Mecanica

MOMENTUL CINETIC AL SISTEMULUI MECANIC
(MOMENTRUL CANTITĂȚII DE MIȘCARE).

INTRODUCERE

- **Momentul de inerție**
- **Momentul cinetic al sistemului mecanic (momentul cantităţii de mişcare)**
- **Momentul cinetic al sistemului mecanic în raport cu un punct şi o axă**
- **Momentul cinetic al rigidului în mişcarea de rotaţie în jurul unei axe fixe**
- **Noţiuni elementare despre momentele axiale de inerţie a rigidului**
- **Variaţia momentului cinetic a punctului material şi a sistemului mecanic**
- **Legea conservării momentului cinetic. Dinamica mişcării de rotaţie a rigidului**

MOMENTUL DE INERȚIE

Pentru a caracteriza distribuția maselor în sistemul mecanic sau în corpul solid, pe lîngă *centrul maselor* se mai introduce noțiunea de ***moment de inerție*** a sistemului (sau rigidului) în raport cu un punct, axă sau cu un plan.

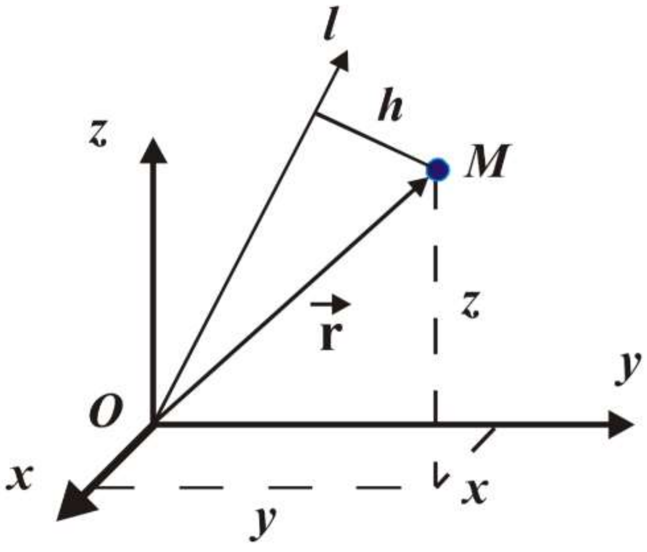


Fig.1

- ***Momentul de inerție polar***

- ***Reprezintă momentul de inerție a punctului în raport cu centrul O și se definește ca produsul dintre masa punctului material și patratul distanței pînă la centrul O.***

$$I_O = mr^2 \qquad (1)$$

Fie m_k – masa punctului M_k cu coordonatele x_k, y_k, z_k și raza vectoare $\vec{r}_k$.

Pentru un sistem mecanic din *n* puncte materiale $\{M_k\}_n$, momentul de inerție

a sistemului este:

$$I_O = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 \qquad (2)$$

Momentul de inerție în raport cu o axă

Se numește moment de inerție a punctului în raport cu o axă l produsul dintre masa punctului și patratul distanței pînă la axă.

$$I_l = mh^2 \tag{3}$$

Momentele de inerție ale punctului în raport cu axele sistemului de coordonate carteziene:

$$\begin{cases} I_x = m(y^2 + z^2) \\ I_y = m(x^2 + z^2) \\ I_z = m(x^2 + y^2) \end{cases} \tag{4}$$

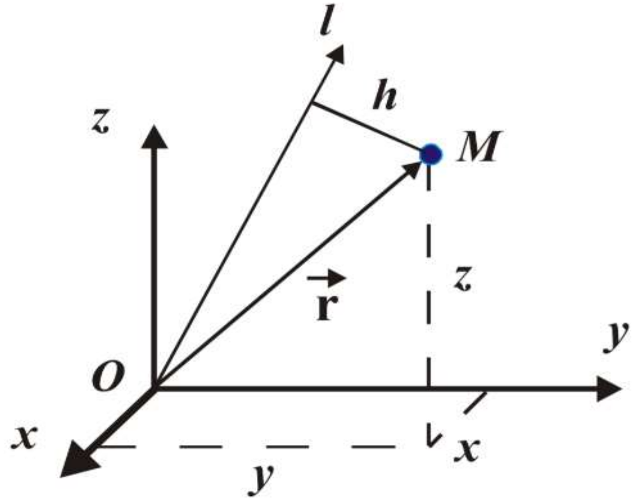


Fig.1

Momentul de inerție al unui sistem de puncte materiale în raport cu axele sistemului cartezian de coordonate:

$$\begin{cases} I_x = \sum_{k=1}^{n} m_k(y_k^2 + z_k^2) \\ I_y = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k^2 + z_k^2) \\ I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k^2 + y_k^2) \end{cases} \tag{5}$$

Astfel, dacă vom suma momentele de inerție axiale, se obține:

$$I_x + I_y + I_z = 2m(x^2 + y^2 + z^2), \qquad 2I_O = I_x + I_y + I_z \tag{6}$$

În cazul corpurilor cu distribuția continuă a masei (omogene):

$$I_x = \int_{(M)} (y^2 + z^2)dm\,, \qquad I_y = \int_{(M)} (x^2 + z^2)dm\,, \qquad I_z = \int_{(M)} (x^2 + y^2)dm \tag{7}$$

Momentul de inerție centrifug

Se numește moment de inerție centrifugal al sistemului material în raport cu o pereche oarecare de coordonate produsul dintre masa punctelor și produsul acestor coordonate.

- **Pentru un punct material:**

$$I_{yx} = I_{xy} = m\,xy, \; I_{xz} = I_{zx} = m\,xz, \qquad I_{yz} = I_{zy} = m\,yz \tag{8}$$

unde I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} sunt momentele de inerție centrifugale ale punctului în raport cu axele indicate prin indice.

MOMENTUL DE INERȚIE

- **Pentru un sistem de puncte materiale:**

$$I_{xy} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k\,, \quad I_{xz} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k z_k\,, \quad I_{yz} = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k z_k \qquad (9)$$

Momentele de inerție centrifugale pot fi avea valoarea pozitivă, negativă sau pot fi egale cu zero, în timp ce momentele de inerție în raport cu axele pot fi doar pozitive.

- **Pentru corpurile rigide omogene:**

$$I_{xy} = \int_{(M)} xy\, dm\,, \quad I_{xz} = \int_{(M)} xz\, dm\,, \quad I_{yz} = \int_{(M)} yz\, dm \qquad (10)$$

Dimensionalitatea momentului de inerție: $[I]_{SI} = kg \cdot m^2$

AXELE DE INERȚIE PRINCIPALE ȘI AXELE DE INERȚIE CENTRALE

Axa de inerție centrală **se numește axa care trece prin centrul maselor corpului.**

Axa de inerție principală **a rigidului într-un punct este axa de coordonate în cazul în care momentele de inerție centrifugale, care conțin indicile acestei axe, sunt zero.**

$I_{xz} = I_{yz} = 0, \quad z -$ axă de inerție principală

$I_{xy} = I_{xz} = 0, \quad x -$ axă de inerție principală

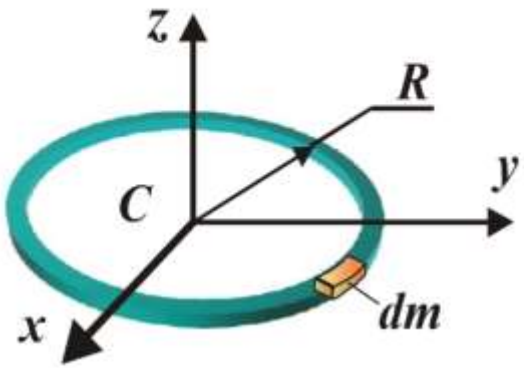
$I_{xy} = I_{yz} = 0, \quad y -$ axă de inerție principală

Dacă axa trece prin centrul maselor și este axă de inerție principală,

atunci ea se numește ***axă principală centrală de inerție a corpului.***

MOMENTELE DE INERȚIE AXIALE PENTRU CORPURI DE FORMĂ SIMPLĂ

1. Inel subțire omomgen de masă *m* și rază *R*.



Vom delimita un element infinitezimal de mic **dm**. Acest element poate fi considerat punct material.

