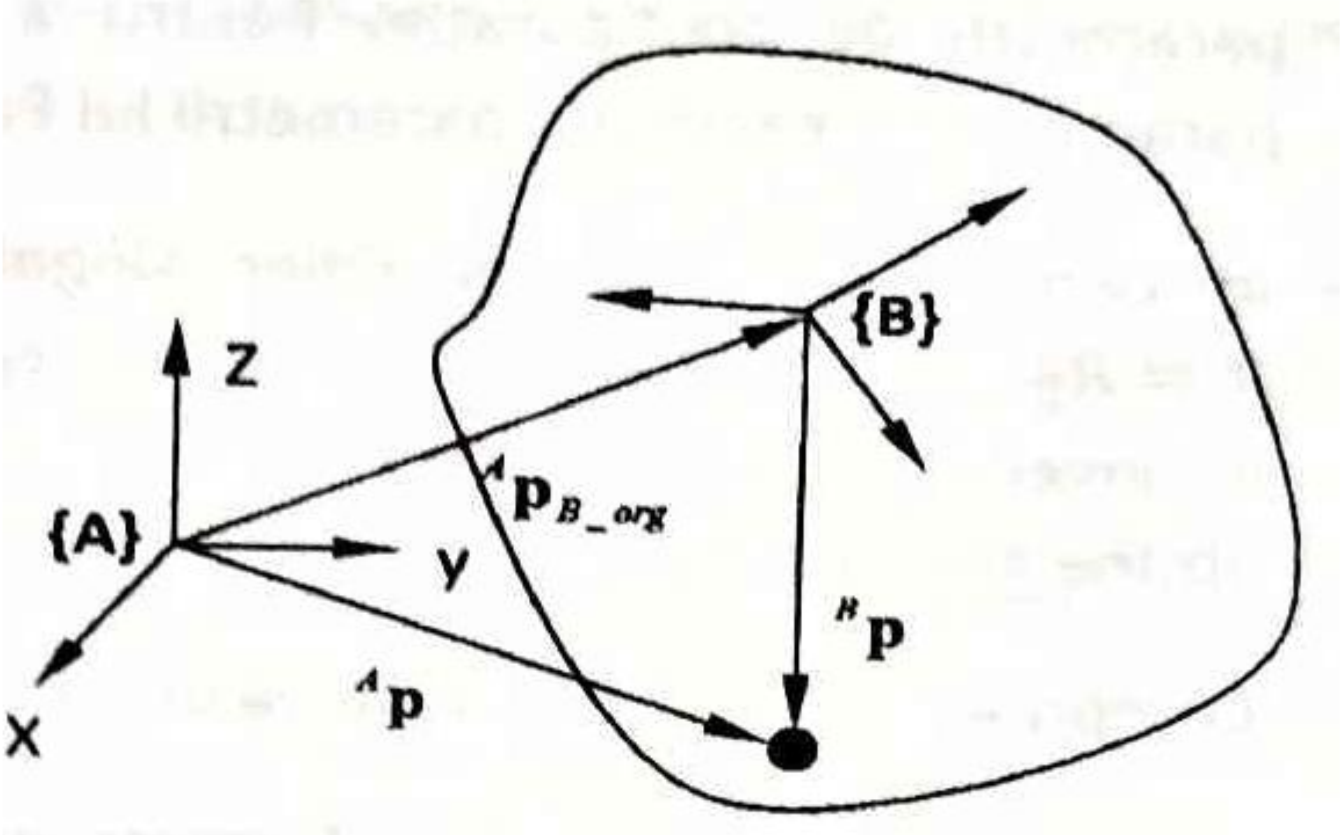
Transformari omogene.
Cazul 3D cu origini diferite.

Cazul 3D cu origini diferite

Rezultatele anterioare vor fi dezvoltate pentru soluţionarea problemei propuse, adică exprimarea poziţiei unui punct al corpului definit în reperul {B} faţă de reperul {A}, în condiţiile în care reperul {B} este translatat şi rotit faţă de {A}.



Cazul 3D cu origini diferite

Soluţia este obţinută prin suma a doi vectori. Facem precizarea faptului că această suma poate fi efectuată doar în cazul în care cei doi vectori sunt exprimaţi în acelaşi sistem de coordonate. Acesta este motivul pentru care, vectorul definit iniţial in {B} este transformat cu ajutorul matricei de rotaţie într-un vector exprimat în {A}.

$$^{A}p = {}^{A}p_{B\_org} + {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}p$$

Cazul 3D cu origini diferite

Relaţia poate fi rescrisă într-o formă matricealã, mai compactă:

$$\begin{bmatrix} {}^{A}p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R & {}^{A}p_{B\_org} \\ 0_{(1\times3)} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^{B}p \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matricea care reuneşte cele două transformări se numeşte **transformare omogenă**:

$${}^{A}p_{(4\times1)} = {}^{A}_{B}T \cdot {}^{B}p_{(4\times1)} \quad \text{unde} \quad {}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R & {}^{A}p_{B\_org} \\ 0_{(1\times3)} & 1 \end{bmatrix}$$

Cazul 3D cu origini diferite

În conformitate cu mecanismul **PCAP** matricea ${}_{B}^{A}T$ este rezultatul unui proces de abstractizare, care urmeză celui reprezentat de compunerea dintre un operator de rotaţie cu unul de translaţie. Paternul poate fi observat prin partiţionarea acestei matrice în patru elemente:

operatorul de rotaţie ${}_{B}^{A}R$ (3x3); vectorul nul 0(1x3);

vectorul de translaţie ${}^{A}p_{B\_org}$ (3x1); elementul 1.

Toate transformările omogene au acest patern.

Cazul 3D cu origini diferite

Acest proces de abstractizare poate fi urmat de analiza paternului. Transformarea omogenă poate fi descompusă în două transformări omogene care cuprind exclusiv translaţia şi rotaţia, în succesiunea translaţie — rotaţie (şi nu invers).

$$
{}_B^A T = \begin{bmatrix} {}_B^A R & {}^A p_{B\_org} \\ 0_{(1\times 3)} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{(3\times 3)} & {}^A p_{B\_org} \\ 0_{(1\times 3)} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}_B^A R & 0_{(3\times 1)} \\ 0_{(1\times 3)} & 1 \end{bmatrix}
$$

Cazul 3D cu origini diferite

Această observaţie permite o altă interpretare a transformărilor în conformitate cu care, transformarea de la ***B*** la ***A*** este compusă din acele operaţii care permit ***călătoria*** sistemului de coordonate ***A*** la ***B.*** Mai exact, dacă ne dorim să suprapunem reperul ***A*** pe reperul ***B*** este nevoie de o translaţie urmată de o rotaţie. Imaginarea unui proces prin care reperul faţă de care se face transformarea, călătoreşte către reperul care va fi transformat, este un patern util în stabilirea formalismelor care descriu postura robotului.

