

Laborator TEFO Lucrarea nr. 7

FILTRUL KALMAN

Filtrul Kalman este un instrument matematic puternic care joacă un rol important în grafica pe computer când vrem să reprezentăm lumea reală în sistemele de calcul.

De asemenea, filtrul Kalman este un bun estimator posibil pentru o clasă largă de probleme.

1. Modele în spațiul stărilor

Modelele în spațiul stărilor sunt, în esență, o convenție de notație pentru problemele de estimare și control, dezvoltate pentru prelucrări matematice mai ușoare. Se consideră un proces descris printr-o ecuație cu diferențe de ordin n (similară unei ecuații diferențiale) de forma

$$y_{i+1} = a_{0,i}y_i + \dots + a_{n-1,i}y_{i-n+1} + u_i, i \geq 0 \quad (1)$$

unde $\{u_i\}$ este un proces de tip zgomot alb, având funcția de autocorelație

$$E(u_i, u_j) = R_u = Q_i \delta_{ij} \quad (2)$$

unde E reprezintă operatorul de mediere statistică, iar valorile inițiale $\{y_0, y_{-1}, \dots, y_{-n+1}\}$ sunt variabile aleatoare de medie zero cu o *matrice de covarianță* de dimensiuni $n \times n$ cunoscută

$$P_0 = E(y_{-j}, y_{-k}), j, k \in \{0, n-1\}. \quad (3)$$

Presupunând zgomotul statistic independent de procesul care urmează a fi estimat, rezultă:

$$E(u_i, y_j) = E(u_i) \cdot E(y_j) = 0, \text{ pentru } -n+1 \leq j \leq 0 \text{ și } i \geq 0, \quad (4)$$

ceea ce asigură că

$$E(u_i, y_j) = 0, \text{ pentru } i \geq j \geq 0. \quad (5)$$

Ecuația cu diferențe (1) poate fi rescrisă ca

$$[x_{i+1}] = \begin{bmatrix} y_{i+1} \\ y_i \\ y_{i-1} \\ \vdots \\ y_{i-n+2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{bmatrix} y_i \\ y_{i-1} \\ y_{i-2} \\ \vdots \\ y_{i-n+1} \end{bmatrix}}_{[x_i]} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{[G]} u_i \quad (6)$$

care conduce la *modelul în spațiul stărilor*:

$$[x_{i+1}] = [A][x_i] + [G]u_i \quad (7)$$

$$y_i = [1 \ 0 \ \dots \ 0][x_i] \quad (8)$$

sau în forma mai generală

$$[x_{i+1}] = [A][x_i] + [G]u_i, \quad (9)$$

$$y_i = [H_i][x_i], \quad (10)$$

unde $[H_i]$ reprezintă matricea care descrie dependența liniară a ieșirii de starea sistemului.

Ecuția (9) reprezintă dependența stării $[x_{i+1}]$ atât de starea anterioară $[x_i]$, cât și de un proces de zgomot u_i . Ecuția (10) descrie dependența dintre observațiile y_i și starea internă $[x_i]$. Ecuțiile (9) și (10) sunt adesea numite *modelul de proces*, respectiv *modelul de măsurare*. Descrierea în spațiul stărilor a sistemului descris de ecuațiile (9) și (10) este dată în Figura 1, unde se observă intrarea u_i , starea $[x]$ la momentele i și $i+1$, precum și ieșirea y_i a sistemului.

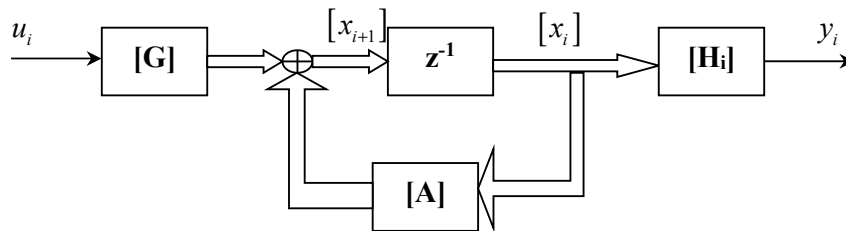


Figura 1. Descrierea în spațiul stărilor a sistemului descris de ecuațiile (9) și (10)

2. Problema proiectării observatorului

Există o problemă generală legată de domeniul teoriei sistemelor liniare numită *problema proiectării observatorului*. Problema de bază este de a determina (estima) stările interne ale unui sistem liniar, având acces numai la *ieșirile* sistemului. Acest lucru este înrudit cu problema „cutiei negre” unde este acces la unele semnale venind din cutie (ieșirile), dar nu se poate observa direct ceea ce este în interior.

Multe abordări la această problemă de bază sunt tipic bazate pe modelul în spațiul stărilor prezentat în secțiunea anterioară. Tipic există un *model de proces* care modelează transformarea stării procesului. Acesta poate fi, de obicei, reprezentat ca o ecuație cu diferențe stocastică liniară similară cu ecuația (9):

$$[x_k] = [A][x_{k-1}] + [B][u_k] + [w_k], \quad (11)$$

unde $[A]$ și $[B]$ descriu dependența stării curente de starea anterioară, respectiv de intrarea curentă.

În plus există o formă a *modelului de măsurare* care descrie relația între starea procesului și măsurările efectuate. Acesta poate fi, de obicei, reprezentat cu o ecuație similară ecuației (10):

$$[z_k] = [H][x_k] + [v_k] \quad (12)$$

Zgomotul de proces $[w_k]$ și zgomotul de măsurare $[v_k]$ sunt variabile aleatoare. Din (10) și (12) se observă înlocuirea variabilei y_k cu $[z_k]$ pentru a specifica faptul că măsurările nu sunt neapărat stările specificate, ci pot fi orice combinație liniară a acestora.

Zgomotul de măsurare și de proces

Zgomotul de măsurare apare, de exemplu, în cazul măsurătorilor cu ajutorul unui senzor și datorită imperfecțiunilor aparatelor de măsură. În funcție de raportul semnal util-zgomot trebuie să se țină cont în estimare de informația obținută din măsurare.

Deoarece nici transformarea prin care se obține starea sistemului nu este perfectă trebuie să se țină cont în estimării stării de un zgomot de proces.

