

## CAPITOLUL 2

### PROIECTAREA FILTRELOR DIGITALE CU RĂSPUNS FINIT LA IMPULS

Un *filtru digital* sau *numeric* este un sistem discret care scalează și/sau defazează în mod selectiv componentele spectrale ale semnalului discret de intrare, oferind la ieșire un semnal discret optim pentru scopul dorit. Scopul filtrării este de a îmbunătăți calitatea semnalului (de a reduce sau înlătura zgomotul), de a extrage informații sau de a separa două sau mai multe semnale combinate.

Filtrarea numerică este preferată celei analogice datorită unuia sau mai multora din *următoarele avantaje*:

1. Filtrele numerice pot avea caracteristici imposibil de realizat cu filtrele analogice, (de exemplu, fază perfect liniară, în cazul filtrelor FIR).
2. Spre deosebire de filtrele analogice, performanțele celor digitale nu variază cu variabilele mediului, de exemplu, temperatura. Aceasta elimină necesitatea calibrării periodice.
3. Răspunsul în frecvență poate fi ajustat automat prin implementarea filtrelor cu procesoare programabile, motiv pentru care se folosesc în filtrarea adaptivă, mai eficient decât cele analogice.
4. Diferite semnale de intrare pot fi filtrate de un singur filtru digital, fără modificarea structurii hard, prin multiplexare.
5. Atât datele filtrate cât și cele nefiltrate pot fi stocate pentru o prelucrare ulterioară.
6. Folosind avantajele tehnologiei VLSI, aceste filtre pot fi realizate la dimensiuni mici, putere mică, preț scăzut.
7. În practică, precizia unui filtru analogic este limitată, atenuarea în banda de oprire pentru filtrele active fiind în jur de  $60 \div 70$  dB, la filtrele digitale, aceasta este limitată numai de lungimea cuvântului folosit, ajungându-se în mod curent la 80-100 dB.

8. Performanțele filtrelor digitale sunt repetabile de la procesor la procesor, fără necesitatea reglajelor.
9. Filtrele digitale pot fi folosite la frecvențe foarte scăzute, unde cele analogice nu sunt utilizabile, acoperind un larg domeniu de frecvențe prin simpla schimbare a frecvenței de eșantionare.

*Dezavantajele importante* ale filtrării digitale față de cea analogică

sunt:

1. Limitarea vitezei. Lățimea de bandă a semnalelor pe care le poate prelucra un filtru digital în timp real este mult mai mică în comparație cu cele analogice. În funcționarea în timp real, conversia analog/digitală (A/D) și digital/analogică (D/A) introduce restricții de viteză. Timpul de conversie al CAD și CDA limitează frecvența maximă care poate fi procesată. În plus, viteza operației depinde de viteza procesorului digital și de numărul de operații pe care trebuie să le execute.
2. Efectele lungimii finite în reprezentarea numerelor. Filtrele digitale suferă de zgomotul de cuantizare al CAD și de cel de rotunjire, apărut în timpul calculelor, care conduc la degradarea performanțelor acestora.
3. Timp mare de proiectare și dezvoltare. Timpul de proiectare și implementare hard este mult mai mare în comparație cu cel necesar filtrelor analogice. Unele programe de proiectare asistată de calculator pot însă realiza ușor acest lucru.

## 2.1. Considerații generale asupra cauzalității și implicațiile ei

În Capitolul 1 s-au prezentat caracteristicile filtrelor ideale și s-a arătat că astfel de filtre sunt necauzale și, prin urmare, nerealizabile fizic. În continuare, problema cauzalității și implicațiile ei este tratată în detaliu.

Se consideră un FTJ ideal, al cărui răspuns în frecvență este

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases} \quad (2.1)$$

Răspunsul său la impuls se determină cu transformata Fourier inversă

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi}, & n = 0 \\ \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n}, & n \neq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

O reprezentare a lui  $h[n]$  pentru  $\omega_c = \pi/4$  este dată în figura 2.1.

Acest filtru este necauzal și, deci, nu poate fi realizat practic. În plus,  $h[n]$  nu este absolut sumabil și, în consecință, este instabil. Cu cât lățimea de bandă a filtrului crește, răspunsul la impuls devine mai îngust, și invers. Pentru  $\omega_c = \pi$  filtrul devine trece tot (FTT) și răspunsul său la impuls devine impulsul unitate.

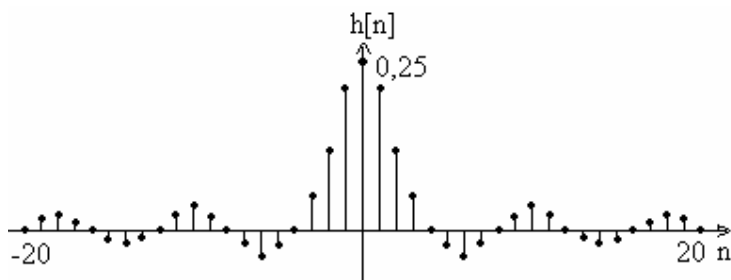


Figura 2.1. Răspunsul la impuls al unui FTJ ideal

Dacă răspunsul la impuls este întârziat cu  $n_0$  eșantioane, răspunsul în frecvență devine

$$h[n - n_0] \xleftarrow{F} H(\omega) e^{-j\omega n_0} \quad (2.3)$$

Se observă că acest filtru are faza liniară. Oricum, nici o valoare finită a întârzierii nu va avea ca rezultat un filtru cauzal. O soluție posibilă de realizare ar fi de a introduce o întârziere  $n_0$  mare în  $h[n]$  și a impune  $h[n] = 0$ , pentru  $n < n_0$ . Evident, filtrul obținut nu va fi ideal. Deși analiza de mai sus s-a referit la un filtru trece jos ideal, concluziile obținute sunt valabile și pentru celelalte tipuri de filtre ideale [30].

Condițiile necesare și suficiente pe care trebuie să le satisfacă răspunsul în frecvență al unui filtru, pentru a fi cauzal sunt statuate de teorema Paley - Wiener, enunțată în continuare. Demonstrația acesteia depășește cadrul prezentului material, motiv pentru care nu este prezentată [68].

Dacă  $h[n]$  este de energie finită și  $h[n] = 0$  pentru  $n < 0$ , atunci

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ln |H(\omega)|| d\omega < \infty \quad (2.4)$$

Reciproc, dacă  $|H(\omega)|$  este de pătrat integrabil și dacă integrala din (2.4) este finită, atunci se poate asocia lui  $|H(\omega)|$  un răspuns de fază

$\theta(\omega)$ , astfel încât filtrul rezultat, cu răspunsul în frecvență  $|H(\omega)|e^{j\theta(\omega)}$ , să fie cauzal.

O concluzie importantă ce rezultă din această teoremă este că modulul  $|H(\omega)|$  poate fi zero la unele frecvențe, dar nu poate fi zero pe un domeniu de frecvențe, deoarece integrala devine infinită. În consecință, orice filtru ideal este necauzal.

Cauzalitatea implică existența unei relații între părțile reală,  $H_R(\omega)$ , și imaginară,  $H_I(\omega)$ , ale lui  $H(\omega)$ . Pentru a ilustra această dependență, se descompune  $h[n]$  în partea sa pară,  $h_e[n]$ , și impară,  $h_o[n]$ , adică

$$h[n] = h_e[n] + h_o[n] \quad (2.5)$$

unde 
$$h_e[n] = \frac{1}{2}[h[n] + h[-n]] \quad (2.6)$$

și 
$$h_o[n] = \frac{1}{2}[h[n] - h[-n]] \quad (2.7)$$

Dacă  $h[n]$  este cauzal, este posibilă refacerea acestuia din partea sa pară,  $h_e[n]$ , pentru  $0 \leq n < \infty$  sau din partea sa impară,  $h_o[n]$ , pentru  $1 \leq n < \infty$ , lucru care se va arăta în continuare. Din (2.6) rezultă

$$h[n] = 2h_e[n]u[n] - h_e[0]\delta[n], \quad n \geq 0 \quad (2.8)$$

și din (2.7) rezultă

$$h[n] = 2h_o[n]u[n] + h[0]\delta[n], \quad n \geq 0 \quad (2.9)$$

Deoarece  $h_o[n] = 0$  pentru  $n=0$ , nu se poate reface  $h[0]$  din  $h_o[n]$  și, deci,  $h[0]$  trebuie cunoscut. Din (2.8) și (2.9) se observă că pentru  $n \geq 1$ , există o relație foarte puternică între  $h_o[n]$  și  $h_e[n]$ , adică  $h_o[n] = h_e[n]$ . Dacă  $h[n]$  este absolut sumabil (stabil în sens MIME [63]), răspunsul în frecvență există și

$$H(\omega) = H_R(\omega) + jH_I(\omega) \quad (2.10)$$

În plus, dacă  $h[n]$  este real și cauzal, proprietățile de simetrie ale transformatei Fourier implică [63]

$$\begin{aligned} h_e[n] &\longleftrightarrow H_R(\omega) \\ h_o[n] &\longleftrightarrow H_I(\omega) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Atât timp cât  $h[n]$  este complet determinat de  $h_e[n]$ , rezultă că  $H(\omega)$  este complet determinat dacă se cunoaște  $H_R(\omega)$ . Similar,  $H(\omega)$

este complet determinat dacă se cunoaște  $H_I(\omega)$  și  $h[0]$ . Aceasta implică o legătură între  $H_R(\omega)$  și  $H_I(\omega)$  pentru sisteme cauzale. Cu alte cuvinte, în cazul sistemelor discrete, liniare, cauzale răspunsul de amplitudine și răspunsul de fază ale sistemului sunt dependente. Fiind dat  $H_R(\omega)$ , pentru o secvență  $h_e[n]$  reală, pară, absolut sumabilă se poate determina  $H(\omega)$ .

**Exemplul 2.1.**

Fie un sistem linear invariant în timp, stabil, cu răspunsul la impuls real și par. Să se determine  $H(\omega)$  dacă

$$H_R(\omega) = \frac{1 - a \cos \omega}{1 - 2a \cos \omega + a^2}, \quad |a| < 1.$$

*Soluție.* Se determină întâi  $h_e[n]$ .

$$H_R(\omega) = H_R(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}, \quad \cos \omega = \frac{z + z^{-1}}{2} \Big|_{z=e^{j\omega}}.$$

$$H_R(z) = \frac{1 - a(z + z^{-1})/2}{1 - a(z + z^{-1}) + a^2} = \frac{z - a(z^2 + 1)/2}{(z - a)(1 - az)}$$

Se observă că polii sunt  $p_1 = a$  și  $p_2 = 1/a$ . Sistemul fiind stabil, cercul unitate este cuprins în regiunea de convergență, care va fi un inel circular cuprins între  $p_1$  și  $p_2$  care conține cercul unitate  $|a| < |z| < 1/|a|$ . În consecință,  $h_e[n]$  este o secvență bilaterală în care polul  $p_1 = a$  determină o parte cauzală, iar polul  $p_2 = 1/a$ , o parte necauzală. Aplicând transformata Z inversă lui  $H_R(z)$ , se obține

$$h_e[n] = \frac{1}{2} a^{|n|} + \frac{1}{2} \delta[n] \tag{2.12}$$

Înlocuind (2.12) în (2.8), rezultă relația

$$h[n] = a^n u[n]$$

a cărei transformată Fourier este

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

Relația între părțile reală și imaginară ale componentelor transformatei Fourier pentru o secvență absolut sumabilă, cauzală și reală se poate obține plecând de la relația (2.8), căreia i se aplică transformata Fourier.

$$\begin{aligned}
H(\omega) &= H_R(\omega) + jH_I(\omega) = F\{2h_e[n]u[n] - h_e[n]\delta[n]\} = \\
&= 2F\{h_e[n]\} * F\{u[n]\} - h_e[0] = 2H_R(\omega) * U(\omega) - h_e[0] = \quad (2.13) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_R(\lambda)U(\omega - \lambda)d\lambda - h_e[0]
\end{aligned}$$

unde  $U(\omega)$  este transformata Fourier a treptei unitate  $u[n]$  [35].

$$\begin{aligned}
U(\omega) &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{e^{\frac{j\omega}{2}} \left( e^{\frac{j\omega}{2}} - e^{-\frac{j\omega}{2}} \right)} = \pi\delta(\omega) + \frac{e^{\frac{j\omega}{2}}}{e^{\frac{j\omega}{2}} - e^{-\frac{j\omega}{2}}} = \\
&= \pi\delta(\omega) + \frac{\cos \frac{\omega}{2} + j \sin \frac{\omega}{2}}{2j \sin \frac{\omega}{2}} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{2} - j \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \quad (2.14)
\end{aligned}$$

Înlocuind (2.14) în (2.13) și identificând părțile imaginare rezultă relația dintre  $H_I(\omega)$  și  $H_R(\omega)$

$$H_I(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_R(\lambda) \operatorname{ctg} \frac{\omega - \lambda}{2} d\lambda \quad (2.15)$$

de unde se observă că  $H_I(\omega)$  este unic determinat de  $H_R(\omega)$  prin (2.15).

Integrala din (2.15) se numește *transformata Hilbert directă*.

În concluzie, cauzalitatea are implicații foarte importante în proiectarea filtrelor selective de frecvență, și anume:

1. Răspunsul în frecvență  $H(\omega)$  nu poate fi zero, decât cu excepția unui număr finit de puncte.
2. Modulul  $|H(\omega)|$  nu poate fi constant în orice domeniul finit de frecvențe și tranziția de la banda de trecere la cea de oprire nu poate fi infinit de abruptă (aceasta este o consecință a fenomenului Gibbs, care rezultă din trunchierea lui  $h[n]$  pentru a se obține cauzalitatea) [38]
3. Părțile reală și imaginară ale lui  $H(\omega)$  sunt interdependente, ele fiind legate prin transformata Hilbert directă. În consecință, modulul  $|H(\omega)|$  și faza  $\theta(\omega)$  a lui  $H(\omega)$  nu pot fi alese arbitrar.

În paragrafele următoare se va face referire numai la clasa SDLIT cauzale descrisă de ecuația cu diferențe

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (2.16)$$

al căror răspuns în frecvență este

$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-j\omega k}} \quad (2.17)$$

## 2.2. Tipuri de filtre digitale

Filtrele digitale pot fi împărțite în două clase, *filtre cu răspuns finit la impuls* (RFI) sau FIR (**F**inite **I**mpulse **R**esponse) și *filtre cu răspuns infinit la impuls* (RII) sau IIR (**I**nfinite **I**mpulse **R**esponse). Oricare din aceste două tipuri poate fi reprezentat prin răspunsul la impuls  $h[n]$ , ( $n \in \mathbb{N}$  pentru filtre cauzale).

Intrarea și ieșirea filtrului sunt legate prin suma de convoluție, dată de relația

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k] \quad (2.18)$$

pentru filtre FIR și

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (2.19)$$

pentru filtre IIR.

Evident, pentru filtrele IIR răspunsul la impuls este de durată infinită și pentru filtrele FIR răspunsul la impuls are numai  $M$  valori. În practică, pentru filtrele IIR nu se folosește forma (2.19), pentru că lungimea filtrului este teoretic infinită, ci se folosește ecuația cu diferențe, în formă recursivă [63]

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] = -\sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (2.20)$$

unde  $a_k$ ,  $b_k$  sunt coeficienții filtrului, iar  $M$  și  $N$  reprezintă gradul polinomului numărătorului, respectiv numitorului funcției de transfer. Ecuația (2.18) este ecuația cu diferențe pentru filtre FIR și (2.20) este ecuația cu diferențe pentru filtre IIR.

O altă reprezentare pentru filtrele FIR și IIR se poate face folosind funcțiile de sistem

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]z^{-k} \quad (2.21)$$

pentru filtrele FIR și

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (2.22)$$

pentru filtre IIR, care rezultă prin aplicarea transformatei Z relațiilor (2.18), respectiv (2.20).

### 2.3. Filtre realizabile fizic, selective de frecvență

Cerințele filtrelor digitale sunt în mod obișnuit specificate în domeniul frecvență și sunt exprimate prin amplitudinea sau/și faza sau întârzierea răspunsului dorit. În cazul filtrului trece jos (FTJ), răspunsul în amplitudine dorit este de obicei dat de

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } \omega \in [0, \omega_p] \\ 0 & \text{pentru } \omega \in [\omega_s, \pi] \end{cases} \quad (2.23)$$

unde  $\omega_p$  și  $\omega_s$  reprezintă frecvențele unghiulare corespunzătoare capătului benzii de trecere și începutului benzii de oprire.

Deși pentru un filtru real sunt de dorit caracteristicile filtrelor ideale prezentate în secțiunea 1.7.1, acestea nu sunt absolut necesare în multe din aplicațiile practice. Renunțând la condițiile pe care trebuie să le posedate un filtru ideal, este posibil a se obține un filtru a cărui caracteristică să se apropie de cea ideală și să satisfacă cerințele de proiectare. Relaxarea condițiilor se referă la acceptarea faptului ca modulul  $|H(\omega)|$  să nu fie constant în întreaga bandă de trecere, un riplu mic fiind acceptabil. Similar, nu este absolut necesar ca  $|H(\omega)|$  să fie zero în banda de oprire, unde, de asemenea, este tolerabil un riplu mic.

În caracteristica de amplitudine, trecerea de la banda de trecere la cea de oprire determină *banda de tranziție* sau *regiunea de tranziție* a filtrului.

Modulul normalizat al funcției de transfer al unui filtru trece jos realizabil fizic este prezentat în figura 2.2, sub forma unei scheme de toleranță. Semnificația mărimilor de pe figură este următoarea:

$\omega_p$  - definește frecvența corespunzătoare capătului benzii de trecere (limita superioară a benzii de trecere);



$\omega_s$  - definește frecvența corespunzătoare începutului benzii de oprire (limita inferioară a benzii de oprire);  
 $\omega_s - \omega_p$  - definește lățimea benzii de tranziție;  
 $\delta_p$  - reprezintă riplul din banda de trecere, modulul  $|H(\omega)|$  variind între  $1 \pm \delta_p$ ;  
 $\delta_s$  - reprezintă riplul din banda de oprire.

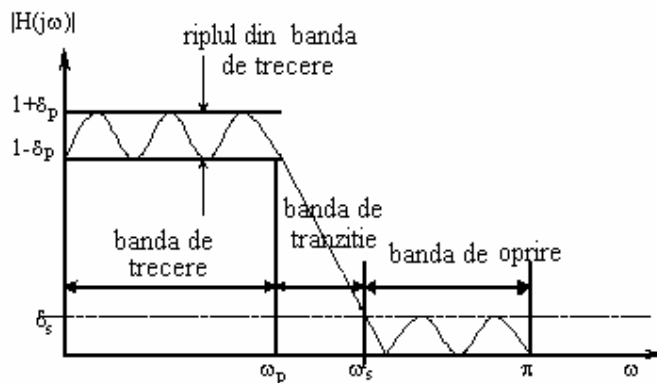


Figura 2.2. Limitele de toleranță pentru aproximarea răspunsului în amplitudine a unui filtru trece jos real

Lățimea benzii de trecere determină în mod obișnuit *lățimea de bandă* a filtrului. Se dorește ca în *banda de trecere a filtrului*, intervalul  $[0, \omega_p]$ , să fie păstrate componentele de semnal, iar cele rejectate să fie în intervalul  $[\omega_s, \pi]$ , numit *banda de oprire a filtrului*. Caracteristica filtrului trece jos reprezintă răspunsul în amplitudine acceptabil când aceasta se află în limitele  $1 \pm \delta_p$  în banda de trecere și mai mic sau egal cu  $\delta_s$  în banda de oprire. Pentru a face posibilă aproximarea cât mai apropiată de funcția dorită, specificațiile includ o bandă de tranziție,  $\omega_s - \omega_p$ , care nu este zero, ca în cazul ideal, în care răspunsul filtrului scade de la valoarea 1 în banda de trecere la zero în banda de oprire.

În cazul filtrelor cu coeficienți reali, datorită simetriei și periodicității răspunsului în amplitudine  $|H(\omega)|$ , este suficient a se specifica cerințele filtrului numai pentru intervalul  $0 \leq \omega \leq \pi$ .

În practică, se folosește de multe ori o scală logaritmică pentru modulul  $|H(\omega)|$ , reprezentându-se  $20 \log_{10} |H(\omega)|$ , cu unitatea de

măsură  $dB$ . În loc de  $\delta_p$  se poate indica abaterea maximă a atenuării în banda de trecere

$$\Delta A_p = 20 \log_{10} \left( \frac{1 + \delta_p}{1 - \delta_p} \right) \text{ [dB]} \quad (2.24)$$

și, similar, în loc de  $\delta_s$ , se poate specifica atenuarea maximă în banda de oprire

$$\Delta A_s = -20 \log_{10} (\delta_s) \text{ [dB]} \quad (2.25)$$

Ambele cantități sunt pozitive.

În unele aplicații, este necesar să se mențină forma semnalului de la intrare, lucru care se realizează dacă răspunsul de fază al filtrului este aproximativ liniar în banda de trecere  $[0, \omega_p]$ , adică  $ArgH(\omega) = \theta(\omega)$  este o funcție liniară de  $\omega$  în intervalul  $[0, \omega_p]$ , adică

$$\theta(\omega) = \tau_0 \omega + \tau_1, \quad (2.26)$$

unde  $\tau_0$  și  $\tau_1$  pot fi arbitrari.

Pentru a analiza liniaritatea fazei, în loc de răspunsul de fază, se poate folosi întârzierea de grup, definită cu relația

$$\tau_g = - \frac{dArgH(\omega)}{d\omega} \quad (2.27)$$

sau întârzierea de fază, definită cu relația

$$\tau_p = - \frac{ArgH(\omega)}{\omega} \quad (2.28)$$

De multe ori, acestea au o formă de reprezentare mai simplă decât a răspunsului de fază și sunt adesea mai ușor de interpretat.

Fie  $H_d(\omega)$  funcția dorită,  $W(\omega)$  funcția de ponderare a erorii de aproximare și  $E_p(\omega)$  valoarea funcției eroare ponderată, definite după cum urmează:

$$H_d(\omega) = \begin{cases} H_{dp}(\omega) & \text{pentru } \omega \in X_p \\ 0 & \text{pentru } \omega \in X_s \end{cases} \quad (2.29)$$

$$W(\omega) = \begin{cases} W_p(\omega) & \text{pentru } \omega \in X_p \\ \frac{\delta_p}{\delta_s} W_s(\omega) & \text{pentru } \omega \in X_s \end{cases} \quad (2.30)$$

$$\text{și} \quad E_p(\omega) = W(\omega)[|H(\omega)| - H_d(\omega)] \quad (2.31)$$

unde  $X_p$  și  $X_s$  indică reuniunea benzilor de trecere și, respectiv, de oprire.

În cazul cel mai general, există mai multe benzi de trecere și de oprire pentru filtru, și eroarea de aproximare acceptabilă depinde de  $\omega$  în fiecare bandă. În acest caz, specificațiile pot fi declarate ca

$$H_{dp}(\omega) - \varepsilon_p(\omega) \leq |H(\omega)| \leq H_{dp}(\omega) + \varepsilon_p(\omega) \quad \text{pentru } \omega \in X_p \quad (2.32)$$

$$|H(\omega)| \leq \varepsilon_s(\omega) \quad \text{pentru } \omega \in X_s \quad (2.33)$$

unde

$$\varepsilon_p(\omega) = \frac{\delta_p}{W_p(\omega)} \quad (2.34)$$

este deviația permisă față de răspunsul dorit din banda de trecere,  $H_{dp}(\omega)$  și

$$\varepsilon_s(\omega) = \frac{\delta_s}{W_s(\omega)} \quad (2.35)$$

este deviația față de zero, admisă în regiunea benzii de oprire.