Momentul de inerție al întregului inel $I_z = \int_{(M)} R^2\, dm = R^2 \int_{(M)} dm = mR^2$

Momentul axial poate fi exprimat, din definiție, ca:

$$I_z = I_C = \int_{(M)} (x^2 + y^2)\, dm = mR^2$$

Fixăm sistemul de coordonate cartezian cu originea în centrul inelului și axa *z* perpendicular pe plan.

Momentul de inerție al unui punct material în raport cu centrul de coordonate este:

$$2I_C = I_x + I_y + I_z$$

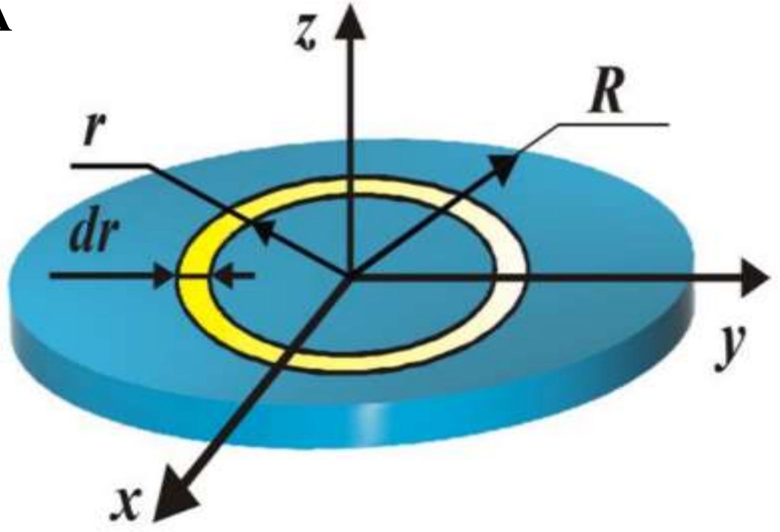
unde $I_x + I_y = I_C = I_z$

Dacă ținem cont de simetria corpului:

$$I_x = I_y = \frac{I_z}{2} = \frac{mR^2}{2} \qquad (11)$$

MOMENTELE DE INERȚIE AXIALE PENTRU CORPURI DE FORMĂ SIMPLĂ

2. Disc subțire omogen de masă *m* și rază *R*.



- Delimităm un inel subțire de rază *r* și grosime *dr*. Masa acestui element circular va fi

$$dm = \frac{m}{\pi R^2} \cdot 2\pi r \cdot dr = \frac{2mr}{R^2} dr$$

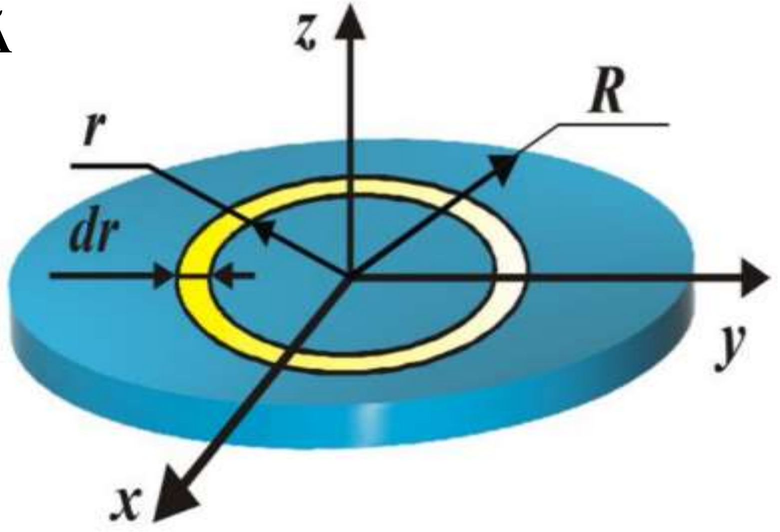
- Momentul de inerție axial al acestei circumferințe de grosime *dr* în raport cu axa *z* va fi:

$$dI_z = dmr^2 = \frac{2m}{R^2} r^3 dr$$

- Momentul de inerție axial al întreg discului în raport cu axa *z* se obține prin integrare după *r*.

$$I_z = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 \, dr = \frac{mR^2}{2}$$

MOMENTELE DE INERȚIE AXIALE PENTRU CORPURI DE FORMĂ SIMPLĂ



- Vom ține cont de legătura dintre momentul de inerție în raport cu centrul sistemului cartezian de coordonate și momentele de inerție axiale:

$$2I_C = I_x + I_y + I_z.$$

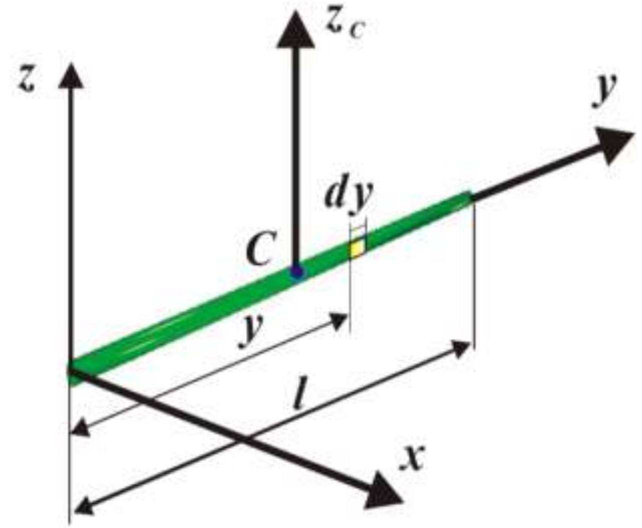
Am obținut $I_z = I_C = \frac{mR^2}{2}$ și astfel $I_x + I_y = I_C = \frac{mR^2}{2}$.

Din considerente de simetrie a discului $I_x = I_y$.

Sau, în final, momentele de inerție ale discului în raport cu axele *x*, *y*, și *z* vor fi:

$$I_x = \frac{mR^2}{4} \qquad I_y = \frac{mR^2}{4} \qquad I_z = \frac{mR^2}{2} \qquad (12)$$

MOMENTELE DE INERȚIE AXIALE PENTRU CORPURI DE FORMĂ SIMPLĂ



3. Bară subțire omogenă de masă *m* și lungime *l*

Delimităm în lungul barei un element mic de lungime *dy*. Fiind foarte mic, acest element poate fi considerat punct material de masă *dm*:

$$dm = \frac{m}{l} dy$$

Vom integra după volum omogen pentru determinarea momentelor de inerție axiale:

$$I_z = \int_V (x^2 + y^2) dm = \int_0^l y^2 \frac{m}{l} dy = \frac{ml^2}{3}$$

În raport cu axa centrală z_C, momentul de inerție se calculeaza schimbînd limitele de integrare:

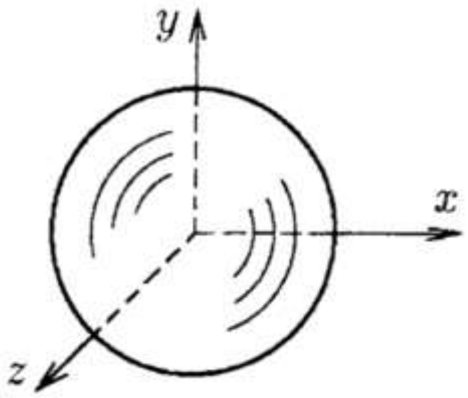
$$I_{zC} = \int_V (x^2 + y^2) dm = \int_{-l/2}^{l/2} y^2 \frac{m}{l} dy = \frac{ml^2}{12}$$