3. Filtrul Kalman

În continuare se descrie filtrul Kalman unde măsurătorile și starea sunt considerate la momente discrete în timp.

3.1 Procesul care urmează a fi estimat

Filtrul Kalman consideră problema generală a încercării de a estima starea $[x] \in \mathbb{R}^n$ a unui proces controlat în timp discret care este guvernat de ecuația cu diferențe stocastică liniară

$$[x_k] = [A][x_{k-1}] + [B][u_k] + [w_k], \quad (13)$$

dintr-o măsurare $[z] \in \mathbb{R}^m$ care este descrisă de ecuația

$$[z_k] = [H][x_k] + [v_k]. \quad (14)$$

Vectorii de variabile aleatoare $[w_k]$ și $[v_k]$ reprezintă zgomotul de proces, respectiv, zgomotul de măsurare. Se presupune că zgomotul de proces w_k și cel de măsurare v_k sunt independente, de tip zgomot *alb*, și cu distribuții de probabilitate normale

$$p([w]) \sim N(0, [Q]) \quad (15)$$

$$p([v]) \sim N(0, [R]) \quad (16)$$

unde $[Q]$ și $[R]$ sunt matricele de covarianță a zgomotului de proces, respectiv a zgomotului de măsurare, presupuse a fi constante.

Matricea $[A]$, de dimensiuni $n \times n$, în ecuația cu diferențe (13), leagă starea la momentul de timp anterior $k-1$ de starea la momentul curent k , în absența intrării de comandă $[u_k]$ și a zgomotului de proces $[w_k]$. Se face observația că, în practică, matricea $[A]$ s-ar putea schimba cu fiecare moment de timp, dar aici se presupune că este constantă. Matricea $[B]$, de dimensiuni $n \times l$, leagă intrarea de control (opțională) $[u] \in \mathbb{R}^l$ de starea $[x]$. Matricea $[H]$, de dimensiuni $m \times n$, în ecuația de măsurare (14), leagă starea $[x_k]$ de măsurarea $[z_k]$. În practică matricea $[H]$ s-ar putea schimba cu fiecare moment de timp, dar aici se presupune că este constantă.

3.2 Originile computaționale ale filtrului

Se definește $\begin{bmatrix} \hat{x}_k^- \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ (se observă „super minusul”) ca fiind estimatul stării *a priori* la momentul k , dată fiind cunoștința procesului anterior la momentul k , și $\begin{bmatrix} \hat{x}_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ estimatul stării *a posteriori* la momentul k dată fiind măsurarea $[z_k]$. Se pot defini atunci vectorii de eroare a estimațiilor *a priori* și *a posteriori* ca fiind

$$\begin{bmatrix} e_k^- \end{bmatrix} = [x_k] - \begin{bmatrix} \hat{x}_k^- \end{bmatrix}, \text{ și} \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} e_k \end{bmatrix} = [x_k] - \begin{bmatrix} \hat{x}_k \end{bmatrix} \quad (18)$$

Matricea de covarianță a erorii estimatului *a priori* este atunci

$$\begin{bmatrix} P_k^- \end{bmatrix} = E \left\{ \begin{bmatrix} e_k^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_k^- \end{bmatrix}^T \right\}, \quad (19)$$

iar matricea de covarianță a erorii estimatului *a posteriori* este

$$\begin{bmatrix} P_k \end{bmatrix} = E \left\{ \begin{bmatrix} e_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_k \end{bmatrix}^T \right\} \quad (20)$$

În obținerea ecuațiilor pentru filtrul Kalman, scopul inițial este găsirea unei ecuații care calculează un estimat al stării *a posteriori* $\begin{bmatrix} \hat{x}_k \end{bmatrix}$ ca o combinație liniară dintre un estimat *a priori* $\begin{bmatrix} \hat{x}_k^- \end{bmatrix}$ și o diferență ponderată între măsurarea actuală $[z_k]$ și o predicție a măsurării $[H] \begin{bmatrix} \hat{x}_k^- \end{bmatrix}$, așa cum este arătat în ecuația (21):

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_k^- \end{bmatrix} + [K_k] \left([z_k] - [H] \begin{bmatrix} \hat{x}_k^- \end{bmatrix} \right) \quad (21)$$

Diferența $[z_k] - [H] \begin{bmatrix} \hat{x}_k^- \end{bmatrix}$, în ecuația (21), este numită *inovația* măsurării, sau *reziduul*. Reziduul reflectă diferența între măsurarea actuală $[z_k]$ și măsurarea prezisă $[H] \begin{bmatrix} \hat{x}_k^- \end{bmatrix}$.

Matricea $[K_k]$ de dimensiuni $n \times m$ în ecuația (21) este numită *câștigul* sau *factorul de amestec* minimizând urma matricei de covarianță a erorii *a posteriori* din (20). Această minimizare poate fi realizată astfel: mai întâi se substituie ecuația (21) în definiția de mai sus pentru $[e_k]$ (relația (18)), apoi se înlocuiește relația obținută în ecuația (20), se realizează medierile indicate, se derivează urma matricei rezultate în raport cu elementele matricei $[K_k]$, se egalează rezultatul cu zero, și apoi se rezolvă ecuația în $[K_k]$. O formă a lui $[K_k]$ rezultat care minimizează urma matricei din (20) este dată prin

$$\begin{bmatrix} K_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_k^- \end{bmatrix} [H]^T \left([H] \begin{bmatrix} P_k^- \end{bmatrix} [H]^T + [R] \right)^{-1} \quad (22)$$

Din (22) rezultă că atunci când matricea de covarianță a erorii de măsurare $[R]$ se apropie de matricea nulă, câștigul $[K_k]$, care multiplică reziduul, ia valori din ce în ce mai mari. Anume,

$$\lim_{[R] \rightarrow [0]} [K_k] = [H]^{-1} \quad (23)$$

Pe de altă parte, când matricea de covarianță a erorii estimatului *a priori* $[P_k^-]$ se apropie de matricea nulă, câștigul $[K_k]$ multiplică reziduul cu valori din ce în ce mai mici. Anume,

$$\lim_{[P_k^-] \rightarrow 0} [K_k] = 0 \quad (24)$$

Se poate conchide că atunci când matricea de covarianță a erorii de măsurare $[R]$ se apropie de matricea nulă, măsurarea actuală este din ce în ce mai „credibilă”, în timp ce măsurarea prezisă $[H][\hat{x}_k^-]$ este din ce în ce mai puțin credibilă, iar când matricea de covarianță a erorii estimatului *a priori* $[P_k^-]$ se apropie de matricea nulă măsurarea actuală $[z_k]$ este din ce în ce mai puțin credibilă, în timp ce măsurarea prezisă $[H][\hat{x}_k^-]$ este din ce în ce mai mult credibilă.

