UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

Mecanica Teoretică

OSCILAȚIILE LIBERE.

Introducere

- Ecuaţia diferenţială a oscilaţiilor mecanice fără rezistenţă
  - oscilatorul cu arc elastic
  - pendulul matematic
  - pendulul fizic
- Caracteristicile principale ale oscilaţiilor armonice (amplitudinea, frecvenţa ciclică, frecvenţa, perioada).
- Energia oscilaţiilor armonice.
- Exemple.

Introducere

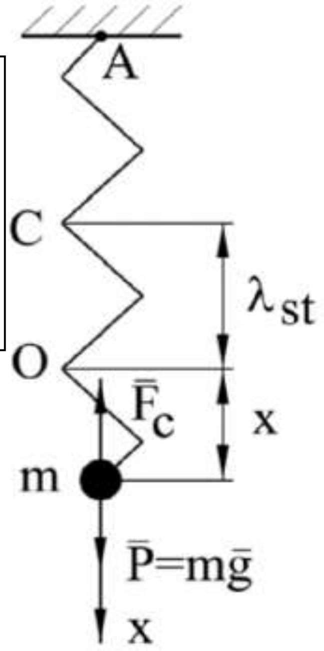
- Dintre diferite tipuri de mișcări mecanice, există un tip caracterizat prin repetarea periodică a stării mecanice a sistemului. Astfel de mișcare se numește **oscilație mecanică.**
- În această categorie de mișcări pot fi atribuite oscilațiile pendulelor, strunelor, diferitor detalii ale mașinilor și mecanismelor, construcțiilor, podurilor, temeliilor, corăbiilor, automobilelor și altele.
- În funcție de forța care asigură mișcarea oscilatorie deosebim oscilații **liniare** și **neliniare**.
- În funcție de caracterul deformației elementului rigid deosebim oscilații: longitudinale, transversale, de indoire, de răsucire...

Oscilațiile libere ale punctului material

Oscilațiile libere (sau **proprii**), sunt mișcări mecanice care au loc sub acțiune unei forțe, care este liniar dependentă de deplasare. Această forță se mai numește **de restabilire**

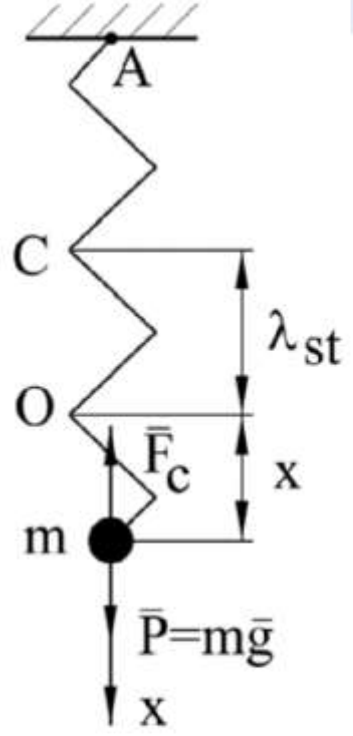
Spre exemplu, forța de elasticitate, care satisface legea lui Hooke, acționează ca forță de restabilire și crează condiții pentru apariția oscilațiilor în sistem.

Fie un corp de masă m suspendat de un arc elastic. Asupra corpului acționează forța de greutate $\vec{P}$ și forța de reacțiune a arcului elastic $\vec{F}_c = c\lambda$, unde c este coeficientul de elasticitate, iar λ – alungirea arcului.



Vom alege axa x orientată în jos, cu originea în poziția de echilibru static (adică în punctul O, unde forța de greutate $\vec{P}$ este echilibrată de reacțiunea statică a arcului $F_{st} = c\lambda_{st}$;
λ_{st} – alungirea statică a arcului).

Oscilațiile libere ale punctului material



Deosebim 2 poziții:

1. Echilibru static (greutatea stă nemișcată). În acest caz $\vec{P} + \vec{F}_{st} = 0$, sau în proiecții pe *x*:

$P - F_{st} = P - c\lambda_{st} = 0; \Rightarrow \boxed{P = c\lambda_{st}}$ (1.1)

Presupune o altă poziție a corpului, când acesta este deplasat la distanța *x* de la starea de echilibru static.

$\lambda = \lambda_{st} + x.$ (1.2)

reacțiunea arcului va fi

$F_{cx} = -c\lambda = -c(\lambda_{st} + x) = -P - cx$ (1.3)

În această stare, coprul nu este în echilibru, iar rezultanta forțelor asigură o mișcare accelerată. Conform legii II a lui Newton:

$\vec{P} + \vec{F}_{cx} = m\vec{a}$ (1.4)

x) $ma_x = P + F_{cx} = P - P - cx = -cx$

sau $\boxed{m\ddot{x} + cx = 0}$ (1.5)

Ecuaţia diferenţială a oscilaţiilor mecanice fără rezistenţă. Oscilatorul armonic

Așadar, $m\ddot{x} + cx = 0$

Vom nota $k_0^2 = c/m$,

$$\ddot{x} + k_0^2 x = 0 \quad (1.6)$$

Ecuația diferențială liniară de ordinul doi cu coeficienți constanți, omogenă.

Rezolvarea ecuației (1.6) poate fi realizată cu ajutorul ecuației *caracteristice*:

$$r^2 + k_0^2 = 0; \quad r_{1,2} = \pm k_0 i \quad (1.7)$$

! Rădăcinile complexe deja indică la faptul că procesul este oscilatoriu.

Soluția generală a ecuației (1.6) poate fi scrisă sub mai multe forme:

Forma complexă

$$x = C_1 e^{ik_0 t} + C_2 e^{-ik_0 t} \quad (1.8\ \text{a})$$

unde C_1 și C_2 sunt constante de integrare, care se determină din condițiile inițiale

Forma reală

$$x = A_1 \cos k_0 t + A_2 \sin k_0 t \quad (1.8\ \text{b})$$

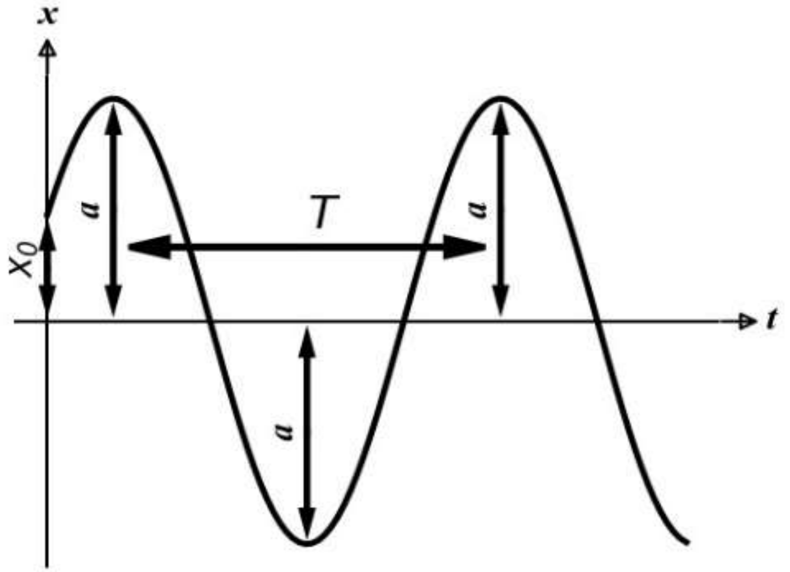
Forma comodă pentru aplicări tehnice

$$x = A_0 \sin(\alpha_0 + k_0 t) \quad (1.8\ \text{c})$$

-Ecuația oscilațiilor armonice

Caracteristicile principale ale oscilațiilor armonice

$$\boxed{x = A_0 \sin(\alpha_0 + k_0 t)}$$



Faza oscilațiilor

$\varphi = \alpha_0 + k_0 t$,

unde α_0 se numește **faza inițială**

(în momentul t = 0. În acest caz, $\varphi = \varphi_0 = \alpha_0$ *)*

Frecvența ciclică (sau pulsația)

$$\boldsymbol{k_0 = \sqrt{c/m}}$$

reprezintă numărul de oscilații în 2π *secunde*

Perioada

$$\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{k_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}}$$

intervalul de timp în decursul căruia faza oscilațiilor variază cu 2π

Frecvența

$$\boldsymbol{\nu = \frac{1}{T}}$$

mărimea inversă perioadei. Se măsoară în Hz

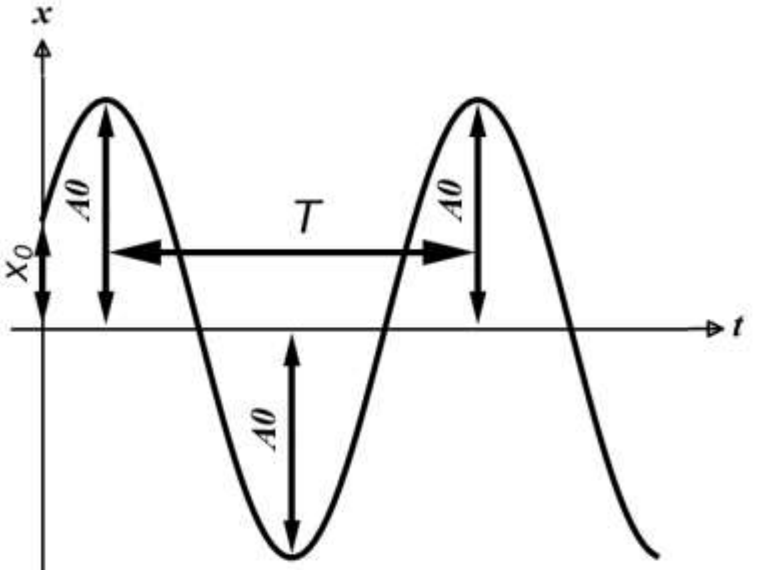
Caracteristicile principale ale oscilațiilor armonice

