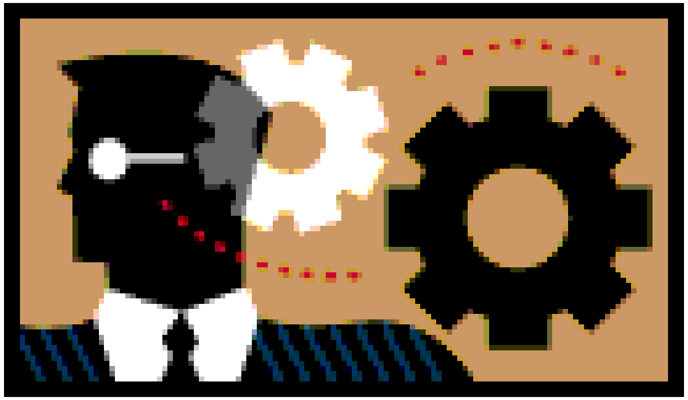
Cinematica rigidului. Mişcarea de translaţie şi de rotaţie.



Scopul acestei prezentări constă în descrierea mișcării rigidului la general și studierea celor mai simple mișcări ale corpului rigid.

Temele abordate:

§1. Definirea mișcării corpului rigid. Grade de libertate.

§2. Mișcarea de translație a rigidului.

§3. Mișcarea de rotație a rigidului. Viteza unghiulară și accelerația unghiulară.

§4. Viteza și accelerația punctului rigidului la mișcarea de rotație.

§5. Cele mai simple transmisii mecanice.

§6. Probleme rezolvate.

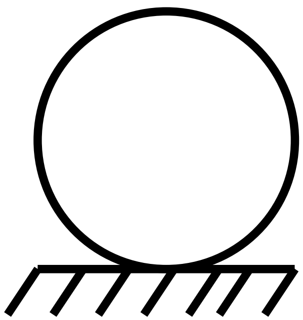
§1. Definirea mișcării corpului rigid. Grade de libertate.

***Definiție*: Se numește corp rigid un corp distanțele dintre punctele căruia nu variază în timpul mișcării. Deformațiile rigidului sunt neglijabile. Noțiunea de corp rigid este un model util la studierea mișcării mecanice. Punctul material poate fi considerat caz particular al corpului rigid.**

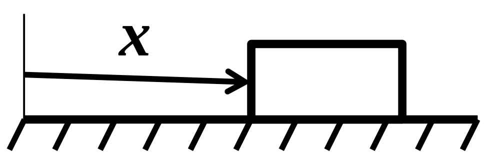
***Definiție*: Numărul de mărimi independente ce determin poziția rigidului în spațiu pentru orice moment de timp se numește numărul de grade de libertate. Vom nota numărul de grade de libertate cu litera S.**

- **Punctul material - *S=3. Coordonatele x,y,z determină poziția punctului material. Dacă mișcarea punctului material este supusă la legături- S<3.***

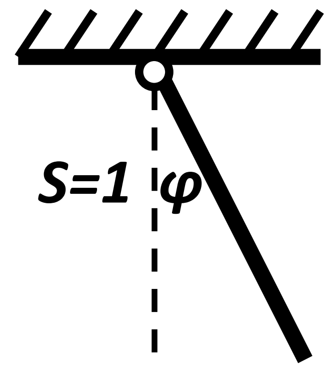
•În caz general corpul rigid are șase grade de libertate. Dacă corpul este supus la legături – S<6. Poziția rigidului este determinată de pozițiile ale trei puncte ale rigidului ce nu stau pe o dreaptă, deci de nouă coordonate. Aceste coordonate nu sunt independente, întrucât distanțele dintre cele trei puncte menționate sunt constante. Prin urmare S=9-3=6. Evident, în cazuri particulare S poate fi mai mic.