3.3 Algoritmul filtrului Kalman discret

Filtrul Kalman estimează un proces prin utilizarea unei forme de control cu reacție: filtrul estimează starea procesului la un anumit moment de timp și apoi obține reacția în forma măsurărilor (zgomotoase). Astfel, ecuațiile filtrului Kalman se împart în două grupe: ecuații de *actualizare în timp* și ecuații de *actualizare a măsurării*. Ecuațiile de actualizare în timp sunt responsabile de determinarea estimațiilor stării curente și a matricei de covarianță a erorii pentru a obține estimații *a priori* pentru următorul moment de timp. Ecuațiile de actualizare a măsurării sunt responsabile de reacție – adică de incorporarea unei noi măsurări în estimatul *a priori* pentru a obține un estimat *a posteriori* îmbunătățit.

Ecuațiile de actualizare în timp pot fi de asemenea gândite ca ecuații predictor, în timp ce ecuațiile de actualizare a măsurării pot fi gândite ca ecuații corector. Într-adevăr algoritmul de estimare final seamănă cu cel al unui algoritm de tip predictor-corector pentru rezolvarea problemelor numerice așa cum este arătat în Figura 2.

Ecuațiile specifice pentru actualizările în timp și ale măsurării sunt prezentate mai jos în Tabelele 1 și 2.

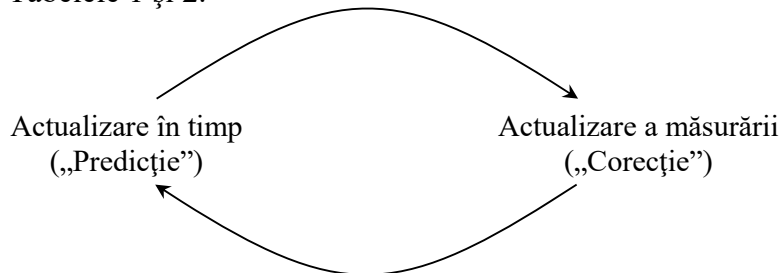


Figura 2. Ciclul filtrului Kalman discret

Tabelul 1: Ecuțiile de actualizare în timp ale filtrului Kalman discret

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_k^- \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} \hat{x}_{k-1}^- \end{bmatrix} + [B] [u_{k-1}] \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} P_k^- \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} P_{k-1}^- \end{bmatrix} [A]^T + [Q] \quad (26)$$

Observăm cum ecuațiile de actualizare în timp din Tabelul 1 determină estimății stării *a priori* și a matricei de covarianță a erorii *a priori* la momentul k în funcție de cele de la momentul de timp $k-1$.

Tabelul 2: Ecuțiile de actualizare a măsurării ale filtrului Kalman discret

$$[K_k] = [P_k^-] [H]^T \left([H] [P_k^-] [H]^T + [R] \right)^{-1} \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_k^- \end{bmatrix} + [K_k] \left([z_k] - [H] \begin{bmatrix} \hat{x}_k^- \end{bmatrix} \right) \quad (28)$$

$$[P_k] = ([I] - [K_k] [H]) [P_k^-] \quad (29)$$

Prima sarcină în timpul actualizării măsurării este de a calcula câștigul Kalman, $[K_k]$. Următorul pas este de a măsura de fapt procesul pentru a obține $[z_k]$, și apoi de a genera un estimat al stării *a posteriori* incorporând măsurarea ca în (28). Pasul final este de a obține estimatul matricei de covarianță a erorii *a posteriori* prin (29).

După fiecare pereche de actualizare în timp și de măsurare, procesul este repetat cu estimății *a posteriori* anteriori pentru a face predicția pentru noii estimați *a priori*. Această natură recursivă este una din caracteristicile foarte atractive ale filtrului Kalman – făcând implementările practice mult mai fezabile decât (de exemplu) o implementare a unui filtru Wiener, care este proiectat pentru a opera pe *toate* datele *direct* pentru fiecare estimat. Filtrul Kalman, în schimb, condiționează recursiv estimatul curent de toate măsurările trecute. Figura 3 ilustrează complet funcționarea filtrului, combinând diagrama din Figura 2 cu ecuațiile din Tabelele 1 și 2.

În Figura 4 este dată diagrama bloc a sistemului, în ipoteza absenței intrării de control, modelul de măsurare și structura filtrului Kalman discret.

3.4 Parametrii filtrului și reglare

În implementările reale ale filtrului, matricea de covarianță a zgomotului de măsurare $[R]$ este de obicei măsurată înainte de funcționarea filtrului. Măsurarea matricei de covarianță a erorii de măsurare $[R]$ este posibilă, deoarece se poate măsura procesul în timpul funcționării filtrului luând câteva eșantioane de măsurare.

Determinarea matricei de covarianță a zgomotului de proces $[Q]$ este în general mai dificilă când, de fapt, nu există posibilitatea de a observa direct procesul care se estimează. Uneori un model de proces relativ simplu poate produce rezultate acceptabile dacă se introduce destulă incertitudine în proces prin selecția lui $[Q]$. În acest caz se speră că măsurările procesului sunt fiabile.