Corespunzător, din simetria desenului, se poate deduce că în direcția axei *x* momentul de inerție va fi același ca în direcția *z*:

$$I_x = I_z = \frac{ml^2}{3}, \quad I_y = 0. \qquad (13)$$

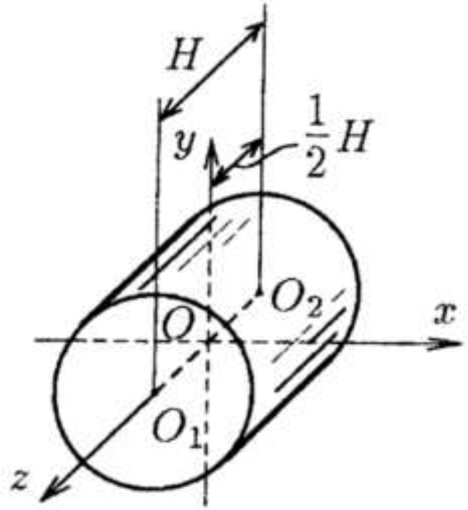
MOMENTELE DE INERȚIE AXIALE PENTRU CORPURI DE FORMĂ SIMPLĂ

4. Sferă omogenă



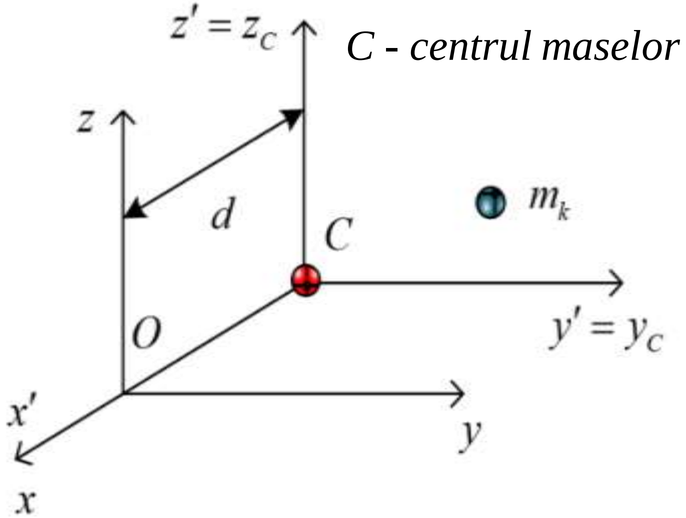
$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} m R^2 \qquad (14)$$

5. Cilindru circular omogen



$$I_x = I_y = m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12}\right); \quad I_z = \frac{mR^2}{2} \qquad (15)$$

MOMENTELE DE INERȚIE ÎN RAPORT CU AXE PARALELE



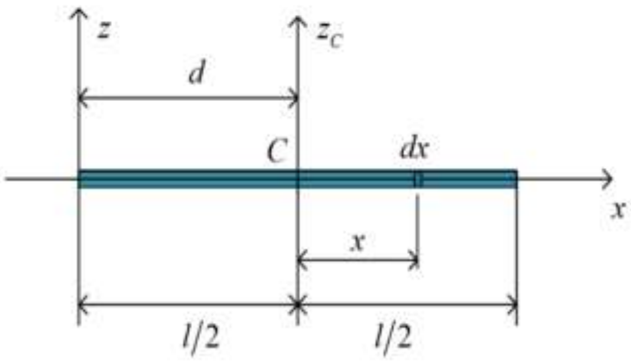
Teorema Huygeens – Steiner:

Momentul de inerție ale sistemului mecanic (sau rigidului) în raport cu o axă oarecare este egal cu suma momentelor de inerție în raport cu o axă paralelă, care trece prin centrul maselor, și produsul dintre masa sistemului și patratul distanței dintre axe.

$$I_z = I_{zC} + md^2 \qquad (16)$$

Exemplu:

- Determinați momentul de inerție al unei bare subțiri omogene, de masă *M*, în raport cu axa *z*, care trece prin capătul barei.



Momentul de inerție în raport cu axa centrală z_C,

$$I_{zC} = \frac{Ml^2}{12}$$

Aplicînd teorema lui Huygeens - Steiner:

$$I_z = I_{zC} + md^2 = \frac{Ml^2}{12} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{3}$$

RAZA DE INERȚIE

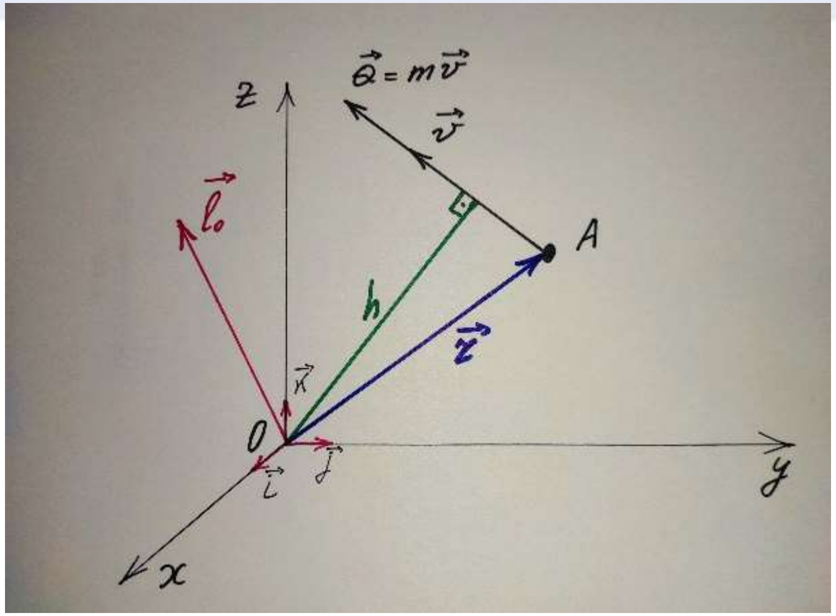
Pentru aplicații tehnice, de regulă în datele tehnice ale elementelor mecanismelor se indică și raza de inerție i a elementului în raport cu anumită axă de rotație. Astfel, momentul de inerție este reprezentat ca produsul:

$$I_x = m i_x^2 \tag{17}$$

Raza de inerție *i* este acea distanță de la axă, la care trebuie amplasat punctul material, cu masa egală cu masa întregului sistem, pentru ca momentul său de inerție să fie egal cu momentul de inerție a întregului sistem.

Momentul de inerție este măsura inertității corpului în mișcare de rotație, la fel cum masa caracterizează inertitatea corpului la mișcare de translație.

MOMENTUL CINETIC
(MOMENTUL CANTITĂȚII DE MIȘCARE)



1. Momentul cantității de mișcare a punctului material în raport cu un centru.

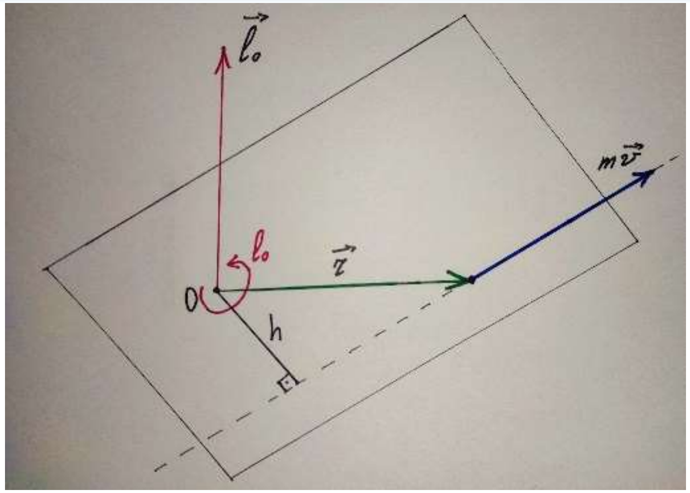
Fie un punct material A de masă m care se deplasează în spațiunl $Oxyz$ cu viteza $\vec{v}$.

Cantitatea de mișcare a punctului $\vec{Q} = m\vec{v}$.

