Energia cinetică.Lucrul mecanic. Energia potențială.Energia mecanică

§1. Energia cinetică

Energia cinetică (notație- T) este o mărime fizică scalară, ea reprezintă una din măsurile principale ale mișcării mecanice. Cercetând comportamentul ei vom obține informații utile despre mișcarea sistemului mecanic. Definim noțiunea de energie cinetică:

- ***Punct material (m-masa, v-viteza) :***

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

- ***Sistem de puncte materiale (sistem mecanic):***

$$T = \frac{1}{2}\sum_{n} m_k v_k^2$$

- ***Corp rigid:***

$$T = \frac{1}{2}\int_{(m)} v^2 \cdot dm$$

•***Sistem mecanic ce face mișcare compusă (punctul C – centrul maselor, sistemul de coordonate mobil face mișcare de translație și are originea în centrul maselor)***

$$v_k = v_e + v_{rk} = v_C + v_{rk}$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_n m_k v_k^2 = \frac{1}{2}\sum_n m_k (v_C + v_{rk})^2 = \frac{v_C^2}{2}\overset{M}{\sum_n m_k} + v_C \overset{M\cdot v_{Cr}=0}{\sum_n m_k v_{rk}} + \frac{1}{2}\sum_n m_k v_{rk}^2$$

M-masa sistemului mecanic. Al doilea termen este egal cu zero. El reprezintă viteza relativă a centrului maselor în raport cu el însuși.

$$\boxed{T = \frac{M v_C^2}{2} + T_r^{(C)}}$$

Teorema König

§2. Energia cinetică a rigidului

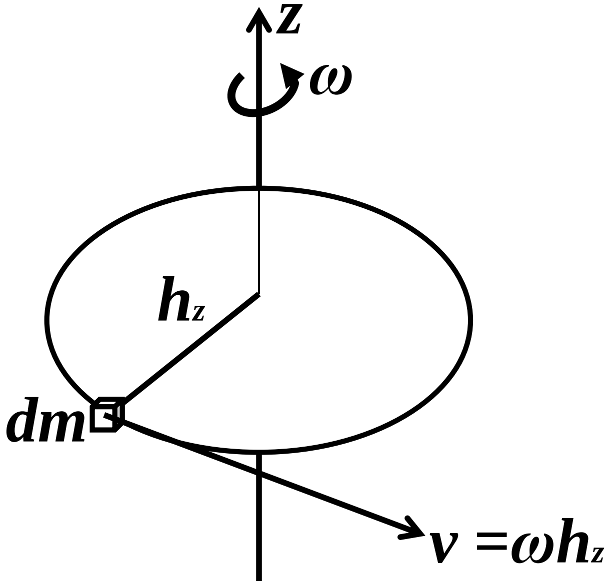
Formulile de calcul depind de tipul mişcării:

- ***Mişcare de tranşlaţie:***

$$T = \frac{1}{2}\int_{(m)} v^2 dm = \frac{v^2}{2}\int_{(m)} dm = \frac{Mv_C^2}{2}$$

$$\boxed{T = \frac{Mv_C^2}{2}}$$

- ***Mişcarea de rotaţie (ω- viteza unghiulară ; z-axa de rotaţie)***

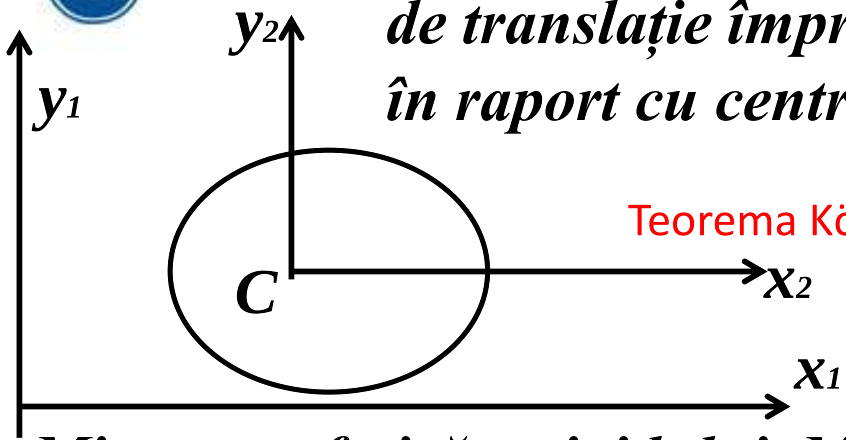


$$T = \frac{1}{2}\int_{(m)} v^2 dm = \frac{1}{2}\int_{(m)} \omega^2 h_z^2 dm = \frac{\omega^2}{2}\int_{(m)} h_z^2 dm = \frac{\omega^2}{2} I_z$$