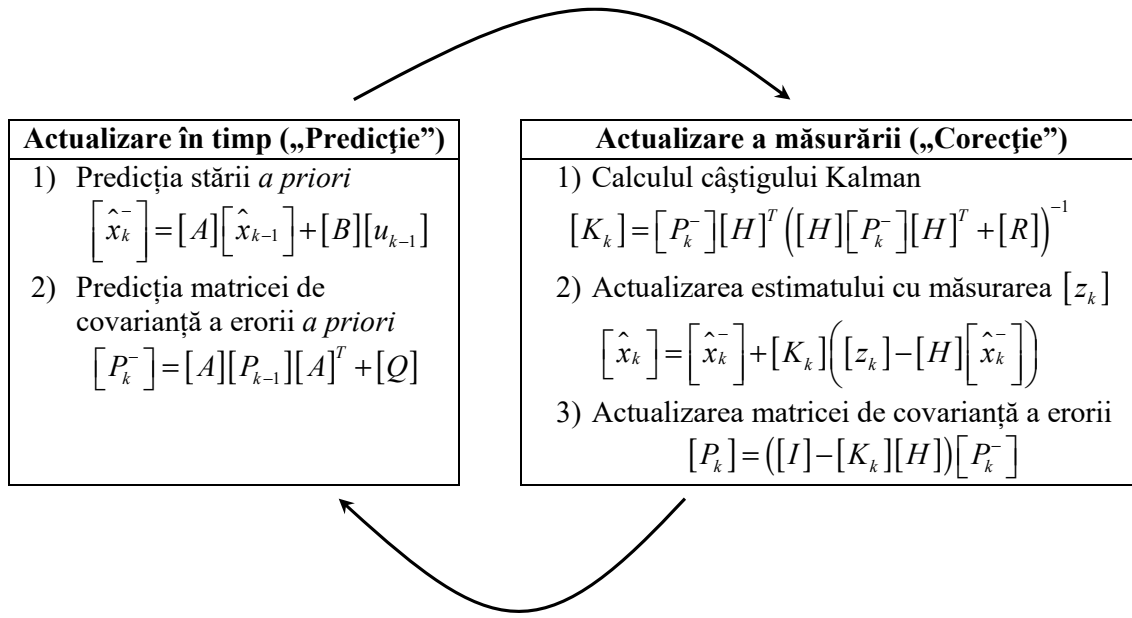


Figura 3. O descriere completă a funcționării filtrului Kalman

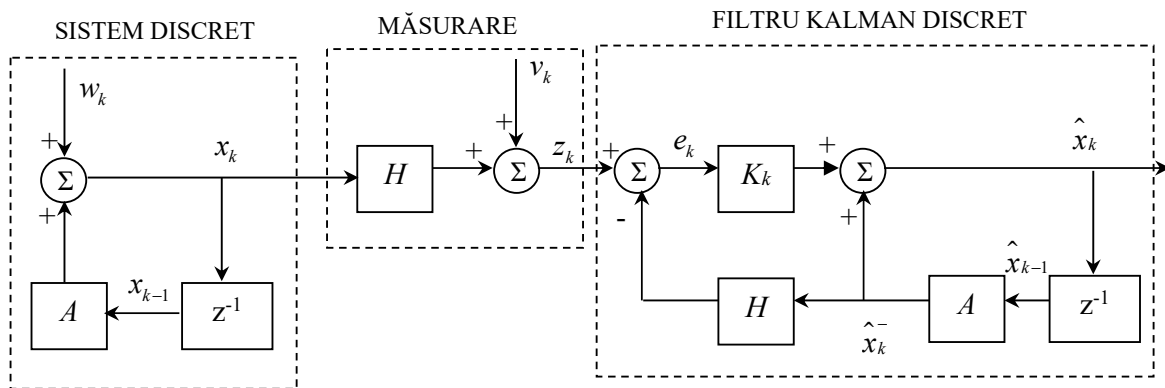


Figura 4. Diagrama bloc a sistemului, modelul de măsurare și structura filtrului Kalman discret

În orice caz, dacă există sau nu o bază rațională pentru alegerea parametrilor, adesea poate fi obținută o performanță superioară (statistic vorbind) prin *reglarea* parametrilor filtrului $[Q]$ și $[R]$. Reglarea este de obicei realizată înaintea estimării, de regulă cu ajutorul altui filtru Kalman într-un proces numit, în general, *identificare de sistem*.

În condițiile în care $[Q]$ și $[R]$ sunt constante, atât matricea de covarianță a erorii $[P_k]$, cât și câștigul Kalman $[K_k]$ se vor stabiliza rapid și apoi vor rămâne constante (vezi ecuațiile de actualizare ale filtrului în Figura 3). Dacă acesta este cazul, acești parametri pot fi pre-calculați, fie prin rularea filtrului premergător, fie, de exemplu, prin determinarea valorii de stare stabilă a lui $[P_k]$.

4. Exemple de estimare folosind o filtrare Kalman

3.1 Estimarea nivelului de curent continuu

Se presupune exemplul estimării unui nivel de tensiune continuă. Se presupune că există posibilitatea de face măsurări ale tensiunii continue, dar măsurările sunt perturbate de un zgomot de măsurare *alb* cu valoarea deviației standard de 0.1 volți. În acest exemplu, procesul este guvernat prin ecuația cu diferențe liniară

$$x_k = x_{k-1} + w_k, \quad (30)$$

cu o măsurare $z \in \mathbb{R}^1$ care este

$$z_k = x_k + v_k \quad (31)$$

Astfel în acest caz matricele devin scalari. Starea neschimbându-se de la un pas la altul rezultă $A=1$ și neexistând control asupra intrării, rezultă $u=0$. Măsurarea cu zgomot este direct a stării, așa că $H=1$.

Ecuatiile de actualizare în timp sunt

$$\begin{aligned} \hat{x}_k^- &= \hat{x}_{k-1}, \\ P_k^- &= P_{k-1} + Q, \end{aligned}$$

iar ecuațiile de actualizare a măsurării sunt

$$\begin{aligned} K_k &= P_k^- (P_k^- + R)^{-1} = \frac{P_k^-}{P_k^- + R} \\ \hat{x}_k &= \hat{x}_k^- + K_k (z_k - \hat{x}_k^-) \\ P_k &= (1 - K_k) P_k^- \end{aligned}$$

Se presupune o varianță a procesului foarte mică, de exemplu $Q=10^{-5}$. S-ar putea seta $Q=0$, dar presupunând o valoare mică, dar diferită de zero, rezultă mai multă flexibilitate în reglarea filtrului după cum se va demonstra în continuare. Se presupune că din experiență se știe că valoarea adevărată a tensiunii continue are o distribuție de probabilitate normală standard, așa că se începe cu presupunerea că tensiunea este 0. Cu alte cuvinte, înainte de începere se setează $\hat{x}_0 = 0$.