Mărimea fizică vectorială, egală cu produsul vectorial dintre raza vectoare a punctului în raport cu centrul sistemului, și cantitatea de mișcare a acestui punct se numește momentul cantității de mișcare în raport cu centrul *O*.

$$\vec{l}_O = \vec{r} \times \vec{Q} = \vec{r} \times m\vec{v} \qquad (18)$$

MOMENTUL CINETIC
(MOMENTUL CANTITĂȚII DE MIȘCARE)



- Modulul vectorului $\vec{l}_O$ este egal cu produsul dintre cantitatea de mișcare și distanța de la punctul *O* pînă la linia de acțiune a vectorului vitezei.

$$l_O = Qh \qquad (19)$$

- Momentul cantității de mișcare a punctului în raport cu centrul poate fi reprezentat în formă matricială:

$$\vec{l}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \qquad (20)$$

unde *x*, *y*, *z* sunt coordonatele punctului, iar v_x, v_y, v_z sunt proiecțiile vitezei punctului pe axe.

- Proiecțiile vectorului $\vec{l}_O$ vor fi deci:

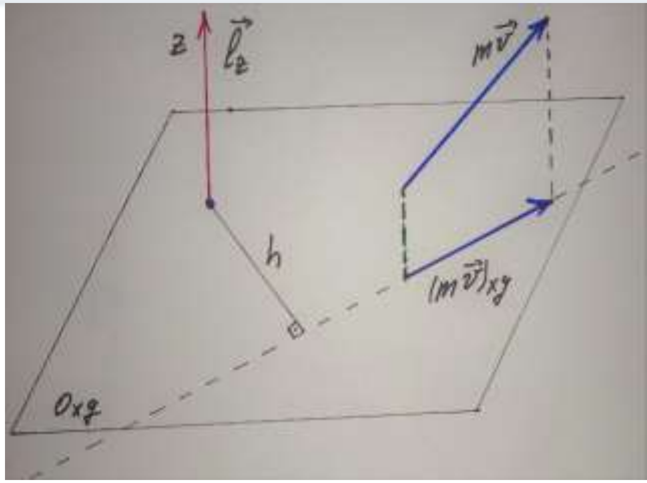
$$l_{Ox} = m(yv_z - zv_y); \quad l_{Oy} = m(zv_x - xv_z); \quad l_{Oz} = m(xv_y - yv_x). \qquad (21)$$

Direcția vectorului $\vec{l}_O$ se determină după regula șurubului de dreapta

- $l_O = \pm mvh$. Pozitiv – dacă rotația are loc în sens opus acelor de ceasornic,

Negativ – în sens direct.

- În Sistemul Internațional, unitatea de măsură a vectorului $\vec{l}_O$ este $[\vec{l}_O]_{SI} = kg \cdot m^2/s$.



2. Momentul cantității de mișcare a punctului material în raport cu o axă.

Se determină ca momentul proiecției cantității de mișcare pe un plan perpendicular cu axa de reper, în raport cu punctul de intersecție a planului cu axa.

3. Momentul cinetic al sistemului mecanic.

Fie un sistem mecanic din *n* puncte materiale care se deplasează în spațiul *Oxyz*.

Se numește moment cinetic al sistemului mecanic (sau momentul principal al cantității de mișcare pentru toate punctele sistemului) în raport cu un centru sau cu o axă, suma momentelor cantității de mișcare a punctelor sitemului în raport cu același centru sau axă.

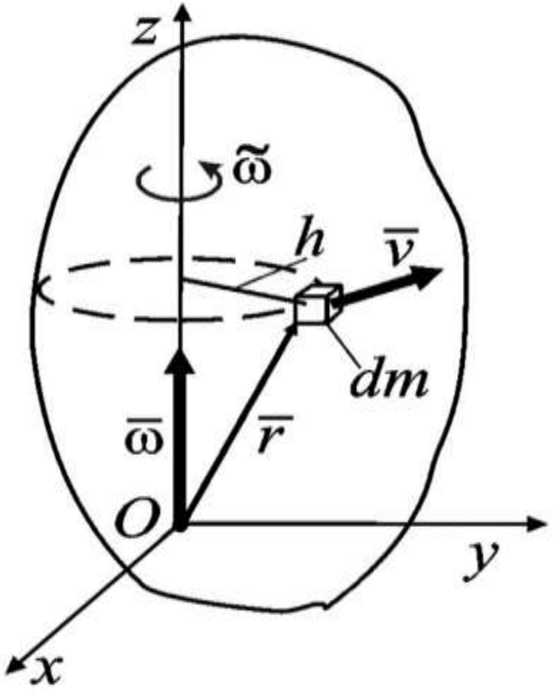
$$\vec{L}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{l}_{Ok} = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k\,; \qquad L_z = \sum_{k=1}^{n} l_z \qquad (22)$$

Proiecțiile momentului cinetic al sistemului mecanic în raport cu un centru pe axele de coordonate sunt egale cu momentele cinetice ale sistemului în raport cu aceste axe, corespunzător:

$$L_{Ox} = L_x; \quad L_{Oy} = L_y; \quad L_{Oz} = L_z \qquad (23)$$

! Dacă sistemul mecanic formează un corp rigid, momentele cinetice se vor determina prin integrare pe tot volumul corpului.

4. Momentul cinetic al corpului rigid.



- Fie un corp rigid de masă m, care poate realiza mișcare de rotație cu viteza unghiulară ω în spațiul $Oxyz$. Vom calcula momentul cinetic L_z în raport cu axa de rotație z.

- Delimităm un element infinitezimal de volum cu masa dm, care poate fi considerat

punct material în rotație pe circumferința de rază $h = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Viteza punctului va fi $v = \omega h$, iar momentul cinetic al punctului:

$$dL_z = dm \cdot vh = dm \cdot \omega h^2 = \omega(x^2 + y^2)dm$$

- **Momentul cinetic al rigidului**, se obține prin integrare pe tot volumul:

$$dL_z = \int_V dL_z = \omega \int_V (x^2 + y^2)\, dm$$

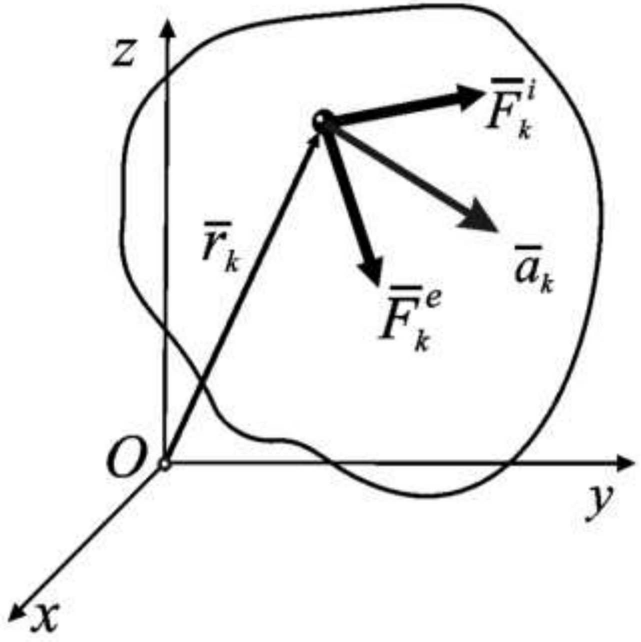
- ! Se observă că integrala $\int_V (x^2 + y^2)\, dm = I_z$ este momentul de inerție axial.