$$\boxed{T = \frac{I_z\omega^2}{2}}$$

I_z – momentul de inerţie al rigidului în raport cu axa de rotaţie.

•***Mișcarea plan-paralelă a rigidului.Această mișcare este o mișcare compusă. Sistemul mobil face mișcare de translație împreună cu centrul maselor, iar rigidul în raport cu centrul maselor face mișcare de rotație.***



Teorema König

$$\boxed{T = \frac{Mv_C^2}{2} + T_r^{(C)}}$$

$$\boxed{T = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{I_{Cz}\omega^2}{2}}$$

•***Mișcarea sferică a rigidului. Mișcarea sferică poate fi privită ca o mișcare momentană de rotație în jurul axei momentane, toate punctele axei momentane au viteze egale cu zero. Axa momentană trece prin punctul fix al rigidului (I_ω - momentul de inerție în raport cu axa momentană.)***

$$\boxed{T = \frac{I_\omega \omega^2}{2}}$$

Mișcarea sferică

$$\boxed{T = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{I_{C\omega}\omega^2}{2}}$$

Mișcarea corpului liber

§3. Lucrul elementar. Lucrul Mecanic. Puterea

1. Lucrul elementar- dA

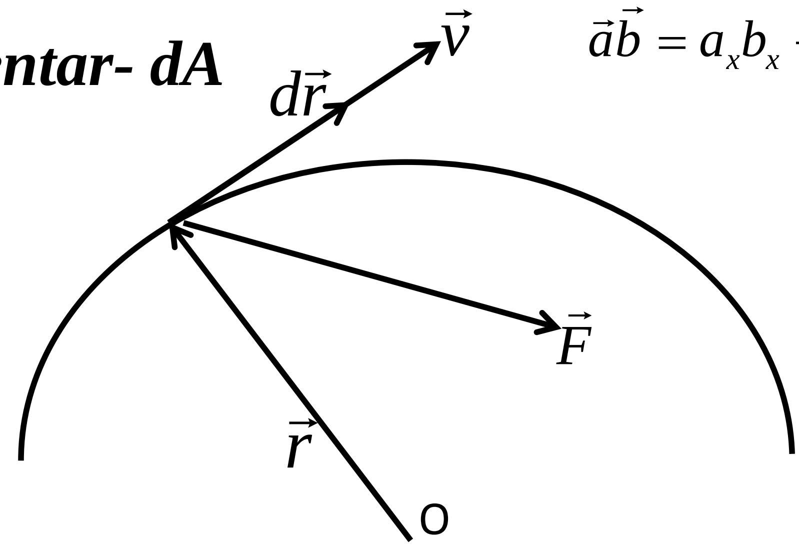
$$\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$d'A = \vec{F}d\vec{r}$$

$$d'A = \vec{F}\vec{v}dt$$

$$d'A = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$



2. Lucrul mecanic- A (integralele,în caz general, sunt curblineare)

$$A = \int d'A = \int \vec{F}d\vec{r} \qquad A = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