Cazul 3D cu origini diferite

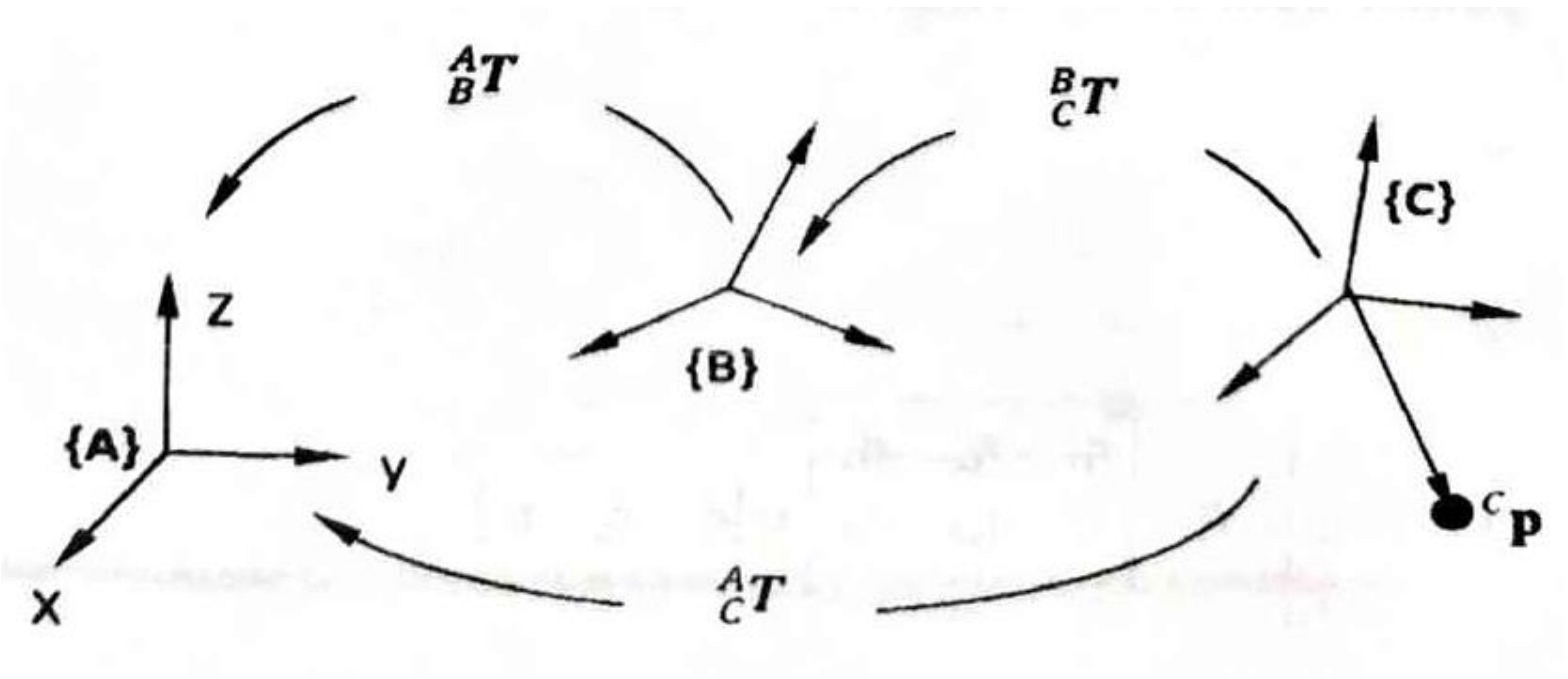
Se determină și faptul că transformarea omogenă inversă se obţine cu relaţia:

$$ {}_A^B T = \begin{bmatrix} {}_B^A R^T & -{}_B^A R^T \cdot {}^A p_{B\_org} \\ 0_{(1\times 3)} & 1 \end{bmatrix} $$

Cazul 3D cu origini diferite

În robotică apar o succesiune de sisteme de coordonate. Fiecare element (corp) este definit în propriul lui sistem de coordonate, apare în plus un sistem de coordonate (privilegiat), al **bazei**, care este fix în timpul procesului de manipulare. Acest fapt conduce la necesitatea exprimării posturilor reciproce.

Cazul 3D cu origini diferite



Cazul 3D cu origini diferite

Pentru o astfel de succesiune (lanţ) de sisteme de coordonate ilustrată mai sus se pot scrie relaţiile:

$$ {}^{A}p_{(4\times 1)} = {}^{A}_{B}T \cdot {}^{B}_{C}T \cdot {}^{C}p_{(4\times 1)} = {}^{A}_{C}T \cdot {}^{C}p_{(4\times 1)} $$

$$ {}^{A}_{C}T = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}_{C}R & {}^{A}_{B}R^{T} \cdot {}^{B}p_{C\_org} + {}^{A}p_{B\_org} \\ 0_{(1\times 3)} & 1 \end{bmatrix} $$

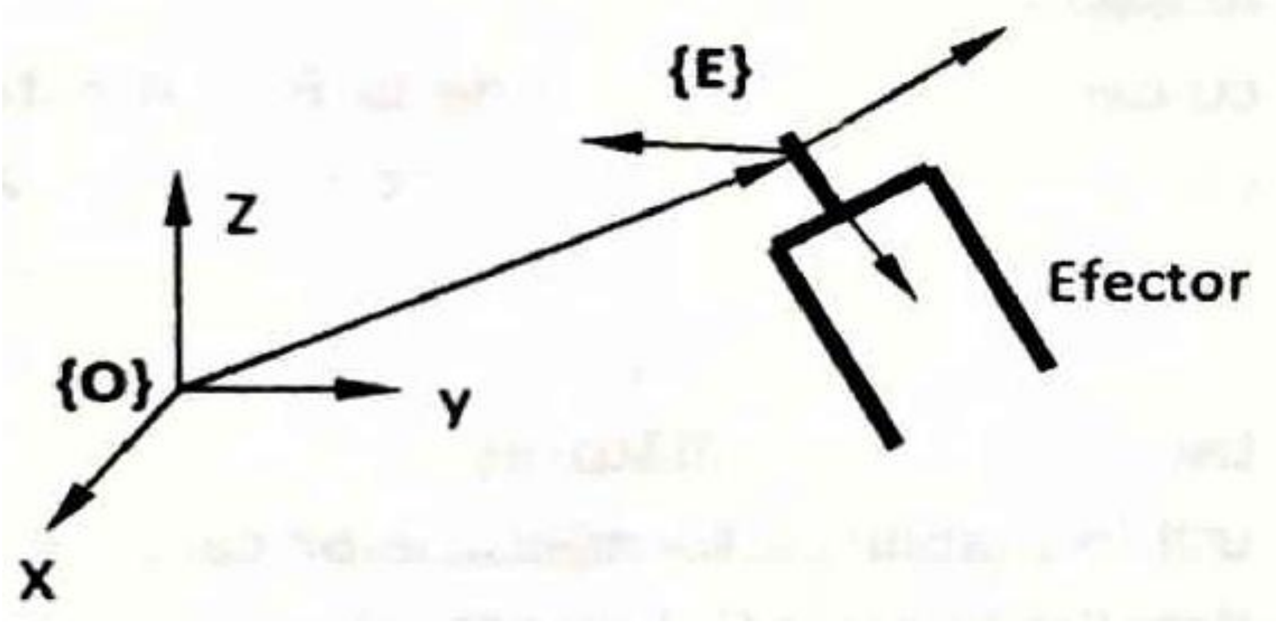
Lanţul sistemelor de coordonate poate fi închis astfel