Cu ajutorul relațiilor (2.29), (2.30), (2.31), (2.34) și (2.35) în limitele benzilor de trecere și de oprire, specificațiile din relațiile (2.32), (2.33) pot fi descrise astfel:

$$-\delta_p \leq W_p(\omega)[|H(\omega)| - H_{dp}(\omega)] \leq \delta_p \quad \text{pentru } \omega \in X_p \quad (2.36)$$

$$W_s(\omega)|H(\omega)| \leq \delta_s \quad \text{pentru } \omega \in X_s \quad (2.37)$$

Specificațiile din ecuațiile (2.36) și (2.37) pot fi combinate pentru a obține următoarea formă unificată, care este utilizată în multe tehnici de proiectare a filtrelor

$$|E_p(\omega)| \leq \bar{\varepsilon} \quad \text{pentru } \omega \in X = X_p \cup X_s \quad (2.38)$$

cu

$$\bar{\varepsilon} = \delta_p \quad (2.39)$$

Dacă valoarea absolută maximă a funcției eroare ponderate este mai mică sau egală cu  $\bar{\varepsilon}$  în  $X$ , atunci  $|H(\omega)|$  va îndeplini criteriul de gabarit.

De exemplu, în cazul filtrelor trece bandă, specificațiile sunt uzual declarate ca

$$1 - \delta_p \leq |H(\omega)| \leq 1 + \delta_p \quad \text{pentru } \omega \in [\omega_{p1}, \omega_{p2}] \quad (2.40)$$

$$|H(\omega)| \leq \delta_s \quad \text{pentru } \omega \in [0, \omega_{s1}] \cup [\omega_{s2}, \pi] \quad (2.41)$$

Aceste condiții pot fi scrise în forma unificată dată de relația (2.38), utilizând relațiile:

$$X = [0, \omega_{s1}] \cup [\omega_{p1}, \omega_{p2}] \cup [\omega_{s2}, \pi] \quad (2.42)$$

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } \omega \in [\omega_{p1}, \omega_{p2}] \\ 0 & \text{pentru } \omega \in [0, \omega_{s1}] \cup [\omega_{s2}, \pi] \end{cases} \quad (2.43)$$

$$W(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } \omega \in [\omega_{p1}, \omega_{p2}] \\ \frac{\delta_p}{\delta_s} & \text{pentru } \omega \in [0, \omega_{s1}] \cup [\omega_{s2}, \pi] \end{cases} \quad (2.44)$$

și relația (2.39).

În orice problemă de proiectare de filtre, trebuie să se specifice:

1. Ripul maxim tolerabil în banda de trecere;
2. Ripul maxim tolerabil în banda de oprire;
3. Frecvența de capăt a benzii de trecere  $\omega_p$  ;
4. Frecvența corespunzătoare începutului benzii de oprire  $\omega_s$  .

Măsura în care  $H(\omega)$  aproximează specificațiile impuse depinde în bună parte de criteriul folosit în alegerea coeficienților  $\{a_k\}$  și  $\{b_k\}$  , ca și de numărul acestor coeficienți.

### 2.3.1. Etape în proiectarea filtrelor digitale

Proiectarea unui filtru digital presupune parcurgerea următoarelor etape:

1. Specificarea cerințelor filtrului;
2. Calculul coeficienților filtrului, (aproximarea funcției de transfer);
3. Stabilirea unui criteriu de calitate pentru răspunsul filtrului obținut în comparație cu răspunsul dorit;
4. Realizarea filtrului într-o structură potrivită, care realizează această funcție de transfer. Realizarea presupune cuantizarea coeficienților la un număr finit de biți și efectuarea operațiilor aritmetice cu o precizie finită;
5. Analiza efectelor lungimii finite asupra performanțelor filtrului;
6. Implementare soft și/sau hard.

Aceste etape nu sunt independente și unele dintre ele pot fi reluate iterativ.

## 2.4. Filtre cu răspuns finit la impuls de fază liniară

Unul dintre cele mai simple tipuri de filtre ce poate fi proiectat este filtrul FIR de fază liniară. Așa cum va rezulta ulterior, numai filtrele FIR pot avea faza liniară, condiție cerută în multe aplicații practice, cum ar fi comunicațiile digitale.

Un filtru FIR de lungime  $M$  are răspunsul în frecvență, respectiv funcția de transfer de forma

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} b_n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{M-1} h[n] e^{-j\omega n} \quad (2.45)$$

unde coeficienții filtrului,  $\{b_n\}$ , sunt valorile răspunsului la impuls al filtrului, adică

$$h[n] = \begin{cases} b_n, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (2.46)$$

Funcția de transfer  $H(\omega)$ , periodică în frecvență cu perioada  $2\pi$ , poate fi exprimată în mai multe moduri, după cum urmează:

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \quad (2.47)$$

Trecerile prin zero ale funcției de transfer conduc la salturi de fază de  $\pi$  radiani, așa încât  $\theta(\omega)$  are discontinuități în acele puncte. Din acest motiv se preferă următoarea formă pentru funcția de transfer:

$$H(\omega) = \pm |H(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = H_R(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \quad (2.48)$$

unde  $\theta(\omega) = \varphi(\omega) + \theta_R(\omega)$ ,  $\theta_R(\omega) = \text{Arg}\{H_R(\omega)\}$  (2.49)

Principalele proprietăți ale funcției de transfer sunt:

1. În cazul în care filtrul FIR are coeficienții  $h[n]$  reali (așa cum se întâmplă în majoritatea situațiilor ce prezintă interes din punct de vedere practic), caracteristica de modul  $|H(\omega)|$  este o funcție pară, iar cea de fază  $\varphi(\omega)$  sau  $\theta(\omega)$  este o funcție impară.

2. Funcția  $H_R(\omega)$  din relația (2.48) denumită *funcție de transfer de fază zero* este o funcție reală și continuă, putând lua atât valori pozitive cât și negative. Funcția  $\varphi(\omega)$  este, de asemenea, o funcție continuă.

3. Funcția  $\theta(\omega)$  prezintă salturi de  $\pi$  radiani la frecvențele la care  $H_R(\omega)$  are treceri prin zero, numite *frecvențe de rejecție*. Acestea pot fi ușor identificate pe caracteristica de fază.

4. În proiectarea filtrelor FIR se preferă exprimarea funcției de transfer în forma (2.48), datorită continuității funcțiilor  $H_R(\omega)$  și  $\varphi(\omega)$  în intervalul fundamental  $\omega \in [-\pi, \pi]$ .

Condiția de fază liniară se obține prin impunerea unei condiții de simetrie *pară* sau *pozitivă* asupra răspunsului la impuls al filtrului, numită uneori, simplu, *condiție de simetrie*, adică

$$h[n] = h[M-1-n] \quad (2.50)$$

sau a unei condiții de simetrie *impară* sau *negativă* asupra răspunsului la impuls al filtrului, adică

$$h[n] = -h[M-1-n] \quad (2.51)$$

numită și *condiție de antisimetrie*.

În continuare, se va arăta că, dacă răspunsul la impuls al filtrului îndeplinește una din condițiile din (2.50) sau (2.51), filtrul are faza liniară.

#### **Filtru de tipul 1. Simetrie pozitivă (pară), $M$ impar**

$$h[0] = h[M-1],$$

$$h[1] = h[M-2]$$

$$h\left[\frac{M-1}{2}\right] = h\left[\frac{M-1}{2}\right] \quad (2.52)$$

Ținând seama de relațiile (2.45) și (2.52) răspunsul în frecvență devine

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \sum_{n=0}^{M-1} h[n]e^{-jn\omega} = h[0] + h[1]e^{-j\omega} + h[2]e^{-j2\omega} + \dots + h\left[\frac{M-1}{2}\right]e^{-j\frac{M-1}{2}\omega} + \\ &+ \dots + h[M-2]e^{-j(M-2)\omega} + h[M-1]e^{-j(M-1)\omega} = \\ &e^{-j\frac{M-1}{2}\omega} \left[ h\left[\frac{M-1}{2}\right] + h[0] \left( e^{j\frac{M-1}{2}\omega} + e^{-j\frac{M-1}{2}\omega} \right) + \dots + h\left[\frac{M-3}{2}\right] (e^{j\omega} + e^{-j\omega}) \right] = \\ &= e^{-j\frac{M-1}{2}\omega} \left[ h\left[\frac{M-1}{2}\right] + 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h[n] \cos \omega \left( \frac{M-1}{2} - n \right) \right] = e^{-j\frac{M-1}{2}\omega} H_R(\omega) \end{aligned} \quad (2.53)$$

Termenul din paranteză este real pentru toate valorile lui  $\omega$  și se notează cu  $H_R(\omega)$ , adică

$$H_R(\omega) = h\left[\frac{M-1}{2}\right] + 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h[n] \cos \omega \left(\frac{M-1}{2} - n\right) \quad (2.54)$$

Realizând schimbarea indicelui de sumare

$$m = \frac{M-1}{2} - n \quad (2.55)$$

și apoi revenind la indicele  $n$ , expresia funcției de transfer devine

$$H(\omega) = e^{-j\frac{M-1}{2}\omega} \left\{ \sum_{n=1}^{\frac{M-1}{2}} 2h\left[\frac{M-1}{2} - n\right] \cos(\omega n) + h\left[\frac{M-1}{2}\right] \right\} \quad (2.56)$$

Introducând notațiile

$$a[0] = h\left[\frac{M-1}{2}\right]; \quad a[n] = 2h\left[\frac{M-1}{2} - n\right] \quad \text{cu } n = \overline{1, \frac{M-1}{2}} \quad (2.57)$$

se poate scrie

$$H(\omega) = e^{-j\frac{M-1}{2}\omega} \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} a[n] \cos(\omega n) \quad (2.58)$$

Ținând cont de relațiile (2.47) ÷ (2.49), din (2.53), (2.54) și (2.58), rezultă

$$H_R(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} a[n] \cos(\omega n); \quad \varphi(\omega) = -\frac{M-1}{2}\omega$$

$$\theta(\omega) = \begin{cases} -\frac{M-1}{2}\omega, & \text{dacă } H_R(\omega) \geq 0 \\ -\frac{M-1}{2}\omega + \pi, & \text{dacă } H_R(\omega) < 0 \end{cases} \quad (2.59)$$

**Filtru de tipul 2. Simetrie pară,  $M$  par**

$$h[0] = h[M-1]$$

$$h[1] = h[M-2]$$

...

$$h\left[\frac{M}{2} - 1\right] = h\left[\frac{M}{2}\right] \quad (2.60)$$

Urmând aceleași etape de calcul, se obține

$$H(\omega) = e^{-j\frac{M-1}{2}\omega} \left[ 2 \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h[n] \cos \omega \left(\frac{M-1}{2} - n\right) \right] \quad (2.61)$$

Termenul din paranteză este real și se notează cu  $H_R(\omega)$ , adică

$$H_R(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h[n] \cos \omega \left( \frac{M-1}{2} - n \right) \quad (2.62)$$

Întrucât  $(M-1)/2 \notin \mathbf{Z}$  se operează schimbările de indice de sumare

$$m = \frac{M}{2} - n \quad \text{și} \quad m \rightarrow n \quad (2.63)$$

cu care, funcția de transfer devine

$$H(\omega) = e^{-j\frac{M-1}{2}\omega} \sum_{n=1}^{\frac{M}{2}} 2h \left[ \frac{M}{2} - n \right] \cos \left[ \omega \left( n - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (2.64)$$

Cu notația

$$b[n] = 2h \left[ \frac{M}{2} - n \right] \quad \text{pentru} \quad n = 1, \frac{M}{2} \quad (2.65)$$

rezultă

$$H(\omega) = e^{-j\frac{M-1}{2}\omega} \sum_{n=1}^{\frac{M}{2}} b[n] \cos \left[ \omega \left( n - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (2.66)$$

Ținând cont de relațiile (2.47) ÷ (2.49), din (2.61), (2.62) și (2.66) rezultă

$$H_R(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{M-1}{2}} b[n] \cos \left[ \omega \left( n - \frac{1}{2} \right) \right]; \quad \varphi(\omega) = -\frac{M-1}{2}\omega, \quad (2.67)$$

$$\theta(\omega) = \begin{cases} -\frac{M-1}{2}\omega, & \text{dacă } H_R(\omega) \geq 0 \\ -\frac{M-1}{2}\omega + \pi, & \text{dacă } H_R(\omega) < 0 \end{cases}$$

Se observă că, atât pentru  $M$  impar cât și pentru  $M$  par,  $\theta(\omega)$  și  $\varphi(\omega)$  sunt același, fiind funcții liniare de  $\omega$ .

### **Filtru de tipul 3. Simetrie impară, $M$ impar**

$$\begin{aligned} h[0] &= -h[M-1] \\ h[1] &= -h[M-2] \\ &\dots \\ h \left[ \frac{M-1}{2} \right] &= -h \left[ \frac{M-1}{2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.68)$$



$$\begin{aligned}
H(\omega) &= \sum_{n=0}^{M-1} h[n]e^{-j\omega n} = h[0] + h[1]e^{-j\omega} + \dots + h\left[\frac{M-1}{2}\right]e^{-j\frac{M-1}{2}\omega} + \dots \\
&\dots + h[M-2]e^{-j(M-2)\omega} + h[M-1]e^{-j(M-1)\omega} = e^{-j\frac{M-1}{2}\omega} \left[ h[0] \left( e^{j\frac{M-1}{2}\omega} - e^{-j\frac{M-1}{2}\omega} \right) + \right. \\
&\dots + h\left[\frac{M-3}{2}\right] \left( e^{j\omega} - e^{-j\omega} \right) \left. \right] = je^{-j\frac{M-1}{2}\omega} 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h[n] \sin \omega \left( \frac{M-1}{2} - n \right) = \\
&= je^{-j\frac{M-1}{2}\omega} H_R(\omega) = e^{j\left(\frac{M-1}{2}\omega + \frac{\pi}{2}\right)} H_R(\omega)
\end{aligned} \tag{2.69}$$

$$\text{unde} \quad H_R(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h[n] \sin \omega \left( \frac{M-1}{2} - n \right) \tag{2.70}$$

Efectuând schimbarea de indice din (2.55) și notând

$$c[n] = 2h\left[\frac{M-1}{2} - n\right] \quad \text{cu} \quad n = 1, \frac{M-1}{2} \tag{2.71}$$

funcția de transfer devine

$$H(\omega) = e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{M-1}{2}\omega\right)} \sum_{n=1}^{\frac{M-1}{2}} c[n] \sin(\omega n) \tag{2.72}$$

În acest caz

$$\begin{aligned}
H_R(\omega) &= \sum_{n=1}^{\frac{M-1}{2}} c[n] \sin(\omega n); \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{M-1}{2}\omega \\
\theta(\omega) &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{M-1}{2}\omega, & \text{dacă } H_R(\omega) \geq 0 \\ \frac{3\pi}{2} - \frac{M-1}{2}\omega, & \text{dacă } H_R(\omega) < 0 \end{cases} \tag{2.73}
\end{aligned}$$

**Filtru de tipul 4. Simetrie impară, M par**

$$\begin{aligned}
h[0] &= -h[M-1] \\
&\dots \\
h\left[\frac{M}{2} - 1\right] &= -h\left[\frac{M}{2}\right]
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Urmând un mers de calcul similar cu cel de la filtrul de tipul 3, rezultă

$$H(\omega) = je^{-j\frac{M-1}{2}\omega} H_R(\omega) = e^{j\left(\frac{M-1}{2}\omega + \frac{\pi}{2}\right)} H_R(\omega) \quad (2.75)$$

unde

$$H_R(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h[n] \sin \omega \left( \frac{M-1}{2} - n \right) \quad (2.76)$$

Cu schimbarea indicelui de sumare ca în (2.63), rezultă

$$H(\omega) = e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{M-1}{2}\omega\right)} \sum_{n=1}^{\frac{M}{2}} d[n] \sin \left[ \omega \left( n - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (2.77)$$

unde

$$d[n] = 2h \left[ \frac{M}{2} - n \right] \quad \text{pentru } n = 1, \overline{\frac{M}{2}}. \quad (2.78)$$

În acest caz

$$H_R(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{M}{2}} d[n] \sin \omega \left( n - \frac{1}{2} \right); \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{M-1}{2}\omega \quad (2.79)$$

$$\theta(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{M-1}{2}\omega, & \text{dacă } H_R \geq 0 \\ \frac{3\pi}{2} - \frac{M-1}{2}\omega, & \text{dacă } H_R < 0 \end{cases} \quad (2.80)$$

Se constată că și pentru cazul în care răspunsul la impuls prezintă simetrie impară răspunsul de fază este o funcție liniară de  $\omega$ .

Aceste formule generale obținute pentru răspunsul în frecvență pot fi folosite în proiectarea filtrelor FIR de fază liniară al căror răspuns la impuls prezintă simetrie pară sau impară. Lungimea filtrului,  $M$ , este funcție de caracteristicile filtrului (lățimea benzii de tranziție, riplurile din benzile de trecere și oprire), și în literatura de specialitate există relații empirice cu ajutorul cărora se determină această mărime [32].

În toate cazurile considerate răspunsul de fază s-a exprimat în forma

$$\varphi(\omega) = \beta \frac{\pi}{2} - \alpha \omega \quad (2.81)$$

unde  $\alpha = \frac{M-1}{2}$ ,  $\beta=0$  pentru răspuns la impuls simetric și  $\beta=1$  pentru

răspuns la impuls antisimetric. Cu alte cuvinte, pentru filtrele de tipul 1 și 2 caracteristica de fază este cu trecere prin origine, iar pentru filtrele de

tipul 3 și 4, caracteristica de fază este o dreapta care nu mai trece prin origine. În toate cazurile timpul de întârziere de grup normal este

$$t_g(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \alpha \quad (2.81')$$

*Observații.*

1. Pentru filtrele de tipul 1 și 3, cu M impar, funcția  $H_R(\omega)$ , are un corespondent fizic în timp și anume

$$h_R[n] = F^{-1} \left\{ H(\omega) e^{j\frac{M-1}{2}\omega} \right\} = h \left[ n + \frac{M-1}{2} \right] \quad (2.82)$$

$h_R[n]$  fiind o secvență necauzală, simetrică la tipul 1, respectiv antisimetrică la tipul 3 în raport cu ordonata. Pentru filtrele de tipul 2 și 4 nu mai există acest corespondent fizic, deoarece în acest caz,  $(M-1)/2$  nefiind întreg, nu mai este permisă deplasarea dată de relația (2.82).

2. Din expresiile (2.59), (2.67), (2.73) și (2.79) se observă că funcția de transfer de fază zero  $H_R(\omega)$  este o funcție pară pentru filtrele de tipul 1 și 2, respectiv impară pentru filtrele de tipul 3 și 4, care nu are componentă continuă pentru tipurile 3, 4.
3. Analizând expresiile (2.59), (2.67), (2.73) și (2.79) ale funcțiilor de fază zero  $H_R(\omega)$  în cele patru cazuri se constată că funcția de fază zero este periodică de perioadă  $2\pi$  pentru filtrele de tipul 1 sau 3, în schimb pentru filtrele de tipul 2 sau 4, perioada este  $4\pi$  și  $H_R(\omega)$  prezintă simetrie de rotație (pe a doua jumătate a perioadei repetă evoluția dar cu semn schimbat). Această observație este utilă la proiectarea filtrelor pentru impunerea corectă a condițiilor în domeniul frecvență.

În Tabelul 2.1 sunt prezentate în rezumat cele 4 tipuri de filtre FIR de fază liniară împreună cu anumite particularități semnificative care justifică utilizarea sau neutilizarea fiecăruia în realizarea unor anumite tipuri de caracteristici de filtrare: filtre trece jos (FTJ), trece sus (FTS), trece bandă (FTB), oprește bandă (FOB), transformator Hilbert (TRH) și diferențiator (DIF).

Alegerea condiției de simetrie sau antisimetrie pentru răspunsul la impuls depinde de aplicație.

Tabelul 2.1

FIR cu fază liniară de tipul:	Lungimea M	Secvența $h[n]$	$H_R(\omega)$	$\varphi(\omega)$	Valoarea lui $H_R(\omega)$ , $ H(\omega) $ și $H(\omega)$ la:		Este indicat la proiectarea:	Nu poate fi folosit la proiectarea:
					$\omega = 0$	$\omega = \pi$		
1	impară	$h[n]=h[M-1-n]$	$\sum_{n=0}^{M-1} a[n] \cos(n\omega)$	$-\frac{M-1}{2}\omega$	fără constrângeri	fără constrângeri	FTJ,FTS FTB FOB	TRH DIF
2	pară	$h[n]=h[M-1-n]$	$\sum_{n=1}^{\frac{M}{2}} b[n] \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega$	$-\frac{M-1}{2}\omega$	fără constrângeri	0	FTJ FTB	FTS, FOB TRH DIF
3	impară	$h[n]=-h[M-1-n]$ $h[(M-1)/2]=0$	$\sum_{n=1}^{\frac{M-1}{2}} c[n] \sin(n\omega)$	$\frac{\pi}{2} - \frac{M-1}{2}\omega$	0	0	FTB TRH DIF	FTJ FTS FOB
4	pară	$h[n]=-h[M-1-n]$	$\sum_{n=1}^{\frac{M}{2}} d[n] \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega$	$\frac{\pi}{2} - \frac{M-1}{2}\omega$	0	fără constrângeri	FTS,FTB TRH DIF	FTJ FOB

De exemplu, pentru răspuns la impuls cu simetrie impară și  $M$  impar, din (2.73) rezultă  $H_R(0) = 0$  și  $H_R(\pi) = 0$  și, în consecință, relația (2.73) nu va fi potrivită pentru proiectarea de FTJ sau FTS. Similar, pentru răspuns la impuls cu simetrie impară și  $M$  par,  $H_R(0) = 0$ , caz în care, această condiție nu va putea fi folosită în proiectarea unui FTJ FIR de fază liniară. În schimb, condiția de simetrie pară permite obținerea unui FTJ cu răspuns diferit de 0 la  $\omega = 0$ .

$$H_R(0) = h \left[ \frac{M-1}{2} \right] + 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h[n], \quad M \text{ impar}, \quad (2.83)$$

$$H_R(0) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h[n], \quad M \text{ par}, \quad (2.84)$$

Fiecare din condițiile (2.54), (2.62), (2.70) și (2.76) constituie un set de ecuații liniare din care pot fi determinați coeficienții filtrului.