Momentul cinetic al corpului în raport cu axa de rotație este egal cu produsul dintre momentul de inerție în raport cu această axă și viteza unghiulară:

$$\boldsymbol{L_z = I_z \cdot \omega_z} \qquad (24)$$

1. Punct material/ sistem de puncte materiale

- Fie mișcarea sistemului mecanic format din $\{A_k\}_n$ puncte materiale în sistemul inerțial de coordonate *Oxyz*.
- Punctul A_k, de masă m_k, se mișcă sub acțiunea forței $\vec{F}_k^e$ (*rezultanta forțelor exterioare, ce acționează asupra punctului dat*) și sub acțiunea forței $\vec{F}_k^i$ (*rezultanta forțelor interioare, aplicate punctului*). Conform legii a II a lui Newton:



$$m_k\vec{a}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$$

Ținînd cont că $\vec{a}_k = d\vec{v}_k/dt$, ecuația dinamicii punctului ia forma:

$$m_k d\vec{v}_k/dt = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$$

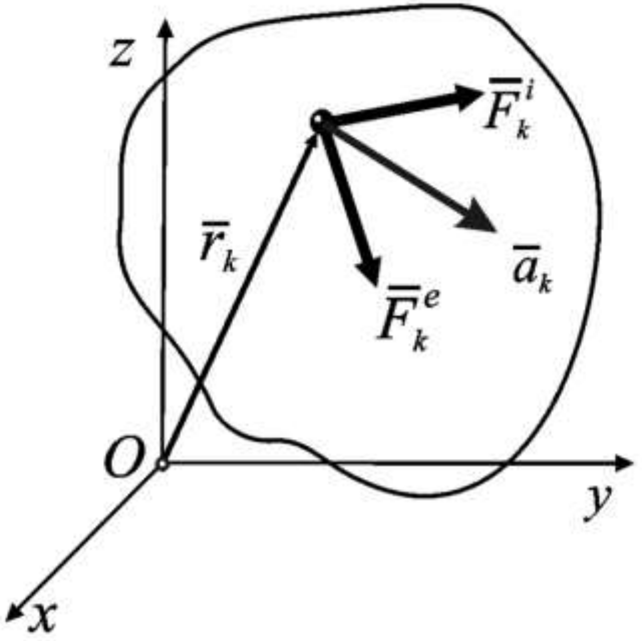
Înmulțim ambele părți ale egalității cu $\vec{r}_k$:

$$\vec{r}_k \times m_k d\vec{v}_k/dt = \vec{r}_k \times \vec{F}_k^e + \vec{r}_k \times \vec{F}_k^i$$

Partea stîngă poate fi scrisă ca $d(\vec{r}_k \times m_k\vec{v}_k)/dt$ și se obține:

$$\frac{d(\vec{r}_k \times m_k\vec{v}_k)}{dt} = \frac{d\vec{l}_O}{dt} = \vec{r}_k \times \vec{F}_k^e + \vec{r}_k \times \vec{F}_k^i = \vec{r}_k \times (\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i)$$

unde $\vec{r}_k \times \left(\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i\right) = \vec{r}_k \times \vec{F}_k = \vec{M}_O(\vec{F})$ este momentul rezultantei forțelor aplicate punctului în raport cu originea sistemului de coordonate.



În consecință se obține teorema variației momentului cinetic pentru fiecare punct material din sistem:

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_k) \tag{25}$$

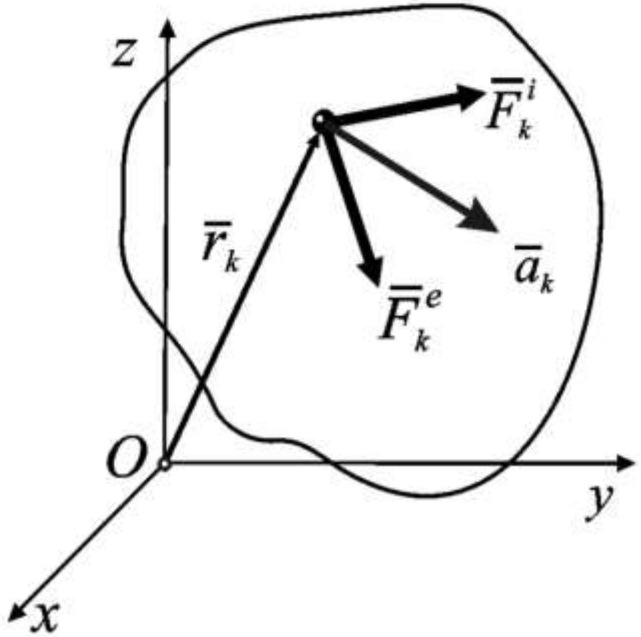
sau, în proiecții pe axele de coodonate:

$$\frac{dl_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_x(\vec{F}_k)\,; \quad \frac{dl_y}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_y(\vec{F}_k)\,; \quad \frac{dl_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k) \tag{26}$$

- **Teorema despre momentul cinetic al punctului material**

Derivata după timp de la momentul cinetic al punctului în raport cu un centru sau cu o axă este egală cu suma momentelor forțelor, care acționează asupra punctului dat, în raport cu același centru sau axă.

Teorema despre momentul cinetic al sistemului mecanic în raport cu un centrul fix



Pentru tot sistemul de puncte materiale:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{d\vec{l}_O}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_k^e) + \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_k^i) \qquad (27)$$

Notăm $\sum_{k=1}^{n} \frac{d\vec{l}_O}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} \vec{l}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$- derivata după timp a momentului cinetic al sistemului

mecanic în raport cu centrul *O*.

În baza principiului acțiunii și reacțiunii, forțele interioare apar în perechi, fiind egale între ele ca modul și opuse ca sens. Astfel, fiecare pereche va genera o rezultantă nulă, și:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^i = 0$$

În rezultat, se demonstrează că doar forțele exterioare aduc contribuție la variația momentului cinetic.

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_k^e) \tag{28}$$

În proiecții pe axele de coordonate:

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_x(\vec{F}_k^e); \quad \frac{dL_y}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_y(\vec{F}_k^e); \quad \frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k^e) \tag{29}$$

- **Teorema variației momentului cinetic al sistemului mecanic.**

Derivata după timp de la momentul cinetic al sistemului mecanic în raport cu un centru sau axă, este egală cu momentul principal al forțelor exterioare aplicate sistemului în raport cu centrul sau axa dată.

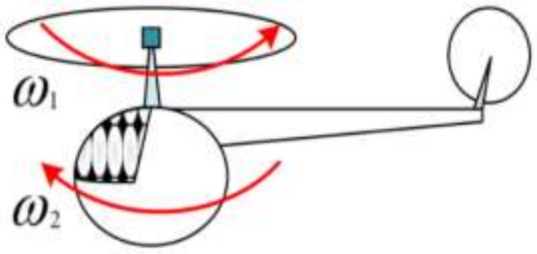
Legea conservării momentului cinetic

1. Dacă momentul principal al forțelor exterioare în raport cu centrul sistemului de coordonate este egal cu zero, atunci momentul cinetic în raport cu acest centru <u>se conservă ca modul și direcție.</u>

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_k^e\right) = 0 \Rightarrow \vec{L}_O = const.$$

2. Dacă momentul principal al forțelor exterioare în raport cu o axă este zero, atunci momentul cinetic al sistemului în raport cu această axă <u>se conservă.</u>

$$\sum_{k=1}^{n} M_x(\vec{F}_k^e) = 0 \ \Rightarrow \ L_x = const.$$



$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = const.$$
$$I_1\omega_1 = -I_2\omega_2$$

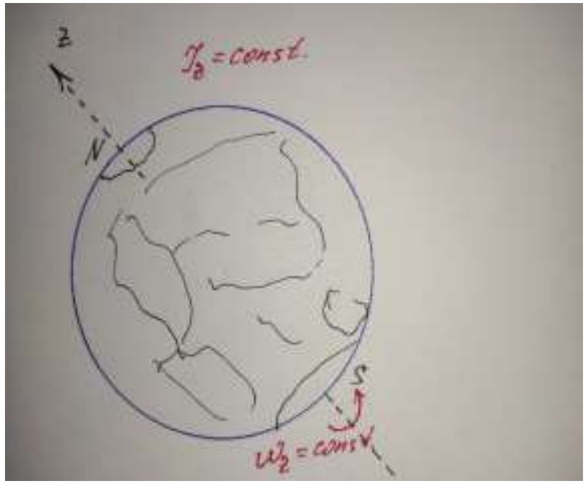
3. Dacă sistemul constă din două sau mai multe elemente ce se rotesc în jurul aceleiași axe de rotație, din $L_z = I_z\omega = const.$ rezultă că $I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = 0.$ Deci, rotația unui element va cauza rotația celui de-al doilea în sens opus, cu o viteză unghiulară proporțională cu raportul momentelor de inerție $\omega_2 = -\frac{I_1}{I_2}\omega_1.$

Consecințe:

1. Dacă corpul este rigid, iar acțiunea forțelor exterioare nu generează moment în raport cu axa de rotație, atunci $L_z = I_z\omega = const.$, adică $\omega = const.$ sau corpul se rotește uniform. În acest caz, vectorul vitezei unghiulare va indica permanent în aceeași direcție a spațiului.