$x=x(t)$, $S=1$



$\varphi=\varphi(t)$, $S=1$

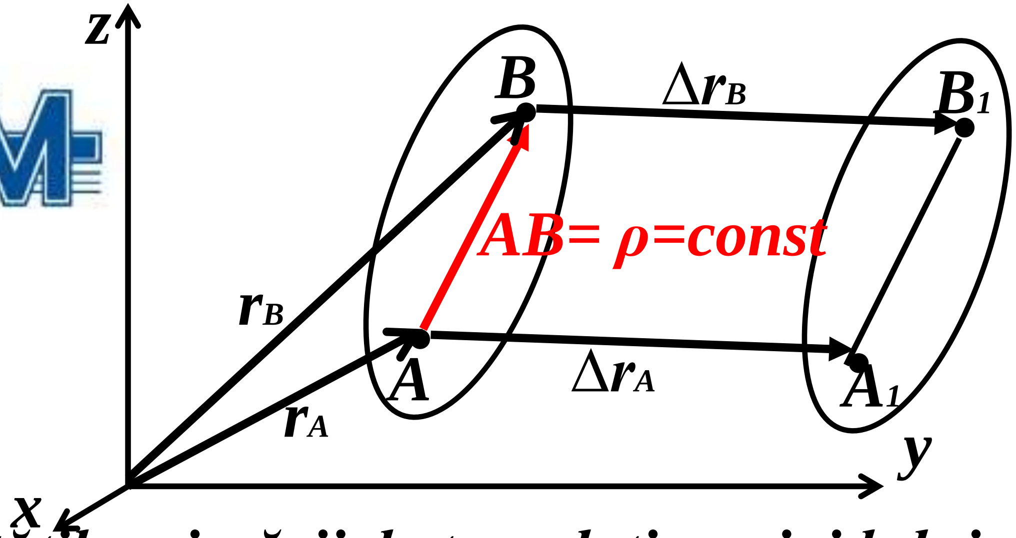


1) Rostogolire fără alunecare S=1
2) Rostogolire cu alunecare S=2
3) Roata poate părăsi suprafața de contact S=3

§2. Mișcarea de translație a rigidului

***Definiție:* Se numește mișcare de translație o așa mișcare a rigidului la care orice dreaptă, ce unește două puncte arbitrare ale rigidului, se mișcă paralel la poziția sa inițială.**

Exemple: Pistonul unui motor cu ardere internă face miscare de translație. Cabina ascesorului, pedala bicicletei și cabina așa numitei roți a "dracului" tot fac mișcări de translație.



ABA_1B_1 - paralelogram

$$r_B = r_A + \rho$$

$$\frac{d\,r_B}{dt} = \frac{d\,r_A}{dt}$$

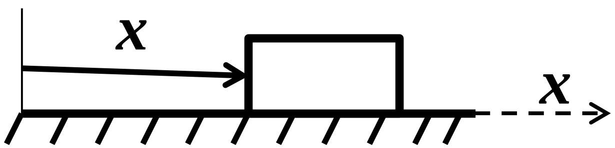
$$\frac{d^2 r_B}{dt^2} = \frac{d^2 r_A}{dt^2}$$

Proprietățile mișcării de translație a rigidului:

1. $\Delta r_A = \Delta r_B$ ***deplasările la toate punctele rigidului sunt egale***
2. $v_A = v_B$ ***vitezele la toate punctele rigidului sunt egale***
3. $a_A = a_B$ ***accelerațiile la toate punctele rigidului sunt egale***

Mișarea de translație a rigidului are, în caz general, trei grade de libertate, ca și punctul material. Putem spune, că mișcarea de translație este determinată de mișcarea unui punct arbitrar al rigidului.

Caracteristicile cinematice (vitezele, accelerațiile) ale rigidului la mișcarea de translație se calculă după formulile din cinematica punctului. Traiectoriile punctelor rigidului pot fi: linie dreaptă, circumferință și alte curbe.