În cazul filtrelor al căror răspuns la impuls prezintă *simetrie pară* este necesară specificarea răspunsului în frecvență în  $\frac{M+1}{2}$  puncte

pentru  $M$  impar și  $\frac{M}{2}$  pentru  $M$  par. Deși valorile lui  $\omega$  pot fi alese arbitrar, de obicei acestea se aleg ca puncte echidistante în domeniul  $0 \leq \omega \leq \pi$ . Astfel, dacă

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{M}, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{M-1}{2}, \quad M \text{ impar} \quad (2.85)$$

$$k = 0, 1, \dots, \frac{M}{2} - 1, \quad M \text{ par}$$

și se definește

$$a_{kn} = 2 \cos \omega_k \left( \frac{M-1}{2} - n \right), \quad \text{și } a_{kn} = 1 \text{ pentru } n = \frac{M-1}{2} \text{ și toți } k \quad (2.86)$$

ecuațiile liniare (2.54) și (2.62) pentru filtre FIR cu răspuns la impuls simetric devin

$$H_R(\omega_k) = \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} a_{kn} h[n], \quad k = 0, 1, \dots, \frac{M-1}{2} \text{ pentru } M \text{ impar} \quad (2.87)$$

$$H_R(\omega_k) = \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} a_{kn} h[n], \quad k = 0, 1, \dots, \frac{M-1}{2} - 1, \quad \text{pentru } M \text{ par.} \quad (2.88)$$

În cazul răspunsului la impuls cu *simetrie impară* este necesară specificarea răspunsului în frecvență în  $\frac{M-1}{2}$  puncte pentru  $M$  impar și  $\frac{M}{2}$  puncte pentru  $M$  par. Deoarece (2.70) și (2.76) implică  $H_R(0) = 0$  independent de alegerea lui  $h[n]$ , evident, punctul  $\omega = 0$  nu va putea fi folosit în specificarea răspunsului în frecvență. Pentru  $M$  impar nu este nici o problemă, deoarece se poate specifica  $H_R(\omega)$  în  $(M-1)/2$  puncte echidistante în domeniul fundamental de frecvență, de forma  $\omega_k = 2\pi k / M$  pentru  $k = 1, 2, \dots, (M-1)/2$ . Când  $M$  este par sunt necesare  $M/2$  frecvențe, astfel încât, dacă nu se poate folosi  $\omega = 0$ , se va folosi  $\omega = \pi$ . În acest caz se definesc frecvențele  $\omega_k$

$$\begin{aligned} \omega_k &= \frac{2\pi k}{M}, \quad k = 1, \dots, \frac{M-1}{2}, \quad M \text{ impar} \\ & \quad k = 1, \dots, \frac{M}{2}, \quad M \text{ par} \end{aligned} \quad (2.89)$$

O alternativă în alegerea frecvențelor  $\omega_k$  care înlătură complet răspunsul nul la  $\omega = 0$  (și  $\omega = \pi$ ) este

$$\begin{aligned} \omega_k &= \frac{2\pi(k+1/2)}{M}, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{M-1}{2}, \quad M \text{ impar} \\ & \quad k = 0, 1, \dots, \frac{M}{2} - 1, \quad M \text{ par} \end{aligned} \quad (2.90)$$

Acest set de frecvențe se obține din (2.85) prin deplasarea fiecărei frecvențe cu  $\frac{\pi}{M}$ .

Se definesc coeficienții

$$b_{kn} = 2 \sin \omega_k \left( \frac{M-1}{2} - n \right) \quad (2.91)$$

Cu (2.91), ecuațiile liniare (2.70) și (2.76) devin

$$H_R(\omega_k) = \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} b_{kn} h[n], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M-1}{2}, \quad M \text{ impar} \quad (2.92)$$

$$H_R(\omega_k) = \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} b_{kn} h[n], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}, \quad M \text{ par} \quad (2.93)$$

**Exemplul 2.2.**

Să se determine răspunsul la impuls  $h[n]$  al filtrului FIR de fază

liniară de lungime  $M=4$  pentru care  $H_R(0) = 1$  și  $H_R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$ .

*Soluție.* Din (2.88) rezultă sistemul de ecuații

$$\begin{cases} a_{00}h[0] + a_{01}h[1] = H_R(0) = 1 \\ a_{10}h[0] + a_{11}h[1] = H_R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

în care  $a_{00} = 2$ ,  $a_{01} = 2$ ,  $a_{10} = -\sqrt{2}$ ,  $a_{11} = \sqrt{2}$ .

În formă matriceală se poate scrie compact

$$[A][h] = [H_R]$$

$$\text{unde } [A] = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad [h] = \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \end{bmatrix}, \quad [H_R] = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Soluția este

$$h[0] = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\sqrt{2} - 1) = 0,0732232 = h[3]$$

$$h[1] = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\sqrt{2} + 1) = 0,4267766 = h[2]$$

Răspunsul în frecvență al acestui filtru este

$$H(\omega) = H_R(\omega)e^{-j\frac{3\omega}{2}}$$

$$\text{unde } H_R(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[ (\sqrt{2} - 1) \cos \frac{3\omega}{2} + (\sqrt{2} + 1) \cos \frac{\omega}{2} \right]$$

În exemplul de mai sus, s-a considerat un filtru de lungime foarte mică. În practică, în funcție de aplicație, sunt necesare filtre FIR a căror lungime este mult mai mare (ordinul zecilor), situație în care  $h[n]$  poate fi calculat numai cu ajutorul calculatorului.

*Observație.* Pentru filtrele FIR cu fază liniară, pentru orice  $M$  (par sau impar), există o singură valoare a întârzierii de grup normale, și anume

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \alpha = \frac{M-1}{2} \quad (2.94)$$

În figura 2.3 este reprezentată alura răspunsurilor la impuls pentru cele patru tipuri de filtre FIR cu fază liniară.

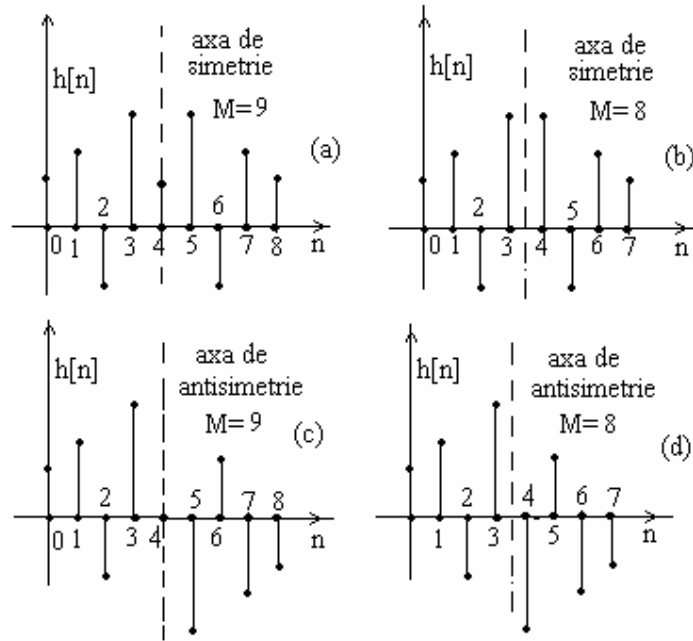


Figura 2.3. Răspunsurile la impuls pentru cele patru tipuri de filtre FIR cu fază liniară: (a) tipul 1; (b) tipul 2; (c) tipul 3; (d) tipul 4.

### 2.4.1. Zerourile funcției de transfer a filtrului FIR cu fază liniară

Condiția de simetrie sau antisimetrie a răspunsului la impuls  $h[n]$ , care determină faza liniară a filtrului FIR, implică și o poziționare particulară a zerourilor funcției de transfer  $H(z)$  a acestuia. Înlocuind în

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n]z^{-n} \quad (2.95)$$

$z$  cu  $z^{-1}$ , se obține

$$H(z^{-1}) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n]z^n \quad (2.96)$$



Efectuând schimbarea indicelui de sumare  $m=M-1-n$  și utilizând condiția de simetrie pozitivă din (2.50) rezultă următoarea relație valabilă pentru filtrele FIR de tipul 1 și 2.

$$H(z^{-1}) = \sum_{n=0}^{M-1} h[M-1-n]z^{M-1-n} = z^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} h[n]z^{-n} = z^{M-1}H(z) \quad (2.97)$$

Procedând similar pentru filtrele de tipul 3 și 4 cu utilizarea condiției de antisimetrie (2.51), se găsește relația

$$H(z^{-1}) = \sum_{n=0}^{M-1} h[M-1-n]z^{M-1-n} = -z^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} h[n]z^{-n} = -z^{M-1}H(z) \quad (2.98)$$

Reunind (2.97) și (2.98) rezultă că funcția de transfer a oricărui filtru FIR cu fază liniară satisface relația

$$H(z^{-1}) = \pm z^{M-1}H(z) \quad (2.99)$$

Din relația (2.99) rezultă următoarele concluzii:

1. Dacă  $z_i$  este un zero al lui  $H(z)$ , atunci și  $1/z_i$  este de asemenea un zero al acestuia;
2. Deoarece, în general, coeficienții  $h[n]$  ai polinomului  $H(z)$  sunt reali, zerourile complexe ale acestuia apar în perechi conjugate. Ca urmare, sunt posibile următoarele configurații de zerouri exprimate în coordonate polare ale acestora.

a)  $z_1 = r_1 e^{j\theta_1}$ , cu  $r_1 \neq 1$ ,  $\theta_1 \neq 0$ ,  $\theta_1 \neq \pi$

Caracterul real al coeficienților determină existența zeroului  $z_2 = z_1^* = r_1 e^{-j\theta_1}$  iar liniaritatea fazei, conform relației (2.99), implică existența zerourilor  $z_3$  și  $z_4$ , simetrice față de cercul unitate

$$z_3 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1} e^{-j\theta_1} \quad \text{și} \quad z_4 = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_1} e^{j\theta_1}$$

Acestei configurații îi corespunde factorul elementar  $H_1(z)$  în funcția de sistem  $H(z)$ :

$$H_1(z) = \prod_{i=1}^4 (1 - z^{-1}z_i) = 1 - 2\left(r_1 + \frac{1}{r_1}\right)\cos\theta_1 z^{-1} + \left(r_1^2 + \frac{1}{r_1^2} + 4\cos\theta_1\right)z^{-2} - 2\left(r_1 + \frac{1}{r_1}\right)\cos\theta_1 z^{-3} + z^{-4} \quad (2.100)$$

Evident, secvența  $h_I[n] = Z^{-1}\{H_I(z)\}$  este simetrică. Constelația celor patru zerouri este dată în figura 2.4 cu marcarea între paranteze a coordonatelor polare.

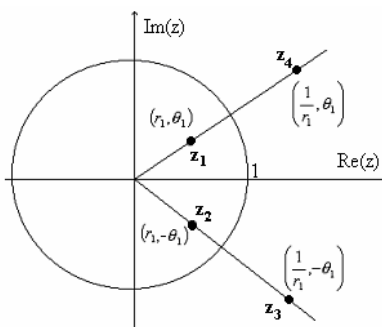


Figura 2.4. Pozițiile zerourilor pentru  $r_1 \neq 1$  și  $\theta \neq 0, \theta \neq \pi$

b)  $r_1 = 1$  și  $\theta_1 \neq 0, \theta_1 \neq \pi$

Prezența zeroului  $z_1 = e^{j\theta_1}$  implică automat și zeroul  $z_2 = e^{-j\theta_1}$  care este complex conjugatul lui  $z_1$ . Fiind pe cercul unitate, zerourile  $z_1$  și  $z_2$  reprezintă și propriile lor simetrice față de cercul unitate. Factorul elementar corespunzător în  $H(z)$  va fi

$$H_1(z) = (1 - z^{-1}e^{j\theta_1})(1 - z^{-1}e^{-j\theta_1}) = 1 - 2\cos\theta_1 z^{-1} + z^{-2}$$

c)  $r_1 \neq 1$  și  $\theta_1 = 0$

Zeroul  $z_1 = r_1$  fiind real, implică doar simetricul său față de cercul unitate  $z_2 = 1/r_1$  și, deci, factorul elementar

$$H_1(z) = (1 - z^{-1}r_1)\left(1 - z^{-1}\frac{1}{r_1}\right) = 1 - \left(r_1 + \frac{1}{r_1}\right)z^{-1} + z^{-2}$$

d)  $r_1 \neq 1$  și  $\theta_1 = \pi$

Analog cazului c), se obține

$$z_1 = -r_1 \Rightarrow z_2 = -\frac{1}{r_1} \text{ și } H_1(z) = 1 + \left(r_1 + \frac{1}{r_1}\right)z^{-1} + z^{-2}$$

e)  $r_1 = 1$  și  $\theta_1 = 0$  sau  $r_1 = 1$  și  $\theta_1 = \pi$

Zeroul  $z_1 = 1$  (sau  $z_1 = -1$ ) este simultan propriul lui conjugat și simetric față de cercul unitate. Factorii elementari corespunzători acestora sunt

$$H_1(z) = 1 - z^{-1} \text{ respectiv } H_1(z) = 1 + z^{-1}.$$

Utilizând relațiile

$$H(\omega)\Big|_{\omega=0} = H(z)\Big|_{z=1}; \quad H(\omega)\Big|_{\omega=\pi} = H(z)\Big|_{z=-1} \quad (2.101)$$

și corelând particularitățile funcției  $H(\omega)$  din Tabelul 2.1 cu configurațiile de zerouri posibile ale funcției  $H(z)$  de fază liniară, se desprind următoarele observații:

Întrucât zerourile menționate la a), b), c), d) apar în număr par, în cazul filtrelor cu lungime pară (tipurile 2 și 4), care implică ordinul  $M-1$  impar pentru sistem, este necesară prezența factorilor de tipul e) cu ordin de multiplicitate impar. Astfel, la filtrele de tipul 2 este obligatorie prezența zeroului  $z=-1$  cu multiplicitate impară pentru a realiza anularea lui  $H(\omega)$  la  $\omega=\pi$ , în timp ce la filtrele de tipul 4 este obligatorie prezența zeroului  $z=1$  cu multiplicitate impară pentru a realiza anularea lui  $H(\omega)$  la  $\omega=0$ . La filtrele de tipul 3, cu ordinul  $M-1$  par, este obligatorie prezența simultană a zerourilor  $z=1$  și  $z=-1$  pentru a anula  $H(\omega)$  în  $\omega=0$  și  $\omega=\pi$ . Imparitatea funcției  $H_R(\omega)$  necesită multiplicitate impară atât pentru  $z=1$ , cât și pentru  $z=-1$ . La *tipul 1*, cu ordinul  $M-1$  par, apariția zerourilor în  $z=1$  și  $z=-1$  nu este obligatorie. Se pot introduce, dacă alura caracteristicii de filtrare necesită anularea ei la frecvențele 0 și/sau  $\pi$ , dar atunci obligatoriu cu multiplicitate pară pentru fiecare, aceasta pentru a respecta ordinul par al filtrului și paritatea caracteristicii  $H_R(\omega)$ .

Ținând seama de aceste observații, în figura 2.5 se prezintă constelațiile tipice ale zerourilor celor patru tipuri de filtre FIR cu faza liniară.

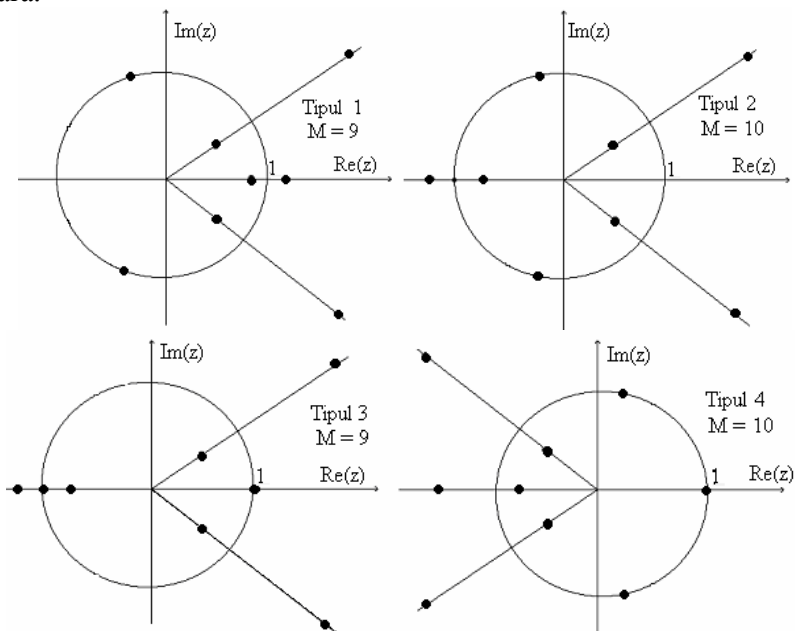


Figura 2.5. Constelațiile tipice de zerouri pentru cele 4 tipuri de filtre FIR cu faza liniară

## 2.5. Proiectarea filtrelor FIR cu fază liniară prin metoda ferestrelor

În această metodă se începe cu specificarea răspunsului dorit în frecvență,  $H_d(\omega)$ , care este o funcție periodică de perioadă  $2\pi$  și se poate dezvolta în serie Fourier

$$H_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n] e^{-j\omega n} \quad (2.102)$$

Răspunsul la impuls se deduce cu transformata Fourier inversă

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H_d(\omega) e^{j\omega n} d\omega \quad (2.103)$$

Răspunsul la impuls  $h_d[n]$  este, în general, infinit ca durată și trebuie trunchiat la un număr de puncte  $n=M-1$  pentru a obține un filtru FIR de lungime  $M$ . Funcția de transfer a filtrului numeric FIR ce trebuie sintetizat este

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n] e^{-j\omega n} \quad (2.104)$$

Efectuând identificarea între termenii sumelor care reprezintă funcția de transfer dorită și cea reală a filtrului FIR, rezultă

$$h[n] = h_d[n], \quad n = 0, \dots, M-1 \quad (2.105)$$

Lungimea filtrului se presupune cunoscută, cel puțin aproximativ, din cerințele de proiectare. Decizia asupra tipului de filtru ales se ia considerând restricțiile sintetizate în Tabelul 2.1.

Întrucât se dorește ca filtrul rezultat să aibă caracteristica de amplitudine impusă  $|H_d(\omega)|$  și caracteristica de fază liniară, în  $H_d(\omega)$  se

include și factorul de fază liniară  $e^{j\left(\beta\frac{\pi}{2} - \frac{M-1}{2}\omega\right)}$ , unde  $\beta = 0$  pentru filtre de tipul 1 și 2 și  $\beta = 1$  pentru filtre de tipul 3 și 4. Astfel,

$$H_d(\omega) = H_{dR}(\omega) e^{j\left(\beta\frac{\pi}{2} - \frac{M-1}{2}\omega\right)} \quad (2.106)$$

În cazul filtrelor de tipul 1 și 2  $H_{dR}(\omega)$  este o funcție pară de  $\omega$ , iar pentru filtrele de tipul 3 și 4, impară. Alegerea unui filtru de tipul 3 sau 4 se justifică numai dacă  $H_d(0) = 0$ .

Funcția de fază zero  $H_{dR}(\omega)$  din (2.106) se poate alege ca fiind funcția de fază zero a filtrului ideal pe care îl aproximează sau, în cazul filtrelor de tipul 1 și 2, când aceasta prezintă simetrie pară,

$$H_{dR}(\omega) = |H_d(\omega)|, \omega \in [-\pi, \pi] \quad (2.107)$$

iar în cazul filtrelor de tipul 3 și 4, când aceasta prezintă simetrie impară,

$$H_{dR}(\omega) = \begin{cases} |H_d(\omega)|, & \omega \in [0, \pi] \\ -|H_d(\omega)|, & \omega \in [-\pi, 0], \\ 0, & \omega = 0 \end{cases} \quad (2.108)$$

În concluzie, pentru filtrele de tipul 1 și 2

$$H_d(\omega) = H_{dR}(\omega) e^{-j\frac{M-1}{2}\omega} \quad (2.109)$$

iar pentru filtrele de tipul 3 și 4

$$H_d(\omega) = H_{dR}(\omega) e^{j\left(\frac{\pi}{2} \frac{M-1}{2} \omega\right)} \quad (2.110)$$

După stabilirea lui  $H_d(\omega)$ , se descompune acesta în serie Fourier pentru a rezulta secvența infinită  $h_d[n]$ . Coeficienții filtrului sintetizat se aleg ca în relația (2.105). Trunchierea răspunsului la impuls poate fi privită și ca o înmulțire a secvenței de lungime infinită cu o fereastră temporală de lungime  $M$ , notată  $w[n]$ , adică

$$h[n] = h_d[n]w[n] \quad (2.111)$$

cu proprietatea

$$w[n] = 0, \text{ pentru } n \notin [0, M-1] \quad (2.112)$$

Produsul algebric în timp discret din (2.111) îi corespunde în frecvență, convoluția transformatelor Fourier. Datorită periodicității de  $2\pi$  a transformatelor Fourier, convoluția se efectuează pe un interval egal cu perioada fundamentală, egal cu  $2\pi$ .

$$H(\omega) = F\{h[n]\} = \frac{1}{2\pi} H_d(\omega) * W(\omega) \quad (2.113)$$

care, evident, nu coincide, în general, cu  $H_d(\omega)$ .

În cazul sintezei filtrelor cu fază liniară, funcția fereastră  $w[n]$  trebuie să îndeplinească condiția de simetrie

$$w[n] = w[M-1-n] \quad (2.114)$$

adică este un răspuns la impuls de tipul 1 sau 2, în funcție de paritatea lui  $M$  și

$$W(\omega) = W_R(\omega) e^{-j\omega \frac{M-1}{2}} \quad (2.115)$$

unde  $W_R(\omega)$  este funcția de fază zero a ferestrei.

Relația (2.113) devine

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\lambda) W(\omega - \lambda) d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dR}(\lambda) e^{j\left(\beta \frac{\pi}{2} \frac{M-1}{2} \lambda\right)} W_R(\omega - \lambda) e^{-j\frac{M-1}{2}(\omega - \lambda)} d\lambda = \\ &= e^{j\left(\beta \frac{\pi}{2} \frac{M-1}{2} \omega\right)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dR}(\lambda) W_R(\omega - \lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (2.116)$$

Rezultă că trunchierea filtrului FIR de fază liniară conduce la o funcție de transfer de fază zero,  $H_R(\omega)$ , dată de convoluția periodică, continuă dintre răspunsul dorit de fază zero și funcția de transfer de fază zero a ferestrei, adică

$$H_R(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dR}(\lambda) W_R(\omega - \lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} H_{dR}(\omega) * W_R(\omega) \quad (2.117)$$

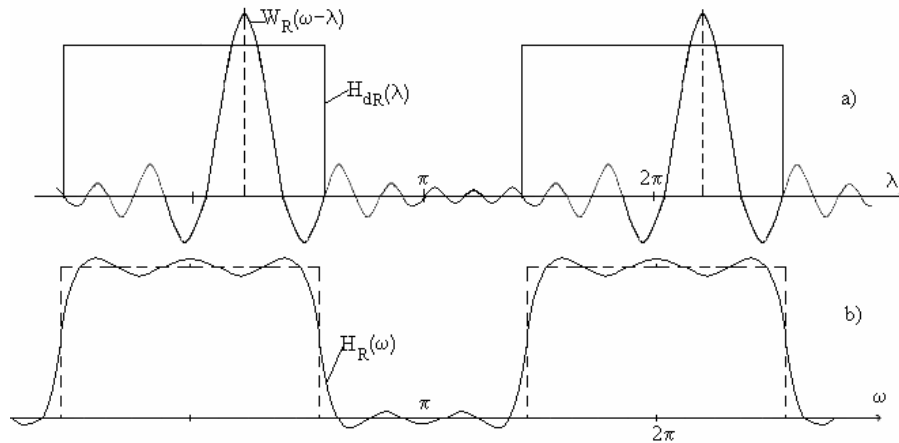


Figura 2.6. a) Operația de convoluție implicată de trunchierea răspunsului la impuls ideal, b) Aproximarea răspunsului în frecvență al filtrului rezultată din trunchierea răspunsului la impuls ideal

Din relația (2.117) rezultă că dacă  $W_R(\omega)$  este un puls foarte îngust centrat pe  $\omega = 0$  (ideal, o funcție Delta) în comparație cu  $H_{dR}(\omega)$ , atunci  $H_R(\omega)$  aproximează foarte fidel pe  $H_{dR}(\omega)$ . Aceasta implică

funcția fereastră de lungime  $M$  foarte mare (ideal  $w[n]=1$  pentru toți  $n$ , deci lipsa trunchierii, caz în care  $W(\omega)$  este un tren periodic de impulsuri de perioadă  $2\pi$ ). Pe de altă parte, lungimea  $M$  a ferestrei ar trebui să fie cât mai mică pentru reducerea complexității calculului. În figura 2.6 sunt ilustrate  $H_{dR}(\omega)$ ,  $W_R(\omega)$  și convoluția periodică dintre ele,  $H_R(\omega)$ .