Amplitudinea și elongația

A_0 – amplitudinea oscilațiilor (*valoarea maximă a deviației de la starea de echilibru*)

x – elongația (*poziția curentă a punctului material*)

Dacă oscilațiile libere sunt caracterizate prin frecvență ciclică *k* sau perioadă *T*, care nu depinde de condițiile inițiale, atunci acestea (oscilațiile) se numesc *izocrone*.



$$\boxed{x = A_0 \sin(\alpha_0 + k_0 t)}$$

Viteza punctului în mișcare de oscilație

vom deriva (8c) după timp. $x = A_0 \sin(\alpha_0 + k_0 t)$

$$\dot{x} = A_0 k_0 \cos(\alpha_0 + k_0 t)$$

Accelerația punctului în mișcare de oscilație

$$\ddot{x} = -A_0 k_0^2 \sin(\alpha_0 + k_0 t)$$

PLANUL FAZIC

De regulă, mișcarea unui sistem cu un singur **grad de libertate** poate fi descrisă prin dependența de timp a coordonatei $x = x(t)$.

Există însă anumite cazuri, cum ar fi studiul oscilațiilor mecanice neliniare, când este mai convenabil de utilizat reprezentarea mișcării în planul fazic.

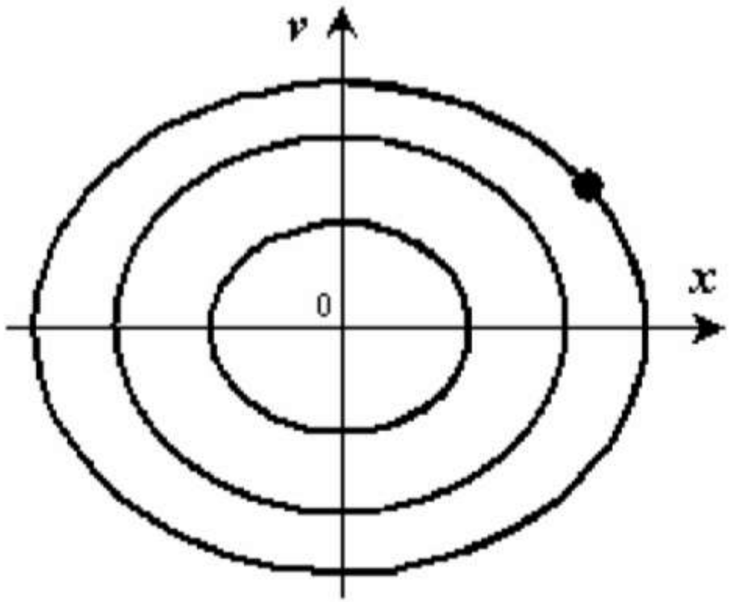
Starea sistemului în orice moment dat de timp t este determinată de o pereche de valori pentru elongație x și viteză $v = \dot{x}$.

Dacă vom alege un sistem de coordonate cartezian cu axele x și v, fiecare pereche de valori (x, v) poate fi reprezentată ca un punct pe acest plan.

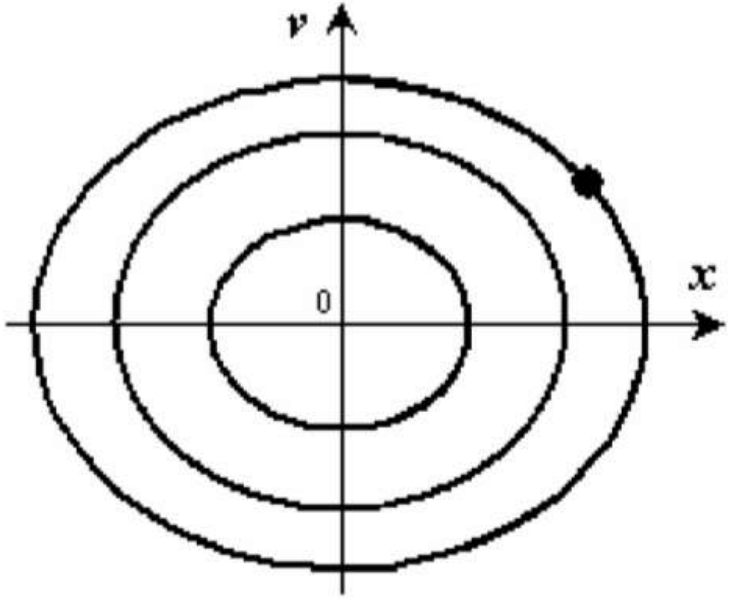
În acest caz, planul (x, v) se numește **plan fazic**.

În procesul de mișcare valorile (x, v) variază, deci, se schimbă și poziția punctului pe planul fazic.

Astfel **locul geometric al tuturor punctelor prin care trece sistemul se numește <u>traiectorie fazică</u>**



Exemplu



Fie un proces oscilatoriu descris prin ecuația $x(t) = A_0 \sin(k_0 t + \alpha_0)$

1. Viteza punctului $v = \dot{x} = A_0 k_0 \cos(k_0 t + \alpha_0)$
2. Vom exclude timpul din aceste ecuații:

$$\begin{cases} \sin(k_0 t + \alpha_0) = \dfrac{x}{A_0} \\ \cos(k_0 t + \alpha_0) = \dfrac{v}{A_0 k_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2(k_0 t + \alpha_0) = \left(\dfrac{x}{A_0}\right)^2 \\ \cos^2(k_0 t + \alpha_0) = \left(\dfrac{v}{A_0 k_0}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{x}{A_0}\right)^2 + \left(\frac{v}{A_0 k_0}\right)^2 = 1$$

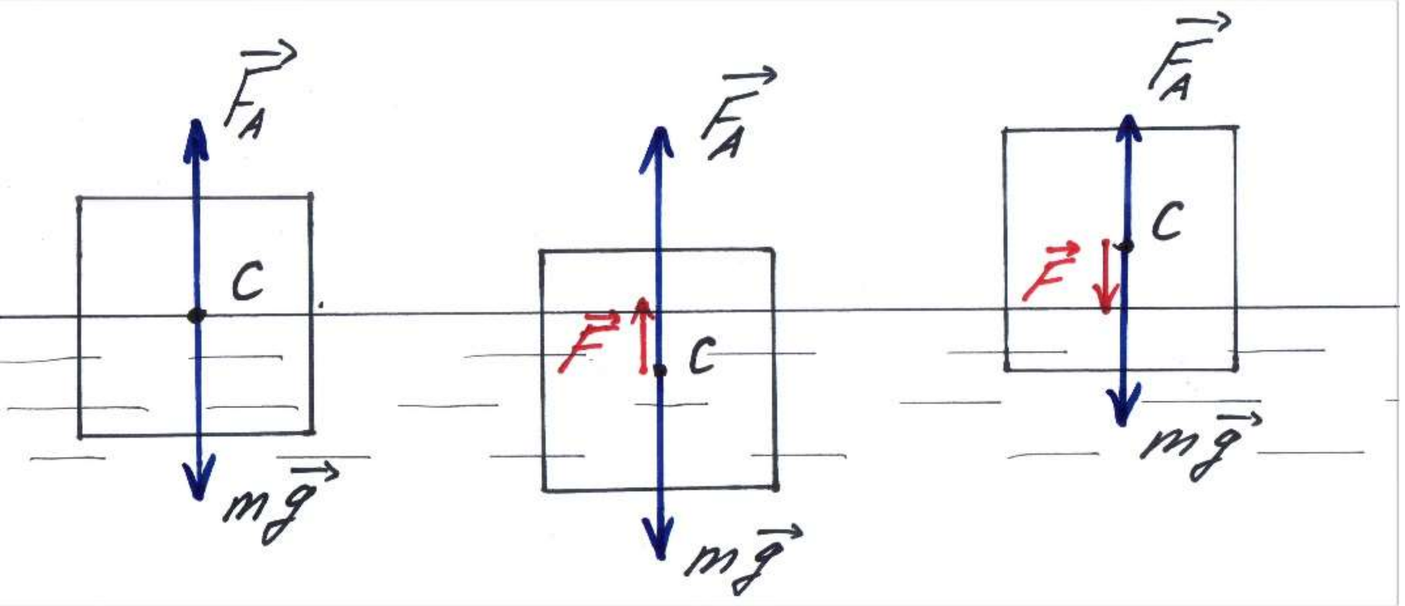
- ecuația traiectoriei fazice (elipsă). Semiaxele elipsei depinde de amplitudine și pulsație

Oscilațiile mecanice liniare sunt mișcările punctului material (sa ale unui sistem de puncte materiale, rigid) care au loc sub acțiune unei forței **de restabilire <u>liniară</u>**

$$F(x) = cx, \qquad (c = const.)$$

De exemplu, un ponton (corp care plutește pe suprafața apei).

