}{n} \geq x > \frac{1}{n+1}$. În concluzie,

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq (1+x)^{\frac{1}{x}} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

adică

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} \leq (1+x)^{\frac{1}{x}} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Cum $n \rightarrow \infty$ pentru $x \rightarrow 0$, $x > 0$, iar $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$, urmează conform criteriului cleștelui că $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. În mod asemănător se demonstrează că

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, deci $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, ambele limite laterale fiind egale cu e .

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

Deoarece $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, cu notația $\frac{1}{x} = y$ urmează că $\lim_{y \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{y})^y = e$.

Deoarece și $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, tot cu notația $\frac{1}{x} = y$, urmează că și $\lim_{y \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{y})^y = e$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$$

Conform proprietăților operațiilor cu limite de funcții, urmează că

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} \right) = \log_a \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left((1+x)^{\frac{1}{x}} \right) \right) = \log_a e.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Punând $a = e$ în formula de mai sus, obținem că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \log_e e = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Cu schimbarea de variabilă $a^x - 1 = u$, urmează că $x = \log_a(1+u)$, iar $u \rightarrow 0$ pentru $x \rightarrow 0$. Conform teoremei limitei funcției compuse, urmează că

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\log_a(1+u)} = \frac{1}{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+u)}{u}} = \frac{1}{\log_a e} = \log_e a = \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Punând $a = e$ în formula de mai sus, obținem că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p$$

Cu schimbarea de variabilă $x = e^u - 1$, urmează că $u = \ln(1+x)$, iar $u \rightarrow 0$ pentru $x \rightarrow 0$. Conform teoremei limitei funcției compuse, urmează că

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(e^u)^p - 1}{e^u - 1} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^{pu} - 1}{e^u - 1} = \frac{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^{pu} - 1}{pu} \cdot p}{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u}} = \frac{\ln e \cdot p}{\ln e} = p.$$

Compararea creșterii funcțiilor $\ln x$, x^p ($p > 0$) și e^x

În cele ce urmează vom studia diferențele între vitezele de creștere spre $+\infty$ ale funcției exponențiale, funcției putere și funcției logaritmice, observând că funcția exponențială are cea mai mare viteză de creștere spre $+\infty$, urmată de funcția putere și funcția logaritmică.

Vom demonstra mai întâi că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$. În acest sens, s-a demonstrat deja că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^p} = 0$ pentru orice $p > 0$. Notând $[x] = n$, observăm că $n \leq x < n + 1$ și atunci

$$\frac{\ln n}{(n+1)^p} < \frac{\ln x}{x^p} < \frac{\ln(n+1)}{n^p},$$

adică

$$\frac{\ln n}{n^p} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p < \frac{\ln x}{x^p} < \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^p} \left(\frac{n+1}{n}\right)^p,$$

de unde, ținând seama de cele de mai sus, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$.

Arătăm acum că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{e^x} = 0$. Cu schimbarea de variabilă $x = \ln u$, urmează că $u = e^x$ și $u \rightarrow \infty$ pentru $x \rightarrow \infty$. Ținând seama de teorema funcției compuse, se obține că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{e^x} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\ln u)^p}{u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln u}{u^{\frac{1}{p}}}\right)^p = \left(\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\ln u}{u^{\frac{1}{p}}}\right)^p = 0^p = 0.$$

Pentru o altă demonstrație a acestor relații, să arătăm mai întâi că

$$\ln x < x < e^x, \quad \text{pentru } x > 0,$$

inegalitate care prezintă un interes de sine stătător.

În acest sens, să observăm că

$$e^x \geq e^{[x]} = (1 + (e - 1))^{[x]} \geq 1 + (e - 1)[x],$$

conform inegalității lui Bernoulli. În plus,

$$1 + (e - 1)[x] > \{x\} + [x] = x,$$

de unde $e^x > x$, pentru orice $x > 0$. Prin logaritmare a acestei inegalități, se obține că $x > \ln x$, pentru orice $x > 0$, de unde concluzia.