2. Dacă sistemul mecanic este transformabil, din $I_z\omega = const.$ rezultă că mărirea momentului de inerție va duce la micșorarea vitezei unghiulare și invers (scaunul lui Jukovschi).

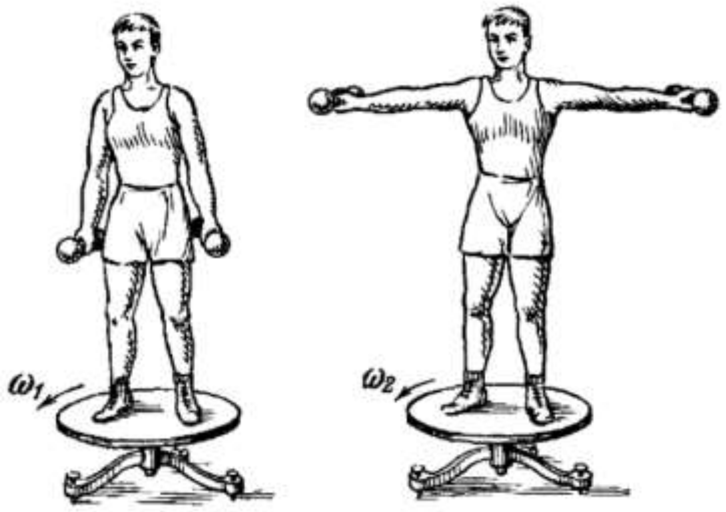
- O experiență bine demonstrată cu scaunul lui Jukovski, constă în următoarele:



Aplicații: giroscopul

TEOREMA VARIAȚIEI MOMENTULUI CINETIC AL PUNCTULUI MATERIAL ȘI A SISTEMULUI MECANIC.

- Omul stă pe platformă, ținînd în mîini haltere. Se comunică omului o mișcare inițială de rotație, apoi mișcarea continuă după inerție.
- Momentele forțelor exterioare ce acționează asupra sistemului “om - platformă” în raport cu axa vertical de rotație sunt egale cu zero.
- De aceea momentul cantităților de mișcare L_z al sistemului în raport cu această axă își păstrează valoarea constantă.



a) b)

- Admitem că omul, ținînd mîinile cu haltere în poziția drepți, se rotește cu viteza unghiulară ω_1 (Fig. a).
- Să notăm momentul de inerție al întregului sistem în această poziție cu I_1. Atunci vom avea $L_z = I_1 \cdot \omega_1$.

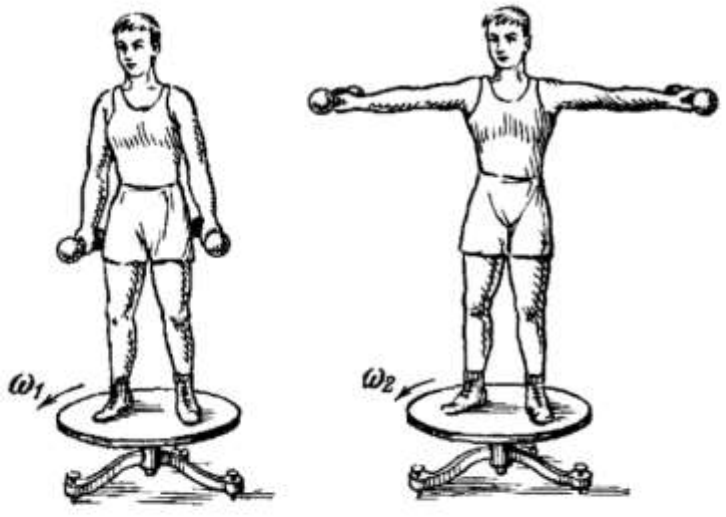
- Dacă omul, desfăcînd mîinile cu haltere, le va ține la nivelul umerilor (Fig. b), atunci momentul de inerție al întregului sistem în raport cu axa de rotație z se va mări (se va mări distanța dintre haltere și axa z).

- Să notăm noul moment de inerție cu I_2 și noua viteză unghiulară cu ω_2. Conform aceleeași formule, în poziția nouă $L_z = I_2 \cdot \omega_2$.
- Deoarece momentul cantităților de mișcare L_z în raport cu axa de rotație nu se schimbă, atunci

$$I_2 \cdot \omega_2 = I_1 \cdot \omega_1.$$

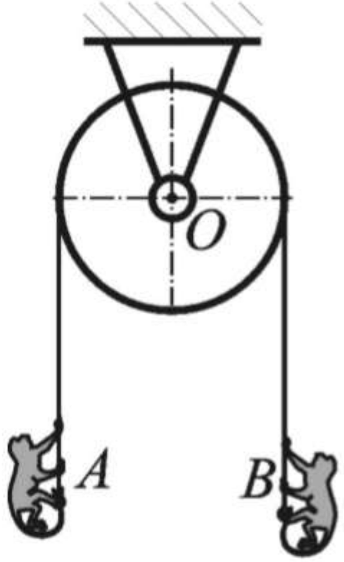
- Din această egalitate rezultă că $\omega_2 < \omega_1$ (doar $I_2 > I_1$).

Astfel, omul, ridicînd mîinile la nivelul umerilor, micșorează viteza unghiulară a sa, iar la coborîrea lor o mărește.



a) b)

Exemplul 1. Două maimuțe de aceeași masă stau agățate de capetele A și B ale unei funii, care este trecută peste un scripete imponderabil. **Ce se va întîmpla cu maimuța B, dacă maimuța A va începe urcarea pe funie cu viteza relativă *u* față de aceasta?**



Rezolvare:

Vom analiza mișcarea întregului sistem mecanic (scripete, funii, maimute) în raport cu sistemul de referință fix (*Oxyz*).

1. *Forțele exterioare*: forțele de greutate $\vec{P}_A$ și $\vec{P}_B$ $(P_A = P_B = P)$.

2. *Legături*: rulmentul *O* al scripetelui. Indicăm reacțiunea $\vec{R}_O$

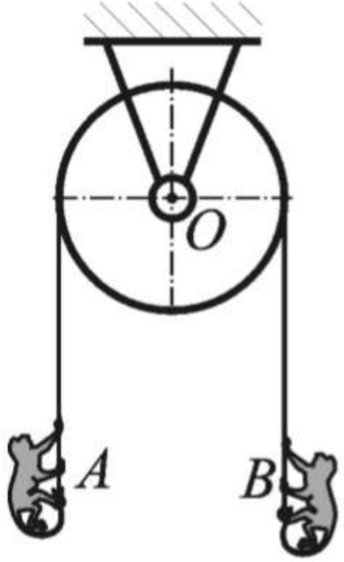
3. *Deci, sistemul se află sub acțiunea sistemului de forțe*

$$\left(\vec{P}_A, \vec{P}_B, \vec{R}_O, \{\vec{F}_k^i\}_n\right)$$

unde $\{\vec{F}_k^i\}_n$ sunt forțele interioare (de frecare între maimuțe și funie, forța de elasticitate în funie ș.a.)

VARIAȚIA MOMENTULUI CINETIC. EXEMPLU

Aplicăm teorema despre variația momentului cinetic al sistemului mecanic în raport cu axa de rotație a scrietelui (axa *z*).



$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k^e) = 0$$

deci $L_z = const.$ Inițial momentul cinetic era egal cu zero (sistemul în repaus).

Deci momentul cinetic total va rămîne egal cu zero pe tot parcursul procesului. $L_{Z0} = 0 \Rightarrow L_z = 0.$

- Vom alcătui momentul cinetic total în raport cu axa *z*:

$L_z = L_z(A) + L_z(B)$ – momentele cinetice ale maimuțelor în raport cu axa scripetelui

- **Cantitatea de mișcare a maimuțelor:** $\vec{Q}_A = \frac{P}{g}\vec{v}_A,\ \vec{Q}_B = \frac{P}{g}\vec{v}_B,$

unde $\vec{v}_A$ și $\vec{v}_B$ sunt viteza absolută a maimuței A și B respectiv.