$$ {}^{A}_{B}T \cdot {}^{B}_{C}T \cdot {}^{C}_{A}T = 1 $$

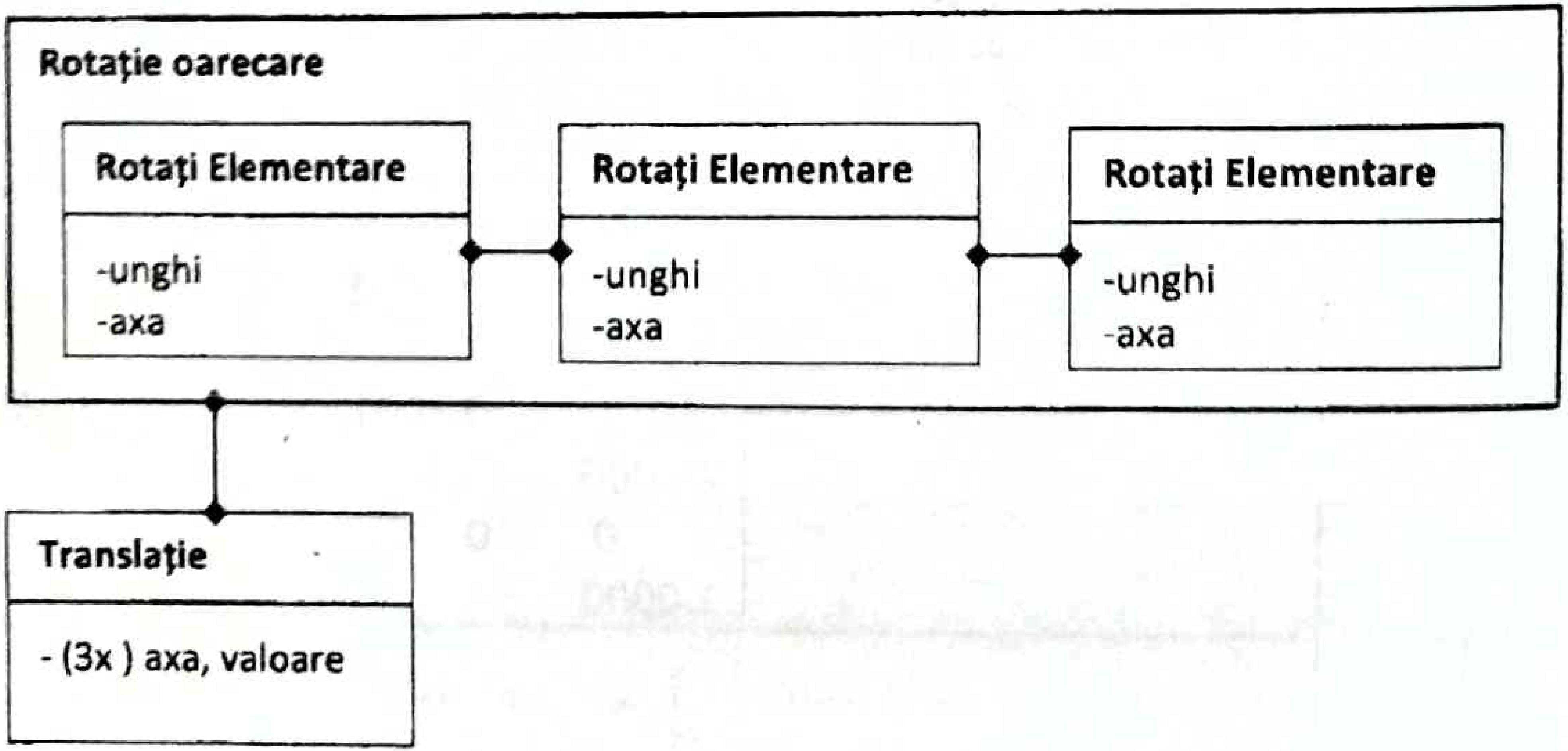
Cazul 3D cu origini diferite

Pentru efector se poate definii transformarea ${}^{O}_{E}T$ care permite determinarea parametrilor de configuraţie ai acestuia.

Există şase parametrii
de configuraţie
(trei parametrii pentru poziţie,
și trei pentru orientare).



Operatorul omogen



Modelul geometric al manipulatorului

Un lanţ cinematic este format prin înserierea a *n* elemente (solide rigide), înserierea se realizează prin cuplarea elementelor cu ajutorul cuplelor de rotaţie sau de translaţie. Pentru a descrie postura efectorului în reperul din baza (fix) sunt necesari *n* parametrii independenţi — coordonate generalizate — *n* variabile, care sunt modificate continuu pe parcursul realizării taskul impus. Pe de alta parte, forma elementelor, prin dimensiunile acestora, introduce noi parametrii invarianţi în timp.

Descrierea elementelor

Prin descrierea elementelor înţelegem asocierea unui sistem de referinţă fiecărui element şi definirea unei transformări omogene faţă de un reper a cărei postură este cunoscută. Componentele transformării depind de definirea sistemului de coordonate propriu fiecărui element, ceea ce în primă instanţă este o alegere subiectivă a originii (centrul de masa, centru articulaţiei etc.) şi a orientării acestuia. Un **rezultat bun**, din punct de vedere computaţional, îndeplineşte următoarele condiţii: **ţine cont de postura elementelor; este unitară pentru toate elementele şi necesită un numărul minim de parametrii.**

Descrierea elementelor

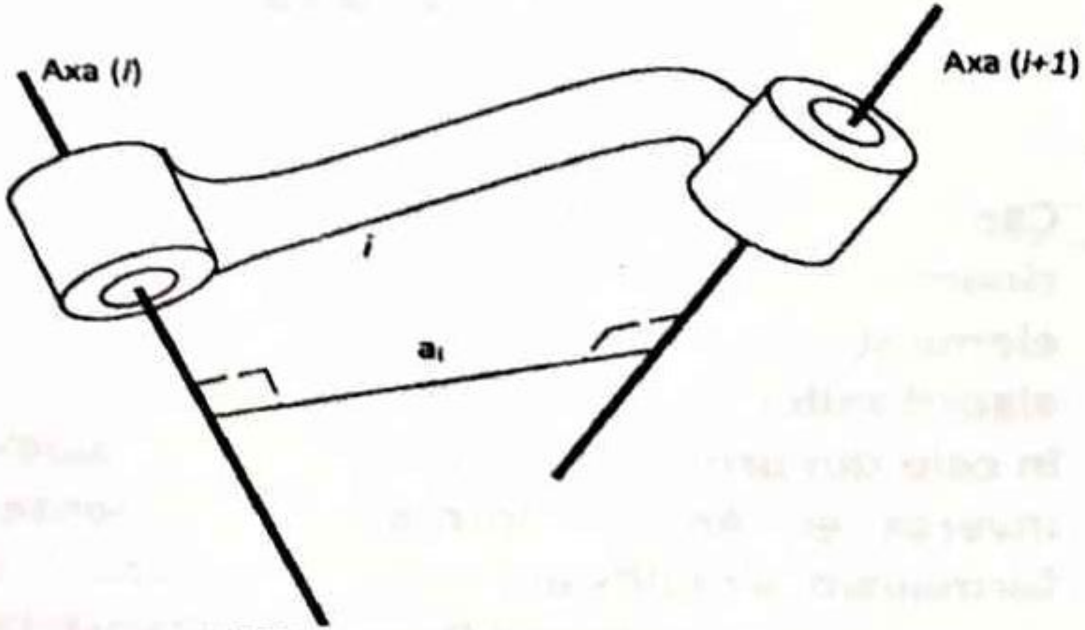
Dintre formalismele consacrate de literatura de specialitate (canonice) va fi prezentat **Formalismul Denavit Hartenberg** modificat (în variantă Craig). Formalismul menţionat utilizează următorii patru parametrii pentru descrierea unui element.

Descrierea elementelor

1. **Lungimea elementului, a_i**

În caz general, cele doua cuple de la capetele fiecărui element au axe oarecare. Cele doua axe (strâmbe) permit definirea unei normale comune. Lungimea elementului este definită ca fiind egală cu lungimea normalei comune.

Fig. 3.1. Lungimea elementului (i) : parametrul a_i



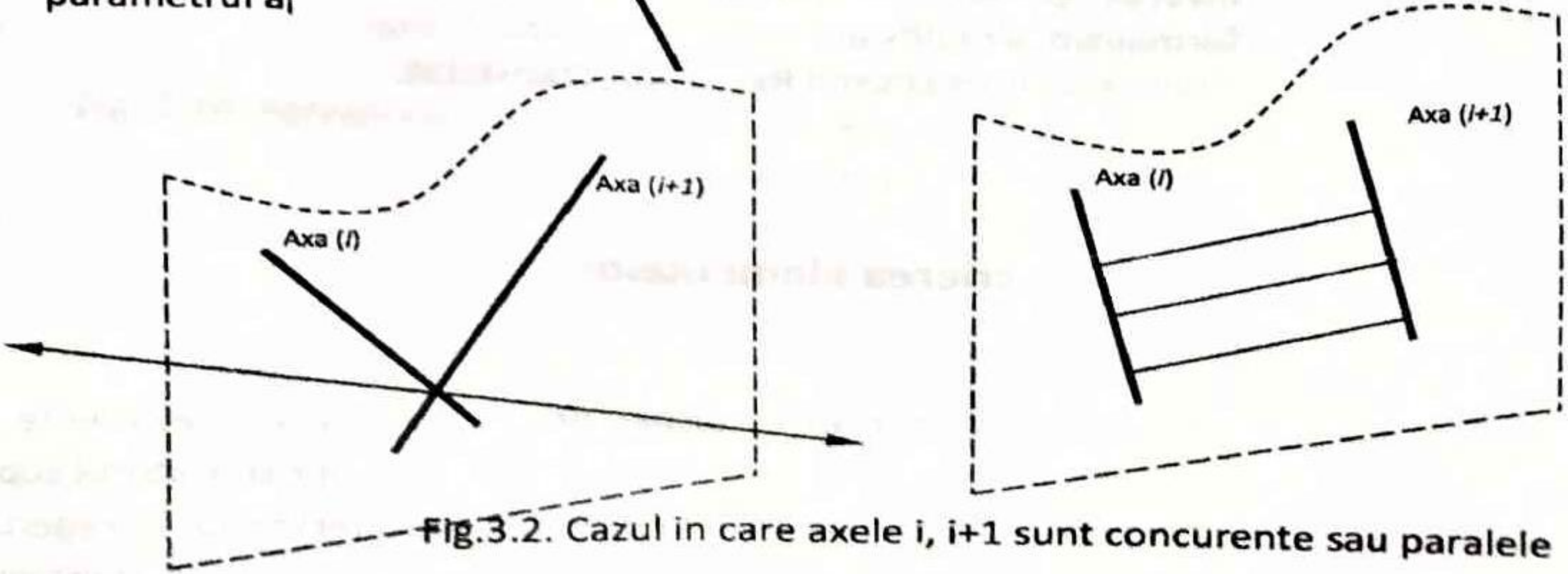


Fig.3.2. Cazul in care axele i, i+1 sunt concurente sau paralele

Descrierea elementelor

Atunci când axa ***i***, axa ***i+1*** sunt oarecare, $\mathbf{a}_i$ este bine definită. Există însă două situaţii particulare, în care precizarea ei pare a fi mai dificilă:

- în primul caz cele două axe sunt concurente, ceea ce face ca lungimea elementului să fie considerată nulă;

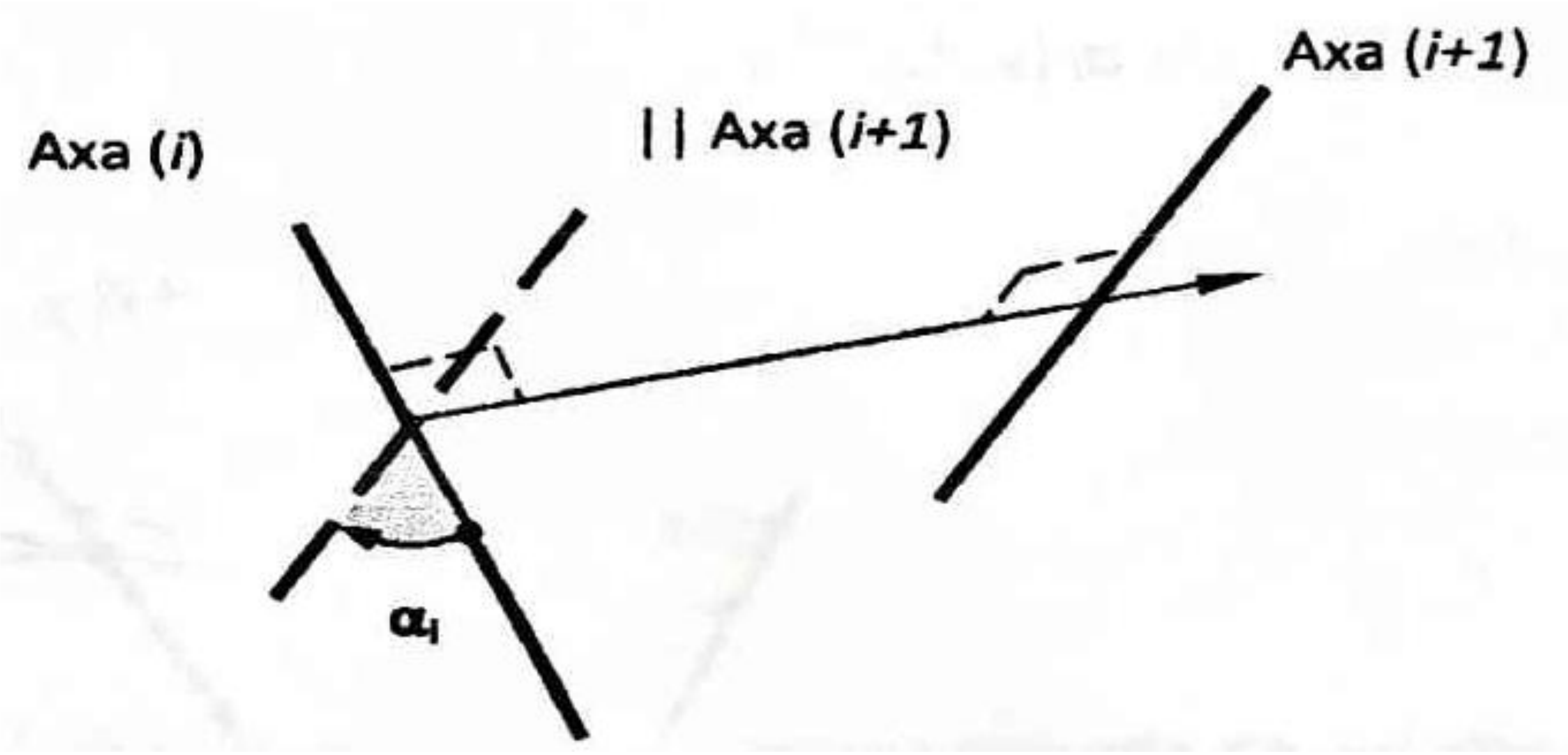
- în al doilea caz axele sunt paralele, situaţie în care alegerea punctelor de intersecţie dintre normală şi axe este lăsată la latitudinea celui care face modelarea.

Descrierea elementelor

2. **Unghiul de răsucire al elementului**, $\boldsymbol{a}_{\mathrm{i}}$

Utilizând axele articulaţiilor consecutive, proiecţia axei ***i+1*** pe planul care conţine axa ***i*** şi este perpendicular pe normala comună, permite determinarea unghiului de răsucire $\boldsymbol{a_i}$**.** Sensul de măsurare al unghiului este dat de sensul pozitiv al normalei comune (alegerea sensului normalei comune este la latitudinea celui care face modelare). De multe ori se recomandă ca, sensul de rotaţie să fie dat de succesiunea ***i, i+1*** (suprapunerea axei **i** peste axa **i+1**).

Descrierea elementelor



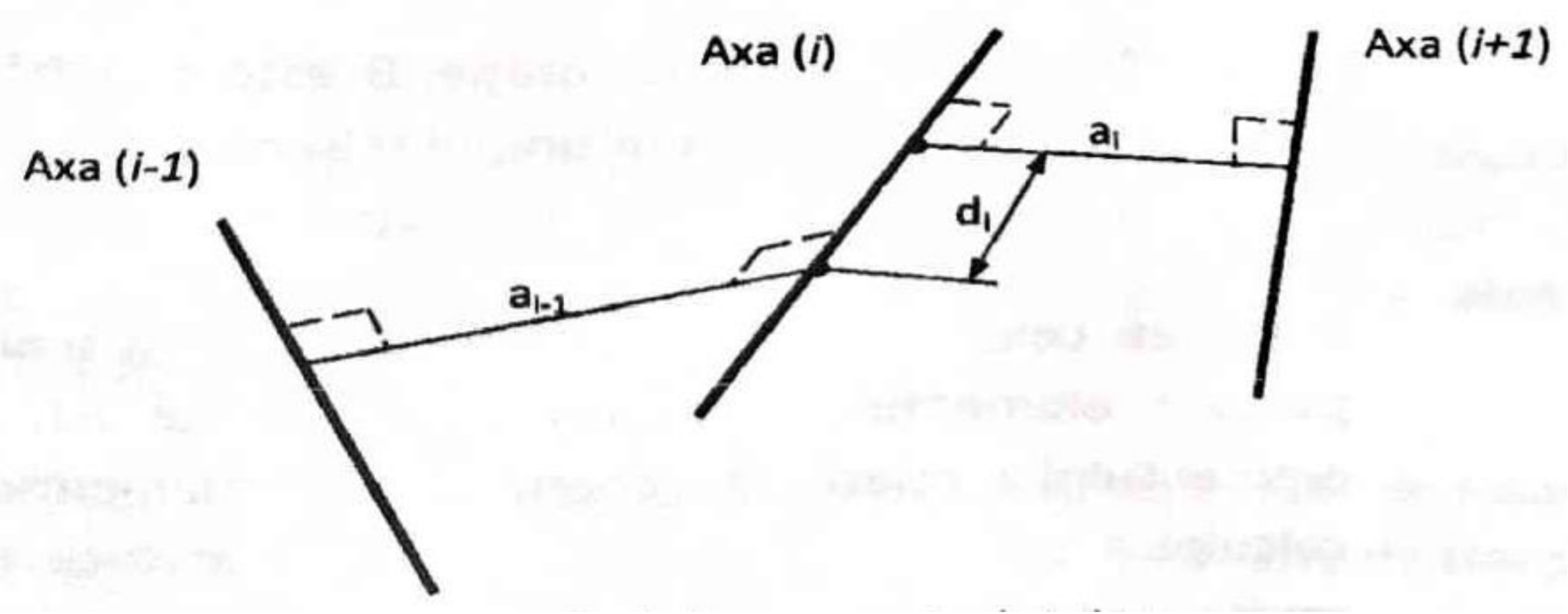
Descrierea elementelor

3. **Offsetul elementului**, $\boldsymbol{d}_i$

Determinarea *offsetului* (compensarea) pentru axa ***i*** utilizeză cele două puncte care definesc normalele comune la axele ***i-1,*** respectiv ***i+1****.* Compensare se defineşte ca fiind lungimea segmentului dintre cele doua puncte menţionate.