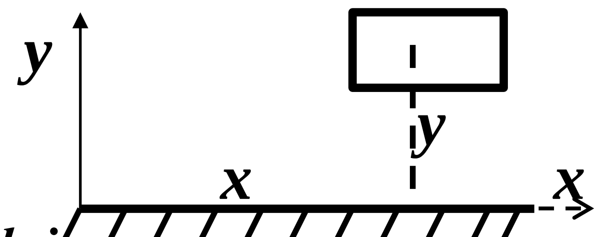


$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

x=x(t)   S=1

$v_x = \dot{x}$ $a_x = \ddot{x}$



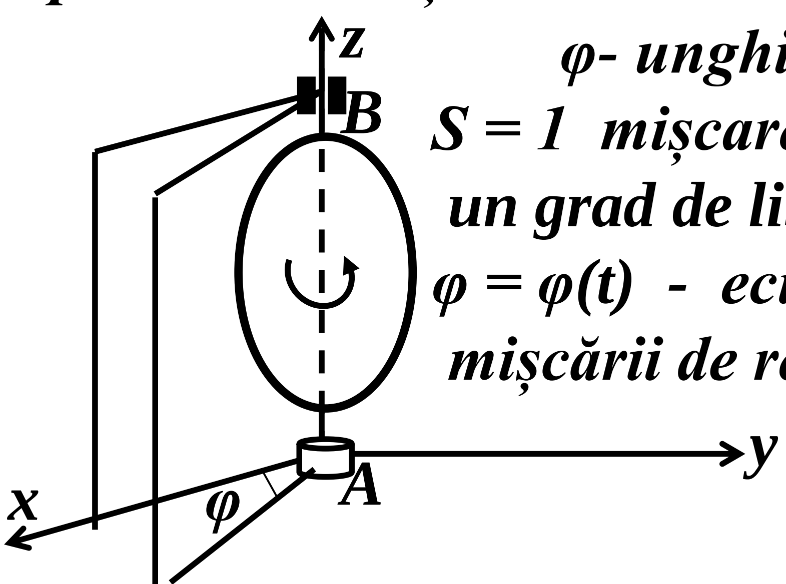
Rigidul face mișcare de translație în planul desenului

x =x(t) y =y(t)   S=2

§3. Mișcarea de rotație a rigidului. Viteza unghiulară și accelerația unghiulară.

***Definiție:* Se numește mișcare de rotație o așa mișcare a rigidului la care două puncte sunt fixe.**

- ***Dreapta ce unește punctele fixe se numește axă de rotație.***
- ***Toate punctele axei de rotație au viteze egale cu zero.***
- ***Traiectoriile punctelor rigidului sunt circumferințe cu centrele pe axa de rotație.***



φ- unghi de rotație

S = 1 mișcarea de rotație are un grad de libertate

φ = φ(t) - ecuația mișcării de rotații

Mişcarea de rotaţie a rigidului în jurul axei fixe z din punct de vedere cinematic se caracterizează prin viteza unghiulară (ω) şi acceleraţia unghiulară (ε).

1. ***Viteza unghiulară se defineşte cum urmează:***

$$\omega_z = \dot{\varphi}$$

$$\omega = \left|\omega_z\right| = \left|\dot{\varphi}\right|$$

$$\vec{\omega} = \omega_z \vec{k} = \dot{\varphi}\vec{k}$$

Viteza unghiulară ca vector se îndreaptă pe axa de rotaţie, în aşa mod, ca privind în întâmpinare rotaţia rigidului să se vadă antiorar. Direcţia vitezei unghiulare poate fi determinată folosind regula burghiului de dreapta: punem burghiul pe axa de rotaţie şi rotim în direcţia rotirii rigidului, mişcarea de translaţie a burghiului ne va arăta direcţia vitezei unghiulare.

2.Accelerația unghiulară se definește cum urmează.

Accelerația unghiulară ca vector se îndreaptă ca și viteza unghiulară: ea coincide cu direcția vitezei unghiulare la rotația accelerată și este opusă la rotația întârziată.

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$\varepsilon = |\varepsilon_z| = |\ddot{\varphi}|$$

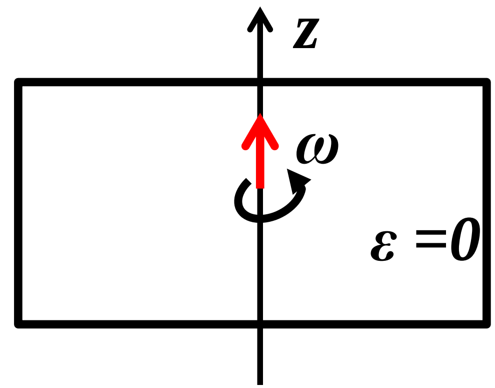
$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_z \vec{k} = \ddot{\varphi}\vec{k}$$

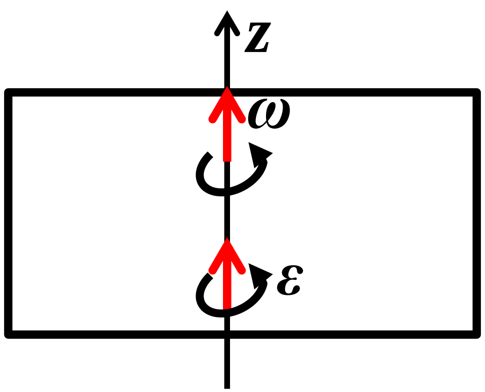
$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}$$