**Exemplul 2.3.**

Să se proiecteze două FTJ cu fază liniară cu lungimea  $M=38$ , respectiv  $M=39$ , frecvența de tăiere fiind  $F_c=5$  kHz, iar frecvența de eșantionare  $F_s=40$  kHz.

*Soluție.* Frecvența de tăiere normalată este

$$\omega_c = 2\pi \frac{F_c}{F_s} = 2\pi \frac{5}{40} = \frac{\pi}{4} \quad (2.118)$$

Cu definiția lui  $H_{dR}(\omega)$  pentru FTJ ideal,  $H_{dR}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$ ,

care este o funcție pară, utilizând (2.109) și (2.103), cu valorile din enunț, se obține răspunsul la impuls cu lungimea infinită

$$\begin{aligned} h_d[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dR}(\omega) e^{-j\omega \frac{M-1}{2}} e^{j\omega n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega \left(n - \frac{M-1}{2}\right)} d\omega = \\ &= \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c \left(n - \frac{M-1}{2}\right)}{\omega_c \left(n - \frac{M-1}{2}\right)} = \frac{1}{4} \operatorname{sinc} \left[ \left(n - \frac{M-1}{2}\right) \frac{\pi}{4} \right] \end{aligned} \quad (2.119)$$

unde s-a folosit funcția  $\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$ .

Trunchierea răspunsului necauzal  $h_d[n]$  conform relației (2.105) permite determinarea celor  $M$  valori ale răspunsului la impuls  $h[n]$ , pentru  $n=0,1,\dots,M-1$ , reprezentând coeficienții filtrului FIR proiectat. Secvențele  $h[n]$  obținute sunt date în figura 2.7.

Particularizând relațiile din Tabelul 2.1 care dau caracteristicile funcției de transfer  $H(\omega)$ , rezultă

**pentru  $M=39$**

$$\varphi(\omega) = -19\omega; \quad H_R(\omega) = \sum_{n=0}^{19} a[n] \cos(n\omega) \quad \text{unde}$$

$$a[0] = h \left[ \frac{M-1}{2} \right] = \frac{1}{4}; \quad a[n] = 2h \left[ \frac{M-1}{2} - n \right] = \frac{1}{2} \operatorname{sinc} \frac{n\pi}{4}, \quad n = \overline{1,19}$$

pentru  $M=38$

$$\varphi(\omega) = -\frac{37}{2} \omega; \quad H_R(\omega) = \sum_{n=1}^{19} b[n] \cos\left(\frac{2n-1}{2} \omega\right) \quad \text{unde}$$

$$b[n] = 2h \left[ \frac{M}{2} - n \right] = \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{4}\right)$$

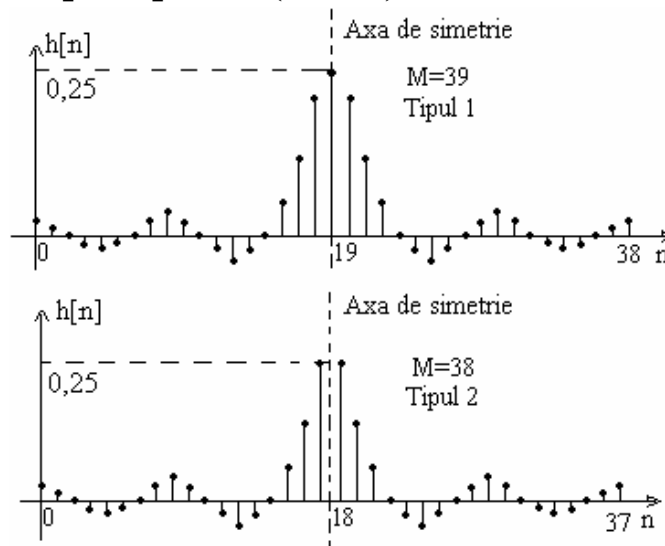


Figura 2.7. Răspunsurile la impuls ale FTJ din exemplul 2.3.

Reprezentările grafice ale funcției de fază zero și modulului funcției de transfer sunt prezentate în figura 2.8, (a) și (c) pentru  $M=39$  și (b) și (d) pentru  $M=38$ . Se pot remarca proprietățile de simetrie pară ale tuturor caracteristicilor și, de asemenea, simetria de rotație, de perioadă  $4\pi$  și trecerea prin zero la  $\omega=\pm\pi$  a funcției  $H_R(\omega)$  a filtrului de tipul 2 (figura 2.8b).

#### Observații

1. Metoda ferestrelor de timp se mai numește și *metoda dezvoltării în serie Fourier* deoarece relația (2.104) reprezintă dezvoltarea în serie Fourier a funcției  $H(\omega)$ , periodică, de perioadă  $2\pi$ .
2. Proiectarea poate fi făcută și fără a introduce factorul de fază liniară, ca în relația (2.109), determinând răspunsul la impuls, de lungime infinită, corespunzător funcției de fază zero a filtrului ideal



$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1 \cdot e^{j\omega n} d\omega = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}(\omega_c n) \quad (2.120)$$

Acest răspuns, simetric față de ordonată, se trunchiază simetric pentru a avea de asemenea fază zero și lungimea  $M$ . În acest caz, răspunsul trunchiat este

$$h_M^{(t)}[n] = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}(\omega_c n) & \text{pentru } -\frac{M-1}{2} \leq n \leq \frac{M-1}{2} \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (2.121)$$

Se deplasează apoi secvența la dreapta cu  $(M-1)/2$  pentru a realiza cauzalitatea filtrului, obținând secvența

$$h_M[n] = h_M^{(t)}\left[n - \frac{M-1}{2}\right] = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left[\left(n - \frac{M-1}{2}\right)\omega_c\right], & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (2.122)$$

care este, evident, aceeași cu cea obținută prin prima procedură bazată pe relațiile (2.103) și (2.109).

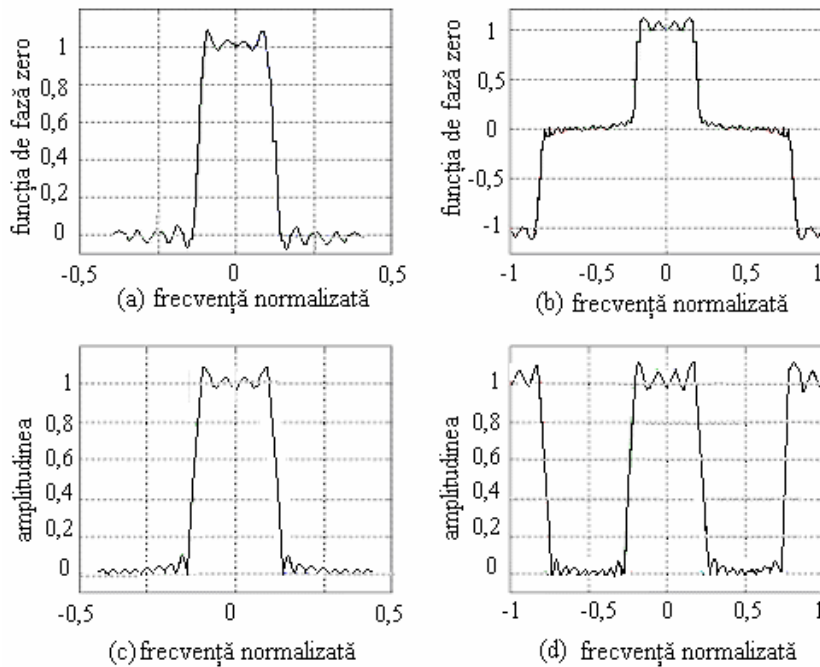


Figura 2.8 Caracteristicile în domeniul frecvență ale FTJ din exemplu dat,  $M = 39$  (a și c);  $M = 38$  (b și d).

Această metodă este operațională pentru filtrele de lungime impară (tipurile 1 și 3), în schimb, pentru cele de lungime pară (tipurile 2 și 4) ea devine incomodă, secvența de lungime pară neputând fi obținută printr-o simplă deplasare dintr-o altă secvență simetrică sau antisimetrică în raport cu originea deoarece  $(M-1)/2 \notin \mathbf{Z}$ , motiv pentru care este recomandabil să se determine coeficienții filtrului cu relațiile (2.103) și (2.106), asocierea factorului de fază liniară din (2.106) având două avantaje mari:

- se operează cu  $H(\omega)$ , de perioadă  $2\pi$  pentru toate tipurile de filtre;
- trunchierea asigură localizarea răspunsului de lungime finită  $M$ , direct pe suportul  $0 \leq n \leq M-1$ .

### 2.5.1. Tipuri de ferestre

Pentru ferestrele uzuale, caracteristica de amplitudine are un lob principal, centrat pe  $\omega = 0$ , și un număr de lobi secundari cu tendințe de descreștere.

Efectul trunchierii asupra caracteristicii obținute, cunoscut sub numele de *fenomen Gibbs*, [63] se poate constata în special în zonele de tranziție rapidă a caracteristicii. Se constată două aspecte:

1. Apariția unei benzi de tranziție de lățime finită, care este cu atât mai mare, cu cât lățimea lobului principal al ferestrei este mai mare;
2. Apariția unor ripluri sau oscilații atât în banda de trecere cât și în cea de oprire a căror amplitudine și viteză de scădere sunt determinate de amplitudinea și viteza de scădere a lobilor secundari ai spectrului ferestrei. Aceste ripluri cresc către marginile benzilor de trecere și oprire, în apropierea punctelor de discontinuitate ale caracteristicii ideale.

În concluzie, pentru a se obține o bandă de tranziție cât mai îngustă și ripluri cât mai reduse, funcția fereastră utilizată trebuie să îndeplinească următoarelor cerințe:

1. Funcția de transfer de fază zero a ferestrei să aibă lobul principal cât mai îngust și lobi secundari cât mai mici;
2. Lobul principal să conțină cea mai mare parte din energia ferestrei;
3. Energia lobilor secundari să fie cât mai uniform distribuită între aceștia.

La limită, aceste condiții ar fi îndeplinite de

$$W_R(\omega) = 2\pi\delta(\omega) \quad (2.123)$$

rezultat fără valoare practică, deoarece în acest caz  $w[n] = 1$ , constant pentru orice  $n$ , deci lipsește fereastra. În general, cele trei cerințe nu pot fi satisfăcute de nici o fereastră deoarece cerințele 1 și 2 sunt contradictorii.

Din considerentele prezentate anterior rezultă modalitatea de specificare a caracteristicii de amplitudine a filtrului sub forma unor cote de gabarit. Astfel, în cazul proiectării unui filtru trece jos, în banda de trecere funcția de fază zero oscilează în jurul valorii ideale 1, *riplul maxim* fiind notat cu  $\delta_p$ , iar în banda de oprire, în jurul valorii ideale 0, *riplul maxim* fiind notat cu  $\delta_s$ , cum se arată în figura 2.20.

Dacă se reprezintă modulul funcției de fază zero și se duc paralele la abscisă prin  $1-\delta_p$ , respectiv  $\delta_s$ , intersecțiile acestora cu graficul definesc banda de trecere efectivă  $\omega \in [0, \omega_p]$  (B.T.) și banda de oprire efectivă (B.O.)  $\omega \in [\omega_s, \pi]$ , cu semnificația din figura 2.9. Zona situată între  $\omega_p$  și  $\omega_s$  reprezintă banda de tranziție a filtrului (B. Tr.). Zonele interzise sunt hașurate pe figură.

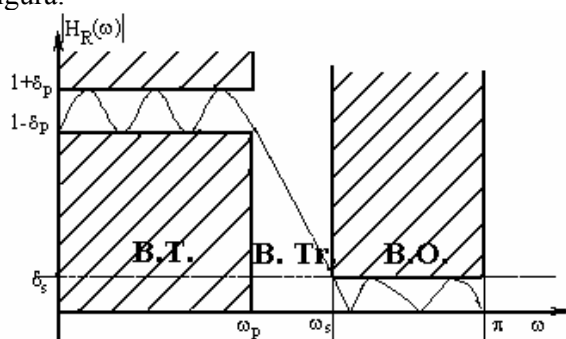


Figura 2.9. Caracterizarea modulului funcției de fază zero a unui FTJ sub forma unor cote de gabarit

### 2.5.1.1. Fereastra dreptunghiulară

Fereastra dreptunghiulară cauzală este definită prin relația

$$w_D[n] = \begin{cases} 1, & n \in [0, M-1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (2.124)$$

Transformata Fourier a acesteia conduce la expresia

$$W_D(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega M}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{-j\omega \frac{M-1}{2}} \frac{\sin((M/2)\omega)}{\sin(\omega/2)} \quad (2.125)$$

de unde rezultă termenul de fază zero

$$W_{DR}(\omega) = \frac{\sin((M/2)\omega)}{\sin(\omega/2)} = S_a(\omega) \quad (2.126)$$

Funcția  $W_{DR}(\omega)$  este pară, de perioadă  $2\pi$  pentru  $M$  impar, respectiv  $4\pi$  cu simetrie de rotație pentru  $M$  par și

$$W_{DR}(\omega)|_{\omega=0} = M; \quad W_{DR}(\omega)|_{\omega=\pi} = \begin{cases} 0 & \text{pentru } M = 2k \\ (-1)^k & \text{pentru } M = 2k + 1 \end{cases} \quad (2.127)$$

$$W_{DR}(\omega_k) = 0 \Rightarrow \omega_k = k \frac{2\pi}{M} \text{ cu } k \in Z - \{pM\}, p \in Z.$$

Frecvențele la care se anulează  $W_{DR}(\omega)$  reprezintă *nuluri spectrale*.

În figura 2.10 este reprezentată funcția de fază zero  $W_{DR}(\omega)$  pentru  $M=11$ , care seamănă cu o sinusoidă amortizată având un lob principal cu lățimea  $4\pi/M$ , dublă față de cea a lobilor secundari. Lobul principal se definește, în general, ca regiunea dintre primele nuluri spectrale aflate de o parte și de cealaltă a originii. Cu creșterea lui  $M$ , lățimea lobului principal descrește, iar înălțimea sa crește. La fel se întâmplă și pentru lobi lateralii, aria de sub fiecare rămânând constantă.

Conform relației (2.117), valoarea lui  $H_R(\omega)$  pentru filtrul FIR cu  $M$  impar este dată, în cazul unui filtru trece jos cu răspunsul dorit  $H_d(\omega)=1$  și, corespunzător,  $H_{dR}(\omega)=H_d(\omega)=1$ , pentru  $\omega \in [-\omega_c, \omega_c]$ , de integrala

$$H_R(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} W_{DR}(\omega - \lambda) d\lambda \quad \text{pentru } \omega \in [-\pi, \pi] \quad (2.128)$$

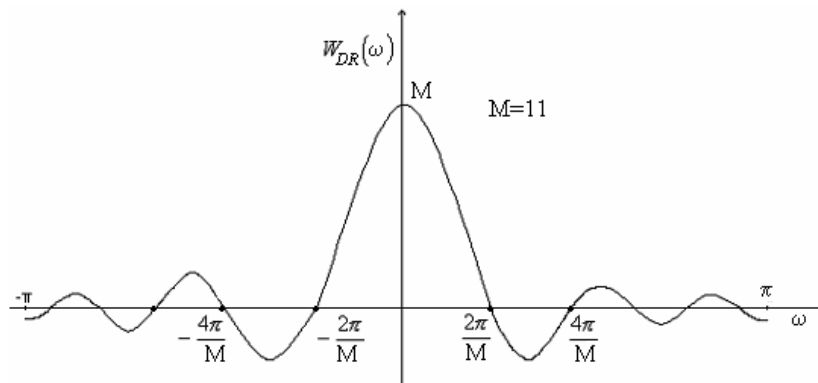


Figura 2.10 Funcția de transfer de fază zero a ferestrei dreptunghiulare

Interpretarea relației (2.128) se face grafic în figura 2.11.

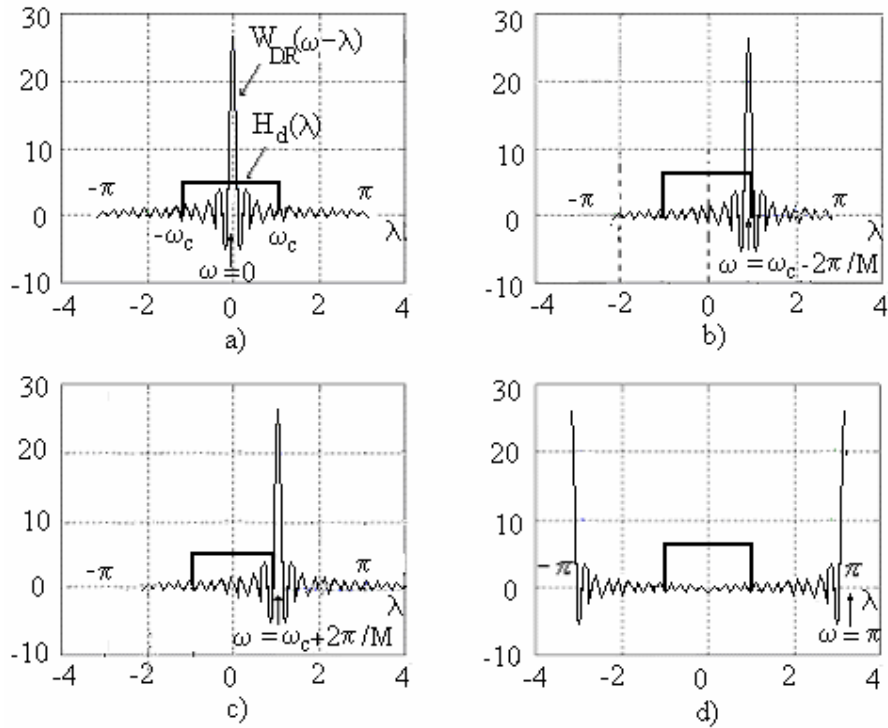


Figura 2.11 Explicarea fenomenului Gibbs prin convoluție

Pe măsură ce  $W_{DR}(\omega - \lambda)$  trece peste o discontinuitate a lui  $H_d(\lambda)$ , cu creșterea lui  $\omega$ , integrala din (2.117) va oscila, după cum fiecare lob din  $W_{DR}(\omega - \lambda)$  traversează discontinuitatea. Deoarece aria de sub fiecare lob rămâne constantă, cu creșterea lui  $M$ , oscilațiile devin mai rapide, dar nu descresc în amplitudine. Aceste oscilații se numesc *fenomen Gibbs* și se datorează trunchierii seriei Fourier [63].

Pentru a aprecia valoarea integralei (2.128) și a pune în evidență efectul Gibbs, se examinează variația lui  $H_R(\omega)$  pe intervalul  $(0, \pi)$ , aceasta fiind o funcție pară obținută ca rezultat al convoluției a două funcții pare. Se consideră patru situații semnificative  $\omega=0$ ,  $\omega=\omega_c-2\pi/M$ ;  $\omega=\omega_c+2\pi/M$ ;  $\omega=\pi$  ( $\omega_c=10\pi/M$ ,  $M=25$ ) [28]. Astfel, pentru  $\omega=0$ , din figura 2.11a rezultă

$$\begin{aligned}
H_R(\omega)|_{\omega=0} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} W_{DR}(-\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} W_{DR}(\omega) d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_{DR}(\omega) d\omega - \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\omega_c} W_{DR}(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_c}^{\pi} W_{DR}(\omega) d\omega \right] = \quad (2.129) \\
&= W_{DR}[0] - \sigma = 1 - \sigma
\end{aligned}$$

Din relația (2.129) se observă că valoarea funcției  $H_R(\omega)$  la  $\omega=0$  este dată de suma ariilor (cu tot cu semn) lobului principal și lobilor laterali ce cad în dreptul benzii de trecere a filtrului sau, altfel spus, la  $\omega=0$  valoarea integralei se obține scăzând din 1 suma ariilor lobilor secundari ce nu cad în dreptul benzii de trecere. De aici rezultă că atât timp cât lobul principal al ferestrei baleiază zona de trecere a filtrului ideal, valoarea funcției  $H_R(\omega)$ , corespunzătoare secvenței trunchiate, oscilează în jurul valorii 1, mărimea oscilațiilor fiind dictată de suma ariilor lobilor secundari ce nu intră în intervalul  $(-\omega_c, \omega_c)$ .

Valoarea cea mai mare a lui  $H_R(\omega)$  în banda de trecere (deci și riplul maxim) se obține la frecvența  $\omega=\omega_c-2\pi/M$ , care corespunde poziției ferestrei din figura 2.11b, pentru care aria mare dată de (2.128) se datorează excluderii primului lob lateral din dreapta (cu arie mare negativă). Odată cu intrarea lobului principal în dreptul benzii de oprire, numai lobi secundari rămân în dreptul intervalului  $(-\omega_c, \omega_c)$ , astfel că valoarea lui  $H_R(\omega)$ , egală cu suma ariilor acestor lobi, oscilează în jurul valorii 0. Cea mai mare oscilație în banda de oprire se obține la  $\omega=\omega_c+2\pi/M$ , când primul lob lateral stânga, cu arie negativă mare, rămâne în dreptul benzii de trecere, situație corespunzătoare figurii 2.11c. Cea mai mică oscilație se obține la  $\omega=\pi$ , deoarece acum numai lobi secundari cei mai mici au rămas în dreptul zonei de trecere, cum se arată în figura 2.11d.

La frecvența de tăiere teoretică ( $\omega=\omega_c$ ), jumătate din lobul principal a ieșit din intervalul  $(-\omega_c, \omega_c)$ , astfel că valoarea lui  $H_R(\omega)$  este aproximativ  $1/2$ , deoarece integrala din  $W_{DR}(\omega)$  pe un interval de lățime  $2\pi$  este unitară și poate fi considerată aproximativ egală cu integrala lobului principal.

*Observații.*

- Riplurile, atât cele din banda de trecere, cât și cele din banda de oprire, sunt datorate lobilor secundari.

- Distanța dintre frecvențele unghiulare la care apar riplurile maxime din banda de trecere și banda de oprire este egală cu lățimea lobului principal al ferestrei

$$\omega_c + \frac{2\pi}{M} - \left( \omega_c - \frac{2\pi}{M} \right) = \frac{4\pi}{M} \quad (2.130)$$

Ca atare, lățimea zonei de tranziție, mai mică decât distanța dintre cele două frecvențe, este dictată de lățimea lobului principal. Creșterea lungimii  $M$  a filtrului reduce zona de tranziție, împingând riplurile maxime din cele două benzi spre frecvența teoretică de tăiere, neputându-le însă reduce sub 8,9% [28].