Este importantă următoarea precizare: atunci când cupla ***i*** este de translaţie $\boldsymbol{d}_i$ este o variabila. Acest lucru înseamnă ca valoarea lui $\boldsymbol{d}_i$ se modifică în timpul mişcării lanţului cinematic. Pentru o cuplă de rotaţie compensarea este constantă.

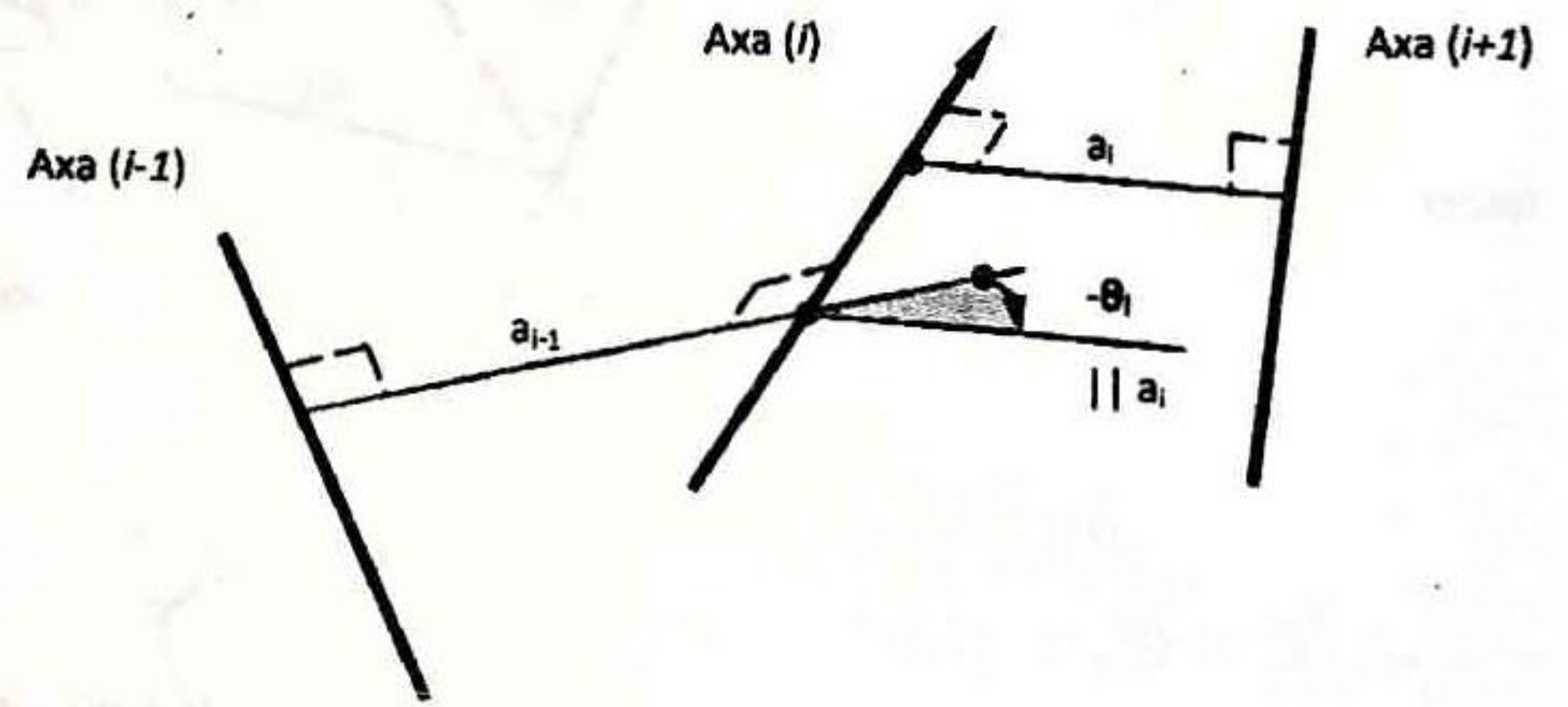
Descrierea elementelor



Descrierea elementelor

4. **Unghiul articulaţiei, θ_i**

Unghiului θ_i este unghiul dintre cele două normale consecutive la axa ***i***. Pentru determinarea mărimii sale se proiectează normala comună axelor ***i,i+1*** pe planul care conţine normala la axele ***i-1, i*** şi care este perpendicular la axa ***i***. Sensul unghiului este dat de suprapunere normalei $\mathbf{a}_{i-1}$, peste normala $\mathbf{a}_i$.



Axa (i)
Axa (i+1)
Axa (i-1)
a_i
$-\theta_i$
a_{i-1}
$|| a_i$

Descrierea elementelor

Atunci când cupla ***i*** este de rotaţie, $\boldsymbol{\theta}_i$, este o variabila. Acest lucru înseamnă ca valoarea lui $\boldsymbol{\theta}_i$, se modifică în timpul mişcării lanţului cinematic. Când însă cupla ***i*** este de translaţie, $\boldsymbol{\theta}_i$ are valoare constantă.

Descrierea elementelor

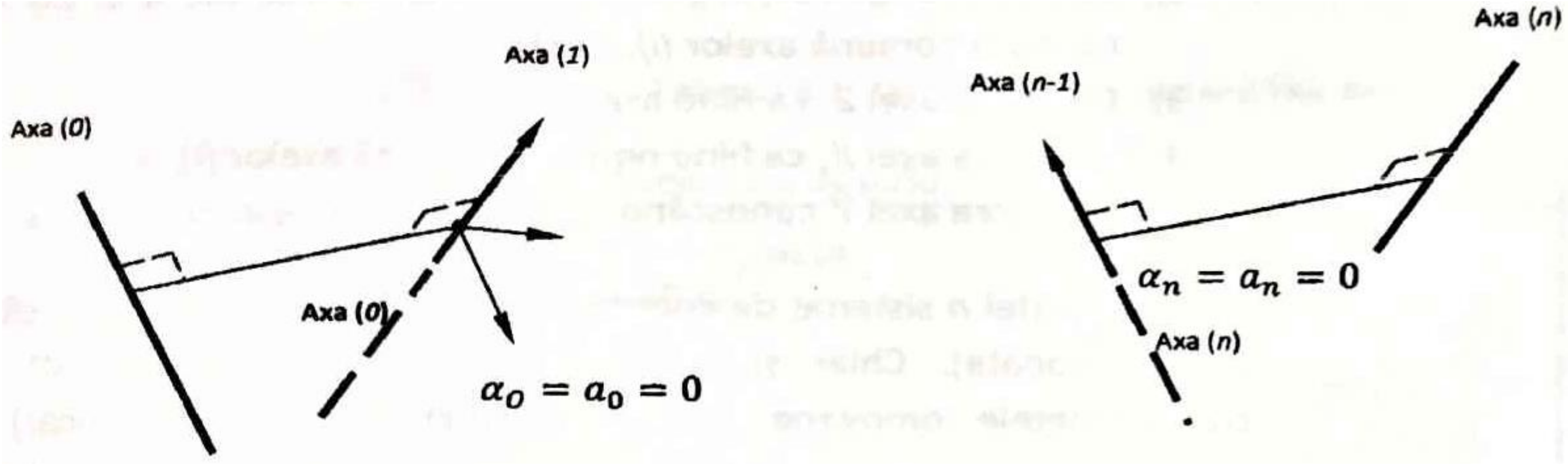
Definirea celor 4 parametrii (trei constanţi şi unul variabil) permite definirea posturii elementului ***i*** relativ la elementul ***i-1****.* Adică, a reperului asociat elementului ***i*** relativ la reperul asociat elementului ***i-1***. Pentru simplificarea calculelor este necesară obţinerea unor matrice de transformare cu cât mai multe elemente nule, motiv pentru care se propun convenţii referitoare la prima şi ultima axă a lanţului cinematic.