- **Pentru determinarea vitezei absolute,** vom aplica teorema compunerii vitezelor:

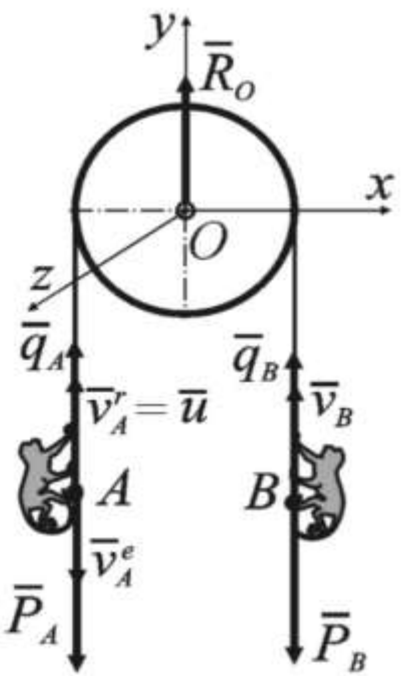
$$\vec{v}_A = \vec{v}_A^r + \vec{v}_A^e,$$

unde $\vec{v}_A^r = \vec{u}$ și $\vec{v}_A^e = \vec{v}_B$ (vezi desenul). Proiecînd pe axa y, se obține:

$$v_{Ay} = u - v_B; \qquad Q_{Ay} = \frac{P}{g}(u - v_B)$$

Momentul cinetic total va fi momentul cantităților de mișcare Q_{Ay} și Q_{By} în raport cu axa z:

$$L_z = M_z(\vec{Q}_A) + M_z(\vec{Q}_B) = -\frac{P}{g}(u - v_B)r + \frac{P}{g}v_B r$$



Forțele $\vec{P}_A$ și $\vec{P}_B$ ($P_A = P_B = P$) sunt egale, iar reacțiunea $\vec{R}_O$ nu crează moment rotațional în raport cu axa z. Deci,

$$L_z = -\frac{P}{g}(u - v_B)r + \frac{P}{g}v_B r = const. = L_{z0} = 0.$$

De unde se obține

$$-u + 2v_B = 0 \Rightarrow v_B = \frac{u}{2} v_A = u - v_B = \frac{u}{2}.$$

Adică, vitezele cu care se deplasează maimuțele în sistemul de referință fixat sunt egale între ele și cu $u/2$.
Deci, așa cum la început erau agățate una în fața alteia, așa și vor continua să se ridice în sus, doar că una din ele (A) va efectua lucru mecanic, iar cealaltă (B) – nu.

- Fie un corp material care se rotește în raport cu axa *z*. Atunci momentul cinetic al corpului în raport cu această axă va fi

$L_z = I_z\omega.$

- Ținînd cont de teorema despre variația momentului cinetic, obținem:

$$\frac{d(I_z\omega)}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k^e)$$

Dacă geometria corpului nu se schimbă în proces de rotație, atunci $I_z = const.$ și se obține

ecuația diferențială a mișcării de rotație a corpului rigid:

$$I_z\frac{d(\omega)}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k^e) \qquad (30)$$

Ținînd cont că $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$, ecuația de mai sus ia forma:

$I_z\,\varepsilon = I_z\,\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k^e)$ - **Ecuația diferențială a mișcării de rotație**

ECUAȚIA DIFERENȚIALĂ A MIȘCĂRII RIGIDULUI

- Ecuațiile diferențiale ale mișcării corpului rigid pot fi obținute din teorema despre mișcarea centrului maselor și teorema despre variația momentului cinetic.
- Vom defini ecuațiile diferențiale pentru trei tipuri de mișcări: de translație, rotație și plan-paralelă.

- **În mișcare de translație**, toate punctele rigidului se deplasează la fel.
- Deci, determinînd legea de mișcare a oricări punct al rigidului, simultan aceasta va descrie și mișcarea tuturor celorlalte puncte. În calitate de punct se alege centrul maselor corpului, întrucît poziția sa este determinată și teorema despre mișcarea centrului maselor se referă anume la acest punct.

1. **Ecuațiile diferențiale de mișcare a centrului maselor:** $M\ddot{x} = \sum_{k=1}^{N} F_{kx}^{e}$; $M\ddot{y} = \sum_{k=1}^{N} F_{ky}^{e}$; $M\ddot{z} = \sum_{k=1}^{N} F_{kz}^{e}$

2. Ecuația diferențială a mișcării de rotație: $I_z\,\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k^{e})$

3. Mișcarea plan-paralelă poate fi descompusă în mișcarea centrului maselor (considerat ca pol) și mișcarea de rotație a rigidului în jurul acestui punct.
Astfel, mișcarea plan-paralelă este descrisă de cele patru ecuații diferențiale prezentate în punctele 1 și 2.

Exemplul 2.

Rotorul unei mașini freză, care se rotește cu viteza unghiulară $\omega = \omega_0$, după deconectarea motorului electric începe frînarea, sub acțiunea unui moment de frînare M_τ. **Determinați numărul de rotații pînă la momentul cînd rotorul s-a oprit complet. Determinați timpul de oprire.**

Rezolvare:

Ecuația diferențială a rotației rotorului:

$$I_z\, \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k^e) = -M_\tau$$

! alte forțe exterioare se neglijează. Momentul de frînare este orientat în sens opus mișcării.

Pentru determinarea timpului de oprire, vom aduce ecuația diferențială la forma:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = -M_\tau$$

EXEMPLU

Separăm variabilele și integrăm definit, pe interval de timp de la începutul frânării ($t = 0, \omega = \omega_0$) pînă la momentul de oprire ($t = t_x, \omega = 0$):

$$I_z \int_{\omega_0}^{0} d\omega = -M_\tau \int_0^{t_x} dt$$

de unde rezultă $t_x = I_z \omega_0 / M_\tau$

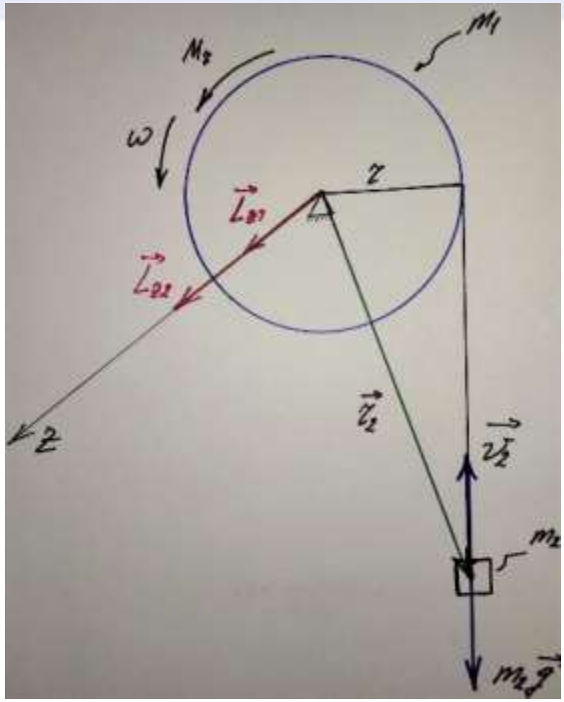
Numărul de rotații se calculează după formula $N = \varphi_k / 2\pi$, unde φ_k unghiul de rotație în momentul opririi.

În ecuația $I_z \frac{d\omega}{dt} = -M_\tau$ vom trece la derivata după unghi: $I_z \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -M_\tau$, dar $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$. Atunci

$I_z \frac{\omega d\omega}{d\varphi} = -M_\tau$ sau $I_z\, \omega d\omega = -M_\tau d\varphi$. Integrăm: $I_z \int_{\omega_0}^{0} \omega d\omega = -M_\tau \int_0^{\varphi_k} d\varphi$

Se obține

$$\varphi_k = \frac{I_z \omega_0^2}{2M_\tau}; \qquad N = \frac{I_z \omega_0^2}{4\pi M_\tau}.$$



Exemplul 3.