$$A = \int \vec{F}\vec{v}dt$$

3. Puterea

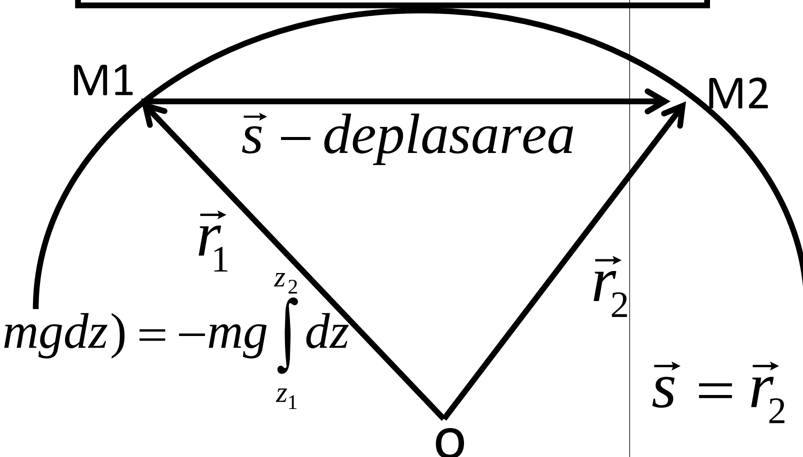
$$P = \frac{d'A}{dt} = \vec{F}\vec{v} \qquad P = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z$$

§4. Lucrul mecanic pentru forțe concrete

1. F=const. Forță constantă după modul și direcție

$$\boxed{A = F \cdot s \cdot \cos\alpha}$$

$$A = \int \vec{F} d\vec{r} = \vec{F} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} = \vec{F}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{F}\vec{s} = Fs\cos\alpha$$



$$\vec{s} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

2. *F=mg*. *Forța de greutate*

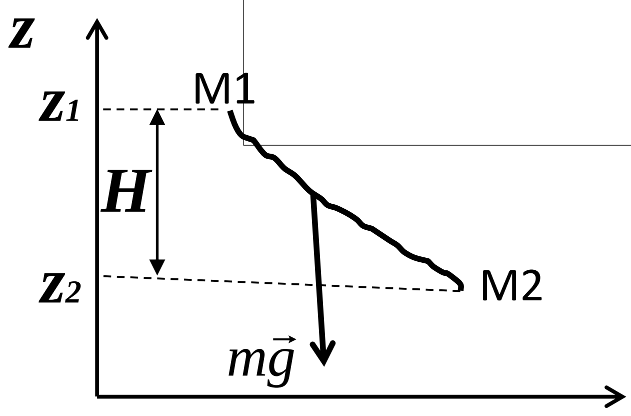
$$A = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int_{z_1}^{z_2} (0 \cdot dx + 0 \cdot dy - mgdz) = -mg \int_{z_1}^{z_2} dz$$

$$A = mg(z_1 - z_2) = mgH$$

$$\boxed{A = \pm mgH}$$

+mișcare în jos

- mișcare în sus

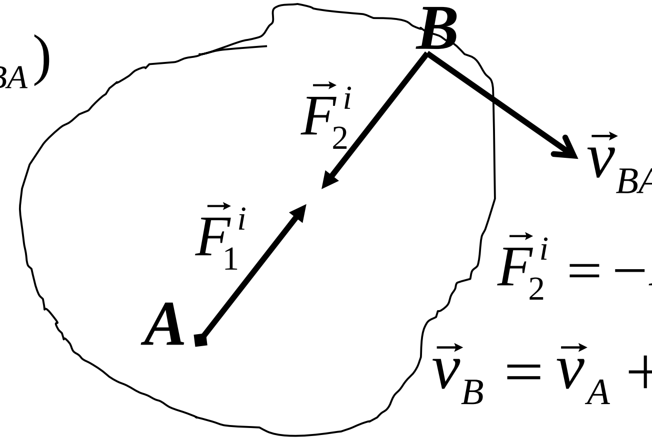


3.Forțele interioare ale rigidului

$$P = \vec{F}_1^i \vec{v}_A + \vec{F}_2^i \vec{v}_{\mathbf{B}} = \vec{F}_1^i (\vec{v}_A - \vec{v}_B) = \vec{F}_1^i (\vec{v}_A - \vec{v}_A - \vec{v}_{BA})$$