Similar este nevoie de alegerea unei valori inițiale pentru P_{k-1} , anume P_0 . Dacă este absolut sigur că estimarea stării inițiale $\hat{x}_0 = 0$ a fost corectă, se va seta $P_0 = 0$. Totuși dată fiind incertitudinea în estimatul inițial \hat{x}_0 , alegerea $P_0 = 0$ ar cauza faptul ca filtrul să inițializeze și apoi totdeauna să creadă tot timpul că $\hat{x}_k = 0$. Ca urmare, alegerea alternativă nu este critică. S-ar putea alege orice $P_0 \neq 0$ și filtrul *eventual* ar converge. Filtrul va starta cu $P_0 = 1$.

Valoarea tensiunii continue s-a considerat $x=1$. S-au simulat 50 de măsurări distincte z_k care au avut erori distribuite normal în jurul lui zero cu o deviație standard de 0.1.

Programul pentru generarea tensiunilor continue, cu zgomot și estimate este dat în continuare.


```

% P_Kalman_ex1
clear;
clc;

% parametri initiali
n_iter = 50;
sz = n_iter; % dimensiunea vectorilor
x = 1; % valoarea adevarata a tensiunii continue
z = x + 0.1*randn(1,sz); % observatii (normale raportat la x,
sigma=0.1)

Q = 1e-5; % varianta procesului

xhat = zeros(1,sz); % estimatul a posteriori a lui x
P = zeros(1,sz); % estimatul variantei erorii a
posteriori
xhatminus = zeros(1,sz); % estimatul a priori a lui x
Pminus = zeros(1,sz); % estimatul variantei erorii a priori
K = zeros(1,sz); % castigul sau factorul de amestec

R = 0.01; % estimatul variantei masurarii, a se schimba pentru
a vedea efectul

% ghicirea initiala
xhat(1) = 0.0;
P(1) = 1.0;

for k=2:n_iter
    % actualizare in timp
    xhatminus(k) = xhat(k-1);
    Pminus(k) = P(k-1)+Q;

    % actualizare a masurarii
    K(k) = Pminus(k)/( Pminus(k)+R );
    xhat(k) = xhatminus(k)+K(k)*(z(k)-xhatminus(k));
    P(k) = (1-K(k))*Pminus(k);
end

valid_iter = 1:n_iter;
figure(1)
clf;
plot(z, '-m*');
hold on;
plot(xhat, '-bv', 'MarkerFaceColor', 'b');
hold on;
plot(valid_iter,x*ones(1,sz), '-g^', 'MarkerFaceColor', 'g');
grid on;
axis([1 n_iter min(z) max(z)]);
legend('masurari', 'starea estimata', 'valoarea adevarata');
xlabel('Iteratie')
ylabel('Tensiune')

```

```

valid_iter(1)=[];
figure(2)
clf;
plot(valid_iter,Pminus(valid_iter),'-
bv','MarkerFaceColor','b')
grid on;
axis([1 n_iter 0 0.01]);
xlabel('Iteratie (k)')
ylabel('(Tensiune)^2 - P_k')

```

În prima simulare s-a fixat varianța măsurării la $R=(0.1)^2=0.01$. Rezultatele sunt date în Figura 5.

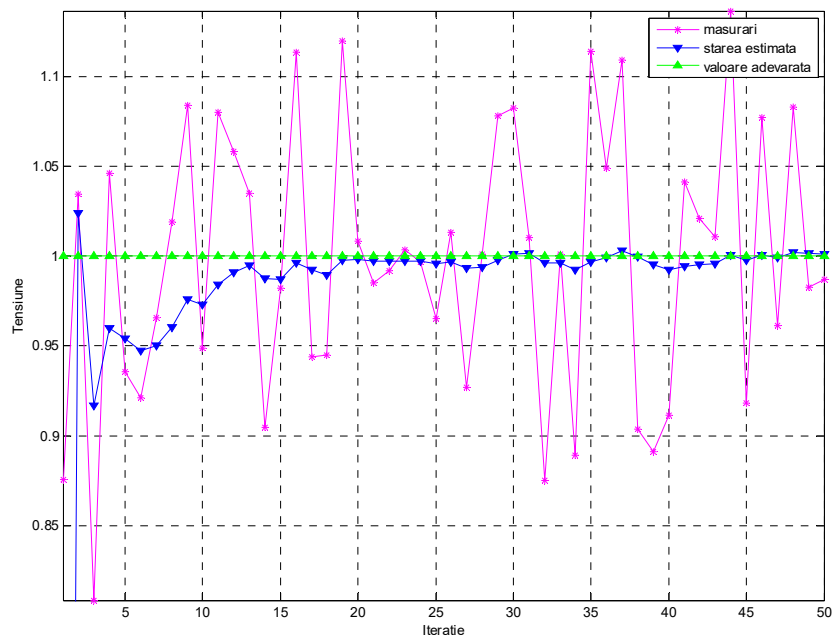


Figura 5. Simularea cu $R=(0.1)^2=0.01$

Când s-a considerat alegerea lui P_0 de mai sus, s-a menționat că alegerea nu a fost critică cât timp $P_0 \neq 0$ deoarece filtrul eventual ar converge. În Figura 6 s-a reprezentat valoarea lui P_k în funcție de iterație. Din alegerea inițială de 1, la a 50-a iterație valoarea s-a stabilit la aproximativ 0.0003 (Volți²).

În Figurile 7 și 8 de mai jos se poate vedea ceea ce se întâmplă când R este crescut sau scăzut cu un factor de 100.

În Figura 7 s-a considerat că varianța măsurării a fost de 100 de ori mai mare (adică $R=1$) așa că răspunsul filtrului a fost mai „lent” în a crede măsurările, estimările precise devenind mai credibile. Rezultatul conduce la o varianță redusă a semnalului estimat.