Asupra unui tambur de rază r, care se poate roti liber în jurul axei sale de simetrie, este aplicat un moment motor $M_\mathrm{r} = at, \quad a = \mathrm{const}$. Pe tambur este înfășurat un fir, de capătul căruia se atîrnă o greutate m_2. În momentul inițial sistemul se află în repaus. **Determinați viteza unghiulară a tamburului, considerînd-ul cilindru omogen**.

Rezolvare:

Momentul cinetic total al sistemului se va compune vectorial din momentul cinetic al tamburului și al greutății. Ca punct de reper vom considera momentul cinetic în raport cu centrul tamburului,

$$\vec{L}_z = \vec{L}_{z1} + \vec{L}_{z2}$$

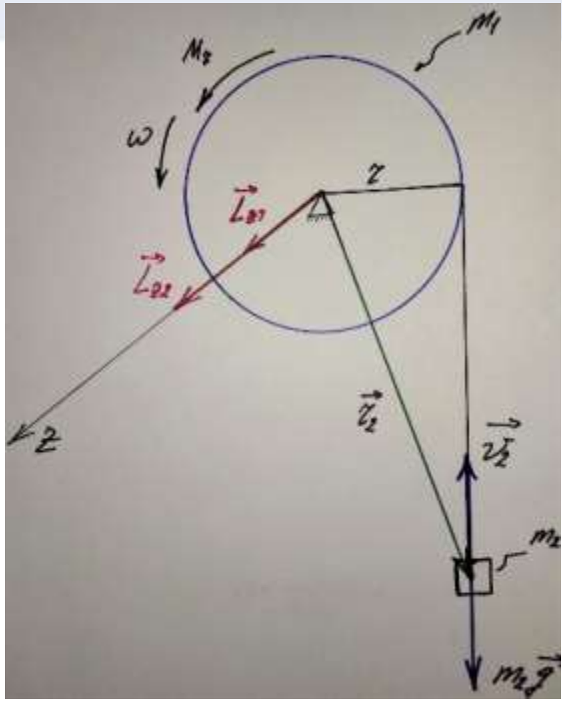
unde $\vec{L}_{z1} = I_{1z}\vec{\omega}$, și $\vec{L}_{z2} = \vec{r}_2 \times m_2\vec{v}_2$, $I_{1z} > 0$,

deci $\vec{L}_{z1}$ este orientat în aceeași direcție cu $\vec{\omega}$.

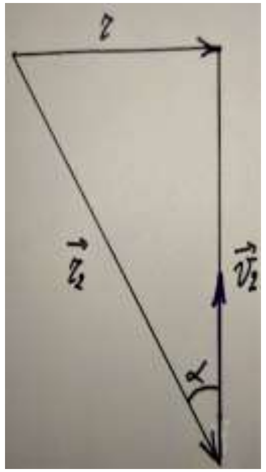
Direcția vectorului $\vec{L}_{z2}$ se determină după regula burghiului

de dreapta din produsul vectorial.

EXEMPLU



$\vec{r}_2$ este raza vectoare a greutății m_2. Din desen se observă că $\vec{L}_{z2}$ va fi orientat tot în direcția vectorului $\vec{\omega}$.



În modul:

$$L_{z1} = I_{1z}\omega;$$

$$L_{z2} = r_2 m_2 v_2 \sin(\vec{r}_2, \vec{v}_2) = m_2 v_2 r$$

Atunci $L_z = I_{1z}\omega + r m_2 v_2$

Firul este inextensibil, deci viteza greutății va fi egală cu viteza tangențială a tamburului.

Atunci $v_2 = \omega r$ și rezultă că:

$$L_z = I_{1z}\omega + m_2 r^2 \omega$$

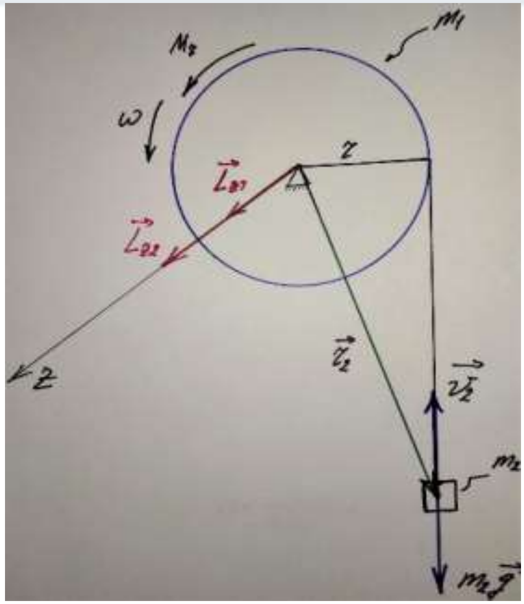
Tamburul este cilindru omogen. Momentul său de inerție în raport

cu axa de rotație va fi: $I_{1z} = \frac{m_1 r^2}{2}$

V. ECUAȚIA DIFERENȚIALĂ A MIȘCĂRII DE ROTAȚIE.

Exemplu

$$L_z = \frac{m_1 r^2}{2}\omega + m_2 r^2 \omega = \frac{m_1+2m_2}{2} r^2 \omega \qquad \text{(I)}$$



Pentru rezolvarea problemei, vom aplica teorema variației momentului cinetic:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k^e)$$

Înlocuind (I) se obține :

$$\frac{m_1+2m_2}{2} r^2 \frac{d\omega}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_z\left(\vec{F}_k^e\right) \qquad \text{(II)}$$

Vom desfășura partea dreaptă a ecuației (II):

Momentul principal al forțelor exterioare este egal cu momentul motor și momentul forței de greutate a corpului m_2.

$$\sum_{k=1}^{n} M_z\left(\vec{F}_k^e\right) = M_r - m_2 g r$$

Atunci, ecuația (II) devine:

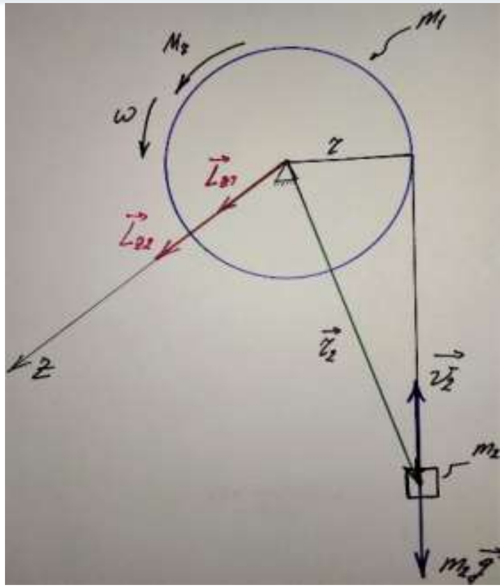
$$\frac{m_1+2m_2}{2} r^2 \frac{d\omega}{dt} = M_r - m_2 g r; \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{2(M_r - m_2 g r)}{(m_1+2m_2) r^2}$$

Exemplu

Separăm variabilele și integrăm:

$$\int_0^{\omega} d\omega = \frac{2}{(m_1+2m_2)r^2}\int_0^{t}(at - m_2 gr)dt$$

Răspuns: $\omega = \frac{at-2m_2grt}{(m_1+2m_2)r^2}$



UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

Bibliografie

1. Butenin N. V. I. L. Lunţ, D. R. Merkin Curs de mecanică teoretică. Vol. 1, 2. Chişinău 1993.
2. Caraganciu V. M. Colpajiu, M. Ţopa Mecanica teoretică. Chişinău 1994
3. I. V. Meşcerskii. Culegere de probleme la MT, Chişinău, 1991.
4. Caraganciu V. MT, Compendiu şi probleme, 2008
5. С. М. Тарг Краткий курс теоретической механики. Наука, Москва, 1967
6. V. Szolga. Mecanica teoretică. Vol. 1. Statica, Divers-press, Bucureşti, 1994