Explicarea fenomenului Gibbs efectuată mai sus evidențiază cerințele funcției fereastră prezentate la începutul paragrafului 2.5.1.

Acestea conduc la următoarele performanțe pentru filtrul proiectat:

1. Zonă de tranziție îngustă;
2. Ripluri mici ale răspunsului în frecvență;
3. Uniformizarea riplurilor, în scopul evitării situației în care energia lobilor secundari este concentrată în principal în primii lobi secundari.

În figura 2.12 sunt prezentate caracteristicile de amplitudine, în modul și normate, în decibeli, pentru fereastra dreptunghiulară cu  $M=25$ , iar în figura 2.13 aceleași caracteristici ale FTJ proiectat prin ponderarea cu această fereastră, cu frecvența de tăiere  $\omega_c=2\pi/5$ , pe abscisă fiind luată frecvența normalizată.

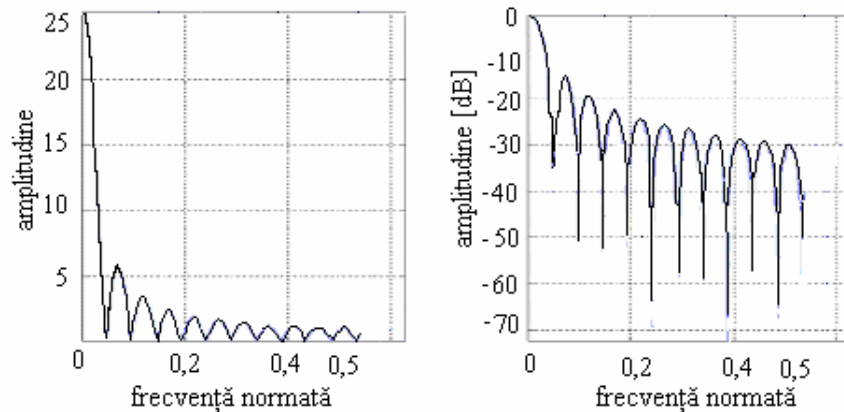


Figura 2.12 Răspunsul în frecvență al ferestrei dreptunghiulare cu  $M = 25$

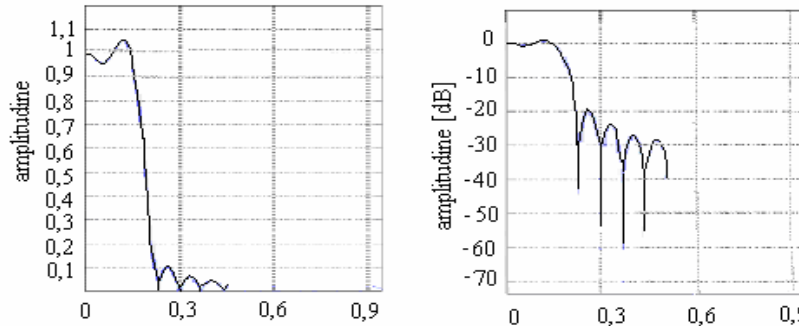


Figura 2.13. Răspunsul în frecvență al FTJ cu  $\omega_c/2\pi = 0,2$  ponderat cu fereastra dreptunghiulară cu  $M = 25$

Normarea lui  $|W_D(\omega)|$  se face în raport cu valoarea sa maximă  $M$ , obținută la  $\omega=0$ . Amplitudinile lobilor secundari nu pot fi reduse prin creșterea lui  $M$ . Se presupune  $M$  suficient de mare, încât  $\sin(M\omega/2)$  variază mult mai rapid decât  $\sin(\omega/2)$ . Maximul (în modul) se obține când  $\sin(M\omega/2) = \pm 1$ . Prima frecvență la care este îndeplinită această condiție este  $M\omega/2 = \pi + \pi/2$ , deci  $\omega = 3\pi/M$ . Amplitudinea normalată a primului lob secundar este

$$\left| \frac{W_D(\omega)}{W_D(0)} \right|_{\omega=\frac{3\pi}{M}} = \frac{1}{M} |W_{DR}(\omega)|_{\omega=\frac{3\pi}{M}} = \frac{1}{M} \left| \frac{\sin(3\pi/2)}{\sin(3\pi/2M)} \right|_{N \rightarrow \infty} \approx \frac{2}{3\pi} \approx 0,2 \quad (2.131)$$

deci amplitudinea normalată, în dB, este  $20 \lg(2/(3\pi)) \approx -13$  dB pentru  $M$  foarte mare (figura 2.12). Aceasta implică o atenuare minimă de doar 21 dB în banda de oprire și o variație maximă a atenuării în banda de trecere de 1,6 dB pentru FTJ proiectat (figura 2.13).

Reducerea riplurilor în cele două benzi se poate realiza utilizând alte tipuri de ferestre, mai puțin abrupte decât cea dreptunghiulară.

### 2.5.1.2. Familia de ferestre Hamming

O relația prin care se definește familia de ferestre Hamming este

$$w_H[n] = \begin{cases} \alpha - (1-\alpha) \cos \frac{2\pi n}{M-1}, & \text{pentru } 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (2.132)$$

Se observă că  $w_H[0] = W_H[M-1] = 2\alpha - 1$  și  $w_H\left[\frac{M-1}{2}\right] = 1$ .



Dacă  $\alpha=0,54$  fereastra este denumită *Hamming propriu - zisă*, iar dacă  $\alpha=0,5$  este denumită *Hanning* (sau *fereastra lui von Hann*, mai corect).

Determinarea spectrului  $W_{HR}(\omega)$  se poate face exprimând  $w_{HR}[n]$  ca produsul dintre o fereastră dreptunghiulară necauzală  $w_{DR}[n]$  și semnalul periodic  $x[n]$

$$x[n] = \alpha + (1 - \alpha) \cos \frac{2\pi n}{M-1}, \quad (2.133)$$

adică

$$w_{HR}[n] = w_{DR}[n]x[n] = w_{DR}[n] \left[ \alpha + (1 - \alpha) \cos \frac{2\pi n}{M-1} \right] \quad (2.134)$$

Multiplicării în domeniul timp a semnalelor  $w_{DR}[n]$  și  $x[n]$  îi corespunde în domeniul frecvență convoluția circulară a transformatelor lor Fourier,  $W_{DR}(\omega)$  și  $X(\omega)$ . Cum  $x[n]$  se compune dintr-un termen constant și unul în cosinus de frecvență unghiulară  $\omega = \frac{2\pi}{M-1}$ , transformata sa Fourier se poate exprima ca o sumă de trei funcții Delta, după cum urmează:

$$X(\omega) = \alpha \pi \delta(\omega) + \frac{1-\alpha}{2} \pi \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{M-1}\right) + \frac{1-\alpha}{2} \pi \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{M-1}\right) \quad (2.135)$$

Din convoluția spectrelor rezultă spectrul ferestrei, de forma

$$W_{HR}(\omega) = \alpha W_{DR}(\omega) + \frac{1-\alpha}{2} W_{DR}\left(\omega - \frac{2\pi}{M-1}\right) + \frac{1-\alpha}{2} W_{DR}\left(\omega + \frac{2\pi}{M-1}\right) \quad (2.136)$$

Se observă că spectrul ferestrei Hamming este format din suma a trei termeni care reprezintă, fiecare, versiuni ale spectrului ferestrei rectangulare,  $W_{DR}(\omega)$ , scalate și deplasate pe pozițiile impulsurilor Delta, situație ilustrată în figura 2.14. Deplasările determinate de impulsurile din funcția cosinus poziționează lobi laterali ai spectrului  $W_{DR}(\omega)$ , astfel încât aceștia tind să se anuleze, ceea ce conduce la reducerea mărimii lobilor laterali ai spectrului rezultat,  $W_{HR}(\omega)$ .

Prin însumarea termenilor dispar zerourile ferestrei dreptunghiulare de la  $\pm 2\pi/M$ , rezultând un lob principal cu lățimea dublă față de cea a lobului principal al ferestrei dreptunghiulare. Amplitudinile lobilor secundari sunt considerabil mai mici comparativ cu cele ale lobilor secundari ai ferestrei dreptunghiulare. În plus, între  $4\pi/(M-1)$  și  $6\pi/(M-1)$  (și simetric în stânga) s-a creat prin însumare un zero pentru  $W_{HR}(\omega)$ ,

scindând astfel în două primul lob secundar, care este de obicei cel mai puternic. Pentru  $\alpha=0,54$  (fereastra Hamming), 99,96% din energia totală a ferestrei este conținută în lobul principal, iar lobul secundar cel mai puternic are amplitudinea cu 41 dB mai mică decât lobul principal. Pentru filtrele proiectate prin metoda ferestrei cu ponderare Hamming, creșterea lățimii lobului principal determină creșterea lățimii zonei de tranziție, în timp ce descreșterea amplitudinilor lobilor laterali determină ripluri mai mici în zona de oprire și în zona de trecere.

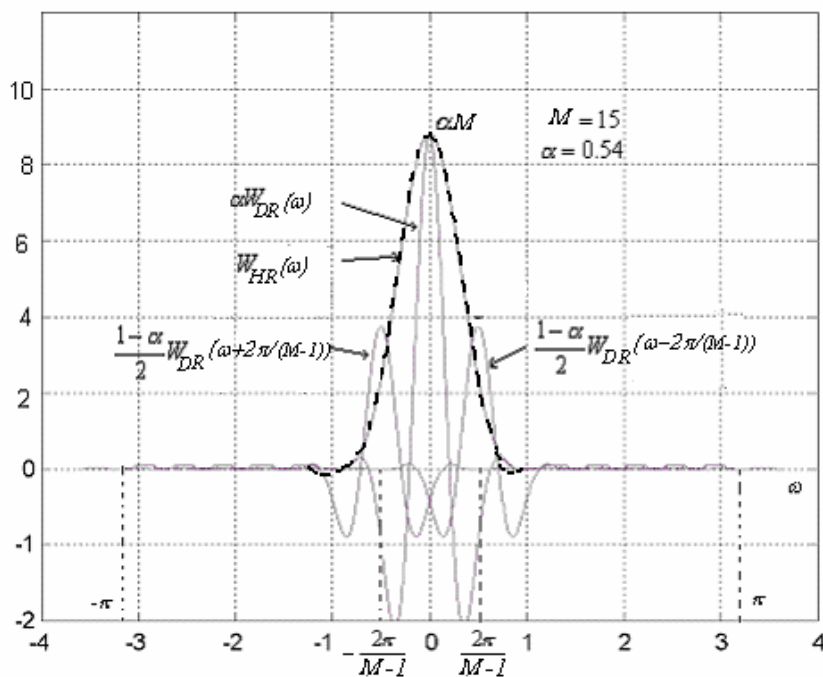


Figura 2.14. Funcția de fază zero a ferestrei Hamming.

### 2.5.1.3. Fereastra Kaiser

În 1974 Kaiser [24] a propus o nouă fereastră, care îi poartă numele, bazată pe aproximările în timp discret ale așa-numitei clase de funcții sferoidale (funcții cu suport finit în timp, dar cu energie minim posibilă localizată în afara unui interval de frecvență selectat).

Fereastra Kaiser este definită ca

$$w_k[n] = \begin{cases} \frac{I_0 \left[ \beta \sqrt{1 - \left( \frac{n-\alpha}{\alpha} \right)^2} \right]}{I_0(\beta)}, & \text{pentru } 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (2.137)$$

unde  $\alpha = \frac{M-1}{2}$  și  $I_0(x)$  este funcția Bessel modificată de ordinul zero, ce poate fi calculată cu ajutorul seriei de puteri

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{\left( \frac{x}{2} \right)^k}{k!} \right]^2 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left( \frac{x}{2} \right)^{2k}}{(k!)^2} \quad (2.138)$$

În proiectările de filtre FIR cu această fereastră sunt disponibili doi parametri  $M$  și  $\beta$ , prin alegerea cărora se poate ajusta banda de tranziție și nivelul lobilor secundari ai spectrului. Obișnuit, parametrul  $\beta$  ia valori în plaja  $[4, 9]$  și pentru  $x \in [0, \beta]$  sunt suficienți circa 20 termeni în suma (2.138) pentru a obține eșantioanele lui  $w_k[n]$  cu destulă acuratețe.

Nu există o expresie compactă pentru transformata Fourier  $W_K(\omega)$ , dar aceasta nu este necesară în proiectarea filtrului.

Pe măsură ce valoarea lui  $\beta$  crește, atenuarea minimă în banda de oprire a filtrului proiectat crește, de asemenea, prețul plătit fiind lărgirea benzii de tranziție. Parametrul flexibil  $\beta$  poate fi ales astfel încât să se realizeze atenuarea minimă dorită în banda de oprire a filtrului, după care lungimea  $M$  poate fi aleasă pentru a satisface lățimea  $\Delta f = \omega / (2\pi)$  a benzii de tranziție. Pentru  $\beta=0$ , se obține fereastra rectangulară.

Kaiser a determinat empiric formule pentru determinarea cu precizie satisfăcătoare a parametrilor  $\beta$  și  $M$  în funcție de atenuarea minimă din banda de oprire și lățimea benzii de tranziție,  $\Delta f = \Delta \omega / 2\pi$ , a FTJ proiectat. Astfel, cunoscând valoarea lui  $A_s = -20 \lg \delta_s$ , în dB, parametrul  $\beta$  este dat de relația [32]

$$\beta = \begin{cases} 0,1102(A_s - 8,7) & \text{pentru } A_s > 50dB \\ 0,5842(A_s - 21)^{0,4} + 0,07886(A_s - 21) & \text{pentru } 21dB < A_s < 50dB \\ 0 & \text{pentru } A_s < 21dB \end{cases} \quad (2.139)$$

Kaiser a găsit [24] următoarea formulă pentru estimarea lungimii  $M$  a ferestrei:

$$M - 1 = \frac{A_s - 8}{14,36\Delta f} \quad (2.140)$$

Dacă răspunsul în frecvență al filtrului astfel obținut nu satisface restricțiile impuse pentru  $A_s$  și  $\Delta f$ , se măresc puțin valorile lui  $\beta$  și  $M$ , verificând din nou răspunsul. În general prin două sau trei încercări, după calculul preliminar al lui  $\beta$  și  $M$ , se ajunge la soluția bună.

În Tabelul 2.2 sunt prezentate performanțele ferestrei Kaiser în funcție de parametrul  $\beta$ .

**Tabelul 2.2.**

Parametrul $\beta$	Lățimea lobului principal [dB]	Atenuarea primului lob secundar [dB]	Performanțele FTJ proiectat	
			Factorul $D=\Delta fM$	Atenuarea minimă [dB]
2	$4\pi/M$	-19	1,5	29
3	$6\pi/M$	-24	2,0	37
4	$8\pi/M$	-30	2,6	45
5	$10\pi/M$	-37	3,2	54
6	$12\pi/M$	-44	3,8	63
7	$14\pi/M$	-51	4,5	72
8	$16\pi/M$	-59	5,1	81
9	$18\pi/M$	-67	5,7	90
10	$20\pi/M$	-74	6,4	99

**Exemplul 2.4.**

Să se determine parametrii  $\beta$  și  $M$  ai ferestrei Kaiser necesari proiectării unui FTJ cu riplul din banda de oprire  $\delta_s = 0,001$ , știind că frecvențele benzilor de trecere și de oprire sunt  $\omega_p = 0,4\pi$ , respectiv  $\omega_s = 0,6\pi$ .

*Soluție.* Se determină mai întâi lățimea zonei de tranziție normalize  $\Delta f$ :

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{0,6\pi - 0,4\pi}{2\pi} = 0,1. \quad A_s = -20 \lg \delta_s = -20 \cdot \lg(0,001) = 60dB$$

Apoi se calculează parametrul  $\beta$  cu relația (2.139) și  $M$  cu (2.140).

$$\beta = 0,1102(60 - 8,7) = 5,653, \quad M = \left\lfloor \frac{60 - 8}{14,36 \cdot 0,1} + 1 \right\rfloor = 37$$

Relația (2.140) mai poate fi scrisă în forma

$$A_s = 8 + 14,36(M-1)\Delta f \cong 8 + 14,36D \quad \text{cu } D = M\Delta f$$

Cum  $D$  depinde de doi factori,  $M$  și  $\Delta f$ , înseamnă că există două situații, una cu lungime mare a filtrului și bandă de tranziție îngustă, respectiv lungime mică și tranziție largă, ce conduc la același factor  $D$ , obținându-se aceeași valoare pentru atenuarea minimă din banda de oprire a filtrului proiectat.

#### 2.5.1.4. Fereastra Bartlett

Fereastra Bartlett este o fereastră triunghiulară definită cu relația [2]

$$w_B[n] = 1 - \frac{2}{M-1} \left| n - \frac{M-1}{2} \right|, \quad 0 \leq n \leq M-1 \quad (2.141)$$

Fereastra triunghiulară poate fi definită și cu alte relații, rezultatele fiind apropiate pentru lungimi mari ale filtrului. Această fereastră are performanțe scăzute în sinteza filtrelor FIR, fiind utilizată mult în domeniul analizei spectrale a semnalelor. Lățimea lobului principal este aceeași ca în cazul ferestrelor Hamming ( $8\pi/M$ ), dar lobi secundari sunt mult mai mari. [28].

#### 2.5.1.5. Fereastra Blackman

Din cele prezentate până acum s-a văzut necesitatea de a realiza ferestre cu tranziții lente în timp, pentru a asigura un nivel scăzut al lobilor secundari, dar și cu o lățime mare a lobului principal. Fereastra *Blackman* se obține tot din familia de ferestre în cosinus ridicat, ca ferestrele Hamming și Hanning prin adăugarea unui termen suplimentar față de fereastra Hamming care conduce la lărgirea și mai mult a lobul principal. O posibilitate de a defini fereastra Blackman este dată de relația

$$w_{BL}[n] = 0,42 - 0,5 \cos\left[\frac{2\pi}{M-1}n\right] + 0,08 \cos\left[\frac{4\pi}{M-1}n\right], 0 \leq n \leq M-1 \quad (2.142)$$

Din analiza spectrului acestei ferestre, obținut într-un mod similar celui prezentat la fereastra Hamming, se observă că lățimea lobului principal este de trei ori mai mare decât în cazul ferestrei dreptunghiulare ( $12\pi/(M-1)$ ), iar amplitudinea lobilor secundari prezintă o atenuare de 58 dB față de cel principal [28].

Alte două tipuri de ferestre folosite în practică sunt *Fereastra Lanczos*, definită ca [48]

$$w_l[n] = \left\{ \frac{\sin\left[2\pi\left(n - \frac{M-1}{2}\right)/(M-1)\right]}{2\pi\left(n - \frac{M-1}{2}\right)/(M-1)} \right\}^L, L > 0$$

*Fereastra Tukey* [48]

$$w[n] = \begin{cases} 1, & \left|n - \frac{M-1}{2}\right| \leq \alpha \frac{M-1}{2}, \quad 0 < \alpha < 1 \\ \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos\left(\frac{n - (1+\alpha)(M-1)/2}{(1-\alpha)(M-1)/2} \pi\right) \right], & \alpha \frac{M-1}{2} \leq \left|n - \frac{M-1}{2}\right| \leq \frac{M-1}{2} \end{cases}$$

În Tabelul 2.3 sunt centralizate funcțiile pondere împreună cu funcțiile de transfer de fază zero corespunzătoare ale ferestrelor prezentate. În tabelul 2.4 sunt redate performanțele ferestrelor exprimate prin lățimea lobului principal și atenuarea relativă în dB a primului lob lateral. De asemenea, sunt prezentate performanțele FTJ cu fază liniară proiectat prin metoda ferestrelor, performanțe exprimate prin lățimea zonei de tranziție sau, echivalent, prin factorul D și atenuarea minimă în zona de oprire.

Tabelul 2.3

Tipuri de ferestre utilizate în proiectarea filtrelor FIR

Nr. crt.	Denumirea ferestrei	Definiția ferestrei cauzale $w[n]$ $0 \leq n \leq M-1$ ; $M$ par sau impar	Funcția de fază zero $W_R(\omega)$
1	Dreptunghiulară	1	$W_{DR}(e^{j\omega}) = \frac{\sin(\frac{\omega M}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}$
2	Triunghiulară (Bartlett)	$1 - \frac{2}{M-1} \left  n - \frac{M-1}{2} \right $	$\frac{1}{M} \frac{\sin^2(\frac{\omega M}{2})}{\sin^2(\frac{\omega}{2})}$ ; $M$ impar
3	Hanning (Hann)	$0,5 - 0,5 \cos \frac{2\pi n}{M-1}$	$0,5W_{DR}(\omega) + 0,25W_{DR}(\omega + \frac{2\pi}{M-1}) + 0,25W_{DR}(\omega - \frac{2\pi}{M-1})$
4	Hamming	$0,54 - 0,46 \cos \frac{2\pi n}{M-1}$	$0,54W_{DR}(\omega) + 0,23W_{DR}(\omega + \frac{2\pi}{M-1}) + 0,23W_{DR}(\omega - \frac{2\pi}{M-1})$
5	Blackman	$0,42 - 0,5 \cos \frac{2\pi n}{M-1} +$ $+ 0,08 \cos \frac{4\pi n}{M-1}$	$0,42W_{dR}(\omega) + 0,25W_{dR}(\omega + \frac{2\pi}{M-1}) + 0,25W_{dR}(\omega - \frac{2\pi}{M-1}) +$ $+ 0,04W_{dR}(\omega + \frac{4\pi}{M-1}) + 0,04W_{dR}(\omega - \frac{4\pi}{M-1})$
6	Kaiser	$\frac{I_0 \left[ \beta \sqrt{1 - \left( \frac{n-\alpha}{\alpha} \right)^2} \right]}{I_0(\beta)}$ , $\alpha = \frac{M-1}{2}$	Nu există formulă compactă

Tabelul 2.4

Proprietățile ferestrelor din Tabelul 2.3

Nr. crt.	Tipul ferestrei	Lățimea lobului principal	Atenuarea primului lob secundar [dB]	Performanțele FTJ cu fază liniară proiectat		
				Lățimea benzii tranziție $\Delta\omega$	Factorul $D = \frac{\Delta\omega}{2\pi} M = \Delta f M$	Atenuarea minimă în zona de oprire [dB]
1	Dreptunghiulară	$\frac{4\pi}{M}$	-13	$\frac{1,84\pi}{M}$	0,92	-21
2	Triunghiulară	$\frac{8\pi}{M-1}$	-25	$\frac{3,68\pi}{M}$	1,84	-25
3	Hanning	$\frac{8\pi}{M-1}$	-31	$\frac{6,22\pi}{M}$	3,11	-44
4	Hamming	$\frac{8\pi}{M-1}$	-41	$\frac{6,64\pi}{M}$	3,32	-54
5	Blackman	$\frac{12\pi}{M-1}$	-58	$\frac{11,2\pi}{M}$	5,6	-74
6	Kaiser cu $\beta=7,865$	$\frac{2\pi\beta}{M} = \frac{15,73\pi}{M}$ (reglabil cu $\beta$ )	-57 (reglabil cu $\beta$ )	$\frac{10,12\pi}{M}$ (reglabil cu $\beta$ )	5,06 (reglabil cu $\beta$ )	-80 (reglabil cu $\beta$ )



Din cele prezentate până acum se desprind următoarele observații:

1. Cu excepția ferestrei Kaiser, pentru care factorul  $D$  este reglabil cu ajutorul parametrului  $\beta$ , pentru celelalte ferestre factorul  $D$  este fix, ceea ce justifică denumirea de ferestre fixe pentru acestea. Din acest motiv la ferestrele fixe există o valoare fixă a atenuării minime în banda de oprire a filtrului proiectat, specifică fiecărei ferestre, în timp ce la fereastra Kaiser se poate obține orice valoare a atenuării minime prin alegerea adecvată a lui  $\beta$ ;
2. Performanțele filtrelor proiectate cu ferestrele dreptunghiulară, Hamming, Blackman pot fi obținute folosind ferestre Kaiser cu  $\beta=0$ ,  $\beta=5,4414$ , respectiv,  $\beta=8,885$ ;
3. În cazul în care FTJ proiectat are benzile de trecere și oprire egale, riplurile  $\delta_p$  și  $\delta_s$  în cele două benzi sunt egale. Când benzile nu sunt egale riplurile diferă puțin și nu pot fi controlate independent. Riplul  $\delta_s$  rezultă cu precizie din  $A_s$  impus la proiectare, în schimb  $\delta_p$  va rezultă automat în funcție de  $\delta_s$  și raportul benzilor de trecere și oprire.