De aici, $\ln \sqrt{x} < \sqrt{x}$, pentru orice $x > 0$, iar cum $\ln \sqrt{x} = \ln x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln x$, urmează că $\frac{\frac{1}{2} \ln x}{\sqrt{x}} < 1$, deci $\frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$, pentru $x > 0$. Atunci

$$0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}, \quad \text{pentru } x > 1,$$

de unde urmează conform criteriului cleștelui că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Arătăm acum că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$, pentru $p > 0$. Într-adevăr, cu schimbarea de variabilă $u = x^p$

și ținând seama că $u \rightarrow \infty$ când $x \rightarrow \infty$, obținem cu ajutorul teoremei limitei funcției compuse că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\ln(u^{\frac{1}{p}})}{u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{p} \ln u}{u} = \frac{1}{p} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\ln u}{u} = 0.$$

Faptul că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{e^x} = 0$ se obține ca mai sus.

În fine, să precizăm câteva considerații asupra tratării cazurilor de nedeterminare. Cazurile $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ se tratează cu ajutorul limitelor fundamentale menționate mai sus, pentru cazul de nedeterminare $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ putându-se da și factor comun forțat. Cazul $0 \cdot \infty$ se tratează transformând produsul în raport cu ajutorul formulei $fg = \frac{f}{\frac{1}{g}}$. Cazul $\infty - \infty$ se tratează prin reducere la o nedeterminare de tip $0 \cdot \infty$ dând factor comun forțat, sau, în unele situații în care apar radicali, prin amplificarea cu expresii conjugate. Cazurile 0^0 , ∞^0 , 1^∞ se tratează prin reducerea nedeterminării la una de tip produs, cu ajutorul formulei $f^g = e^{g \ln f}$, pentru cazul de nedeterminare 1^∞ putându-se utiliza și limita $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, numită în continuare și *limita standard ce definește numărul e*.

Exemple. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x}$

Fiind vorba despre cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$, vom folosi limite fundamentale. Urmează că

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin x} \cdot \sin x}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot x}{\frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4x} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin 4x}{4x}} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3x} - 1}{\sqrt[3]{1 + 2x} - 1}$

Fiind vorba despre cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$, vom folosi limite fundamentale. Urmează că

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3x} - 1}{\sqrt[3]{1 + 2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 3x)^{\frac{1}{2}} - 1}{(1 + 2x)^{\frac{1}{3}} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(1 + 3x)^{\frac{1}{2}} - 1}{3x} \cdot 3x}{\frac{(1 + 2x)^{\frac{1}{3}} - 1}{2x} \cdot 2x}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^{\frac{1}{2}} - 1}{3x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^{\frac{1}{3}} - 1}{2x}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{4}.$$

Exemple. 1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x$

Fiind vorba despre cazul de nedeterminare $0 \cdot \infty$, vom transforma mai întâi nedeterminarea într-una de tip raport. Observăm că

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}.$$

Cu notația $u = \frac{1}{x}$, ținând seama că $u \rightarrow \infty$ pentru $x \rightarrow 0, x > 0$, se obține că

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{u}}{u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{-\ln u}{u} = 0,$$

de unde limita căutată este 0.

2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^x$

Fiind vorba despre cazul de nedeterminare 0^0 , transformăm mai întâi nedeterminarea într-una de tip produs. Atunci

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x},$$

de unde

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{x \ln x} = e^{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x} = e^0 = 1,$$

conform exemplului precedent.

Exemple. 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{n} + \sin^2 \frac{2}{n} \right)^n$

Vom determina valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} \right)^x$, valoarea limitei din enunț obținându-se ca un caz particular. Fiind vorba despre cazul de nedeterminare 1^∞ , se va folosi limita standard ce definește numărul

e. Au loc egalitățile

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} \right)^x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} - 1 \right)^{\frac{1}{\cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} - 1}} \right]^{x \left(\cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} - 1 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} - 1 \right)^{\frac{1}{\cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} - 1}} \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} - 1 \right)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} - 1}{\frac{1}{x}}} . \end{aligned}$$

Cu notația $u = \frac{1}{x}$, ținând seama că $u \rightarrow 0$ când $x \rightarrow \infty$, urmează că

$$\begin{aligned} e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} - 1}{\frac{1}{x}}} &= e^{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\cos u + \sin^2 2u - 1}{u}} = e^{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{u}{2} + \sin^2 2u}{u}} = e^{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{u}{2}}{u} + \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2u}{u}} \\ &= e^{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{u}{2}}{u} + \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2u}{u}} = e^{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{u}{2}}{\left(\frac{u}{2}\right)^2} \cdot \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2u}{(2u)^2} \cdot (2u)^2} \\ &= e^{\lim_{u \rightarrow 0} -\left(\frac{\sin \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\right)^2 \cdot \frac{u}{2} + \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2u}{2u}\right)^2 \cdot 4u} \\ &= e^{-\lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\right)^2 \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{2} + \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2u}{2u}\right)^2 \cdot \lim_{u \rightarrow 0} 4u} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

Atunci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} \right)^x = 1,$$

de unde limita din enunț este 1.