$$P = -\vec{F}_1^i \vec{v}_{BA} = -F_1^i v_{BA} \cos 90 = 0$$

$$\boxed{A^i = 0}$$

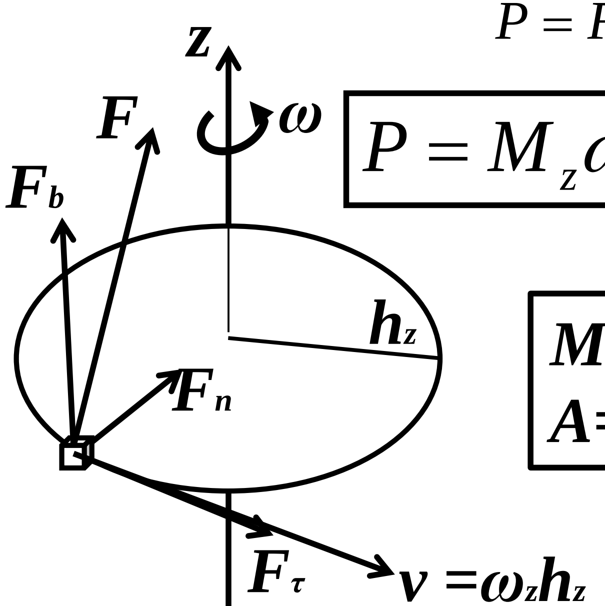


$$\vec{F}_2^i = -\vec{F}_1^i$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

4. Lucrul forței aplicate la rigid ce face mișcare de rotație

$$P = \vec{F}\vec{v} = F_\tau v_\tau + F_n v_n + F_b v_b = F_\tau v_\tau + F_n \cdot 0 + F_b \cdot 0 = F_\tau \omega_z h_z$$



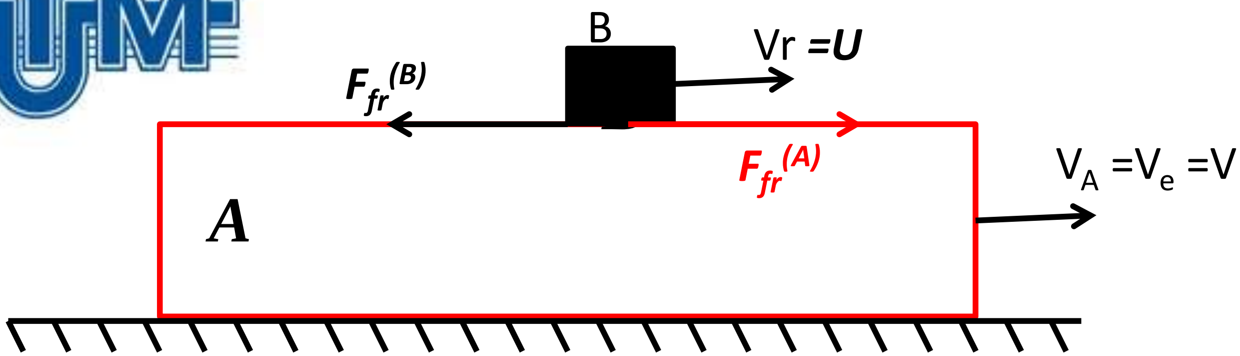
$$\boxed{P = M_z \omega_z}$$

Puterea la mișcarea de rotație. Mz- momentul forței

$$A = \int_0^t P dt = \int_0^t M_z \omega_z dt = \int_0^t M_z d\varphi$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{Mz = const = \pm M} \\ \boldsymbol{A = \pm M\varphi} \end{array}}$$

5.Lucrul forțelor interioare de frecare



$$\vec{v}_B = \vec{v}_r + \vec{v}_e = \vec{u} + \vec{v}$$

$$P = \vec{F}_{fr}^{(A)}\vec{v}_A + \vec{F}_{fr}^{(B)}\vec{v}_B = \vec{F}_{fr}^{(A)}(\vec{v} - \vec{u} - \vec{v}) = -\vec{F}_{fr}^{(A)}\vec{u} = -F_{fr}u$$

$$P = -F_{fr} \cdot v_r$$

Puterea forțelor interioare este negativă. Ea este egală cu produsul dintre forța de frecare și viteza relativă. Lucrul elementar este

$$\boxed{\begin{gathered} d'A_{fr}^{i} = -F_{fr}dx_r \\ d'A_{fr}^{i} = -M_{fr}d\varphi_r \end{gathered}}$$