Lipsa posibilității unui control simultan asupra riplurilor din cele două benzi reprezintă o limitare a metodei ferestrelor.

### 2.5.2. Exemple și concluzii la metoda ferestrelor

În figurile 2.15, 2.16, 2.17, 2.18 sunt prezentate funcțiile pondere  $w[n]$  pentru tipurile de ferestre prezentate, precum și caracteristicile de amplitudine în dB ale ferestrelor și filtrelor trece jos (de lungime  $M=51$  cu frecvența de tăiere normată  $\omega_c=\pi/4$ ), proiectate cu ferestrele Hamming, Blackman și Kaiser.

Din aceste reprezentări se pot observa performanțele ferestrelor și filtrelor proiectate:

1. Valorile în dB ale atenuării primului lob secundar al ferestrelor Hamming, Blackman și Kaiser cu  $\beta=10$ , sunt: -43 dB, -58 dB, și -74 dB;
2. Atenuările minime din banda de oprire pentru filtrele proiectate cu aceste ferestre sunt: 54 dB, 74 dB, 100 dB.

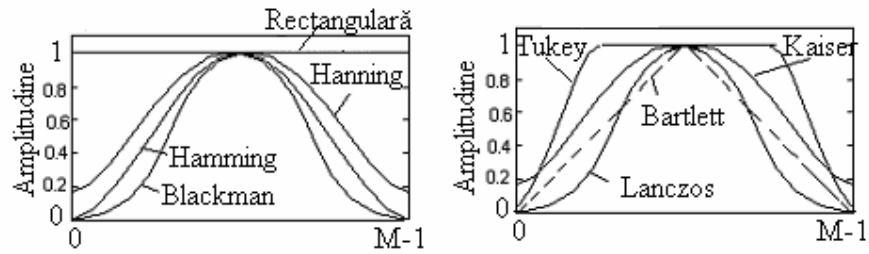


Figura 2.15. Diferite tipuri de ferestre

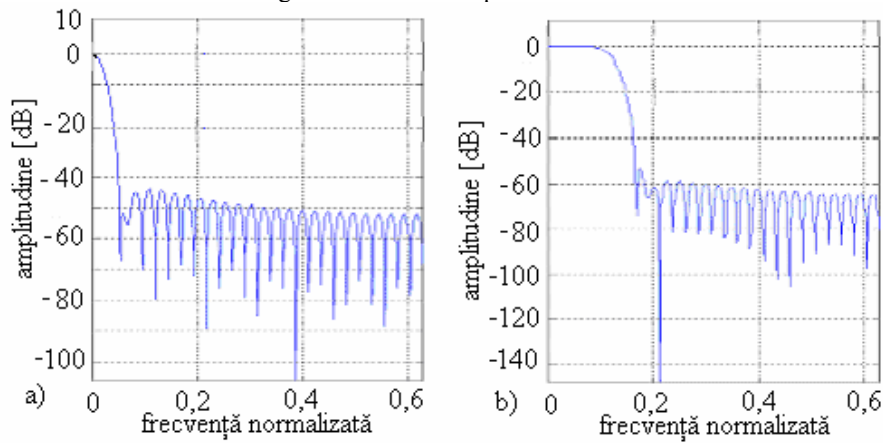


Figura 2.16. Caracteristicile de frecvență în dB ale a) ferestrei Hamming și b) filtrului proiectat cu fereastra Hamming, pentru  $M=51$  și  $f_c=0,125$

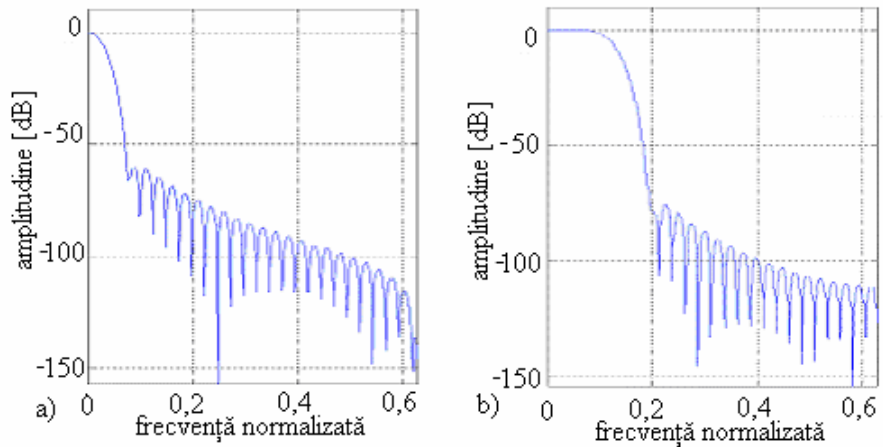


Figura 2.17. Caracteristicile de amplitudine în dB ale a) ferestrei Blackman și b) filtrului proiectat cu fereastra Blackman, pentru  $M=51$  și  $f_c=0,125$

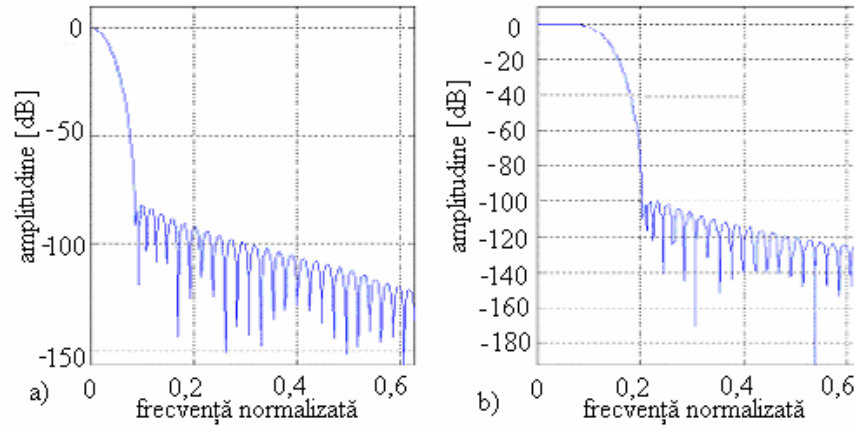


Figura 2.18. Caracteristicile de amplitudine în dB ale a) ferestrei Kaiser și b) filtrului proiectat cu fereastra Kaiser, pentru  $M=51$  și  $f_c=0,125$ ,  $\beta=10$ .

Avantajele metodei ferestrelor sunt date de:

- Simplitate;
- Obținerea de formule compacte pentru calculul coeficienților;
- Nu necesită proceduri de optimizare.

Dezavantajele metodei ferestrelor constau în:

- Necesitatea unei exprimări analitice compacte pentru răspunsul în frecvență impus la proiectare, adică pentru funcția dorită  $H_d(\omega)$ . În lipsa acestei exprimări nu se obține o expresie compactă pentru coeficienții neponderați  $h_d[n]$ , utilizarea ferestrelor devenind dificilă.
- Flexibilitatea relativ mică în proiectare, în sensul imposibilității specificării cu exactitate a frecvențelor limită ale benzilor de trecere și oprire efective  $\omega_p$  și  $\omega_s$ . La proiectare se impune frecvența teoretică de tăiere  $\omega_c$  a lui  $H_d(\omega)$ , dar ponderarea cu o funcție fereastră are ca efect împrăștierea discontinuității în domeniul frecvență, ca efect al convoluției dintre spectrul dorit și cel al ferestrei, efect ce depinde de tipul ferestrei utilizate. Deși în multe aplicații efectul de împrăștiere poate fi compensat prin alegerea lui  $\omega_c$  ca medie aritmetică a lui  $\omega_p$  și  $\omega_s$ , în cazul filtrelor cu tranziție abruptă controlul lui  $\omega_p$  și  $\omega_s$  nu este asigurat cu precizie satisfăcătoare.

## 2.6. Metoda eșantionării în frecvență

În proiectarea filtrelor FIR prin metoda eșantionării în frecvență se specifică răspunsul în frecvență dorit  $H_d(\omega)$  într-un set de  $M$  frecvențe uniform distanțate în intervalul  $[0, 2\pi]$ , fie acestea

$$\omega_k = \frac{2\pi}{M}(k + \alpha), \quad k = 0, 1, \dots, (M-1)/2, \quad M \text{ impar}$$

$$k = 0, 1, \dots, [(M/2) - 1], \quad M \text{ par} \quad (2.143)$$

$$\alpha = 0 \text{ sau } 1/2,$$

și din aceste specificații se calculează răspunsul la impuls al filtrului sintetizat, care să îndeplinească cerințele de proiectare. Suportul teoretic al acestei metode îl constituie Transformata Fourier Discretă.

Impunând identitate între răspunsul filtrului dorit și cel sintetizat la frecvențele specificate, se poate scrie

$$H[k + \alpha] = H\left(\frac{2\pi}{M}(k + \alpha)\right) = H_d(\omega) \Big|_{\omega = (k + \alpha)\frac{2\pi}{M}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{M-1} h[n] e^{-j(k + \alpha)\frac{2\pi n}{M}}; \quad k = \overline{0, M-1} \quad (2.144)$$

Relația (2.144) reprezintă un sistem de  $M$  ecuații cu  $M$  necunoscute,  $\{h[n]\}$ ,  $n = 0, 1, \dots, M-1$ . Pentru a obține soluția în formă compactă a acestui sistem, se înmulțesc ambii membri ai relației (2.144)

cu  $e^{j2\pi k \frac{m}{M}}$  și se sumează după  $k$  de la 0 la  $M-1$ . Coeficienții  $h[n]$  ai filtrului în funcție de termenii  $H[k + \alpha]$  sunt

$$h[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H[k + \alpha] e^{j(k + \alpha)\frac{2\pi n}{M}}; \quad n = \overline{0, M-1} \quad (2.145)$$

Se observă că pentru  $\alpha = 0$ , relația (2.144) reprezintă Transformata Fourier Discretă (DFT) a secvenței  $h[n]$ , iar relația (2.145) se reduce la Transformata Fourier Discretă Inversă (IDFT). Avantajul celui de-al doilea tip de alegere a eșantioanelor în frecvență, care corespunde lui  $\alpha = \frac{1}{2}$  ar putea apărea în situația în care acest set de valori

pentru  $\omega$  ar duce la o precizie mai strânsă a limitelor benzii de trecere și oprire efective, în sensul plasării unor eșantioane cât mai spre marginile acestor benzi.

Funcția de sistem  $H(z)$  a filtrului proiectat este

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{M-1} \left( \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H[k + \alpha] e^{j(k+\alpha)\frac{2\pi}{M}n} \right) z^{-n} \quad (2.146)$$

Interschimbând ordinea de sumare și efectuând sumarea după  $n$ , se obține

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{k=0}^{M-1} H[k + \alpha] \left[ \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \left( e^{j(k+\alpha)\frac{2\pi}{M}n} z^{-n} \right)^n \right] = \\ &= \frac{1 - z^{-M}}{M} e^{j2\pi\alpha} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{H[k + \alpha]}{1 - e^{j(k+\alpha)\frac{2\pi}{M}} z^{-1}} \end{aligned} \quad (2.146')$$

Evaluând funcția de sistem pe cercul de unitate, se obține

$$H(\omega) = e^{-j\omega\frac{M-1}{2}} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{H[k + \alpha] e^{j(\alpha - k + \alpha)\pi}}{M} \frac{\sin \frac{M}{2} \left( \omega - \frac{2\pi\alpha}{M} \right)}{\sin \frac{1}{2} \left( \omega - \frac{2\pi\alpha}{M} - k \frac{2\pi}{M} \right)} \quad (2.147)$$

Cu notația

$$P(\omega, k + \alpha) = \frac{1}{M} \frac{\sin \frac{M}{2} \left( \omega - \frac{2\pi\alpha}{M} - k \frac{2\pi}{M} \right)}{\sin \frac{1}{2} \left( \omega - \frac{2\pi\alpha}{M} - k \frac{2\pi}{M} \right)} = \frac{1}{M} S_a \left( \omega - \frac{2\pi\alpha}{M} - k \frac{2\pi}{M} \right) \quad (2.148)$$

funcția de transfer  $H(\omega)$  se poate exprima în forma

$$H(\omega) = e^{-j\omega\frac{M-1}{2}} \sum_{k=0}^{M-1} H[k + \alpha] e^{j\left(\alpha - \frac{k+\alpha}{M}\right)\pi} (-1)^k P(\omega, k + \alpha) \quad (2.149)$$

Pentru a evidenția cum se obține răspunsul în frecvență al filtrului sintetizat în funcție de eșantioanele prescrise pentru răspunsul dorit, se consideră, de exemplu, că se dorește proiectarea unui filtru FIR de fază liniară de tipul 1 sau 2, caz în care eșantioanele  $H[k + \alpha]$  vor fi de forma

$$H[k + \alpha] = H_R(\omega) e^{-j\omega\frac{M-1}{2}} \Big|_{\omega=(k+\alpha)\frac{2\pi}{M}} = H_R[k + \alpha] e^{-j(k+\alpha)\frac{\pi(M-1)}{M}} \quad (2.150)$$

unde  $H_R[k + \alpha]$  reprezintă eșantioanele  $H_d[k + \alpha]$  ale funcției de transfer de fază zero a modelului ideal,  $H_R[k + \alpha] = H_d[k + \alpha]$ .

În aceste condiții, înlocuind (2.150) în (2.149), rezultă

$$H(\omega) = e^{-j\omega \frac{M-1}{2}} \sum_{k=0}^{M-1} H_d[k + \alpha] P(\omega, k + \alpha) \quad (2.149')$$

de unde se obține funcția de fază zero a filtrului proiectat

$$\begin{aligned} H_R(\omega) &= \sum_{k=0}^{M-1} H_d[k + \alpha] P(\omega, k + \alpha) = \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} H_d[k + \alpha] \frac{1}{M} S_a\left(\omega - \frac{2\pi\alpha}{M} - \frac{2\pi k}{M}\right) \end{aligned} \quad (2.151)$$

Relația (2.151) precizează modul în care se obține răspunsul în frecvență  $H_R(\omega)$  prin interpolarea răspunsului în frecvență eșantionat, și anume: fiecare eșantion  $H_d[k + \alpha]$  ponderează o funcție  $S_a(\omega)$  centrată, în domeniul frecvență, pe eșantionul  $k + \alpha$ . Prin sumarea celor  $M-1$  funcții  $S_a(\omega)$  ponderate, rezultă funcția de transfer de fază zero a filtrului proiectat. așa cum este ilustrat în figura 2.19.

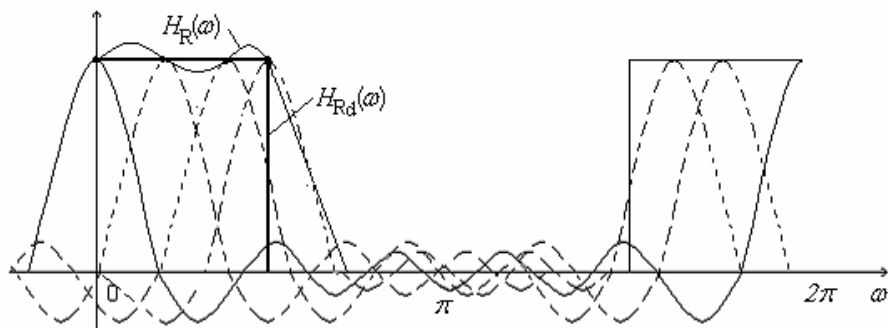


Figura 2.19. Răspunsul de fază zero al filtrului dorit și cel real

La frecvențele considerate se va obține identitate între caracteristica rezultată și cea dorită, adică eroarea de aproximare este zero la  $\omega = (k + \alpha)2\pi / M$ , dar nu există control direct asupra erorilor ce apar la alte frecvențe, rezultând oscilații atât în banda de trecere, cât și în cea de oprire, cum se arată în figura 2.19. Amplitudinea acestor oscilații poate

fi mare, dacă se impune o bandă de tranziție foarte mică (mai mică decât  $2\pi / M$ ). Riplurile pot fi reduse dacă se acceptă o bandă de tranziție mai largă sau se impun valori intermediare între banda de trecere și cea de oprire. O altă soluție este de a lăsa nespecificate valorile unor eșantioane din banda de tranziție, care devin variabile auxiliare ce vor fi utilizate într-o procedură de optimizare pe calculator a soluției, procedură ce urmărește minimizarea erorii dintre caracteristica dorită și cea sintetizată.

Dacă  $h[n]$  este real, eșantioanele caracteristicii de frecvență satisfac condiția de simetrie

$$H[h + \alpha] = H^*[M - k - \alpha] \quad (2.152)$$

care, împreună cu condiția de simetrie pentru  $h[n]$  poate reduce specificațiile de frecvență de la  $M$  la  $(M-1)/2$  puncte pentru  $M$  impar și la  $M/2$  puncte pentru  $M$  par.

Experimental s-a constatat că [31]:

- Un eșantion în zona de tranziție, folosit ca variabilă auxiliară, conduce la o atenuare minimă în banda de oprire de ordinul  $45 \div 55$  dB;
- Două eșantioane în zona de tranziție conduc la o valoare a atenuării minime în intervalul  $65 \div 75$  dB;
- Trei eșantioane în zona de tranziție asigură o atenuare minimă ce ajunge la  $85 \div 95$  dB.

Metoda eșantionării în frecvență este aplicabilă pentru filtre cu orice caracteristică de fază, prin generarea secvenței  $H[k + \alpha]$  și aplicarea transformatei Fourier discrete inverse. Metoda eșantionării în frecvență poate fi combinată cu metoda ferestrelor, ponderarea secvenței  $h[n]$  cu o fereastră  $w[n]$  de tip Hamming, Blackman sau Kaiser reducând foarte mult riplurile în cele două benzi ale filtrului.

## 2.7. Proiectare filtrelor optimale echiriplu FIR de fază liniară

Metoda de proiectare descrisă în acest paragraf este formulată ca o problemă de aproximare Cebîșev. Aproximarea de tip Cebîșev este văzută ca un criteriu de proiectare optim, în sensul că eroarea de aproximare ponderată dintre răspunsul în frecvență dorit și cel obținut este întinsă uniform peste banda de trecere și cea de oprire și apoi se minimizează eroarea maximă.

Filtrele obținute prin folosirea acestui criteriu sunt cunoscute sub denumirea de *filtre optimale*.

În tabelul 2.1 au fost prezentate funcțiile de transfer de fază zero pentru cele 4 tipuri de filtre FIR cu fază liniară. Cu ajutorul identităților trigonometrice, fiecare dintre ele poate fi adusă la forma

$$H_R(\omega) = Q(\omega)P(\omega) \quad (2.153)$$

unde  $P(\omega)$  este o combinație liniară de termeni în  $\cos(n\omega)$ , iar  $Q(\omega)$  o funcție specifică fiecăruia din cele patru tipuri de filtre.

*Pentru filtre FIR de tipul 1 (răspuns la impuls simetric și  $M$  impar)*

$$H_R(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} a[n] \cos(n\omega), \quad a[n] = \begin{cases} h \left[ \frac{M-1}{2} \right], & n = 0 \\ 2h \left[ \frac{M-1}{2} - n \right], & n = 1, 2, \dots, \frac{M-1}{2} \end{cases} \quad (2.154)$$

de unde rezultă direct

$$Q(\omega) = 1; \quad P(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} a[n] \cos(n\omega) \quad (2.155)$$

*Pentru filtre FIR de tipul 2 (răspuns la impuls simetric și  $M$  par)*

$$H_R(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{M}{2}} b[n] \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega, \quad b[n] = 2h \left[ \frac{M}{2} - n \right], \quad n = 1, 2, \dots, \frac{M}{2} \quad (2.156)$$

Considerând  $n=0, \dots, M/2 - 1$  în identitatea

$$\bar{b}[n] \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \cos(n\omega) = \frac{1}{2} \bar{b}[n] \left\{ \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega + \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega \right\} \quad (2.157)$$

și adunând membru cu membru cele  $M/2$  egalități, se obține identitatea

$$\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} \bar{b}[n] \cos(n\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{M}{2}} b[n] \cos\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega\right],$$

cu  $b[1] = \frac{1}{2} \bar{b}[1] + \bar{b}[0]$ ; (2.158)

$$b[n] = \frac{1}{2} (\bar{b}[n] + \bar{b}[n-1]), \quad n = 2, 3, \dots, \frac{M}{2} - 1; \quad b\left[\frac{M}{2}\right] = \frac{1}{2} \bar{b}\left[\frac{M}{2} - 1\right]$$

Cu ajutorul relației (2.158), relația (2.156) poate fi scrisă în forma

$$H_R(\omega) = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} \bar{b}[n] \cos(n\omega) \quad (2.159)$$



Comparând (2.159) cu (2.153) rezultă

$$Q(\omega) = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right); P(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} \bar{b}[n] \cos(n\omega) \quad (2.160)$$

Pentru filtre FIR de tipul 3 (răspuns la impuls antisimetric și  $M$  impar)

$$H_R(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{M-1}{2}} c[n] \sin(n\omega); c_n = 2h \left[ \frac{M-1}{2} - n \right], \quad n = 1, 2, \dots, \frac{M-1}{2} \quad (2.161)$$

Dând lui  $n$  valorile  $n=0, \dots, (M-3)/2$  în identitatea trigonometrică

$$\bar{c}[n] \sin \omega \cos(n\omega) = \frac{1}{2} \bar{c}[n] \{ \sin(n+1)\omega - \sin(n-1)\omega \} \quad (2.162)$$

și adunând membru cu membru cele  $(M-1)/2$  egalități, se obține identitatea

$$\sin \omega \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} \bar{c}[n] \cos(n\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{M-1}{2}} c[n] \sin \omega n \quad \text{cu} \quad c[1] = \bar{c}[0] - \frac{1}{2} \bar{c}[2];$$

$$c[n] = \frac{1}{2} (\bar{c}[n-1] - \bar{c}[n+1]), \quad n = 2, 3, \dots, \frac{M-5}{2}; \quad (2.163)$$

$$c\left[\frac{M-3}{2}\right] = \frac{1}{2} \bar{c}\left[\frac{M-5}{2}\right]; c\left[\frac{M-1}{2}\right] = \frac{1}{2} \bar{c}\left[\frac{M-3}{2}\right]$$

Cu ajutorul relației (2.163), relația (2.161) poate fi scrisă în forma

$$H_R(\omega) = \sin \omega \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} \bar{c}[n] \cos(n\omega) \quad (2.164)$$

Comparând (2.164) cu (2.153) rezultă

$$Q(\omega) = \sin \omega; P(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} \bar{c}[n] \cos(n\omega) \quad (2.165)$$

Pentru filtre FIR de tipul 4 (răspuns la impuls antisimetric și  $M$  par)

$$H_R(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{M}{2}} d[n] \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega, \quad d[n] = 2h \left[ \frac{M}{2} - n \right], \quad n = 1, 2, \dots, \frac{M}{2} \quad (2.166)$$

Dând lui  $n$  valorile  $n=0, \dots, M/2 - 1$  în identitatea trigonometrică

$$\bar{d}[n] \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \cos(n\omega) = \frac{1}{2} \bar{d}[n] \left\{ \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega - \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega \right\} \quad (2.167)$$

și adunând membru cu membru cele  $M/2$  egalități, se obține identitatea

$$\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} \bar{d}[n] \cos(n\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{M}{2}} d[n] \cos\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

cu  $d[1] = \bar{d}[0] - \frac{1}{2}\bar{d}[1]$ ;  $d[n] = \frac{1}{2}(\bar{d}[n-1] - \bar{d}[n])$ ,  $n = 2, 3, \dots, \frac{M}{2} - 1$ ; (2.168)

$$d\left[\frac{M}{2}\right] = \frac{1}{2}\bar{d}\left[\frac{M}{2} - 1\right]$$

Cu ajutorul relației (2.168), relația (2.166) poate fi scrisă în forma

$$H_R(\omega) = \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} \bar{d}[n] \cos(n\omega) \quad (2.169)$$

Comparând (2.169) cu (2.153) rezultă

$$Q(\omega) = \sin\left(\frac{\omega}{2}\right); \quad P(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} \bar{d}[n] \cos(n\omega) \quad (2.170)$$

Funcțiile  $Q(\omega)$  și  $P(\omega)$  pentru cele patru tipuri de filtre FIR cu fază liniară

$$\text{sunt } Q(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{pentru tipul 1} \\ \cos \frac{\omega}{2}, & \text{pentru tipul 2} \\ \sin \omega, & \text{pentru tipul 3} \\ \sin \frac{\omega}{2}, & \text{pentru tipul 4} \end{cases}; \quad P(\omega) = \sum_{n=0}^L \alpha_n \cos(n\omega) \quad (2.171)$$

cu  $\alpha_n = a[n], b[n], c[n], d[n]$ , pentru filtrele de tipul 1, 2, 3 și, respectiv, 4.