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2}{x - 1}$

O limită calculată pentru x tinzând la un număr nenul poate transformată într-o limită în care variabila tinde la zero alegând ca nouă variabilă diferența dintre x și acel număr. Cu notația $u = x - 1$, ținând seama că $u \rightarrow 0$ când $x \rightarrow 1$, urmează că

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2}{x - 1} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+u} + \sqrt[3]{1+u} - 2}{u}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1+u)^{\frac{1}{2}} - 1}{u} + \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1+u)^{\frac{1}{3}} - 1}{u} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

Aplicații

5.1. Determinați valorile următoarelor limite

$$\begin{aligned}
&1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\sin x} - 1}{x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^x - 1)(3^x - 1)}{x^2}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^x - 1)^3}{x^3}; \\
&4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x^2 + x - 1}{x}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \dots + \operatorname{tg} nx}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{arctg} x)}{\operatorname{tg}(\arcsin x)}; \\
&7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[(1 + 3x)^2]}{x}; \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x^2)}{x \arcsin x}; \quad 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{4x}; \quad 10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 5^x - 2}{3^x + 4^x - 2}; \\
&11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{\sin 3x - \sin 2x}; \quad 12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - \sin x}{x^2}; \quad 13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt[3]{1 + 3x}}{4x}; \\
&14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + x)}{x}; \quad 15) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sin(2 \arccos x)}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad 16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + mx)^n - (1 + nx)^m}{x^2}, \\
&m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq 2; \quad 17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a + x)^x - 1}{x}; \quad 18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}; \\
&19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) - \sin(\sin x)}{\operatorname{tg} x - \sin x}.
\end{aligned}$$

5.2. Fie $p, q > 0$. Determinați valorile următoarelor limite

$$\begin{aligned}
&1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p - 2^x}{q - 3^x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{px})}{\ln(1 + e^{qx})}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^p + e^x)}{\ln(x^q + e^x)}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + p \operatorname{arctg} x}{x + q \operatorname{arctg} x}; \\
&5) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln \sin px}{\ln \sin qx}.
\end{aligned}$$

5.3. Determinați valorile următoarelor limite

$$\begin{aligned}
&1) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{4}{\sin^2 x}}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \ln(1 + x) + \ln(1 + 2x) + \dots + \ln(1 + nx))^{\frac{1}{x}}; \\
&3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}, a, b > 0; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{\arcsin x} + b^{\operatorname{arctg} x}}{2} \right)^{\frac{1}{x}}, a, b > 0; \\
&5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} \right)^x; \quad 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}} \right)^x; \quad 7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)^x; \\
&8) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos nx} \right)^{\frac{1}{x^2}}; \quad 9) \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x}}, a \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

5.4. Determinați valorile următoarelor limite

- 1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{2x-\pi}}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1 - n(x-1)}{(x-1)^2}$; 4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{3^{\operatorname{tg} x} - 3}{x - \frac{\pi}{4}}$;
 5) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x+24} - 3}{x-3}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{\sqrt[3]{x} - 1}$; 7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[p]{x} - 1}{\sqrt[q]{x} - 1}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p, q \geq 2$;
 8) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^n x - \cos^n x}{\sin(x - \frac{\pi}{4})}$; 9) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x-1}$;
 10) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \dots + \sqrt[n]{x} - (n-1)}{x-1}$.

5.5. Determinați valorile următoarelor limite

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$; 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (x-2)e^{\frac{1}{x-2}}$; 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} x [\ln(x+2) - \ln x]$; 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}})$;
 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(x+1)\right)$; 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{x+2} - \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}\right)$.

5.6. Determinați valorile următoarelor limite

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\sin \frac{1}{x}}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\sin x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$; 4) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (-\ln x)^{2x}$;
 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$.

5.7. Determinați valorile următoarelor limite

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln x)$; 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x^2} + \ln x\right)$; 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(e^x + e^{-x}) - x)$;
 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt[n]{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$; 5) $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 3x)$.