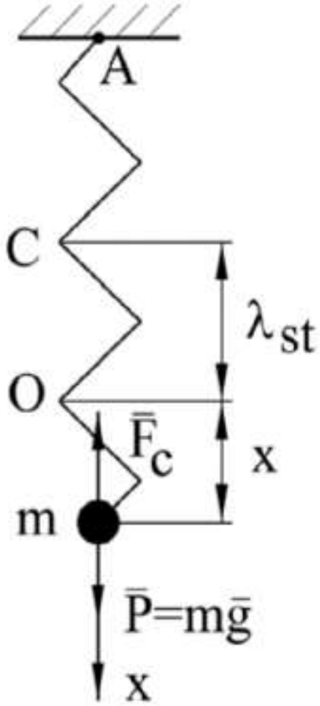
În acest caz, forța de restabilire este rezultanta forțelor Arhimede $\vec{F}_A$ și de greutate $m\vec{g}$, $\vec{F} = \vec{F}_A + m\vec{g}$. Astfel, corpul va realiza oscilații mici în vecinătatea stării de echilibru



SISTEME OSCILANTE. Pendulul elastic

Fie cunoscute: rigiditatea arcului elastic c = 19.6 N/m și masa corpului suspendat m = 0.1 kg.

Determinați oscilațiile libere verticale ale acestui corp



Anterior am determinat ecuația diferențială a mișcării punctului suspendat liber de un arc elastic:

$$\ddot{x} + k_0^2 x = 0$$

unde $k_0^2 = c/m$ – frecvența ciclică. Calculăm:

$$k_0^2 = \frac{c}{m} = \frac{19{,}6}{0{,}1} = 196\,\frac{N}{m\,kg}$$

Atunci ecuația diferențială devine:

$$\ddot{x} + 196x = 0$$

Ecuația caracteristică

$$r^2 + 196 = 0; \quad r_{1,2} = \pm 14i$$

Deci, soluția generală a ecuației diferențiale poate fi scrisă în forma:

$$\begin{cases} x = A_1 \sin 14t + A_2 \cos 14t - elongația \\ \dot{x} = 14A_1 \cos 14t - 14\,A_2 \sin 14t\ - viteza \end{cases}$$

SISTEME OSCILANTE. Pendulul elastic

Pentru determinarea constantelor de integrare A_1 și A_2vom ține cont de condițiile inițiale:

$$\begin{cases} x = A_1 \sin 14t + A_2 \cos 14t - elongația \\ \dot{x} = 14A_1 \cos 14t - 14\, A_2\, sin\, 14t \ - viteza \end{cases}$$

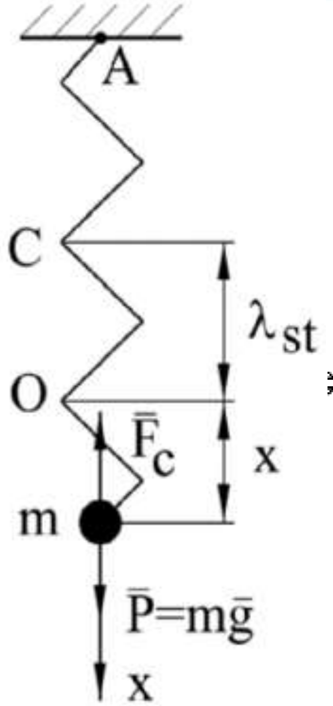
În cazul nostru, condițiile inițiale sunt:

$$t = 0, \begin{cases} x(0) = \ -\lambda_{st}\ (inițial\ corpul\ se\ află\ în\ poziția\ de\ echilibru\ static) \\ v_0(0) = \ \dot{x}_0(0) = 0\ (în\ această\ poziție\ corpul\ are\ viteza = 0) \end{cases}$$

Dacă înlocuim aceste valori în ecuațiile pentru elongație și viteză, se obține:

$$-\lambda_{st} = A_2; \quad 0 = 14A_1 \ \Rightarrow \ A_1 = 0, A_2 = \ -\lambda_{st} = \ -0{,}051\, m$$

! Amintim că $\lambda_{st} = \frac{P}{c} = \frac{mg}{c} = \frac{0{,}1\ kg * 10\ N/kg}{19{,}6\ N/m} = 0{,}051m$



$\boxed{P = c\lambda_{st}}$

Răspuns:

Corpul va realiza oscilații armonice descrise de ecuația $x(t) = \ -5 \cos 14t\, , cm$,

cu frecvența ciclică $k_0 = 14\ s^{-1}$,

perioada $T = 2\pi/k_0 = 0{,}449\ s$ și cu

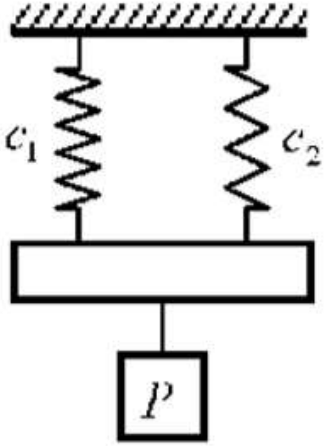
amplitudinea $A_0 = \lambda_{st} = 5\ cm$

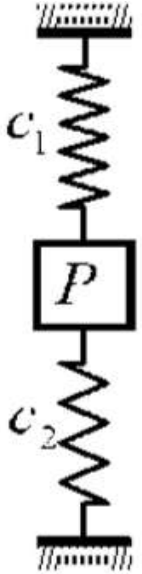
Cazuri particulare de conectare a arcurilor elastice

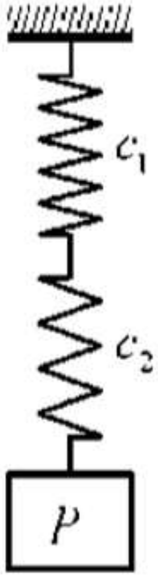
Conectare paralelă

În acest caz, coeficientul de elasticitate ***echivalent*** *este*

$$c = c_1 + c_2$$







Conectare în serie

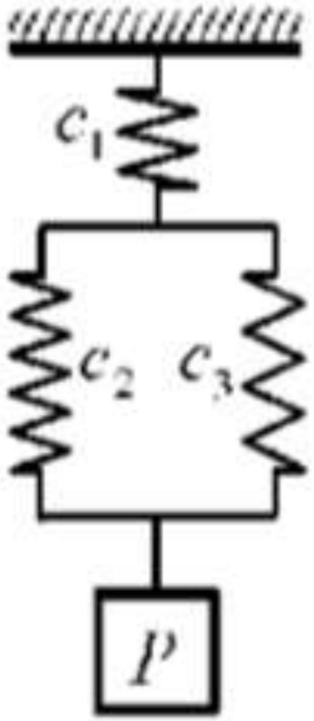
În acest caz, coeficientul de elasticitate ***echivalent*** *este*

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$$

Cazuri particulare de conectare a arcurilor elastice

Exemplu

Determinați coeficientul de elasticitate echivalent pentru configurația din desen



$$c_{2,3} = c_2 + c_3$$

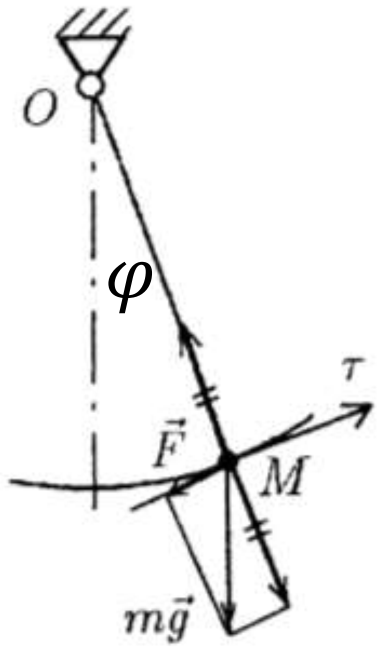
$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_{2,3}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2 + c_3}$$

sau

$$c = \frac{c_1(c_2 + c_3)}{c_1 + c_2 + c_3}$$

SISTEME OSCILANTE. Pendulul matematic

În acest caz, forța de restabilire este proiecția forței de greutate pe direcția tangentei la traiectorie.



Legea a II a lui Newton:

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a} \qquad (3.1)$$

În proiecții pe axele sistemului de coordonate naturale $(\vec{\tau}, \vec{n})$:

$$\begin{cases} ma_\tau = -mg\sin\varphi \\ m\dfrac{v^2}{l} = -mg\cos\varphi + T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mdv_\tau/dt = -mg\sin\varphi \\ m\dfrac{v^2}{l} = -mg\cos\varphi + T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi \\ m\dfrac{v^2}{l} = -mg\cos\varphi + T \end{cases} \qquad (3.2)$$

Unde φ este unghiul de deviație a firului față de verticală.

În prima ecuație, vom realiza substitui $v_\tau = \dot{s}$, unde s este coordonata curbilinie.
Dacă unghiul de deviație φ se exprimă în radiani,
atunci $s = l\varphi$ și $v_\tau = l\dot{\varphi}$.