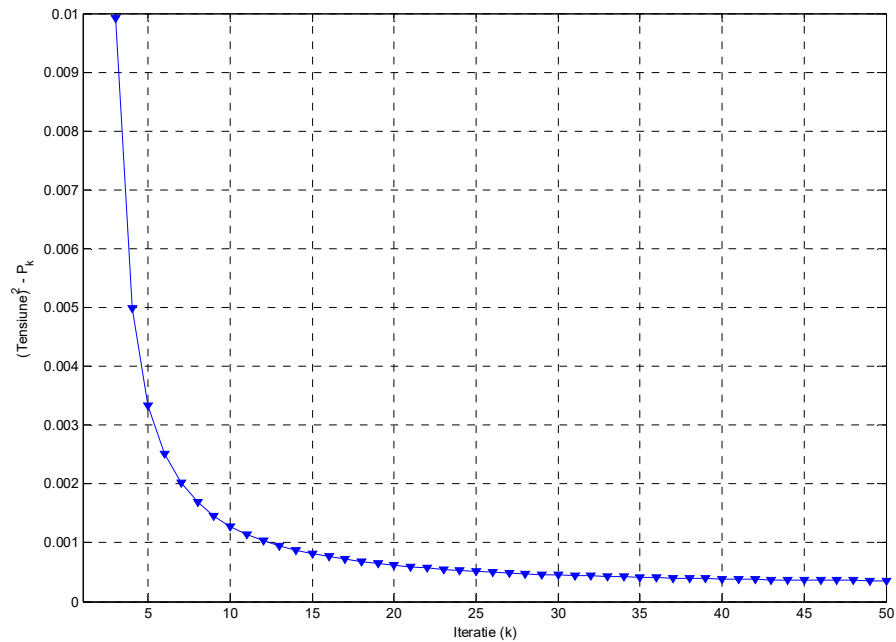


Figura 6. După 50 de iterații, covarianța erorii P_k^- , aleasă inițial ca fiind egală cu 1, s-a stabilit la aproximativ 0.0003 (Volți²)

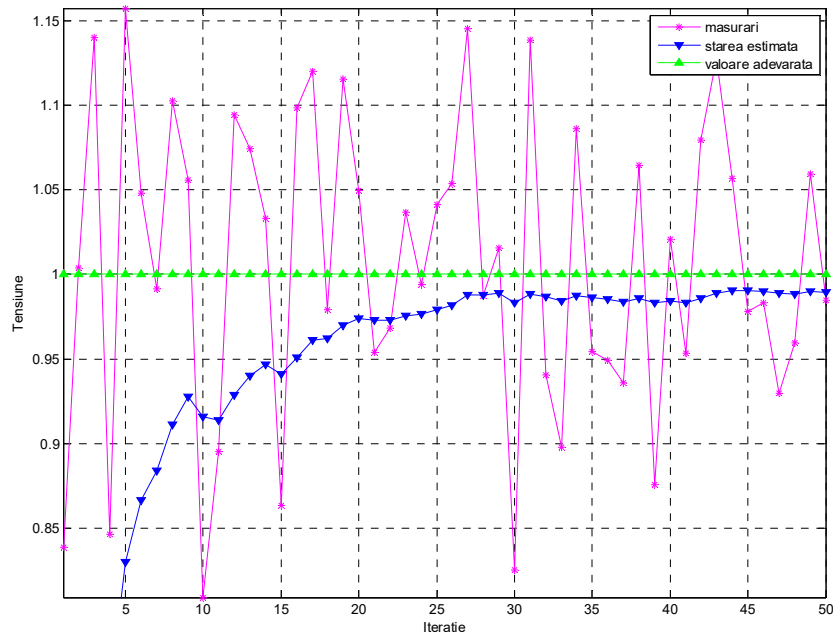


Figura 7. Simularea cu $R=1$. Filtrul este mai lent în răspuns la măsurări, rezultând într-o varianță redusă a estimatului.

În Figura 8 s-a considerat că varianța măsurării a fost de 100 de ori mai mică (adică $R=0.0001$) așa că răspunsul filtrului a fost mai „rapid” în a crede măsurările

zgomotoase, acestea devenind mai credibile. Prin urmare varianța semnalului estimat este mai mare.

Deși estimarea unei tensiuni continue este relativ directă, aceasta demonstrează clar funcționarea filtrului Kalman. În Figura 7, în particular, este evident că în filtrarea Kalman estimatul apare considerabil mai neted decât măsurările cu zgomot.

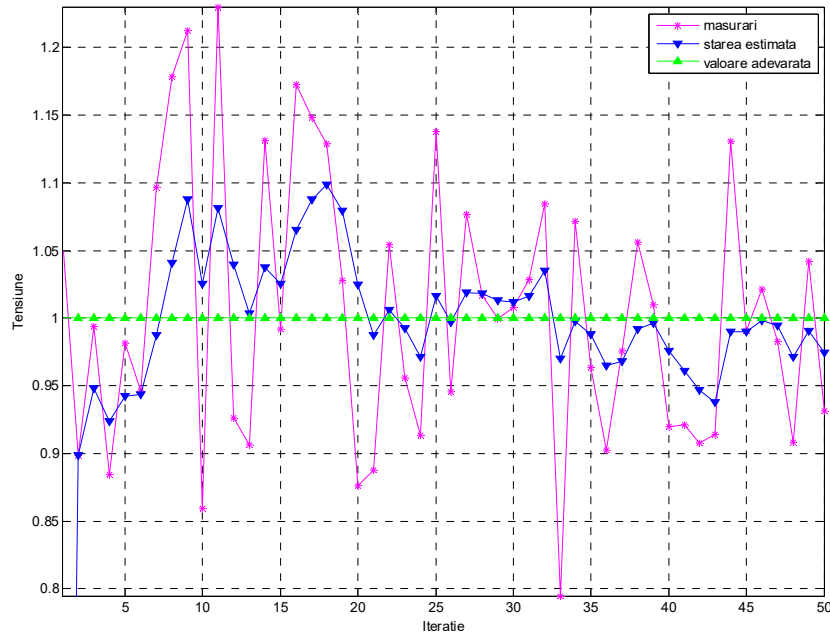


Figura 8. Simularea cu $R = 0.0001$. Filtrul răspunde rapid la măsurări, crescând varianța estimatului.