5.8. Determinați valorile următoarelor limite

- 1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$; 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{arcsin} x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{arctg} |x|)^{|\operatorname{arctg} x|}$;
 4) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\sin x + x \cos x)^x$; 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sin \left(\frac{\ln x}{x}\right)\right]^{\frac{\ln x}{x}}$.

5.9. Fie $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Arătați că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{P(x)} = 0$.

5.10. Fie $a > 0$. Demonstrați că

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a} = a^a(1 + \ln a)$; 2) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x \ln a - a \ln x}{x - a} = \ln a - 1$.

5.11. Fie $p \in (0, 1)$. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel ca $\lim_{x \rightarrow \infty} ((x+1)^p - x^p + a) = p$.

5.12. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Determinați punctele $x_0 \in \mathbb{R}$ pentru care f are limită în x_0 .

5.13. 1. Demonstrați că $\sin(\arccos u) = \sqrt{1 - u^2}$ pentru $u \in [-1, 1]$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\arccos \frac{2x}{1+x^2}}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$. Demonstrați că f nu are limită în $x = 1$.

5.14. Fie $L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x \cos 2x \dots \cos nx}{x^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Determinați L_0, L_1 .

2. Demonstrați că $L_{n+1} = L_n + \frac{(n+1)^2}{2}$ pentru $n \in \mathbb{N}$.

3. Demonstrați că $L_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$ pentru $n \in \mathbb{N}$.

5.15. Fie $L_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\ln(e+x) \ln(e+2x) \dots \ln(e+nx)}}{x}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Determinați L_1 .

2. Demonstrați că $L_{n+1} = L_n - \frac{n+1}{e}$ pentru $n \in \mathbb{N}$.

3. Demonstrați că $L_n = -\frac{n(n+1)}{2}$ pentru $n \in \mathbb{N}$.

5.16. Fie $L_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sin x)(1 - \sin^2 x) \dots (1 - \sin^n x)}{\cos^{2n} x}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Determinați L_1 .

2. Demonstrați că $L_{n+1} = \frac{n+1}{2} L_n$ pentru $n \in \mathbb{N}$.

3. Demonstrați că $L_n = \frac{n!}{2^n}$ pentru $n \in \mathbb{N}$.

5.17. Determinați valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{ax^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 2})$ în funcție de valorile parametrului real a , $a > 0$.

5.18. Determinați valorile parametrilor reali a, b astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 1.$$

5.19. Determinați valorile parametrilor reali a, b astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - ax - b}{x^2} \in \mathbb{R}.$$

5.20. Determinați valorile parametrilor reali $a, b, a > 0$, astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow 0} (a \cos x + b \sin x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

5.21. Fie $f, g : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ astfel ca $f(x) > \frac{1}{x^2+x} > g(x)$ pentru $x > 0$. Demonstrați că $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$, iar $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.

5.22. Fie $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Arătați că există $\delta_1 > 0$ astfel ca $a \sin x + \cos(bx) > 0$ pentru $x \in (-\delta_1, \delta_1)$.
2. Arătați că există $\delta_2 > 0$ astfel ca $e^{ax} - bx > 0$ pentru $x \in (\delta_2, +\infty)$.
3. Arătați că există $\delta_3 > 0$ astfel ca $\frac{1}{2} < \frac{\sin x}{x} < \frac{3}{2}$ pentru $x \in (-\delta_3, \delta_3)$.

5.23. Demonstrați că

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{x} = 1; \quad 2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1; \quad 3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \left(\left[\frac{1}{x} \right] + \left[\frac{2}{x} \right] + \dots + \left[\frac{n}{x} \right] \right) = 1.$$

5.24. Demonstrați că

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2-1} \cos x = 0; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2+1} \cos \frac{1}{x} = 0; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

5.25. Fie $f : \mathbb{R}^* \rightarrow (0, \infty)$ astfel ca $\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) + \frac{1}{f(x)} \right) = 2$. Arătați că $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

5.26. Demonstrați că $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$. Cu ajutorul acestei limite, justificați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

5.27. Calculați următoarele limite de șiruri

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n} \ln \left(1 + \frac{n}{n^2+2} \right); \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(e^{\sin \frac{1}{n}} - \cos \frac{1}{n} \right); \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(e^{\frac{n+1}{n}} - e \right).$$