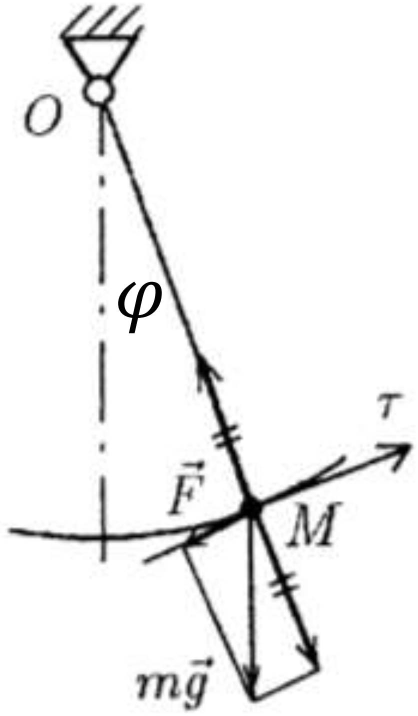
UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

SISTEME OSCILANTE. Pendulul matematic

Astfel, se obține ecuația diferențială a oscilațiilor pendulului:

$$a_\tau = -g\sin\varphi \Rightarrow \dot{v}_\tau + g\sin\varphi = 0 \;\Rightarrow$$

$$l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0$$



Aplicăm **aproximația armonică**, $\sin\varphi \approx \varphi$:

$$\boxed{\ddot{\varphi} + k_0^2\varphi = 0} \qquad (3.3)$$

! Aproximația armonică este aplicabilă pentru deviații **mici** de la starea de echilibru. În acest context, se estimează că pentru $\varphi = 20^0$, eroarea perioadei T este de ~ 0.8%, iar pentru $\varphi = 40^0$ – de 3%.

$$\varphi = \varphi_0 \sin(k_0 t + \alpha_0) \qquad (3.4)$$

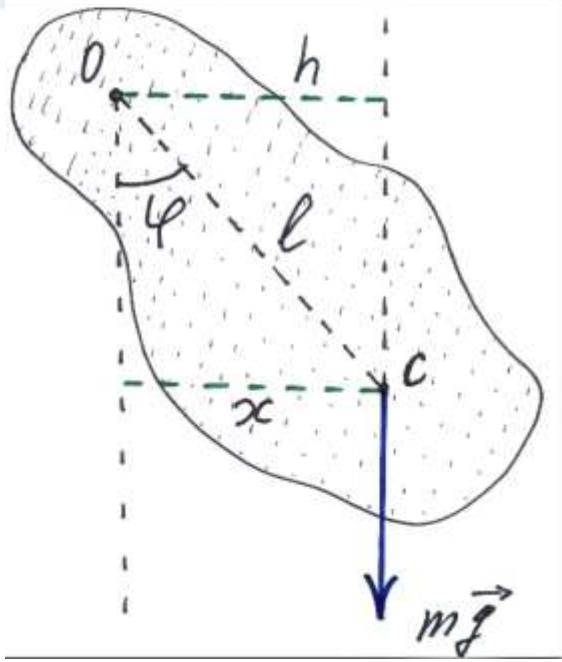
unde constanta φ_0 se determină din condițiile inițiale ale mișcării: $t = 0$

Perioada oscilațiilor

$$T = \frac{2\pi}{k_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (3.5)$$

SISTEME OSCILANTE. Pendulul fizic

Numim <u>pendul fizic</u> orice corp care, sub acțiunea forței de greutate, poate realiza oscilații în jurul unei axe orizontale *O*, care nu trece prin centrul său de greutate *C*.



Notăm:

- OC = *l* = *a* – distanța de la axa de rotație până la centrul de greutate
- *φ* – unghiul de deviație de la starea de echilibru
- *m* – masa pendulului.

Fie un moment aleatoriu de timp, în care pendulul este scos din starea de echilibru.

Asupra pendulului acționează momentul forței:

$$M = -mgh = -mgl\sin\varphi \qquad (4.1)$$

Momentul M tinde să readucă pendulul la starea de echilibru.

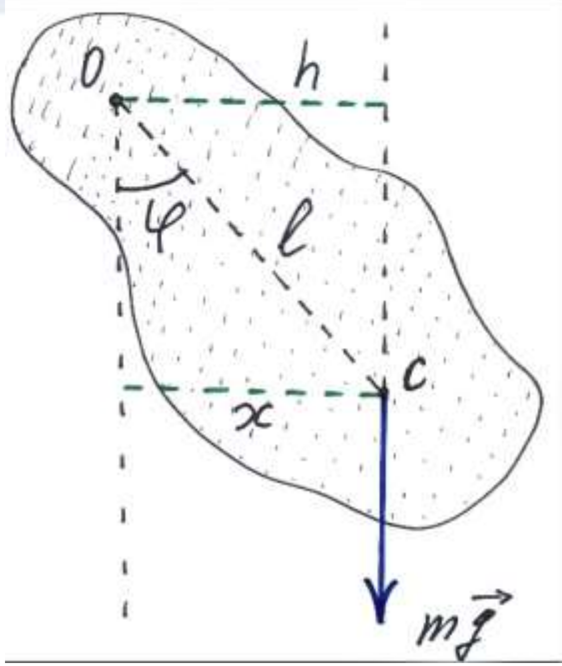
Ecuația diferențială a mișcării de rotație a rigidului are forma:

$$M = I_0\varepsilon, \qquad (4.2)$$

SISTEME OSCILANTE. Pendulul fizic

Ecuația diferențială a mișcării de rotație a rigidului are forma:

$$M = I_0 \varepsilon, \qquad (4.2)$$



unde $\varepsilon = d^2\varphi/dt^2$ – accelerația unghiulară, iar I_0 – momentul de inerție al pendulului în raport cu axa de suspendare O.

Astfel, pentru (4.2) se obține

$$I_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mga \sin\varphi \qquad (4.3)$$

Pentru <u>deviații mici</u> de la starea de echilibru, putem aplica <u>**aproximația armonică**</u>,

$$\sin\varphi \approx \varphi$$

Atunci (4.3) devine:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mga}{I_0}\varphi = 0 \qquad (4.4)$$

SISTEME OSCILANTE. Pendulul fizic

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mga}{I_0}\varphi = 0 \qquad (4.4)$$

Soluția ecuației (4.4) are forma:

$$\varphi(t) = A_0 \sin(k_0 t + \alpha_0) \qquad (4.5)$$

unde $k_0 = \sqrt{\frac{mga}{I_0}}$

Perioada pendulului fizic:

$$T = 2\pi/k_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mga}} \qquad (4.6)$$

Perioada pendulului matematic:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Introducem noțiunea de **lungime redusă a pendulului fizic**:

$$l_r = \frac{I_0}{ma} \qquad (4.7)$$

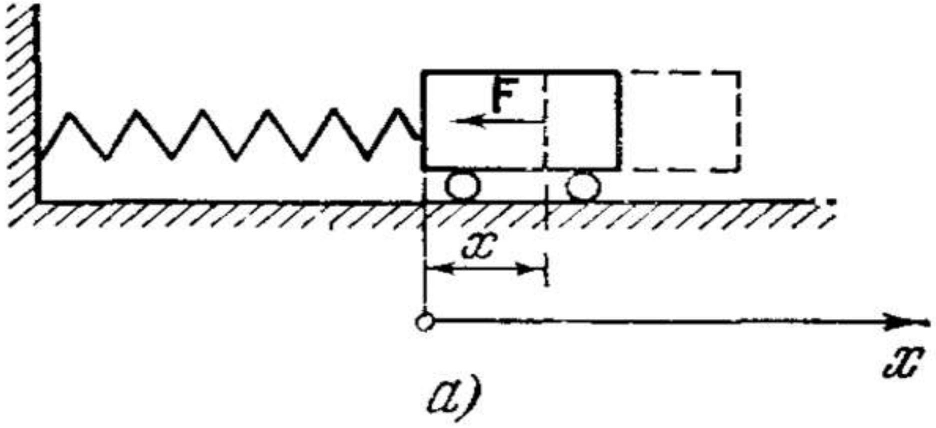
Atunci, formula (4.6) poate fi reprezentată ca:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}}}$$

ENERGIA OSCILAȚIILOR ARMONICE

Exemplu

Vom analiza un corp material legat de un resort, după cum este arătat în desen.



La extinderea resortului cu x, acesta va răspunde cu o forță de elasticitate orientată în sens opus extinderii:

$$F = cx, \qquad c - coef.de\ elasticitate$$

Conform legii a II a lui Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Dacă vom proiecta pe axa x:

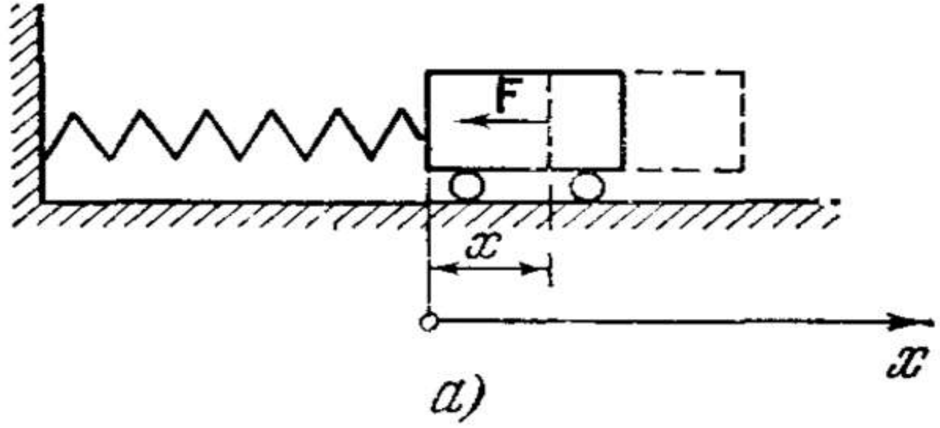
$$ma_x = -F = -cx \text{ sau } a_x + \frac{c}{m}x = 0 \text{ sau } \ddot{x} + k_0^2 x = 0$$

unde $k_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ – pulsația proprie a sistemului.