§5. Teorema variației energiei cinetice pentru un punct material

Fie că avem un punct material ce se mișcă sub acțiunea mai multor forțe, rezultanta cărora este F. Energia cinetică $T=mv^2/2$. Pentru a studia variația energiei cinetice calculăm derivata după timp($m\vec{a}=\vec{F}$ ***):***

$$\frac{dT}{dt}=\frac{d\left(\frac{mv^2}{2}\right)}{dt}=\frac{2m\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}}{2}=m\vec{v}\vec{a}=\vec{F}\vec{v}$$

$$dT=\vec{F}\vec{v}dt=d'A$$

$$\boxed{\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=A}$$

Variația energiei cinetice a punctului material este egală cu lucrul mecanic, efectuat de toate forțele, la deplasarea punctului din poziția inițială până la poziția finală.

§6. Teorema variației energiei cinetice pentru un sistem mecanic

Fie că avem un sistem mecanic alcătuit din n puncte materiale. El se mișcă sub acțiunea forțelor intertoare și a forțelor exterioare.P entru punctul cu masa m_k (k=1,2,...., n) alcătuim ecuația ce reese din teorema variației energiei cinetice pentru punct:

$$\frac{m_k v_k^2}{2} - \frac{m_k v_{0k}^2}{2} = A_k^e + A_k^i \qquad \sum \frac{m_k v_k^2}{2} - \sum \frac{m_k v_{0k}^2}{2} = \sum A_k^e + \sum A_k^i$$

Variația energiei cinetice a unui sistem mecanic este egală cu lucrul mecanic al forțelor exterioare și a forțelor interioare la deplasarea sistemului din poziția inișială în poziția finală.

$$\boxed{T - T_0 = A^e + A^i}$$

Dacă sistemul mecanic este alcătuit din corpuri rigide unite cu fire inextensibile, atunci lucrul forțelor interioare este egal cu zero($A^i = 0$).

§7. Câmp de forțe.

O porțiune a spațiului în orice punct al căreia asupra punctului material acționează o forță determinată după modul și direcție în orice moment de timp se numește câmp de forțe.

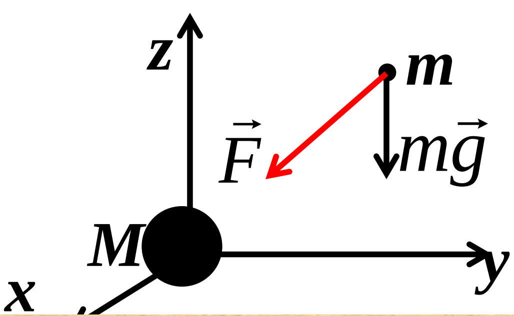
Cu alte cuvinte, câmpul de forțe este dat prin ecuațiile:

$$F_x = F_x(x, y, z)$$
$$F_y = F_y(x, y, z)$$
$$F_z = F_z(x, y, z)$$

Acest câmp este staționar. El nu depinde explicit de timp.

Exemple:

1.Câmpul omogen al forțelor de greutate:



$$F_x = 0$$
$$F_y = 0$$
$$F_z = -mg$$

2.Câmp gravitațional:

$$\vec{F} = -\frac{GMm \cdot \vec{r}}{r^2 \cdot r}$$

$$F_x = -\frac{GMm \cdot x}{r^2 \cdot r} \qquad F_y = -\frac{GMm \cdot y}{r^2 \cdot r} \qquad F_z = -\frac{GMm \cdot z}{r^2 \cdot r}$$

3.Câmpul forței de elasticitate al arcului.

$$\vec{F} = -c(r - r_0) \cdot \frac{\vec{r}}{r} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$F_x = -c(r - r_0) \cdot \frac{x}{r}$$

$$F_y = -c(r - r_0) \cdot \frac{y}{r}$$

$$F_z = -c(r - r_0) \cdot \frac{z}{r}$$

§8. Energia potențială

Câmpul de forță se numește conservativ, dacă există o așa funcție Π(x,y,z) ,numită energie potențială, întrucât proiecțiile forței pot fi reprezentate în forma:

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}$$

$$F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}$$

$$F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$$

Calculăm lucrul elementar al unei forțe conservative:

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -(\frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz) = -d\Pi$$

Integrăm: $\boxed{A_{12} = \Pi_1 - \Pi_2}$

Proprietățile câmpului conservativ :

- ***Lucrul mecanic nu depinde de forma traiectoriei.***
- ***Lucrul mecanic depinde numai de pozițiile inițiale și finale.***
- ***Lucrul mecanic nu depinde de legea mișcării pe traiectorie.***
- ***Energia potențială se determină cu precizia de până la o const.***
- ***Asta ne permite să alegem o poziție arbitrară M_0 ,În care Π_0 =0.***

Poziția în care energia potențială se consideră egală cu zero se va numi în continuare nivelul zero.

Energia potențială în poziția dată este egală cu lucrul mecanic al forței din poziția dată până la nivelul zero.

$$\Pi(x,y,z) = A_{MMo}$$

§9.Energia potențială pentru câmpuri concrete.

- ***Câmpul omogen al forțelor de greutate(nivelul zero; z=0):***

$$\Pi = \int_z^0 (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int_z^o 0 \cdot dx + 0 \cdot dy - mgdz = -mg\int_z^0 dz = mgz$$

$$\boxed{\Pi = mg \cdot z}$$

- ***Câmpul gravitațional(nivelul zero; infinit):***

$$\boxed{\Pi = -\frac{GMm}{r}}$$

$$\Pi = \int_r^\infty \vec{F} d\vec{r} = -GMm\int_r^\infty \frac{\vec{r} d\vec{r}}{r^2 \cdot r} = -GMm\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = -\frac{GMm}{r}$$

- ***Câmpul forțelor de elasticitate ale arcului:***

$$\boxed{\Pi = \frac{c\lambda^2}{2} = \frac{c(r-r_0)^2}{2}}$$

λ –deformația arcului; r- lungimea arcului;

r_0 –lungimea arcului nedeformat.

§9. Energia mecanică

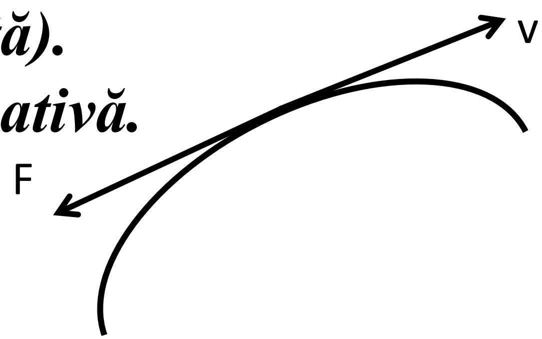
Energia mecanică este suma energiei cinetice și a energiei potențiale. ***E=T+П.***

1.Toate forțele sunt consrvative:

$$d'A = -d\Pi \qquad d'A = dT \qquad d(T+\Pi) = 0 \qquad \boxed{T + \Pi = const}$$

Dacă punctul material se mișcă în un câmp conservativ , atunci energia mecanică se conservează (ea este constantă).

2.Asupra punctului acționează și o forță neconservativă.



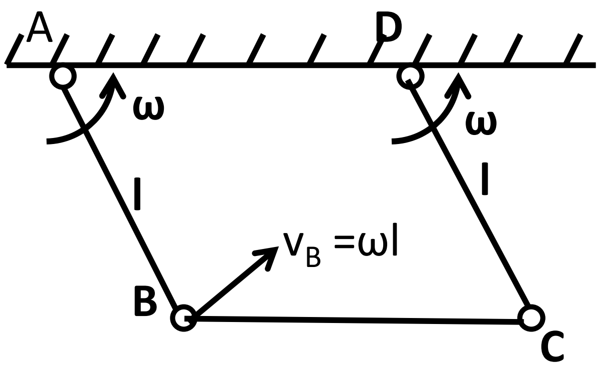
$$d'A = -d\Pi + \vec{F}d\vec{r} \qquad d'A = dT \qquad d(T+\Pi) = \vec{F}d\vec{r}$$

$$\frac{d(T+\Pi)}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v} = Fv\cos 180 = -Fv < 0$$

Energia mecanică descrește. Ea se transformă în alte forme de energie, spre exemplu, în căldură.