Descrierea elementelor

Definirea celor 4 parametrii (trei constanţi şi unul variabil) permite definirea posturii elementului ***i*** relativ la elementul ***i-1**.* Adică, a reperului asociat elementului ***i*** relativ la reperul asociat elementului ***i-1***. Pentru simplificarea calculelor este necesară obţinerea unor matrice de transformare cu cât mai multe elemente nule, motiv pentru care se propun convenţii referitoare la prima şi ultima axă a lanţului cinematic.

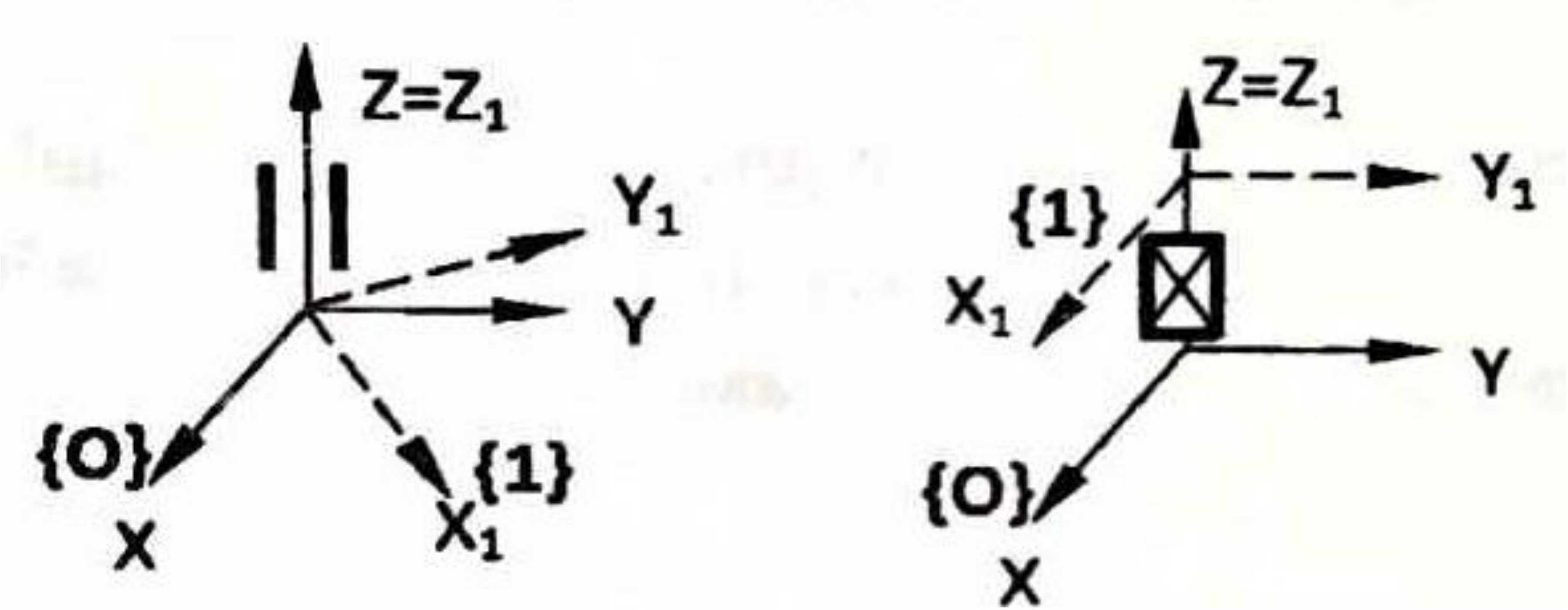
Descrierea elementelor

Alegerea axei *(0)* şi a axei *(n)* se face astfel încât $\mathbf{a_0} = \mathbf{a_n} = 0$; respectiv $\boldsymbol{\alpha_0} = \boldsymbol{\alpha_n} = \mathbf{0}$



Descrierea elementelor

Alegerea sistemelor de coordonate pentru prima şi ultima cupla va conduce la anularea parametrilor $\boldsymbol{d}_i$, θ_i pentru cuplele 0 şi n atunci când acestea sunt cuple de rotatie, respectiv de translaţie.



Formalismul Denavit Hartenberg (DH-m)

Formalismul DH modificat se referă la definirea transformărilor omogene de tipul ${}^{B}_{A}T$ pentru elementele unui robot. Aceste elemente sunt descrise cu ajutorul parametrilor menţionaţi ($\mathbf{a}_i$, $\boldsymbol{\alpha}_i$, $\boldsymbol{d}_i$, $\boldsymbol{\theta}_i$). Astfel, postura fiecărui element este definita geometric de trei parametrii și o variabilă:

- Parametrii $\mathbf{a}_i$, $\boldsymbol{\alpha}_i$, $\boldsymbol{d}_i$ şi variabila $\boldsymbol{\theta}_i$ atunci când cupla este de rotaţie;

- Parametrii $\mathbf{a}_i$, $\boldsymbol{\alpha}_i$, $\boldsymbol{\theta}_i$ şi variabila $\boldsymbol{d}_i$ atunci când cupla este de translaţie;

Formalismul Denavit Hartenberg (DH-m)

Utilizând mărimile menţionate, formalismul DH defineşte pentru fiecare element un sistem de coordonate propriu. În acest scop se utilizează următorul algoritm:

1) Determinarea normalelor comune pentru axele consecutive;

2) Stabilirea originilor, în general, ca punct de intersecţie dintre axa ***i*** şi normala comună axelor ***i, i+1***;

3) Definirea axei Z, ca fiind axa ***i***;

4) Definirea axei X, ca fiind normala comuna axelor ***i, i+1;***

5) Definirea axei Y cunoscând faptul că reperul este unul drept.

Formalismul Denavit Hartenberg (DH-m)

Se obţin astfel ***n*** sisteme de coordonate (pentru fiecare element câte un sistem de coordonate). Chiar şi acum există mai multe posibilităţi de a defini transformatele omogene căutate. Formalismul DH (modificat) propune o succesiune particulară de transformări elementare (rotaţii şi/sau translaţii) pentru calculul transformărilor omogene. Se utilizează paternul transformărilor omogene: transformarea omogenă de la cupla ***i*** la cupla ***i-1*** se identifică cu compunerea unor transformări necesare pentru ca reperul din cupla ***i-1*** să *călătorească* în cupla ***i***.

Formalismul Denavit Hartenberg (DH-m)

Pentru DH-m călătoria reperului ***i-1*** la reperul ***i*** se face prin succesiunea:

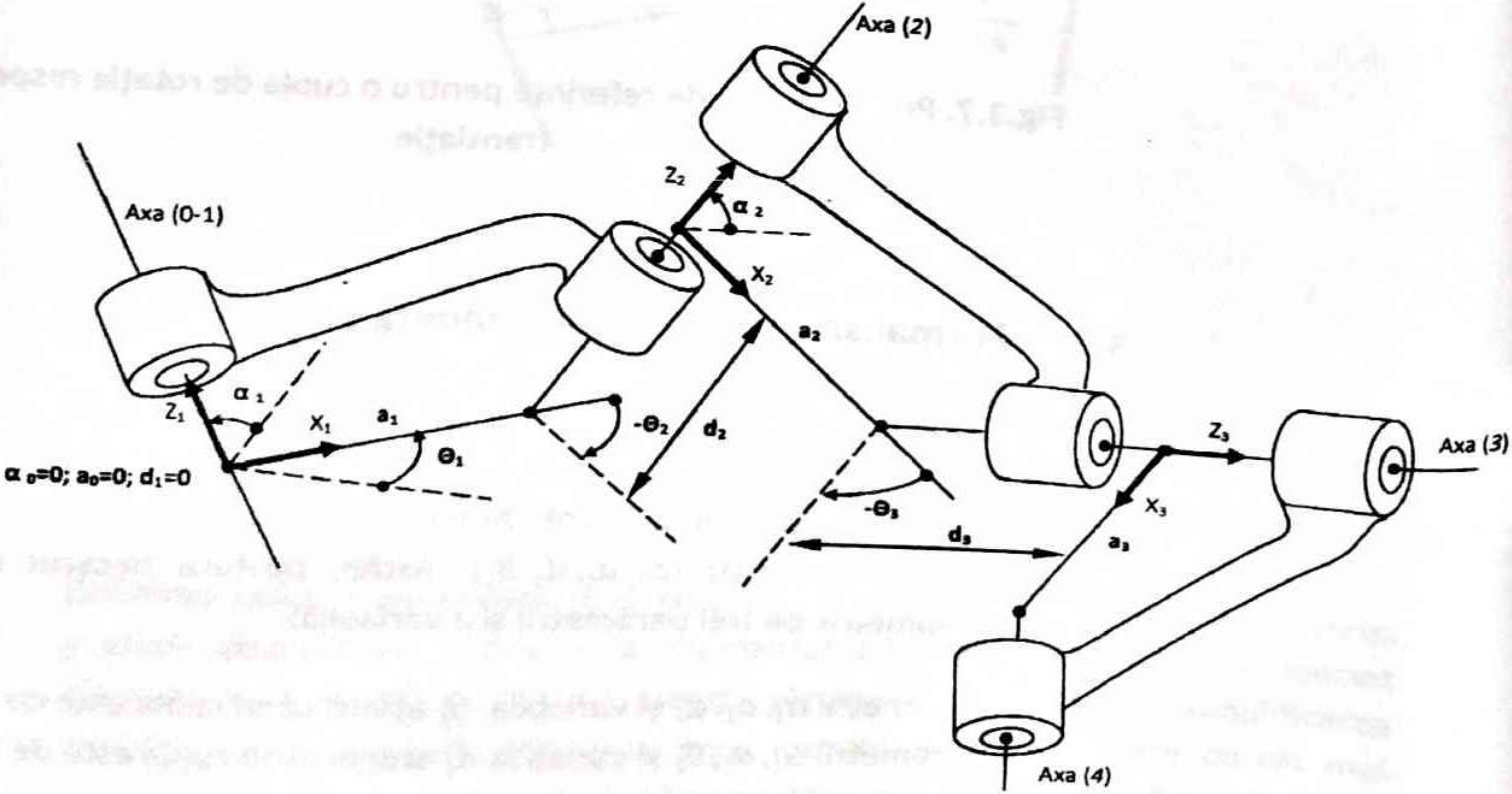
$$R_x(\alpha_{i-1}) \rightarrow D_x(\alpha_{i-1}) \rightarrow R_z(\theta_i) \rightarrow D_z(d_i) \quad \Rightarrow \quad {}^{i-1}_{\ i}T$$

$R_x(\alpha_{i-1})$ este rotație în jurul axei X;

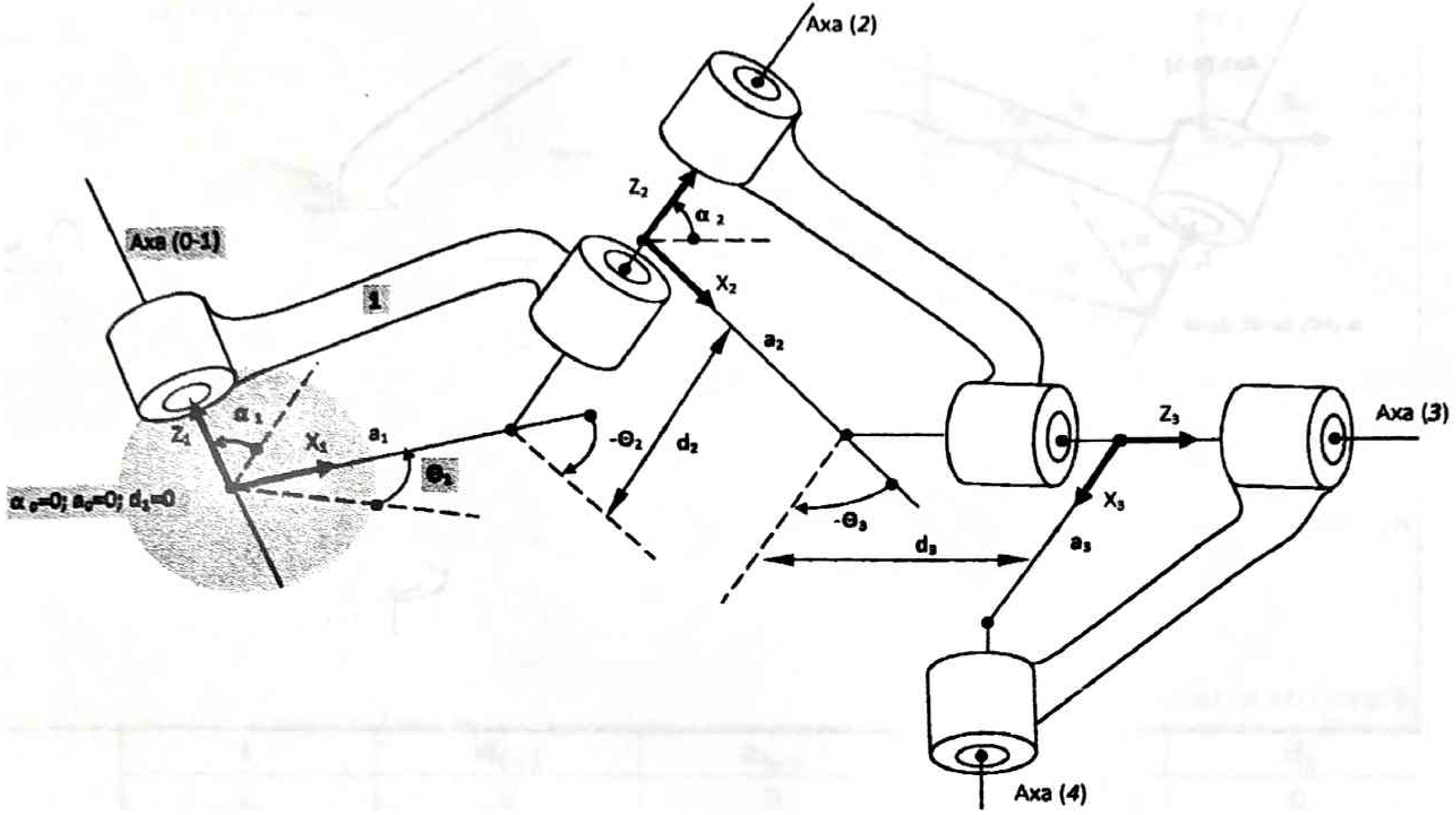
$D_x(\alpha_{i-1})$ este translaţia în lungul axei X;

$R_z(\theta_i)$ este rotaţia în jurul axei *Z*;