Soluția ecuației diferențiale este:

$x = A_0 \sin(k_0 t + \alpha_0)$. (*ecuația oscilatorului armonic)*

ENERGIA OSCILAȚIILOR ARMONICE



Exemplu

- Viteza punctului material care realizează această mișcare:

$$v = \dot{x} = A_0 k_0 \cos(k_0 t + \alpha_0)\ .$$

- Energia cinetică:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} m k_0^2 {A_0}^2 \cos^2(k_0 t + \alpha_0)$$

! Se observă că energia cinetică variază între

0 și $\frac{1}{4} m k_0^2 {A_0}^2$ cu frecvența ciclică $2k_0$

- Energia potențială:

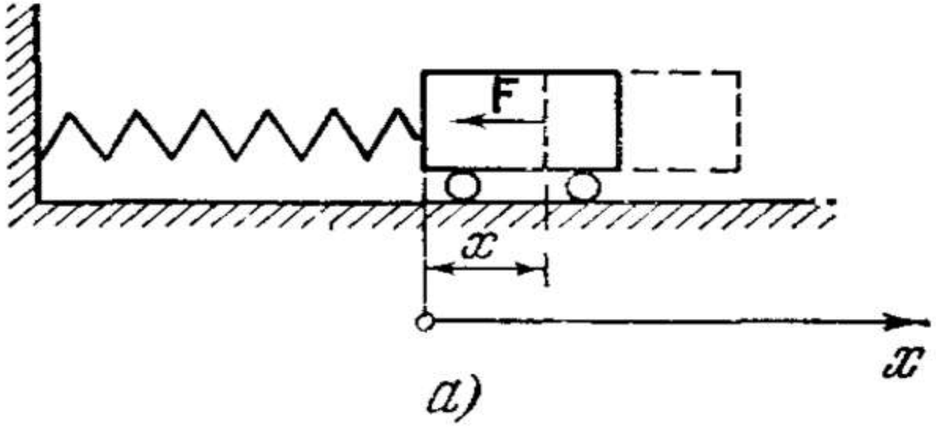
$$E_p = \frac{cx^2}{2} = \frac{c}{2} A_0^2 \sin^2(k_0 t + \alpha_0)$$

ENERGIA OSCILAȚIILOR ARMONICE

Așadar :

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{4} m k_0^2 {A_0}^2 \cos^2(k_0 t + \alpha_0)$$

$$E_p = \frac{cx^2}{2} = \frac{c}{2} A_0^2 \sin^2(k_0 t + \alpha_0)$$



Dacă vom aplica transformările trigonometrice

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha + \pi)}{2}$$

Obținem:

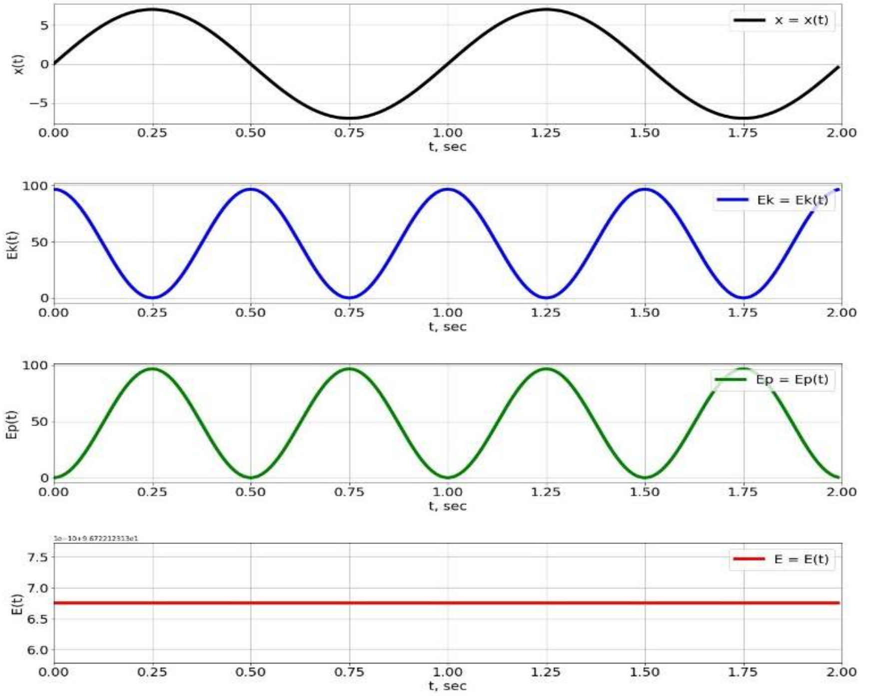
$$E_k = \frac{m k_0^2 A_0^2}{4} [1 + \cos(2k_0 t + 2\alpha_0)],$$

$$E_p = \frac{c A_0^2}{4} [1 + \cos(2k_0 t + 2\alpha_0 + \pi)]$$

ENERGIA OSCILAȚIILOR ARMONICE

$$E_k = \frac{mk_0^2 A_0^2}{4}\left[1 + \cos(2k_0 t + 2\alpha_0)\right],$$

$$E_p = \frac{cA_0^2}{4}\left[1 + \cos(2k_0 t + 2\alpha_0 + \pi)\right]$$



Observații:

Energia cinetică și potențială variază de la 0 la valoarea maximă cu pulsația $2k_0$

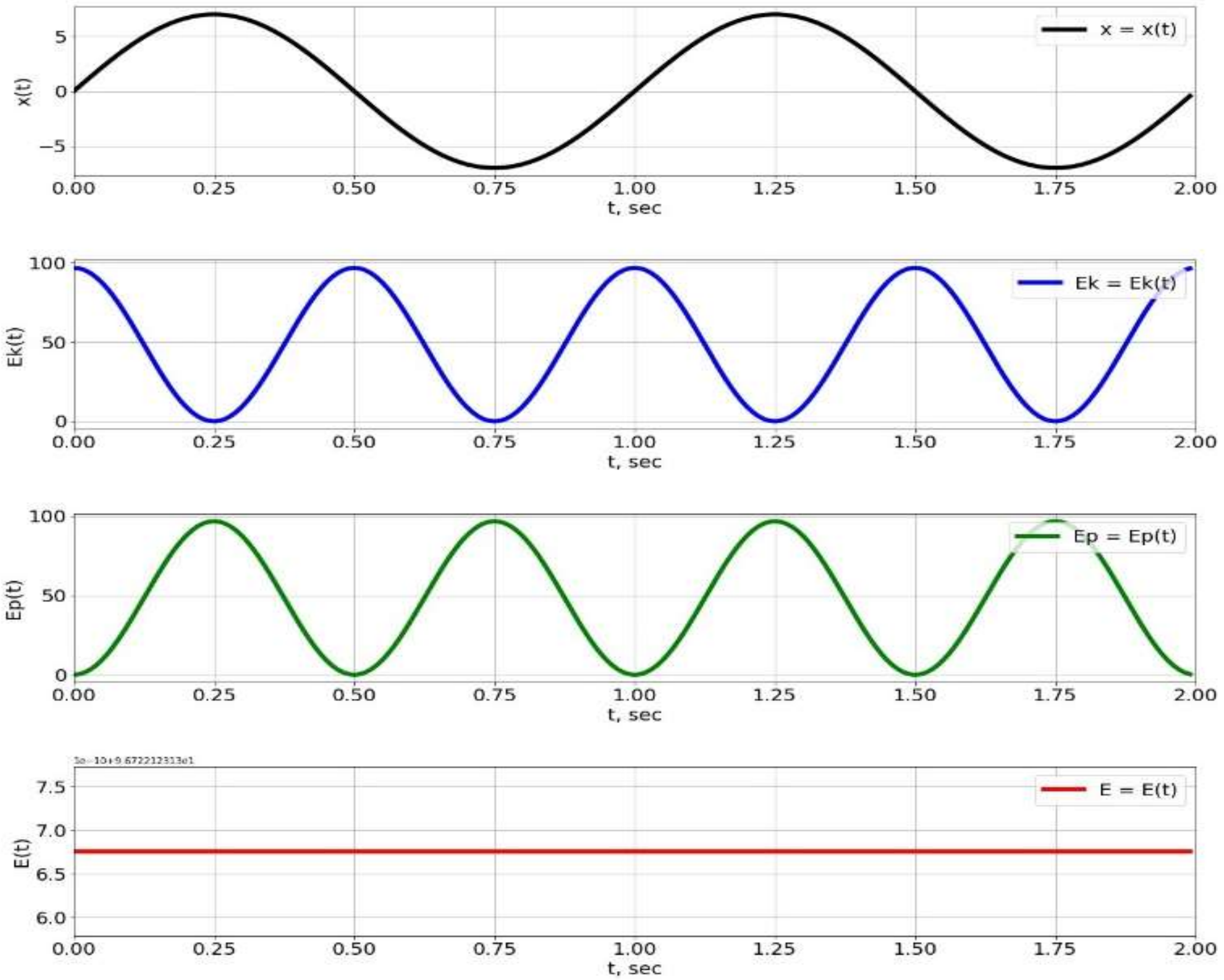
Energia potențială este defazată în retard cu π față de energia cinetică