Parametrii  $\alpha_n$  ai filtrului sunt dependenți de răspunsul la impuls al acestuia. Limita superioară a sumei,  $L$ , este  $L=(M-1)/2$  pentru tipul 1,  $L=(M-3)/2$  pentru tipul 3 și  $L=(M/2)-1$  pentru tipurile 2 și 4. Exprimarea funcției  $H_R(\omega)$  în forma (2.153) permite tratarea unitară a celor 4 tipuri de filtre FIR cu fază liniară.

În plus față de specificațiile făcute asupra funcției de fază zero a filtrului proiectat, se definește funcția de fază zero,  $H_{dR}(\omega)$ , a răspunsului dorit și funcția de ponderare a erorii de aproximare,  $W(\omega)$ . Răspunsul dorit în frecvență,  $H_{dR}(\omega)$ , cu valori reale, este considerat egal cu unitatea în banda de trecere și zero în banda de oprire.

Funcția de ponderare a erorii,  $W(\omega)$ , permite impunerea unor valori diferite ale erorii în diferite benzi de frecvență (de exemplu, în benzile de trecere și oprire ale filtrului).

În particular, este convenabil a normaliza  $W(\omega)$  la unitate în banda de oprire și a impune  $W(\omega) = \frac{\delta_s}{\delta_p}$  în banda de trecere, adică

$$W(\omega) = \begin{cases} K = \frac{\delta_s}{\delta_p}, & \omega \text{ în banda de trecere} \\ 1, & \omega \text{ în banda de oprire} \end{cases} \quad (2.172)$$

Astfel, cu relația (2.153) și considerând eroarea  $E(\omega)$

$$E(\omega) = H_{dR}(\omega) - H_R(\omega), \quad (2.173)$$

eroarea ponderată  $E_p(\omega)$  va fi

$$E_p(\omega) = W(\omega)E(\omega) = W(\omega)Q(\omega) \left[ \frac{H_{dR}(\omega)}{Q(\omega)} - P(\omega) \right] \quad (2.174)$$

Notând

$$\hat{W}(\omega) = W(\omega)Q(\omega) \text{ și } \hat{H}_{dR}(\omega) = \frac{H_{dR}(\omega)}{Q(\omega)} \quad (2.175)$$

eroarea ponderată devine

$$E_p(\omega) = \hat{W}(\omega)[\hat{H}_{dR}(\omega) - P(\omega)] \quad (2.176)$$

Pentru un filtru FIR cu fază liniară de tipul 1, pentru care  $Q(\omega)=1$ , semnificația termenilor introduși este

$$\hat{H}_{dR}(\omega) = H_{dR}(\omega); \quad P(\omega) = H_R(\omega); \quad \hat{W}(\omega) = W(\omega) \quad (2.177)$$

În cazul aproximării *in sens Cebîșev* a caracteristicii ideale  $H_d(\omega)$ , funcția de transfer de fază zero a filtrului proiectat,  $H_R(\omega)$ , trebuie să oscileze ca în figura 2.20, astfel încât minimele și maximele să fie la egală distanță de caracteristica ideală.

Eroarea neponderată  $E(\omega)$  satisface condițiile

$$\begin{aligned} E(\omega) &\in [-\delta_p, \delta_p] \text{ pentru } \omega \in \text{B.T.} \\ E(\omega) &\in [-\delta_s, \delta_s] \text{ pentru } \omega \in \text{B.O.} \end{aligned} \quad (2.178)$$

Eroarea ponderată  $E_p(\omega)$  va avea extremele în banda de trecere

$$E_{p,ex}(\omega) = \frac{\delta_s}{\delta_p} (\pm \delta_p) = \pm \delta_s \quad (2.179)$$

În felul acesta, extremele lui  $E_p(\omega)$  au aceeași valoare în B.T. și în B.O., proiectarea devenind mai comodă, întrucât un singur parametru,  $\delta_s$ , controlează eroarea în cele două benzi.

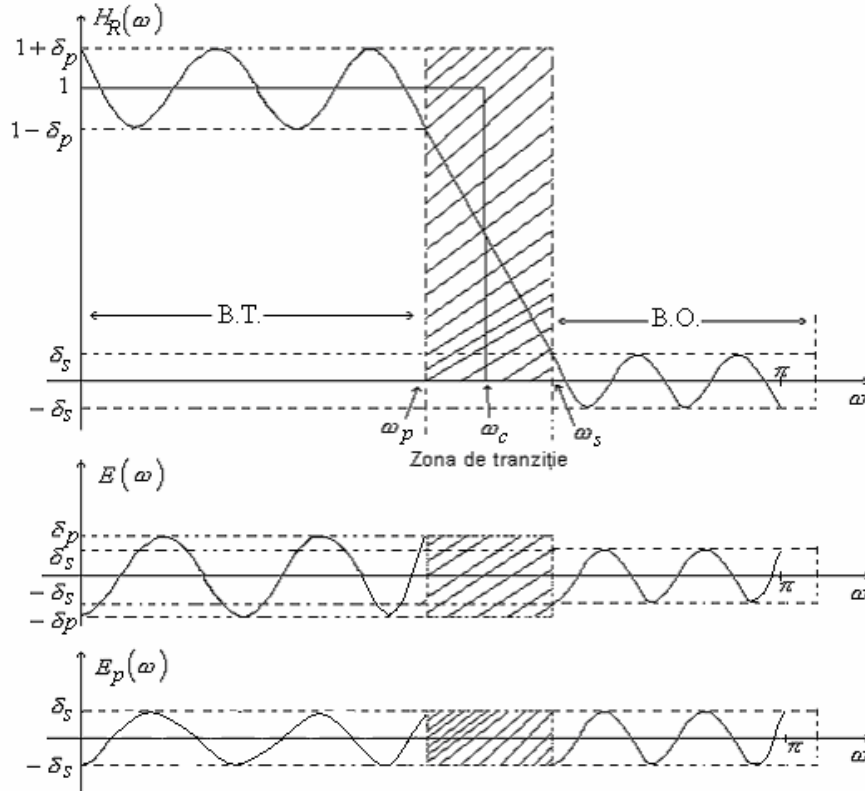


Figura 2.20 Funcția de transfer de fază zero și funcțiile eroare și eroare ponderată de tip Cebîșev.

*Observație.* Funcțiile eroare și eroare ponderată prezintă valori extreme și la frecvențele limită ale celor două benzi ( $\omega_p$ , respectiv  $\omega_s$ ), ce nu sunt puncte de extrem pentru  $H_R(\omega)$ .

Conform relației (2.176), problema aproximării în sens Cebîșev a caracteristicii dorite  $H_d(\omega)$  poate fi formulată ca problema găsirii coeficienților polinomului  $P(\omega)$ , astfel încât să se realizeze *minimizarea maximelor modulului erorii ponderate*  $E_p(\omega)$  în benzile de trecere și oprire efective, adică

$$|E_p(\omega)| = \min_{(coef \ \alpha_n)} \{ \max_{\omega \in S} |E_p(\omega)| \}; \quad (2.180)$$

unde  $S$  reprezintă reuniunea benzilor de frecvență peste care se face optimizarea. Soluția acestei probleme aparține lui Parks și McClellan care aplică teorema alternanței, teoremă ce va fi enunțată, fără a fi, însă, și demonstrată [39].

**Teorema alternanței** afirmă următoarele:

Dacă  $P(\omega)$  este o combinație liniară de  $L+1$  funcții cosinusoidale

$$P(\omega) = \sum_{n=0}^L \alpha_n \cos(n\omega) \quad (2.181)$$

atunci condiția necesară și suficientă ca  $P(\omega)$  să realizeze cea mai bună aproximare în sens Cebîșev a unei funcții continue  $\hat{H}_{dR}(\omega)$  într-un domeniu compact  $S$  aparținând intervalului  $[0, \pi)$ , este ca funcția eroare ponderată  $E_p(\omega)$  să prezinte cel puțin  $L+2$  frecvențe de extrem în  $S$ .

Aceasta înseamnă că trebuie să existe  $L+2$  frecvențe  $\omega_i$  distincte

$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_{L+1} < \omega_{L+2}$ , astfel încât

$$\begin{cases} E_p(\omega_i) = -E_p(\omega_{i+1}) & \text{cu } i = \overline{1, L+2} \\ |E_p(\omega_i)| = \max_{\omega \in S} \{E_p(\omega)\} \end{cases} \quad (2.182)$$

Relația (2.182) conține  $L+2$  ecuații ce permit, cel puțin teoretic, găsirea celor  $L+1$  coeficienți  $\alpha_n$  ai polinomului  $P(\omega)$  și, de asemenea, valoarea maximă a modulului erorii ponderate.

Este important a cunoaște *numărul maxim* de puncte de extrem ale funcției de transfer de fază zero  $H_R(\omega)$  pentru un filtru FIR cu fază liniară, deoarece extremele lui  $H_R(\omega)$  sunt, de asemenea, puncte de extrem și pentru eroarea  $E_p(\omega)$ . Adăugând la acest număr acele puncte de extrem ale erorii ponderate  $E_p(\omega)$ , ce nu sunt extreme pentru  $H_R(\omega)$ , se poate determina numărul maxim de extreme ale erorii  $E_p(\omega)$ .

În continuare se va ilustra procedura de determinare a numărului maxim de extreme pentru filtrul de tipul 1, pentru care

$$H_R(\omega) = \sum_{n=0}^L \alpha_n \cos(n\omega) \quad (2.183)$$

conținând  $L+1 = (M+1)/2$  funcții cosinusoidale  $\{\cos(n\omega)\}$ .

Funcția  $H_R(\omega)$  poate fi transformată într-o funcție polinomială în  $\cos\omega$  de forma

$$\cos(n\omega) = \sum_{k=0}^n \beta_{kn} (\cos\omega)^k \quad (2.184)$$

Introducând (2.184) în (2.183), rezultă

$$H_R(\omega) = \sum_{n=0}^L \alpha_n \sum_{k=0}^n \beta_{kn} (\cos \omega)^k = \sum_{n=0}^L \alpha'_n (\cos \omega)^n \quad (2.185)$$

Numărul de puncte de extrem pentru  $H_R(\omega)$  se obține din egalarea cu zero a primei sale derivate. Aceasta este

$$\frac{dH_R(\omega)}{d\omega} = -\sum_{n=1}^L (n\alpha'_n) (\cos \omega)^{n-1} \sin \omega = -\sum_{m=0}^{L-1} (m+1)\alpha'_{m+1} (\cos \omega)^m \sin \omega \quad (2.186)$$

unde s-a efectuat schimbarea de variabilă  $n-1=m$ .

Notând  $d_m = -(m+1)\alpha'_{m+1}$  și revenind apoi la indicele  $n$ , derivata devine

$$\frac{dH_R(\omega)}{d\omega} = (\sin \omega) \sum_{n=0}^{L-1} d_n (\cos \omega)^n \quad (2.187)$$

Efectuând în (2.187) schimbarea de variabilă

$$x = \cos \omega \quad (2.188)$$

derivata se poate scrie sub forma

$$\frac{dH_R(\omega)}{d\omega} = F(x) = F_1(x)F_2(x) \quad (2.189)$$

unde

$$F_1(x) = \sqrt{1-x^2}; \quad F_2(x) = \sum_{n=0}^{L-1} d_n x^n \quad (2.190)$$

Derivata se anulează în punctele în care se anulează funcțiile  $F_1(x)$  și  $F_2(x)$ . Funcția  $F_1(x)$  se anulează în punctele  $x=1$  și  $x=-1$  care sunt corespondentele punctelor  $\omega=0$  și  $\omega=\pi$  prin transformarea (2.188). Funcția  $F_2(x)$ , fiind o funcție polinomială de gradul  $L-1$ , poate avea cel mult  $L-1$  zerouri reale în intervalul  $x \in (-1, 1)$ . Aceasta înseamnă că  $H_R(\omega)$  poate avea cel mult  $L+1$  puncte de extrem în intervalul închis  $\omega \in [0, \pi]$ . Pentru filtrul FIR cu fază liniară de tipul 1, numărul de extreme ale funcției  $H_R(\omega)$  în intervalul  $\omega \in [0, \pi]$ , notat cu  $N_e$  trebuie să satisfacă relația

$$N_e \leq L+1 = \frac{M-1}{2} + 1 = \frac{M+1}{2} \quad (2.191)$$

Raționând în mod similar pentru filtrele de tipul 2, 3 și 4, rezultă

$$\begin{aligned}
N_e &\leq \frac{M}{2} \quad \text{pentru filtrele de tipul 2 și 4} \\
N_e &\leq \frac{M-1}{2} \quad \text{pentru filtrele de tipul 3}
\end{aligned}
\tag{2.192}$$

Din figura 2.20, se poate constata că dacă aproximarea Cebîșev este realizată într-o reuniune de benzi din intervalul închis  $\omega \in [0, \pi]$ , atunci funcția eroare poate avea câte un extrem la fiecare margine de bandă, care însă nu este extrem pentru  $H_R(\omega)$ . Există o excepție de la această regulă în situația în care marginile benzilor sunt în  $\omega=0$  sau în  $\omega=\pi$ , unde  $H_R(\omega)$  are de obicei extrem. Astfel, se poate afirma că funcția eroare pentru un filtru trece jos cu răspuns finit la impuls de tipul 1, cu benzile de interes  $[0, \omega_p]$  și  $[\omega_s, \pi]$  va avea maximum  $(M+1)/2 + 2 = (M+5)/2 = L+3$  extreme, în timp ce pentru un filtru trece bandă, tot de tipul 1, cu domeniul de aproximare  $S=[0, \omega_{s1}] \cup [\omega_{p1}, \omega_{p2}] \cup [\omega_{s2}, \pi]$ , funcția eroare va avea  $(M+1)/2 + 4 = (M+9)/2 = L+5$  extreme. Filtrele în a căror proiectare intervin mai mult de  $L+2$  alternări se numesc filtre *extra riplu*, iar când în proiectare se consideră numărul maxim de alternanțe, filtrul se numește *filtru cu riplu maximal*.

Cunoașterea numărului maxim de puncte de extrem ale funcției eroare este importantă, deoarece procedurile de proiectare a filtrelor optimale diferă în funcție de numărul de extreme pe care îl realizează, număr ce trebuie să fie cel puțin egal cu cel solicitat de teorema alternanței,  $L+2$ , și cel mult egal cu numărul maxim posibil. În cazul filtrului trece bandă de tipul 1, cu benzile menționate mai sus, numărul de puncte de extrem poate fi  $L+2$ ,  $L+3$ ,  $L+4$  sau  $L+5$ ,  $L+1$  fiind numărul de coeficienți ai lui  $P(\omega)$ .

Există mai multe proceduri de proiectare a filtrelor optimale, dintre care cea mai folosită este *metoda de schimb Remez*, ce va fi prezentată în continuare.

*Teorema alternanței* reprezintă suportul teoretic al acestei metode și garantează unicitatea soluției problemei de aproximare Cebîșev.

Se alege un set inițial de frecvențe presupuse a fi cele  $L+2$  frecvențe de extrem ale funcției eroare ponderată  $E_p(\omega)$ . În funcție de filtrul proiectat, unele din aceste frecvențe au o localizare bine precizată. De pildă, în cazul unui filtru trece jos de tipul 1, din setul inițial vor face parte frecvențele:  $0, \omega_p, \omega_s, \pi$  (ca figura 2.20). La frecvențele setului inițial eroarea ponderată, dată de relația (2.176), este forțată să aibă valoarea maximă  $\delta = \delta_s$ , semnul alternând conform relației

$$\hat{W}(\omega_k)[\hat{H}_{dR}(\omega_k) - P(\omega_k)] = (-1)^k \delta \quad \text{pentru } k = \overline{0, L+1} \quad (2.193)$$

Aceste  $L+2$  ecuații cu  $L+2$  necunoscute ( $\alpha_n$ , cu  $n=0, \dots, L$  și  $\delta$ ) pot fi exprimate în forma

$$P(\omega_k) + (-1)^k \frac{\delta}{\hat{W}(\omega_k)} = \hat{H}_{dR}(\omega_k) \quad \text{cu } k = \overline{0, L+1} \quad (2.194)$$

sau, echivalent

$$\sum_{n=0}^L \alpha_n \cos(n\omega_k) + (-1)^k \frac{\delta}{\hat{W}(\omega_k)} = \hat{H}_{dR}(\omega_k) \quad \text{cu } k = \overline{0, L+1} \quad (2.195)$$

În formă matriceală sistemul liniar (2.195) se scrie

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega_0) & \dots & \cos(L\omega_0) & \frac{1}{\hat{W}(\omega_0)} \\ 1 & \cos(\omega_1) & \dots & \cos(L\omega_1) & \frac{(-1)}{\hat{W}(\omega_1)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 1 & \cos(\omega_L) & \dots & \cos(L\omega_L) & \frac{(-1)^L}{\hat{W}(\omega_L)} \\ 1 & \cos(\omega_{L+1}) & \dots & \cos(L\omega_{L+1}) & \frac{(-1)^{L+1}}{\hat{W}(\omega_{L+1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_L \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{H}_{dR}(\omega_0) \\ \hat{H}_{dR}(\omega_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{H}_{dR}(\omega_L) \\ \hat{H}_{dR}(\omega_{L+1}) \end{bmatrix} \quad (2.196)$$

Inițial, nu se cunosc nici frecvențele de extrem  $\omega_k$ , nici parametrii  $\alpha_n$  și  $\delta$ . Aflarea acestora cu ajutorul algoritmului Remez începe prin a presupune un set de frecvențe de extrem  $\omega_k$ . Determinarea coeficienților  $\alpha_n$  prin rezolvarea sistemului (2.196) ar fi utilă dacă, într-adevăr, toate frecvențele  $\omega_k$  presupuse ar fi frecvențe de extrem ale erorii, ceea ce, evident, nu este adevărat. Din acest motiv se determină din sistem doar parametrul  $\delta$  rezultat din forțarea funcției  $H_R(\omega)$  de a trece prin cele  $L+2$  puncte de coordonate precizate. Din sistem rezultă  $\delta$  cu regula lui Cramer

$$\delta = \frac{\Delta \delta}{\Delta} = \frac{\sum_{k=0}^{L+1} \gamma_k \hat{H}_{dR}(\omega_k)}{\sum_{k=0}^{L+1} \gamma_k \frac{(-1)^k}{\hat{W}(\omega_k)}}, \quad (2.197)$$



$\gamma_k$  fiind minorii cu tot cu semn ai determinantului principal  $\Delta$ , dezvoltat după ultima coloană.

Notând cu  $\Delta_1$  determinantul primei matrice din membrul stâng al relației (2.196), la care ultima coloană a fost înlocuită prin coloana

$[\cos((L+1)\omega_0), \cos((L+1)\omega_1), \dots, \cos((L+1)\omega_{L+1})]^T$  și ținând cont de faptul că minorii  $\gamma_k$  și  $\Delta_1$  pot fi aduși la o formă Vandermonde, se poate scrie [28]

$$\frac{\gamma_k}{\Delta_1} = C \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{L+1} \frac{1}{(\cos \omega_k - \cos \omega_i)} \quad (2.198)$$

unde  $C$  este o constantă. Împărțind prin  $C\Delta_1$  numărătorul și numitorul fracției (2.197) și folosind notația

$$a_k = \frac{\gamma_k}{C\Delta_1} = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{L+1} \frac{1}{(\cos \omega_k - \cos \omega_i)} \quad (2.199)$$

parametrul  $\delta$  devine

$$\delta = \frac{\sum_{k=0}^{L+1} a_k \hat{H}_{dR}(\omega_k)}{\sum_{k=0}^{L+1} a_k \frac{(-1)^k}{\hat{W}(\omega_k)}} \quad (2.200)$$

După calcularea lui  $\delta$  ar trebui evaluate valorile lui  $P(\omega)$  și, deci,  $E_p(\omega)$  pe tot domeniul de aproximare  $S$  pentru a verifica dacă setul de frecvențe  $\omega_k$  ales inițial reprezintă punctele de extrem ale erorii  $E_p(\omega)$ . Evaluarea lui  $P(\omega)$  ar necesita calculul coeficienților  $\alpha_n$  din (2.196), operație dificilă și, în același timp, inutilă deoarece este puțin probabil ca prima alegere a celor  $L+2$  frecvențe  $\omega_k$  să fie cea mai bună. Evaluarea rapidă a lui  $P(\omega)$  se poate face pe o altă cale, știind că  $P(\omega)|_{\cos \omega = x}$  este un polinom de ordinul  $L$  în  $x$ , unic determinat de restricția de a trece prin  $L+1$  puncte de coordonate precizate. Expresia analitică a acestuia poate fi determinată cu ajutorul metodei de interpolare Lagrange.