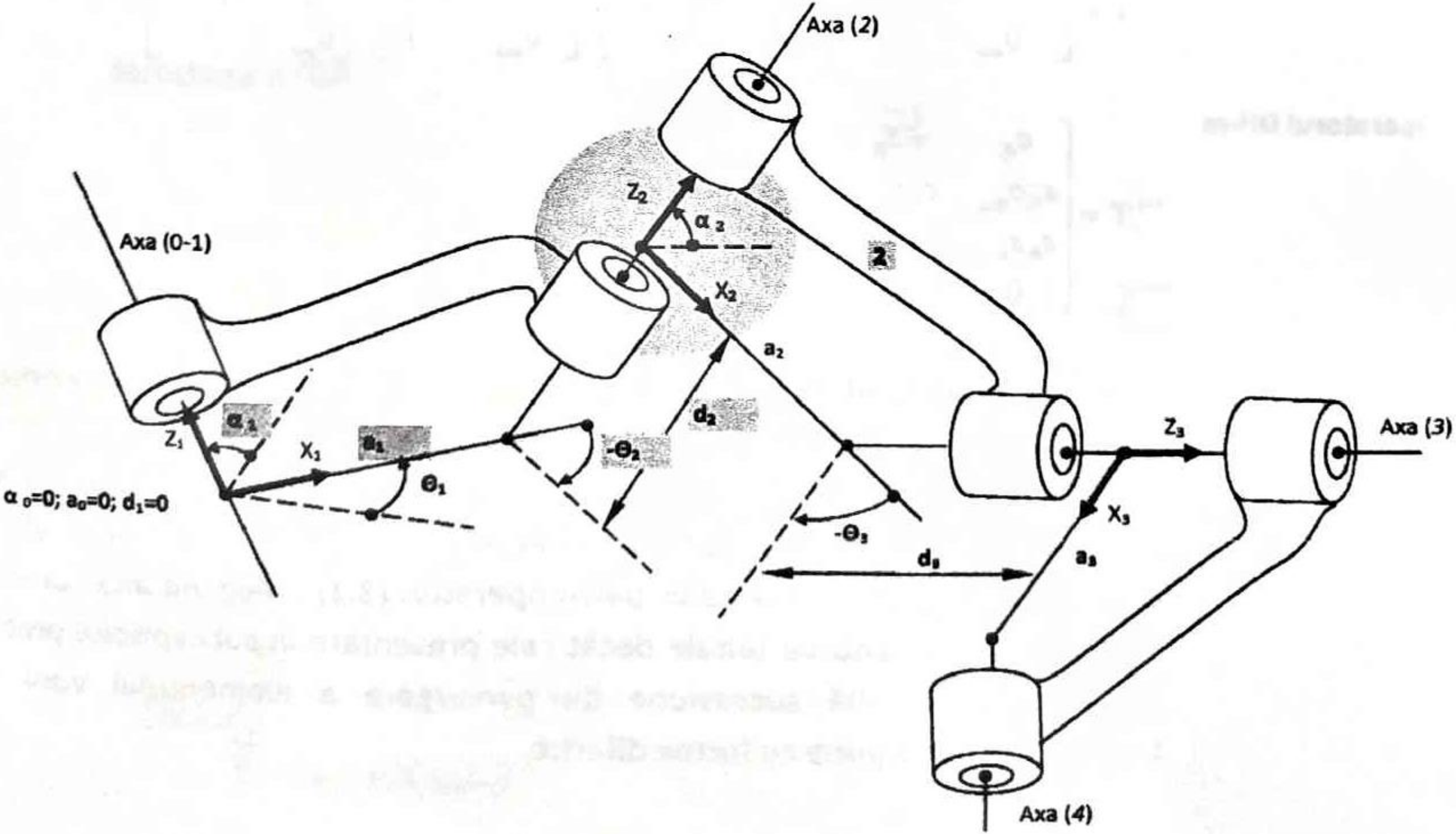
$D_z(d_i)$ este translaţia în lungul axei Z.

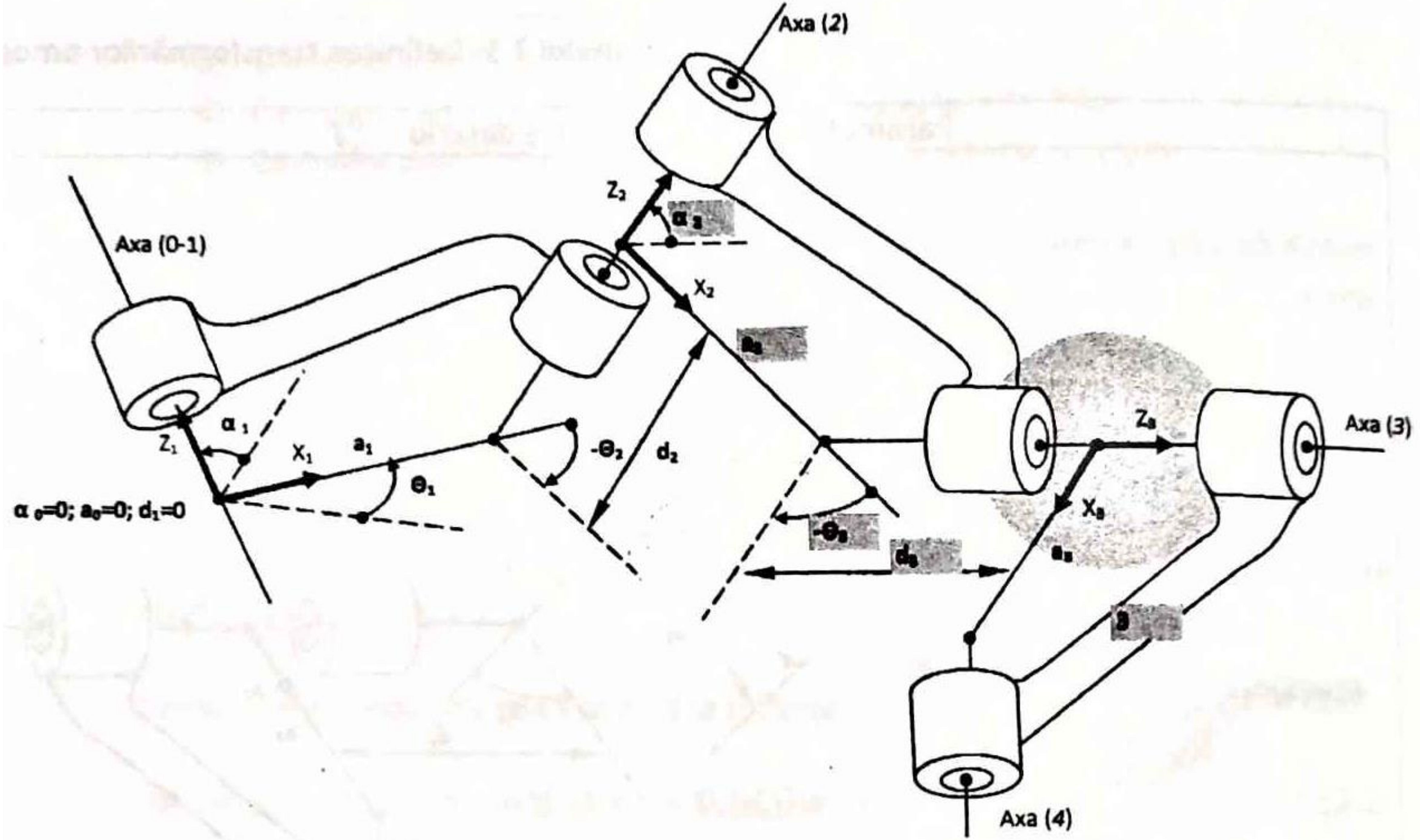


Axa (2)
Axa (0-1)
Z_2
α_2
X_2
a_2
Z_1
α_1
X_1
a_1
$-\Theta_2$
d_2
Θ_1
$\alpha_0=0; a_0=0; d_1=0$
Z_3
Axa (3)
X_3
$-\Theta_3$
d_3
a_3
Axa (4)



Axa (2)
Axa (0-1)
1
Z_2
α_2
X_2
a_2
α_1
Z_1
X_1
a_1
$-\Theta_2$
d_2
Θ_1
$\alpha_0=0;\ a_0=0;\ d_1=0$
Axa (3)
Z_3
X_3
$-\Theta_3$
d_3
a_3
Axa (4)


Axa (2)
Axa (0-1)
Z_2
α_2
2
X_2
a_2
d_2
$-\Theta_2$
Z_1
α_1
X_1
a_1
Θ_1
$\alpha_0=0;\ a_0=0;\ d_1=0$
Z_3
Axa (3)
X_3
$-\Theta_3$
d_3
a_3
Axa (4)



Axa (2)
Z_2
α_3
Axa (0-1)
X_2
a_3
α_1
Z_1
X_1
a_1
$-\Theta_2$
d_2
Θ_1
$\alpha_0=0; a_0=0; d_1=0$
$-\Theta_3$
d_3
Z_3
Axa (3)
X_3
a_3
a
Axa (4)

Formalismul Denavit Hartenberg (DH-m)

Se obţin astfel ***n*** sisteme de coordonate (pentru fiecare element câte un sistem de coordonate). Chiar şi acum există mai multe posibilităţi de a defini transformatele omogene căutate. Formalismul DH (modificat) propune o succesiune particulară de transformări elementare (rotaţii şi/sau translaţii) pentru calculul transformărilor omogene. Se utilizează paternul transformărilor omogene: transformarea omogenă de la cupla ***i*** la cupla ***i-1*** se identifică cu compunerea unor transformări necesare pentru ca reperul din cupla ***i-1*** să *călătorească* în cupla ***i***.