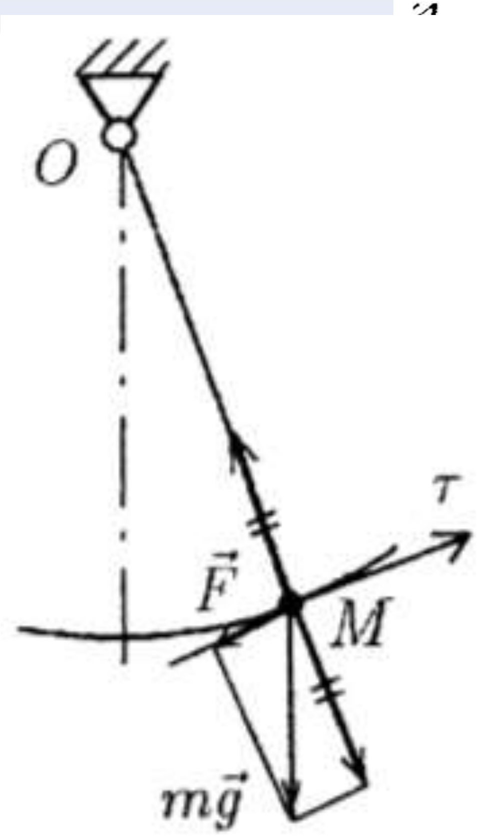
Energia totală a oscilatorului poate fi scrisă ca:

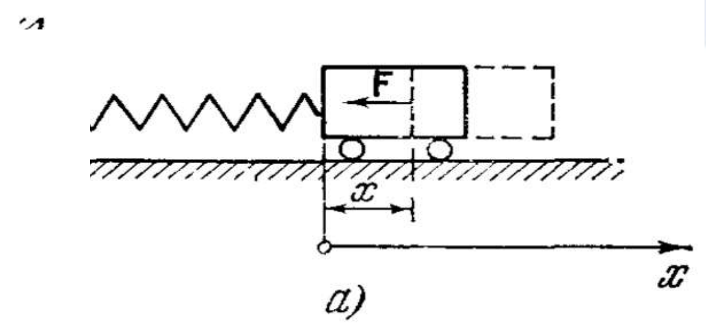
$$E = E_k + E_p = \frac{mk_0^2 A_0^2}{2}$$

Energia totală a sistemului oscilant este o mărime ***constantă***.

ENERGIA OSCILAȚIILOR ARMONICE





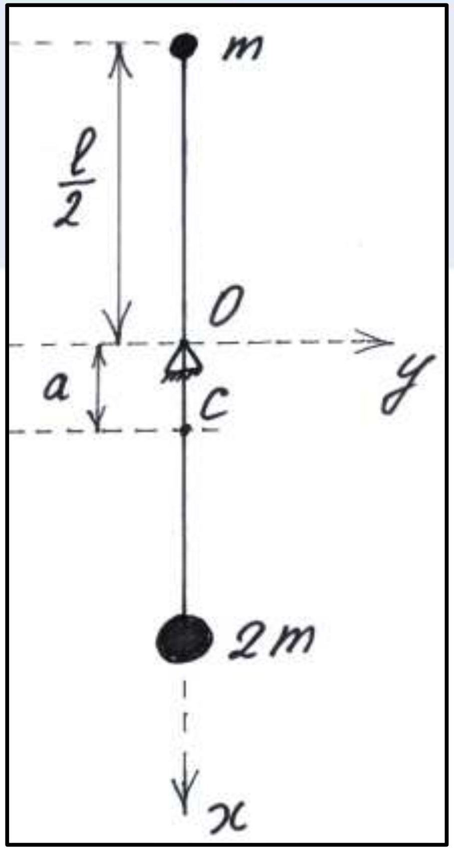


$2k_0 t + 2\alpha_0)],$

${}_0 t + 2\alpha_0 + \pi)]$

$\frac{mk_0^2 A_0^2}{2}$

EXEMPLE



Exemplul 1. Oscilațiile libere ale pendulului fizic

Determinați perioada oscilațiilor unui pendulului fizic reprezentat în desen.

Se cunoaște m = 0,5 kg, l = 1m. Pendulul efectuează oscilații armonice

în jurul axei O. Forțele de frecare și rezistență se neglijează.

Rezolvare

Formula de lucru: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{m_t g a}}$

Vom determina masa totală a sistemului (masa bilelor + masa barei) (m_t)

$$m_t = m + 2m + m = 4m = 2\ kg.$$

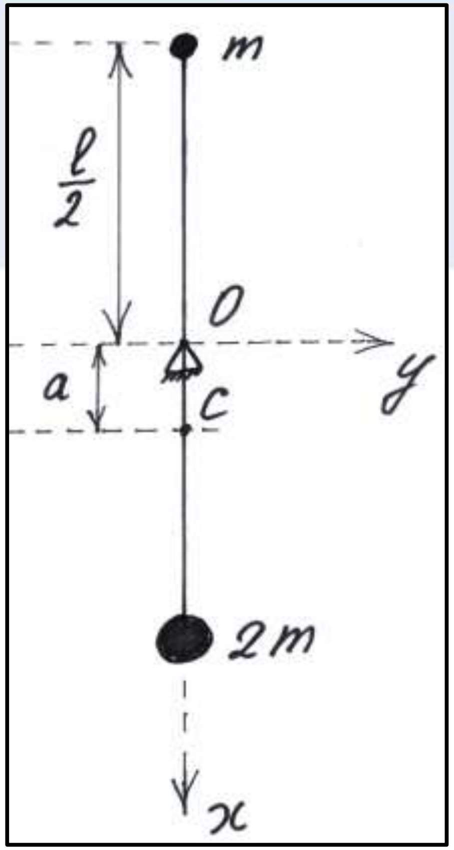
Poziția centrului maselor

$$a = \frac{1}{m_t}\sum_i m_i x_i = \frac{m*0 - \frac{ml}{2} + \frac{2ml}{2}}{4m} = \frac{l}{8}$$

Momentul de inerție total:

$$I_O = I_{1O} + I_{2O} + I_{3O} = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 + 2m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{5ml^2}{6}$$

EXEMPLE



Exemplul 1. Oscilațiile libere ale pendulului fizic

Determinați perioada oscilațiilor unui pendulului fizic reprezentat în desen.

Se cunoaște m = 0,5 kg, l = 1m. Pendulul efectuează oscilații armonice

în jurul axei O. Forțele de frecare și rezistență se neglijează.

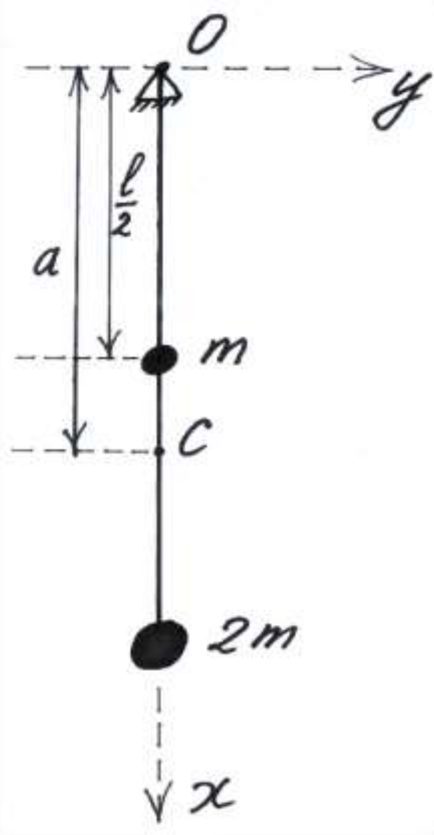
Rezolvare

4. Vom utiliza formula dedusă pentru perioadă:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{5ml^2}{6}}{\frac{4mgl}{8}}} = 2\pi\sqrt{\frac{5l}{3g}} = 2{,}56\, sec.$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

EXEMPLE



Exemplul 2. Oscilațiile libere ale pendulului fizic

Determinați perioada oscilațiilor unui pendulului fizic reprezentat în desen.

Se cunoaște m = 0,5 kg, l = 1m. Pendulul efectuează oscilații armonice

în jurul axei O. Forțele de frecare și rezistență se neglijează.

Rezolvare

Vom determina masa totală a sistemului (masa bilelor + masa barei) (m_t)

$$m_t = m + 2m + m = 4m = \ 2\,kg.$$

Poziția centrului maselor

$$a = \frac{1}{m_t}\sum_i m_i x_i = \frac{m*\frac{l}{2}+\frac{ml}{2}+2ml}{4m} = \frac{3l}{4}$$

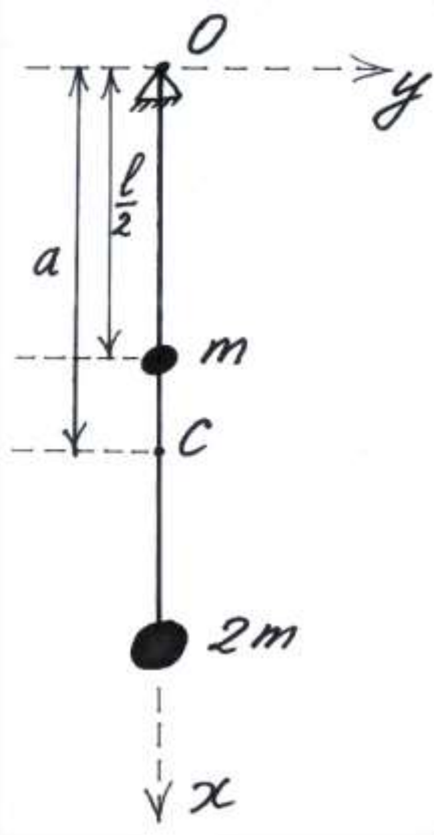
Momentul de inerție total: $I_O = I + I_{1O} + I_{2O}$

unde *I*– momentul de inerție al barei în raport cu axa *O*.