Problema 38.1

De calculat energia cinetică a mecanismului plan, alcătuit din trei AB, BC și CD articulate de tavan și între ele în punctele B și C. Masa fiecărei bare AB =CD=l este m_1, iar masa barei BC este m_2 și BC=AD. Barele AB și DC se rotesc cu viteza unghiulară ω.



$$T=T_{AB}+T_{CD}+T_{BC}$$

AB , CD - mișcare de rotație.BC- mișcare de translație.

$$T_{AB}=\frac{I_A\omega^2}{2}=\frac{\frac{m_1l^2}{3}\omega^2}{2}=\frac{m_1l^2\omega^2}{6}$$

$$T_{CD}=T_{AB}=\frac{m_1l^2\omega^2}{6}$$

$$T_{BC}=\frac{m_2v_B^2}{2}=\frac{m_2\omega^2l^2}{2}$$

$$T_{CD}=T_{AB}=\frac{m_1l^2\omega^2}{6}$$

$$\boxed{T=\frac{2m_1+3m_2}{6}\omega^2l^2}$$

Problema 38.7

Dat:

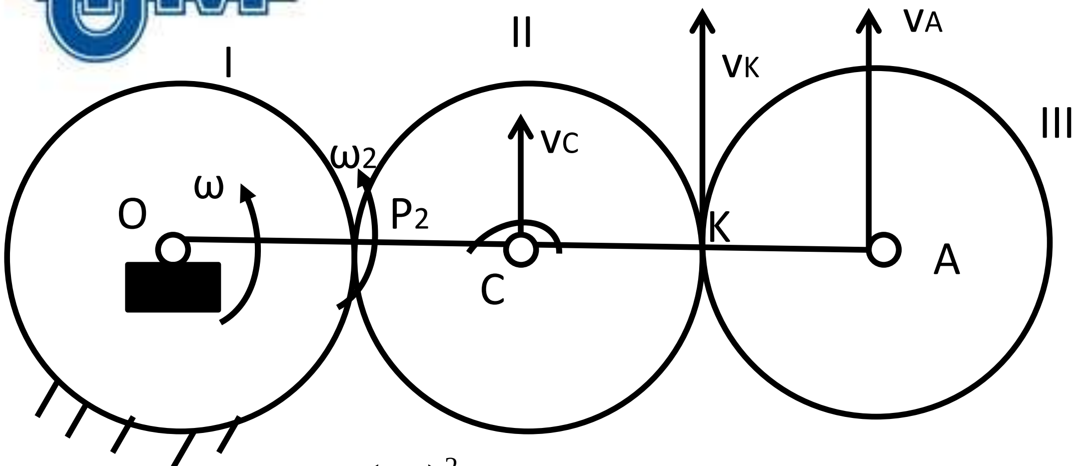
$m_1 = m_I = m_{II} = m_{III}$

$m_2 = m_{OA}$

$\omega_{OA} = \omega$

$r = r_I = r_{II} = r_{III}$

De determinat energia cinetică



$$T = T_{OA} + T_I + T_{II} + T_{III}$$

$$v_C = \omega \cdot OC = \omega \cdot 2r$$

$$\omega_2 = \frac{v_C}{CP_2} = 2\omega$$

$$v_K = \omega_2 \cdot KP_2 = 4\omega r$$

$$v_A = \omega \cdot OA = 4\omega r$$

$$\omega_3 = 0$$

$$T_{OA} = \frac{I_O \omega^2}{2} = \frac{\frac{m_2 (4r)^2}{3}\omega^2}{2} = \frac{8 m_2 r^2 \omega^2}{3}$$

$$T_I = 0$$

$$T_{II} = \frac{m_1 v_C^2}{2} + \frac{I_C \omega_2^2}{2} = \frac{m_1 (\omega \cdot 2r)^2}{2} + \frac{\frac{m_1 r^2}{2}(2 \cdot \omega)^2}{2} = 3 m_1 r^2 \omega^2$$

$$T_{III} = \frac{m_1 v_A^2}{2} = 8 m_1 \omega^2 r^2$$

$$\boxed{T = \frac{\omega^2 r^2}{3}(33 m_1 + 8 m_2)}$$

Problemă: Corpurile 2 și 3 de considerat cilindri omogeni de raza R_2 și R_3 respectiv. De determinat viteza finală a corpului 1.