Polinomul  $P(x) = \sum_{n=0}^L \alpha'_n x^n$  este unic determinat de condiția ca funcția polinomială să treacă prin  $L+1$  puncte de coordonate  $(x_k, P(x_k))$  cu  $k=0, \dots, L$ . Expresia analitică a lui  $P(x)$  ce satisface această restricție este [48]

$$P(x) = \frac{\sum_{k=0}^L \frac{P(x_k) \beta_k}{x - x_k}}{\sum_{k=0}^L \frac{\beta_k}{x - x_k}} \quad \text{cu} \quad \beta_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^L \frac{1}{x_k - x_i} \quad (2.201)$$

Relația (2.201) este valabilă în cazul de față cu particularizările  
 $x = \cos \omega$ ;  $x_k = \cos \omega_k$

$$P(\omega_k) = \hat{H}_{dR}(\omega_k) - (-1)^k \frac{\delta}{\hat{W}(\omega_k)} \quad \text{cu} \quad k = \overline{0, L} \quad (2.202)$$

Expresia (2.201) este cunoscută sub denumirea de *formula de interpolare a lui Lagrange în formă baricentrică*. După evaluarea lui  $\delta$ , pentru determinarea unică a lui  $P(\omega)$  sunt necesare numai  $L+1$  puncte, în loc de  $L+2$  puncte.

Evident, din condițiile (2.194),  $P(\omega)$  trece și prin al  $(L+2)$ -lea punct, neluat în considerare în forma baricentrică (2.201). Evaluarea lui  $E_p(\omega)$  dat de (2.176), pe domeniul  $S$ , se realizează utilizând pentru  $P(\omega)$  forma baricentrică (2.201), precum și un set dens de frecvențe  $\omega_s \in S$ . Ca regulă generală, se apreciază că se realizează o bună evaluare a lui  $E_p(\omega)$  dacă setul de frecvențe  $\omega_s \in S$  conține  $8M$  frecvențe, adică de 16 ori gradul lui  $P(x)$ .

După această evaluare se constată că nu toate frecvențele  $\omega_k$  ale setului inițial sunt extreme pentru  $E_p(\omega)$ , în sensul că valorile maxime absolute ale lui  $E_p(\omega)$  sunt mai mari decât  $\delta$ , exceptând frecvențele  $\omega=0$ ,  $\omega=\pi$ ,  $\omega=\omega_p$  și  $\omega=\omega_s$ , așa cum se observă în figura 2.21.

În această situație se localizează noile puncte de extrem ale lui  $E_p(\omega)$ , notate  $\omega_k^{(2)}$  pe figură (cele ale setului inițial au fost notate  $\omega_k^{(1)}$ ). Pentru acest nou set de frecvențe de extrem se repetă etapele parcurse, determinând  $\delta^{(2)}$  și noile valori  $E_p^{(2)}(\omega_s)$  etc.

Procedura este repetată până când punctele  $\omega_k^{(i)}$  devin cu adevărat extremele lui  $E_p(\omega)$ , ceea ce se traduce printr-o modificare nesemnificativă a poziției frecvențelor de extrem în noul ciclu, adică

$$\left| \omega_k^{(i+1)} - \omega_k^{(i)} \right| \leq \varepsilon \quad \text{pentru} \quad k = \overline{0, L+1} \quad (2.203)$$

unde  $\varepsilon$  este o abatere foarte mică impusă la proiectare.

În eventualitatea că  $E_p(\omega)$  are după una din iterații mai mult de  $L+2$  puncte de extrem, atunci se rețin după iterația următoare acele  $L+2$  frecvențe la care  $E_p(\omega)$  are cele mai mari valori (în valoare absolută).

Astfel, în cazul proiectării unui FTJ de tipul 1, numărul maxim de extreme ale funcției  $E_p(\omega)$  fiind  $L+3$ , al  $(L+3)$ -lea extrem, cu valoarea cea mai mică va fi eliminat.

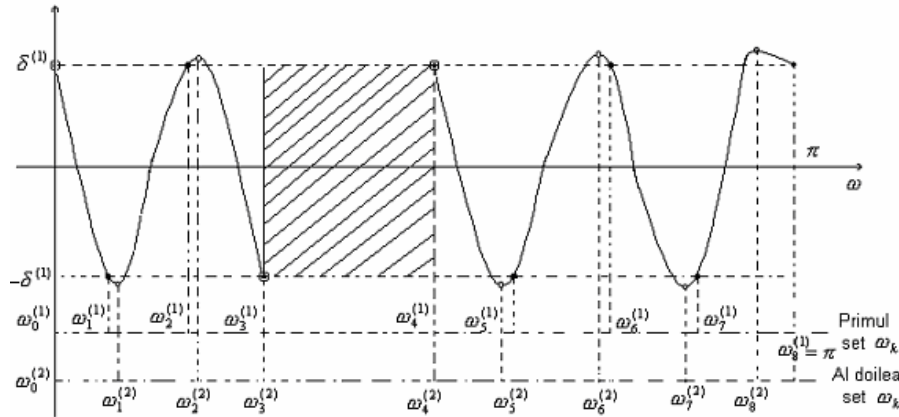


Figura 2.21 Funcția eroare ponderată, forțată să ia valorile  $\pm \delta^{(1)}$  la frecvențele  $\omega_k^{(1)}$  cu  $k=0, \dots, L+1=8$

În general, sunt necesare 4 până la 8 iterații, pentru a obține soluția optimă în cazul proiectării unui FTJ. În proiectările de filtre cu mai multe benzi de trecere și oprire, numărul de iterații este mai mare, fiind necesare de două până la trei ori mai multe iterații față de proiectarea unui FTJ.

Cu relațiile (2.153) și (2.48) se calculează eșantioanele  $H[k]$ , după care, aplicând transformarea Fourier inversă discretă, se găsește secvența

$$h[n] = \mathbf{F}^{-1}\{H[k]\} \quad (2.204)$$

Algoritmul iterativ Remez parcurge următoarele etape:

1. Se alege un set inițial de  $L+2$  puncte de extrem  $\omega^{(1)} = \{\omega_0^{(1)}, \omega_1^{(1)}, \dots, \omega_{L+1}^{(1)}\}$  aparținând domeniului de aproximare  $S$ .
2. Se determină valoarea  $\delta^{(1)}$  prin rezolvarea sistemului liniar (2.193) ce forțează eroarea ponderată să ia în cele  $L+2$  puncte această valoare, cu semnul alternând de la un punct de extrem la altul.
3. Se evaluează  $P(\omega_k)$  la frecvențele alese și apoi se calculează  $P(\omega)$  prin interpolare Lagrange, după care se evaluează eroarea ponderată  $E_p^{(1)}(\omega)$ , reținând pentru noul ciclu de iterație cele  $L+2$  frecvențe de extrem unde eroarea înregistrează cele mai mari extreme în valoare absolută, cu condiția ca semnul erorii să alterneze în punctele selectate.

4. Dacă  $|\omega_k^{(i+1)} - \omega_k^{(i)}| \leq \varepsilon$  pentru orice  $k=0, 1, \dots, L+1$  ( $\varepsilon$  fiind o abatere foarte mică impusă la proiectare), atunci procesul iterativ este oprit, trecând la etapa a 5-a. În caz contrar, se alege noul set de frecvențe de extrem  $\omega^{(i+1)}$  și se reiau etapele 2 și 3.
5. Se calculează coeficienții  $h[n]$  ai filtrului.

Prin alegerea setului de frecvențe la iterația  $(i+1)$  ca fiind frecvențele în care se obțin valorile de extrem ale erorii rezultante la iterația  $(i)$ , eroarea  $\delta^{(i+1)}$  va crește față de  $\delta^{(i)}$ , iar în final va converge către limita sa superioară ce corespunde soluției aproximării de tip minimax.

### 2.7.1. Relații pentru estimarea lungimii filtrului

În practică numărul de coeficienți ai filtrului este necunoscut. În general, nu pot fi stabilite relații analitice între lungimea filtrului proiectat,  $M$ , și datele impuse la proiectare referitoare la frecvențele limită  $\omega_p$  și  $\omega_s$  precum și la riplurile permise în cele două benzi:  $\delta_p$ , respectiv  $\delta_s$ . Totuși, pe baza rulării a numeroase exemple, au fost stabilite câteva formule empirice pentru stabilirea ordinului filtrului optimal în funcție de performanțele dorite.

#### Estimarea lungimii unui FTJ (Hermann [17])

$$M = \frac{D_\infty(\delta_p, \delta_s)}{\Delta f} - f(\delta_p, \delta_s)\Delta f + 1 \quad (2.205)$$

unde  $\Delta f$  este lățimea benzii de tranziție, normalizată cu frecvența de eșantionare.

$$D_\infty(\delta_p, \delta_s) = \log_{10} \delta_s [a_1 (\log_{10} \delta_p)^2 + a_2 \log_{10} \delta_p + a_3] + \\ + [a_4 (\log_{10} \delta_p)^2 + a_5 \log_{10} \delta_p + a_6]$$

$$f(\delta_p, \delta_s) = 11,01217 + 0,51244[\log_{10} \delta_p - \log_{10} \delta_s]$$

$$a_1 = 5,309 \cdot 10^{-3}; a_2 = 7,114 \cdot 10^{-2}; a_3 = -4,761 \cdot 10^{-1};$$

$$a_4 = -2,66 \cdot 10^{-1}; a_5 = -5,941 \cdot 10^{-1}; a_6 = -4,278 \cdot 10^{-1}$$

$\delta_p$  este riplul sau deviația în banda de trecere și  $\delta_s$  este riplul sau deviația în banda de oprire.

#### Estimarea lungimii unui FTB (Mintzer și Liu [43])

$$M = \frac{C_\infty(\delta_p, \delta_s)}{\Delta f} + g(\delta_p, \delta_s)\Delta f + 1 \quad (2.206)$$

unde

$$C_{\infty}(\delta_p, \delta_s) = \log_{10} \delta_s [b_1 (\log_{10} \delta_p)^2 + b_2 \log_{10} \delta_p + b_3] +$$

$$+ [b_4 (\log_{10} \delta_p)^2 + b_5 \log_{10} \delta_p + b_6]$$

$$g(\delta_p, \delta_s) = -14,6 \log_{10} \left( \frac{\delta_p}{\delta_s} \right) - 16,9$$

$$b_1 = 0,01201; b_2 = 0,09664; b_3 = -0,51325;$$

$$b_4 = 0,00203; b_5 = -0,5705; b_6 = -0,44314$$

și  $\Delta f$  este lățimea benzii de tranziție, normalizată cu frecvența de eșantionare.

### 2.7.2. Proiectarea diferențiatorilor FIR prin metoda Remez

Diferențiatorii sunt folosiți în multe sisteme analogice și digitale pentru a obține derivata unui semnal. Un diferențiator ideal are răspunsul în frecvență proporțional cu frecvența. Răspunsul în frecvență al unui diferențiator digital ideal este

$$H_d(\omega) = j\omega, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \quad (11.207)$$

Răspunsul la impuls corespunzător lui  $H_d(\omega)$  este

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} j\omega e^{j\omega n} d\omega = \frac{\cos \pi n}{n}; \quad (11.208)$$

$$-\infty < n < \infty, n \neq 0$$

Se observă că diferențiatorul ideal are răspunsul la impuls antisimetric, adică  $h_d[n] = -h_d[-n]$  și, deci,  $h_d[0] = 0$ . Ca urmare, se vor considera filtrele FIR de fază liniară de tipul 3 și 4 prezentate anterior, pentru care  $h[n] = -h[M-1-n]$ . Ambele tipuri de filtre satisfac condiția  $H_R(0) = 0$ , pe care trebuie să o îndeplinească diferențiatorul.

Este imposibil de obținut un diferențiator pentru toată banda cu un filtru FIR cu număr impar de coeficienți, deoarece  $H_R(\pi) = 0$ . În practică aceste diferențiatoare de bandă largă sunt foarte rar folosite. În cele mai multe cazuri, caracteristica răspunsului dorit în frecvență trebuie să fie liniară numai într-un domeniu limitat de frecvențe,  $0 \leq \omega \leq 2\pi f_p$ , unde  $f_p$  este lățimea de bandă a diferențiatorului. În domeniul  $2\pi f_p \leq \omega \leq \pi$ , răspunsul dorit poate fi neindicat sau se impune să fie zero.

În proiectarea diferențiatorului FIR pe baza criteriului de aproximare Cebîșev, funcția de ponderare  $W(\omega)$  este specificată ca fiind

$$W(\omega) = \frac{1}{\omega} \quad 0 \leq \omega \leq 2\pi f_p \quad (11.209)$$

pentru ca riplul relativ în B.T. să fie constant. Oricum, funcția de ponderare  $W(\omega)$  asigură faptul că eroarea relativă

$$\delta = \max_{0 \leq \omega \leq 2\pi f_p} \{W(\omega)[\omega - H_R(\omega)]\} = \max_{0 \leq \omega \leq 2\pi f_p} \left[ 1 - \frac{H_R(\omega)}{\omega} \right] \quad (11.210)$$

este fixă în B.T. a diferențiatorului.

Parametrii importanți ai unui diferențiator sunt: lungimea  $M$ , lățimea de bandă  $f_p$ , mărimea relativă  $\delta$  a erorii de aproximare. Relațiile dintre acești parametri pot fi reprezentate parametric. În particular, valoarea  $20 \log_{10} \delta$  funcție de  $f_p$  cu  $M$  parametru este arătată în figura 2.22a pentru  $M$  par și în figura 2.22b pentru  $M$  impar. Aceste rezultate, datorate lui Rabiner și Schafer [53] sunt utile în alegerea lungimii filtrului.

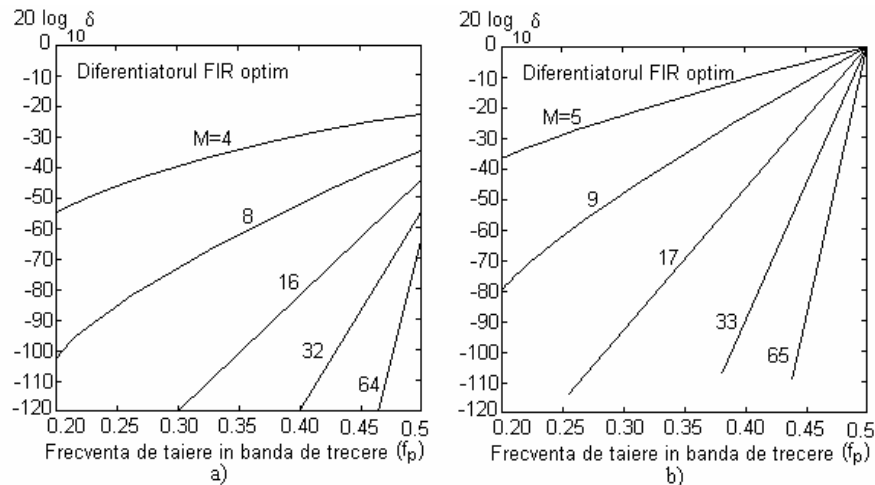


Figura 2.22 Valoarea  $20 \log_{10} \delta$  pentru parametrul a)  $M$  par și b)  $M$  impar

Comparând cele două figuri, rezultă că diferențiatorul pentru  $M$  par prezintă o eroare de aproximare semnificativ mai mică decât cea obținută cu diferențiatorul cu  $M$  impar. Dacă  $f_p > 0,45$ , nu pot fi folosite diferențiatoarele cu  $M$  impar pentru că răspunsul în frecvență la

$\omega = \pi$ , ( $f = 1/2$ ) este zero. Când  $f_p < 0,45$ , se pot folosi și acestea, dar cu performanțe mai slabe decât diferențiatoarele cu  $M$  par, din punctul de vedere al erorii de aproximare. În concluzie, în practică se preferă diferențiatoare cu lungime pară. În acest caz însă, întârzierea introdusă de un filtru FIR cu fază liniară este de  $(M-1)/2$ , care nu este un întreg pentru  $M$  par. În multe aplicații practice acest lucru nu este important, dar acolo unde este, se folosește  $M$  impar. Se poate proiecta un diferențiator cu fază liniară și răspuns finit la impuls și folosind metoda eșantionării în frecvență.

### 2.7.3. Proiectarea transformatorului Hilbert (T.H.)

Un transformator Hilbert ideal este un filtru trece tot care introduce o deplasare cu  $90^0$  a fazei componentelor spectrale ale semnalului de la intrare. Răspunsul în frecvență al unui T.H. ideal este

$$H_d(\omega) = \begin{cases} -j, & 0 < \omega \leq \pi \\ j, & -\pi < \omega < 0 \end{cases} \quad (2.211)$$

Transformatorul Hilbert este frecvent folosit în sisteme de comunicații și procesarea de semnal, ca de exemplu în generarea semnalelor modulate cu bandă laterală unică, procesarea semnalului radar, procesarea semnalului vocal. Răspunsul la impuls al unui T.H. ideal este dat de relația

$$\begin{aligned} h_d[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^0 j e^{j\omega n} d\omega - \int_0^{\pi} j e^{j\omega n} d\omega \right) = \\ &= \begin{cases} \frac{2 \sin^2(\pi n / 2)}{\pi n}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.212)$$

Așa cum era de așteptat,  $h_d[n]$  este infinit în durată și necauzal. Se observă că  $h_d[n]$  este antisimetric, situație în care partea reală a răspunsului în frecvență este  $H_R(\omega) = 0$  la  $\omega=0$ , atât pentru  $M$  impar, cât și pentru  $M$  par și la  $\omega = \pi$ , pentru  $M$  impar.

Din cele prezentate rezultă că este imposibil a se proiecta un T.H. digital trece tot. Din fericire, în aplicațiile practice de procesare de semnal, nu este necesar un T.H. trece tot. Lățimea de bandă trebuie să acopere numai banda semnalului ce trebuie defazat. În consecință, răspunsul de fază zero dorit este

$$H_{dR}(\omega) = 1 \quad 2\pi f_l \leq \omega \leq 2\pi f_u \quad (2.213)$$

unde  $f_l$  și  $f_u$  sunt, respectiv, frecvențele de tăiere inferioară și superioară. Răspunsul la impuls  $h_d[n]$  al T.H. ideal, conform relației (2.212), este zero pentru  $n$  par. În proiectare, această proprietate se folosește împreună cu condițiile de simetrie. Fie, în particular, filtru FIR de tipul 3, pentru care

$$H_R(\omega) = \sum_{n=1}^{(M-1)/2} c[n] \sin(\omega n) \quad (2.214)$$

și se presupune că  $f_l = 0,5 \cdot f_u$ . Aceasta asigură o B.T. simetrică față de frecvența de mijlocul domeniului de frecvență  $f=0,25$ . Dacă există această simetrie în răspunsul în frecvență,  $H_R(\omega) = H_R(\pi - \omega)$  și relația (2.214) devine

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{(M-1)/2} c[n] \sin(\omega n) &= \sum_{n=1}^{(M-1)/2} c[n] \sin n(\pi - \omega) = \\ &= - \sum_{n=1}^{(M-1)/2} c[n] \sin \omega n \cos \pi n = \sum_{n=1}^{(M-1)/2} c[n] (-1)^{n+1} \sin \omega n \end{aligned} \quad (2.215a)$$

sau, echivalent

$$\sum_{n=1}^{(M-1)/2} [1 - (-1)^{n+1}] c[n] \sin \omega n = 0 \quad (2.215b)$$

adică  $c[n]$  trebuie să fie egal cu zero pentru  $n = 0, 2, 4, \dots$ . Relația între  $c[n]$  și răspunsul la impuls  $h[n]$  este

$$c[n] = 2h \left[ \frac{M-1}{2} - n \right] \quad (2.216a)$$

sau, echivalent

$$h \left[ \frac{M-1}{2} - n \right] = \frac{1}{2} c[n] \quad (2.216b)$$

Dacă  $c[n]$  este egal cu zero pentru  $n = 0, 2, 4$  atunci (2.216b) devine

$$h[n] = \begin{cases} 0, & n = 0, 2, 4, \dots \text{ pentru } (M-1)/2 \text{ par} \\ 0, & n = 1, 3, 5, \dots \text{ pentru } (M-1)/2 \text{ impar} \end{cases} \quad (2.217)$$

Din nefericire, relația (2.217) este valabilă numai pentru  $M$  impar, nu și pentru  $M$  par. Aceasta înseamnă că pentru valori comparabile pentru  $M$ , este preferabil cazul cu  $M$  impar, deoarece complexitatea calculului este aproximativ pe jumătate față de  $M$  par. Când proiectarea T.H. este



realizată pe baza criteriului de aproximare Cebîșev, folosind algoritmul Remez, se selectează coeficienții filtrului pentru a minimiza eroarea maximă de aproximare.

$$\delta = \max_{2\pi f_l \leq \omega \leq 2\pi f_u} [H_{dR}(\omega) - H_R(\omega)] = \max_{2\pi f_l \leq \omega \leq 2\pi f_u} [1 - H_R(\omega)], \quad (2.218)$$

adică funcția de ponderare s-a luat egală cu unitatea și optimizarea s-a realizat pe o singură bandă de frecvență, (banda de trecere a filtrului). Rabiner și Schafer [53] au studiat caracteristicile T.H. pentru  $M$  par și  $M$  impar. Dacă proiectarea filtrului este limitată la un răspuns în frecvență simetric, există trei parametri de interes,  $M$ ,  $\delta$ ,  $f_l$ . În figura 2.23 s-a reprezentat  $20 \log_{10} \delta$  funcție de  $f_l$  și  $M$ -parametru.

Se observă că pentru valori comparabile ale lui  $M$ , nu există avantaje ale performanțelor obținute pentru  $M$  par sau impar, dar complexitatea calculului în implementarea filtrului cu  $M$  impar este de aproximativ două ori mai scăzută decât pentru  $M$  par. Așadar,  $M$  impar este preferabil în practică.

Există o relație aproximativă de estimare a unuia din cei trei parametri ai filtrului, când sunt specificați ceilalți [48]

$$Mf_l = -0,61 \log_{10} \delta \quad (2.219)$$

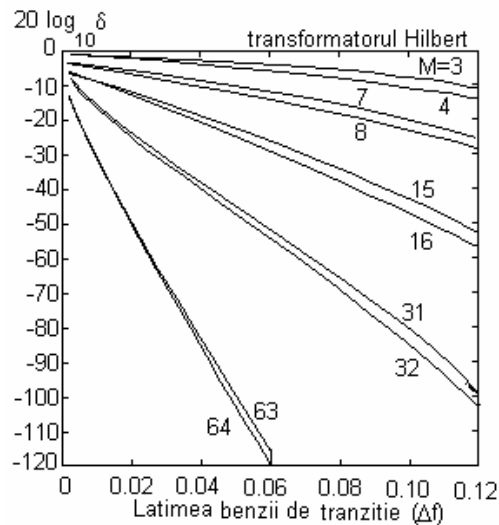


Figura 2. 23 Valoarea  $20 \log_{10} \delta$  pentru diverși parametri  $M$  reprezentată în funcție de lățimea benzii de tranziție

T.H. poate fi, de asemenea, proiectat folosind metoda ferestrelor sau a eşantionării în frecvență. Diferențele ce apar între coeficienții obținuți sunt mici, dar metoda optimală dă rezultatele cele mai bune în proiectare.