Teorema Huygeens Steiner:

$$I = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}$$

EXEMPLE



Teorema Huygeens Steiner:

$$I = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}$$

$I_{1O} = m\left(\frac{l}{2}\right)^2$ – momentul de inerție al bilei *m* în raport cu axa *O*

$I_{2O} = ml^2$ - momentul de inerție al bilei 2*m* în raport cu axa *O*

$$I_O = \frac{ml^2}{3} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 + 2ml^2 = \frac{31ml^2}{12}$$

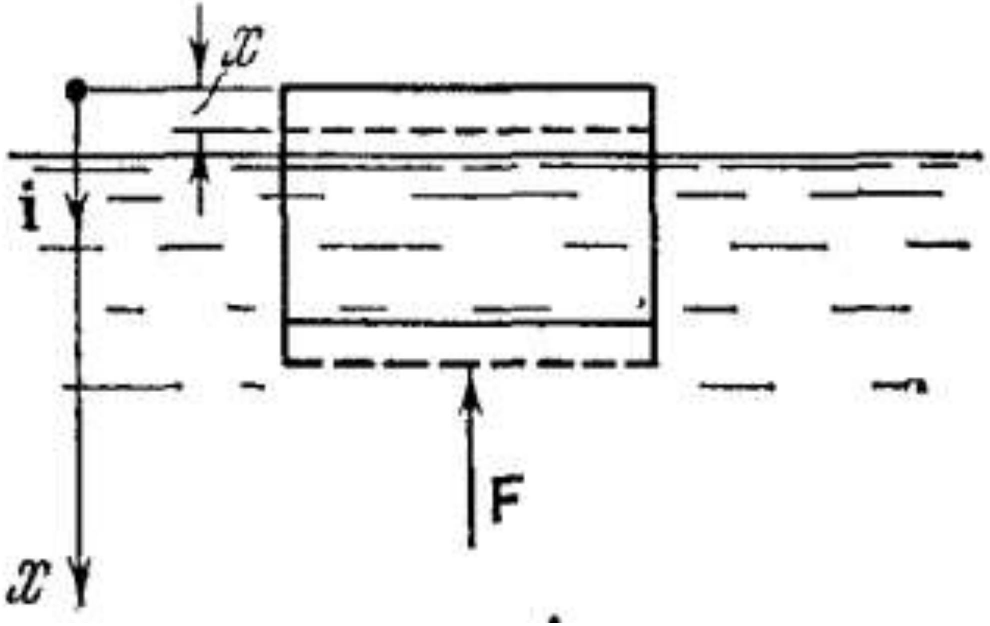
Vom utiliza formula dedusă pentru perioadă:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{31ml^2}{12}}{mg\frac{3l}{4}}} = 2\pi\sqrt{\frac{31l}{9g}} = 3{,}69\ sec.$$

Exemplul 3. Oscilațiile libere ale unui corp plutitor

Fie un corp de masă m, care plutește liber în apă.

Determinați perioada de oscilație a corpului în plan vertical.



Rezolvare

Asupra corpului acționează forța de greutate $m\vec{g}$ și forța Arhimede ($\vec{F}$).
În stare de echilibru, aceste două forțe formează un sistem echilibrat

$$(\vec{F} = -m\vec{g} \text{ și } F = mg).$$

Dacă corpul este scos din această stare (de ex. este scufundat puțin), forța Arhimede va crește, generând o rezultantă în sus.

Vom considera corpul paralelipiped. Forța suplimentară (Arhimede) care apare la scufundarea lui cu *x* va fi orientată în sens opus vectorului unitar ***i*** (vezi desenul):

$$\Delta\vec{F} = -\rho S x \vec{i}$$

unde ρ – densitatea apei, S – suprafața secțiunii corpului la linia de plutire (*waterline*).

EXEMPLE

$$\Delta\vec{F} = -\rho S x\vec{i}$$

Legea a II a lui Newton:

$\vec{F} + m\vec{g} = 0$ – în stare de echilibru

$\vec{F} + \Delta\vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a}$ – la deviația cu x de la echilibru

Din primul caz $\vec{F} = -m\vec{g}$ și obținem ecuația:

$\Delta\vec{F} = m\vec{a}$, sau $-\rho S x\vec{i} = m a_x \vec{i}$

Ambele proiecții sunt pe axa x. $-\rho S x = m a_x$ sau $m\ddot{x} + \rho S x = 0$

Aducem ecuația diferențială la forma oscilatorului armonic:

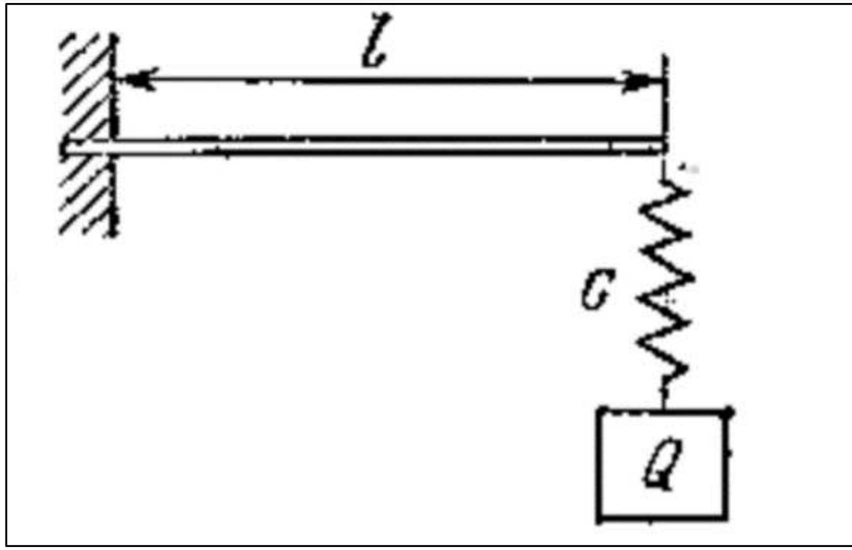
$$\ddot{x} + \frac{\rho S}{m}x = 0, \qquad \ddot{x} + k_0^2 x = 0$$

unde $k_0 = \sqrt{\frac{\rho S}{m}}$ – frecvența ciclică

Așadar, corpul plutitor, va realiza oscilații armonice cu perioada

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho S}}$$

De exemplu, un pod plutitor cu $S = 20\ m^2$ și $m = 3*10^4$ kg va oscila cu o perioadă $T = 2.45$ sec



Exemplul 4. Oscilațiile libere ale unui corp

Determinați frecvența oscilațiilor proprii ale greutății Q de masă m, suspendată la capătul unei bare elastice de lungime l. Corpul este suspendat de un resort cu elasticitate c. Coeficientul de elasticitate la capătul bare se determină conform formulei $c_1 = 3EJ/l^3$ *(unde E este modulul de elasticitate, iar J – momentul de inerție). Bara se consideră imponderabilă.*

Rezolvare

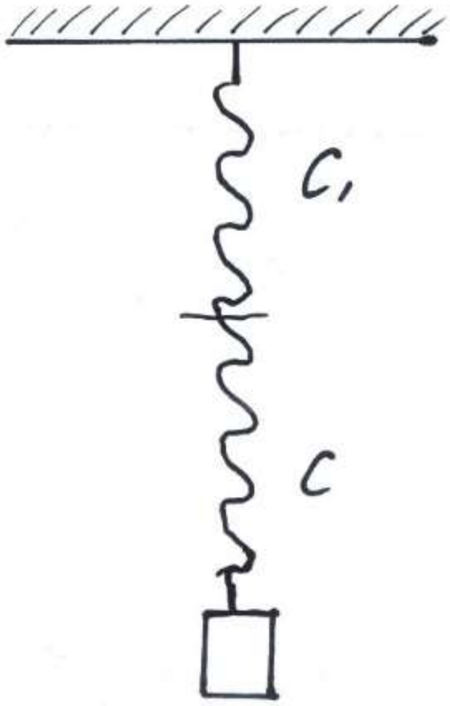
Construim schema echivalentă a sistemului:

Înlocuim bara cu un resort echivalent,

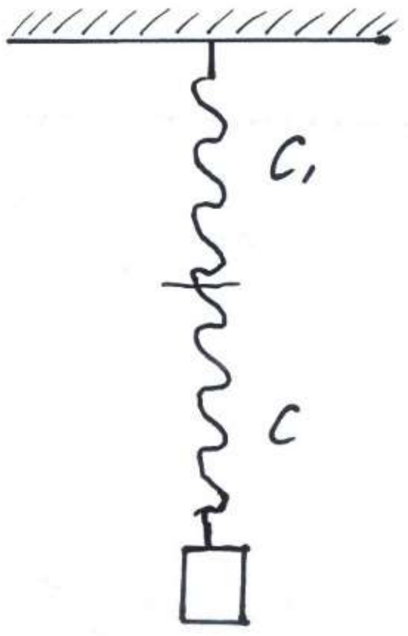
cu coeficient de elasticitate $c_1 = 3EJ/l^3$.

Se obține un sistem format din două resorturi

c_1 și c, conectate în serie.