3.2 Sistem de urmărire prin radar a deplasării unui vehicul

În acest sistem radarul emite impulsuri, iar semnalele returnate sunt procesate prin filtrul Kalman pentru a determina deplasarea unui vehicul (presupusă cu viteză aproximativ constantă) într-un plan de coordonate xOy.

Se presupune că vehiculul are viteză aproximativ constantă astfel încât ecuațiile de modificare a vitezelor pe cele două axe, $v_x[k]$ și $v_y[k]$, sunt:

$$\begin{cases} v_x[k] = v_x[k-1] + w_x[k] \\ v_y[k] = v_y[k-1] + w_y[k] \end{cases}$$

unde $w_x[k]$ și $w_y[k]$, sunt zgomotele care modelează schimbarea vitezelor la momentul k , presupuse de tip Gaussian cu medie nulă.

Presupunând pasul de deplasare între două momente de timp succesive ca fiind egal cu T , ecuațiile de modificare a deplasărilor pe cele două axe sunt:

$$\begin{cases} r_x[k] = r_x[k-1] + v_x[k-1] \cdot T \\ r_y[k] = r_y[k-1] + v_y[k-1] \cdot T \end{cases}$$

Astfel vectorul de stare este

$$[x_k] = \begin{bmatrix} r_x[k] \\ r_y[k] \\ v_x[k] \\ v_y[k] \end{bmatrix}$$

iar ecuația de stare este

$$[x_k] = [A] \cdot [x_{k-1}] + [w_k],$$

unde

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [w_k] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_x[k] \\ w_y[k] \end{bmatrix}$$

Observațiile sunt valorile deplasărilor pe cele două axe perturbate de zgomot Gaussian de medie nulă:

$$\begin{cases} z_x[k] = r_x[k-1] + n_x[k] \\ z_y[k] = r_y[k-1] + n_y[k] \end{cases}$$

Definind vectorul de observație $[z_k] = [z_x[k] \ z_y[k]]^T$, ecuația de observație în timp discret este

$$[z_k] = [H][x_k] + [n_k]$$

unde

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [n_k] = [n_x[k] \ n_y[k]]^T.$$

Covarianța zgomotului de stare este

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_w^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_w^2 \end{bmatrix},$$

unde σ_w^2 este varianța zgomotelor $w_x[k]$ și $w_y[k]$, iar covarianța zgomotului de măsurare este

$$[R] = \begin{bmatrix} \sigma_n^2 & 0 \\ 0 & \sigma_n^2 \end{bmatrix},$$

unde σ_n^2 este varianța zgomotelor $n_x[k]$ și $n_y[k]$.

Programul Matlab care dă rezultatele pentru covarianțele erorilor deplasărilor, câștigul Kalman și evoluțiile deplasării în sistemul de coordonate xOy este dat în continuare. Este arătată convergența elementelor de pe diagonală ale matricei de covarianță a erorii, valorile câștigurilor Kalman selectate și de asemenea evoluția deplasării. Valorile numerice folosite sunt: $T=1$, $\sigma_w^2=10^{-4}$, $\sigma_n^2=0.1$, $P_0=10 \cdot [I_4]$, iar ecuațiile deplasărilor pe cele două axe sunt:

$$\begin{cases} r_x[k] = 10 - 0.2 \cdot k \\ r_y[k] = -5 + 0.2 \cdot k \end{cases}$$

astfel încât vitezele de deplasare inițiale sunt

$$\begin{cases} v_x[0] = -0.2 \\ v_y[0] = 0.2 \end{cases}$$

```
% P_Kalman_ex2
clear;
clc;

% parametri initiali
n_iter = 50;
sz = n_iter;
T = 1;

x(:, :, 1) = [10; -5; -0.2; 0.2]; % starea initiala
A = [1 0 T 0;
     0 1 0 T;
     0 0 1 0;
     0 0 0 1]; % matricea care leaga starea curenta de cea
anterioara

% varianta zgomotului de proces (vitezele vx si vy)
sigma_w2 = 1e-4;

wx = sqrt(sigma_w2)*randn(1,sz); %
wy = sqrt(sigma_w2)*randn(1,sz);
H = [1 0 0 0;
     0 1 0 0]; % matricea care leaga secventa de observatie
de starea curenta

% variantele zgomotelor de masurare (pentru rx si ry)
sigma_n2 = 0.1;

nx = sqrt(sigma_n2)*randn(1,sz);
ny = sqrt(sigma_n2)*randn(1,sz);
z(:, :, 1) = H*x(:, :, 1) + [nx(1); ny(1)]; % observatia initiala

% starile si observatiile la momentele urmatoare de timp
for k=2:sz
    x(:, :, k) = A*x(:, :, k-1) + [0; 0; wx(k-1); wy(k-1)];
    z(:, :, k) = H*x(:, :, k) + [nx(k); ny(k)];
end

Q = [0 0 0 0;
     0 0 0 0;
     0 0 sigma_w2 0;
```

```

    0 0 0 sigma_w2]; % matricea de covarianta a zgomotului de
proces

xhatminus = zeros(4,1,sz); % estimatul a priori a lui x
Pminus = zeros(4,4,sz); % estimatul erorii a priori
K(:, :, 1) = zeros(4,2); % castigul sau factorul de amestec
initial

R = [sigma_n2 0;
     0 sigma_n2]; % matricea de covarianta a zgomotului de
masurare

% ghicirea initiala
xhat(:, :, 1) = [5; 5; 0; 0]; % estimatul a posteriori a lui x
P(:, :, 1) = 10*eye(4); % estimatul erorii a posteriori

for k=2:n_iter
    % actualizare in timp
    xhatminus(:, :, k) = A*xhat(:, :, k-1);
    Pminus(:, :, k) = A*P(:, :, k-1)*A'+Q;

    % actualizare a masurarii
    K(:, :, k) = Pminus(:, :, k)*H'*inv( H*Pminus(:, :, k)*H'+R );
    xhat(:, :, k) = xhatminus(:, :, k)+K(:, :, k)*(z(:, :, k)-
H*xhatminus(:, :, k));
    P(:, :, k) = (eye(4)-K(:, :, k)*H)*Pminus(:, :, k);
end

valid_iter = [1:n_iter]-1;

figure(1);
clf;
for k=1:n_iter
    P_rx(k)=P(1,1,k);
end

plot(valid_iter,P_rx,'--ko');
xlabel('Iteratie');
ylabel('Covarianta deplasarii r_x');
grid on;
axis([min(valid_iter) max(valid_iter) 0 P_rx(2)])

figure(2);
clf;
for k=1:n_iter
    P_ry(k)=P(2,2,k);
end

plot(valid_iter,P_ry,'--ko');
xlabel('Iteratie');