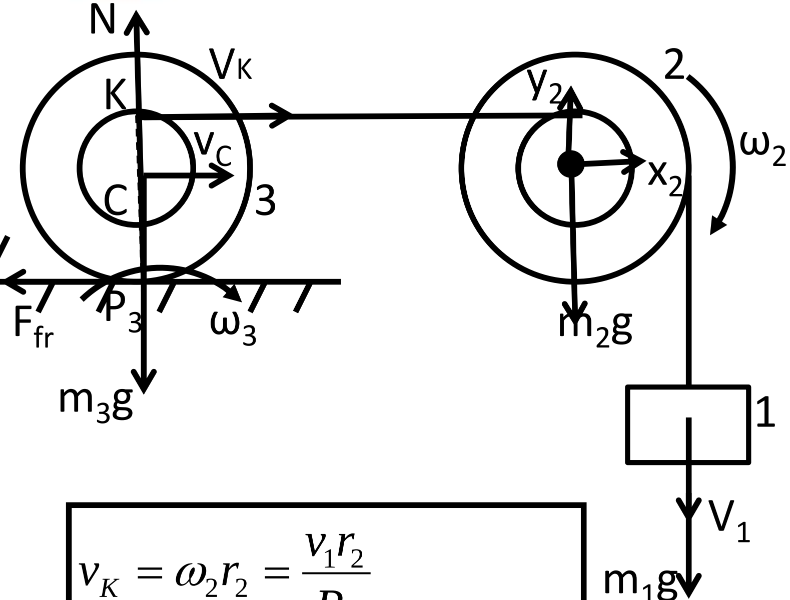
$v_0 = 0$

m_1, m_2, m_3

R_2, r_2, R_3, r_3

S_1

V_1 -?



$$T - T_0 = A^e + A^i$$

$$T_0 = 0 \qquad A^i = 0$$

1.Calcularea energiei cinetice finale

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}$$ Mișcare de translație

$$T_2 = \frac{I_2 \omega_2^2}{2} = \frac{m_2 v_1^2}{4}$$ Mișcare de rotație

$$\boxed{\omega_2 = \frac{v_1}{R_2} \qquad I_2 = \frac{m_2 R_2^2}{2}}$$

$$v_K = \omega_2 r_2 = \frac{v_1 r_2}{R_2}$$

$$\omega_3 = \frac{v_K}{KP_3} = \frac{v_1 r_2}{R_2 (R_3 + r_3)}$$

$$v_C = \omega_3 \cdot CP_3 = \frac{v_1 r_2 R_3}{R_2 (R_3 + r_3)}$$

$$I_3 = \frac{m_3 R_3^2}{2}$$

$$T_3 = \frac{m_3 v_C^2}{2} + \frac{I_3 \omega_3^2}{2} = \frac{3 m_3 v_1^2 r_2^2 R_3^2}{4 R_2^2 (R_3 + r_3)^2}$$

Mișcare plan-paralelă

$$T = \frac{v_1^2}{2}(m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{3m_3 r_2^2 R_3^2}{2R_2^2 (R_3 + r_3)^2})$$

Energia cinetică finală

2. Calcularea lucrului mecanic al forțelor exterioare la deplasarea corpului 1. Forțele exterioare sunt arătate pe desen.Lucru mecanic face numai forța de greutate a corpului 1.

$$\boxed{A^e = A_{m_1 g} = m_1 g S_1}$$

3. Alcătuim ecuația inițială(teorema variației energiei cinetice)

$$\frac{v_1^2}{2}(m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{3m_3 r_2^2 R_3^2}{2R_2^2 (R_3 + r_3)^2}) = m_1 g S_1$$

$$\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{2m_1 g S_1}{(m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{3m_3 r_2^2 R_3^2}{2R_2^2 (R_3 + r_3)^2})}}}$$