Exemplul 4. Oscilațiile libere ale unui corp



Determinați frecvența oscilațiilor proprii ale greutății Q de masă m, suspendată la capătul unei bare elastice de lungime l. Corpul este suspendat de un resort cu elasticitate c. Coeficientul de elasticitate la capătul bare se determină conform formulei $c_1 = 3EJ/l^3$ *(unde E este modulul de elasticitate, iar J – momentul de inerție). Bara se consideră imponderabilă.*

Rezolvare

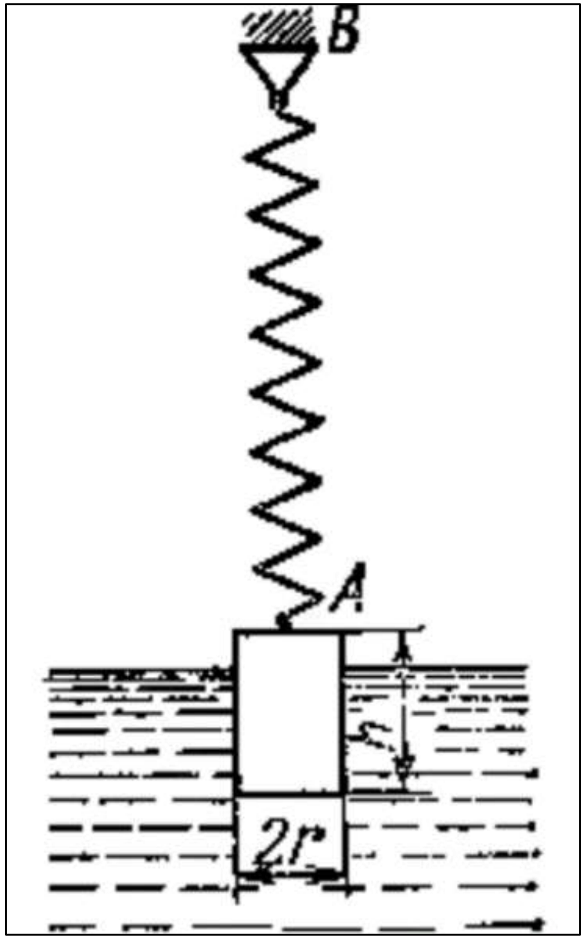
Coeficientul de elasticitate echivalent va fi:

$$c_0 = \frac{c_1 c}{c_1 + c} = \frac{3EJc}{3EJ + cl^3}$$

Sistemul efectuează oscilații armonice. În acest caz, frecvența proprie de pulsație este:

$$k_0 = \sqrt{\frac{c_0}{m}} = \sqrt{\frac{3EJc}{m(3EJ + cl^3)}}$$

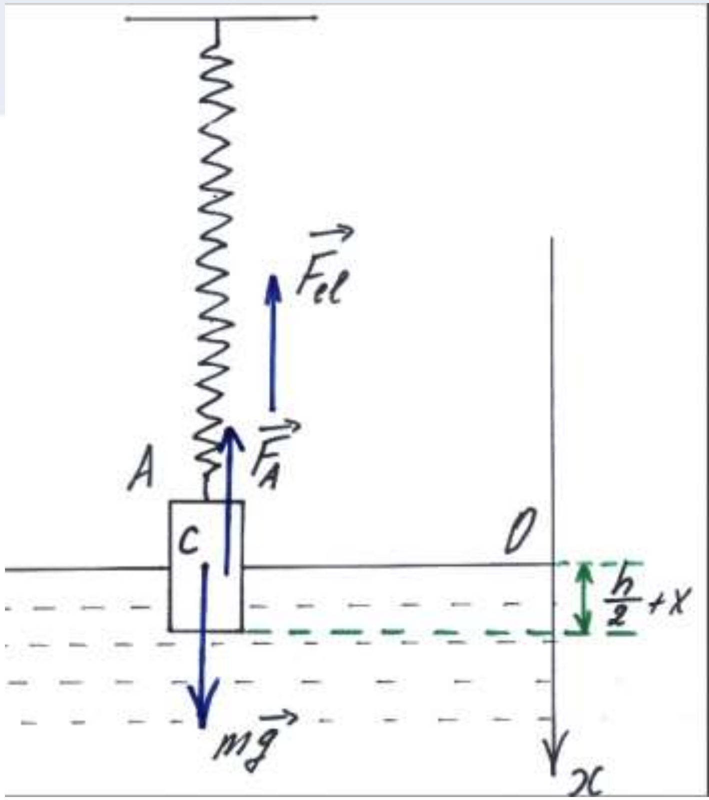
Exemplul 5. Oscilațiile libere ale unui corp scufundat



Un cilindru de greutate P, rază r și înălțime h este suspendat de resortul AB, fixat în punctul de sus B. În poziția de echilibru cilindrul este scufundat în apă până jumătate din înălțimea sa. Apoi, fiind scufundat la 2/3 din h, este lăsat, fără viteză inițială, să oscileze în direcție verticală.

Coeficientul de elasticitate a resortului este egal cu c.
Considerând că acțiunea apei se rezumă doar la apariția forței Arhimede, determinați ecuația de mișcare a cilindrului în raport cu poziția de echilibru.
Densitatea apei se va considera ρ

EXEMPLE



1. Setăm axa de coordonate *x* în direcția mișcării. Originea sistemului de coordonate se va considera în poziția de echilibru static al centrului maselor cilindrului (C).

2. În poziție de echilibru static:

$$m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_{el} = 0$$

3. Forța de elasticitate:

$$F_{el} = c\lambda_{st}$$

unde λ_{st} *este deformarea resortului în poziție de echilibru static, iar x este deviația (elongația) cilindrului în timpul oscilației.*

Forța Arhimede:

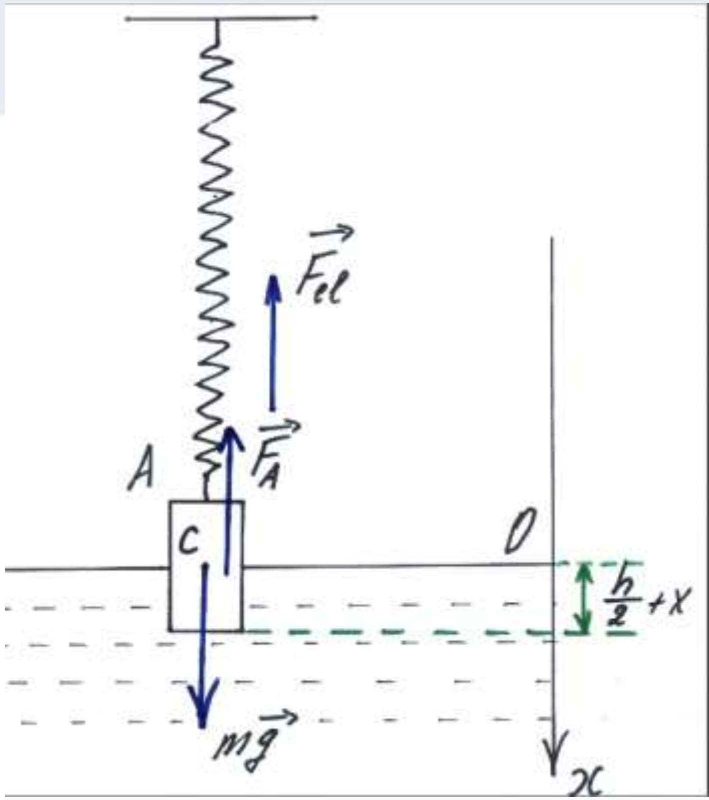
$$F_A = \rho \cdot \pi r^2 \frac{h}{2}$$

In proiecții pe axa *x*:

$$x)\; mg - \rho \cdot \pi r^2 \left(\frac{h}{2}\right) - c\lambda_{st} = 0$$

Din această ecuație se determină deviația statică λ_{st}

EXEMPLE



Fiin deviat cu x în jos de la poziția de echilibru, cilindrul se va mișca accelerat, sub acțiunea rezultantei celor trei forțe. Ecuația diferențială va fi:

$$m\ddot{x} = mg - F_{el} - F_A$$

unde $F_{el} = c(\lambda_{st}+x)$, $F_A = \rho \cdot \pi r^2 \left(\frac{h}{2} + x\right)$.

Înlocuind în ecuația diferențială, ținând cont de starea de echilibru static și împărțind la m obținem:

$$\ddot{x} + \frac{c+\rho\cdot\pi r^2}{m} x = 0, \text{ unde } m = \frac{P}{g}$$

Soluția ecuației diferențială va fi căutată în forma:

$$x(t) = A_0 \sin(k_0 t + \alpha_0)$$

Condițiile inițiale: $t = 0: x_0 = \frac{h}{6}; \dot{x}_0 = 0$. Se obține $A_0 = h/6,\ \alpha_0 = \pi/2$. Atunci soluția devine:

$$x(t) = \frac{1}{6} h \cos k_0 t, \text{ unde } k_0 = \sqrt{\frac{g}{P}(c + \rho \cdot \pi r^2)}$$

Bibliografie

1. Butenin N. V. I. L. Lunţ, D. R. Merkin Curs de mecanică teoretică. Vol. 1, 2. Chişinău 1993.
2. Caraganciu V. M. Colpajiu, M. Ţopa Mecanica teoretică. Chişinău 1994
3. I. V. Meşcerskii. Culegere de probleme la MT, Chişinău, 1991.
4. Caraganciu V. MT, Compendiu şi probleme, 2008
5. С. М. Тарг Краткий курс теоретической механики. Наука, Москва, 1967
6. V. Szolga. Mecanica teoretică. Vol. 1. Statica, Divers-press, Bucureşti, 1994