```

```

ylabel('Covarianta deplasarii r_y');
grid on;
axis([min(valid_iter) max(valid_iter) 0 P_ry(2)])

figure(3);
clf;

for k=1:n_iter
    P_vx(k)=P(3,3,k);
end

plot(valid_iter,P_vx,'--ko');
xlabel('Iteratie');
ylabel('Covarianta vitezei de deplasare v_x');
grid on;
axis([min(valid_iter) max(valid_iter) 0 10*min(P_vx)])

figure(4);
clf;

for k=1:n_iter
    P_vy(k)=P(4,4,k);
end

plot(valid_iter,P_vy,'--ko');
xlabel('Iteratie');
ylabel('Covarianta vitezei de deplasare v_y');
grid on;
axis([min(valid_iter) max(valid_iter) 0 10*min(P_vy)])

% figurile pentru castigurile Kalman
figure(5);
clf;

for k=1:n_iter
    K_depl(k)=K(1,1,k);
end
plot(valid_iter,K_depl,'--ko');
xlabel('Iteratie');
ylabel('Castigul Kalman al deplasarii r_x');

grid on;

figure(6);
clf;
for k=1:n_iter
    K_vit_depl(k)=K(2,2,k);
end

plot(valid_iter,K_vit_depl,'--ko');

```



```

xlabel('Iteratie');
ylabel('Castigul Kalman al deplasarii r_y');
grid on;

valid_iter = [1:n_iter-1];
figure(7);
clf;
for k=1:n_iter
    rxhat_depl(k)=xhat(1,1,k);
    rx_depl(k)=x(1,1,k);
    zx_depl(k)=z(1,1,k);
    ryhat_depl(k)=xhat(2,1,k);
    ry_depl(k)=x(2,1,k);
    zy_depl(k)=z(2,1,k);
end
plot(rxhat_depl,ryhat_depl,'-ko',rx_depl,ry_depl,'-
go',zx_depl,zy_depl,'-rx');
title('Evoluatia deplasarii');
legend('deplasare adevarata','deplasare estimata','masurari');
xlabel('r_x');
ylabel('r_y');
grid on;

```

5. Aplicații propuse

1. Modificați programul din Secțiunea 3.1 astfel încât să generați câte $M = 100$ de măsurări la fiecare iterație, din maxim 300 posibile, a filtrării Kalman. Pentru fiecare iterație k calculați valoarea medie și varianța valorilor estimate \hat{x}_k din cele M realizări. Afișați, în funcție de numărul iterației k , pe un grafic valoarea medie a valorilor estimate și valoarea adevărată, iar pe alt grafic varianța valorilor estimate și limita inferioară Cramer-Rao pentru estimatul nedeplasat al nivelului de curent continuu. Pentru o mai bună vedere afișați graficele doar pentru următoarele valori lui k : 10, 20, 30, ..., 300. Modificați valoarea varianței estimate a zgomotului de măsurare R și a varianței estimate a zgomotului de proces Q și observați cum variază varianța valorilor estimate \hat{x}_k comparativ cu limita inferioară Cramer-Rao.

2. O secvență aleatoare în timp discret este dată de

$$x_{k+1} = Ax_k + w_k$$

unde $A = 0.5$, x_0 este o variabilă aleatoare cu medie 0 și varianță 1, iar w_k este zgomot alb de medie 0 și varianță 1. Ecuația de observație este dată de

$$z_k = x_k + v_k$$

cu v_k zgomot alb de medie 0 și varianță 1. Termenii x_0 , w_k și v_k sunt toți de tip gaussian.

Să se realizeze un program care să dea secvența estimată \hat{x}_k prin filtrare Kalman. Se vor considera diferite valori pentru varianța estimată a măsurării.

3. Să se realizeze același program ca la aplicația 1 pentru cazul în care $A=1$, zgomotul w_k are varianța 30, iar zgomotul v_k are varianța 20. Restul parametrilor, precum și ecuațiile rămân aceleași.

4. Un canal cu fading multicale acționează asupra semnalului transmis pe acesta ca un filtru cu răspuns finit la impuls având coeficienți variabili în timp conform ecuației:

$$y[k] = \sum_{i=0}^{p-1} h_k[i] \cdot u[k-i],$$

unde $u[k]$ este semnalul transmis pe canal, $y[k]$ este semnalul recepționat de pe canal, iar $h[k] = [h_k[0], h_k[1], \dots, h_k[p-1]]^T$ este vectorul coeficienților canalului la momentul k . Se presupune că acești coeficienți se modifică lent în timp, conform ecuației de stare

$$h[k] = [A] \cdot h[k-1] + w[k],$$

$[A]$ fiind o matrice cunoscută și $w[k]$ vectorul de zgomot de stare, presupus Gaussian de medie nulă, cu matrice de covarianță $[Q]$. Ieșirea canalului măsurată la momentul k este descrisă de ecuația de măsurare:

$$z[k] = y[k] + v[k],$$

unde $v[k]$ este zgomotul de măsurare, presupus Gaussian de medie nulă și varianță σ_v^2 . Să se estimeze prin filtrare Kalman coeficienții canalului. Pentru implementarea în

Matlab se va considera că $p=2$, $[A] = \begin{bmatrix} 0.99 & 0 \\ 0 & 0.999 \end{bmatrix}$, $[Q] = \sigma_w^2 \cdot [I_2]$, cu $\sigma_w^2 = 10^{-4}$, $\sigma_v^2 = 0.1$, iar semnalul de intrare în canal se consideră un semnal periodic cu perioada 10 de forma (pe o perioadă):

$$u[k] = \begin{cases} 0, & 0 \leq k < 5, \\ 1, & 5 \leq k < 10 \end{cases}$$