Exemple(*z- axa de rotație*)

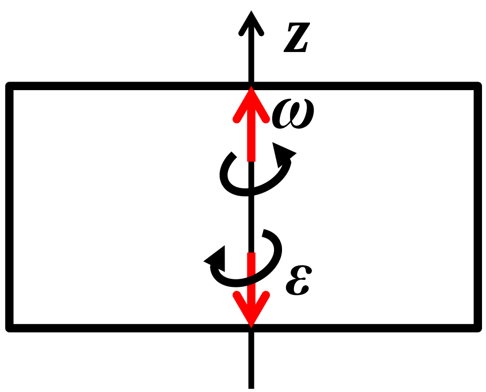
Rotație uniformă

ω=const





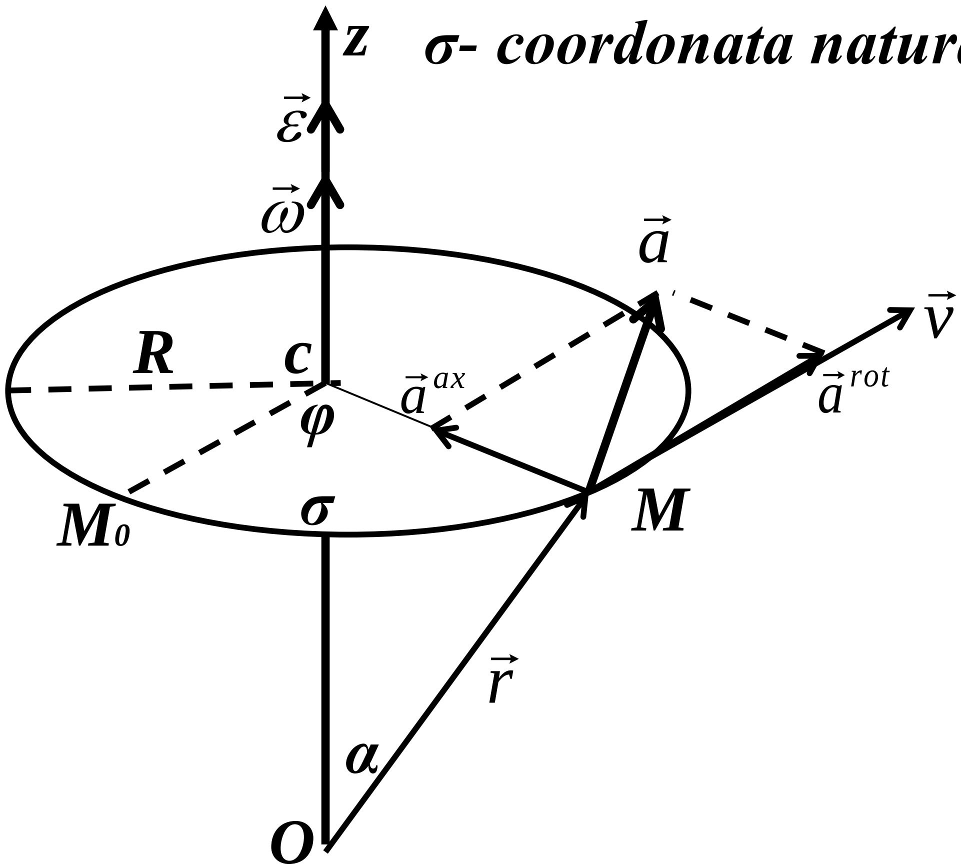
Rotație accelerată
ω-crește



Rotație întârziată
ω-descrește

§4. Viteza și accelerația punctului rigidului la mișcarea de rotație

σ- coordonata naturală. Arcul $M_0M = \sigma = R\cdot\varphi$



$$v = \left|\frac{d\sigma}{dt}\right| = R\left|\frac{d\varphi}{dt}\right| = \omega\cdot R$$

Traiectoria este cerc. Viteza este orientată pe tangentă în direcția mișcării. Viteza ca vector poate fi scrisă în forma:

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} \qquad v = \omega\cdot r\sin\alpha = \omega\cdot R$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}} \qquad \boxed{v = \omega\cdot R}$$

Acum vom obține formula pentru accelerație. Derivăm viteza după timp:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

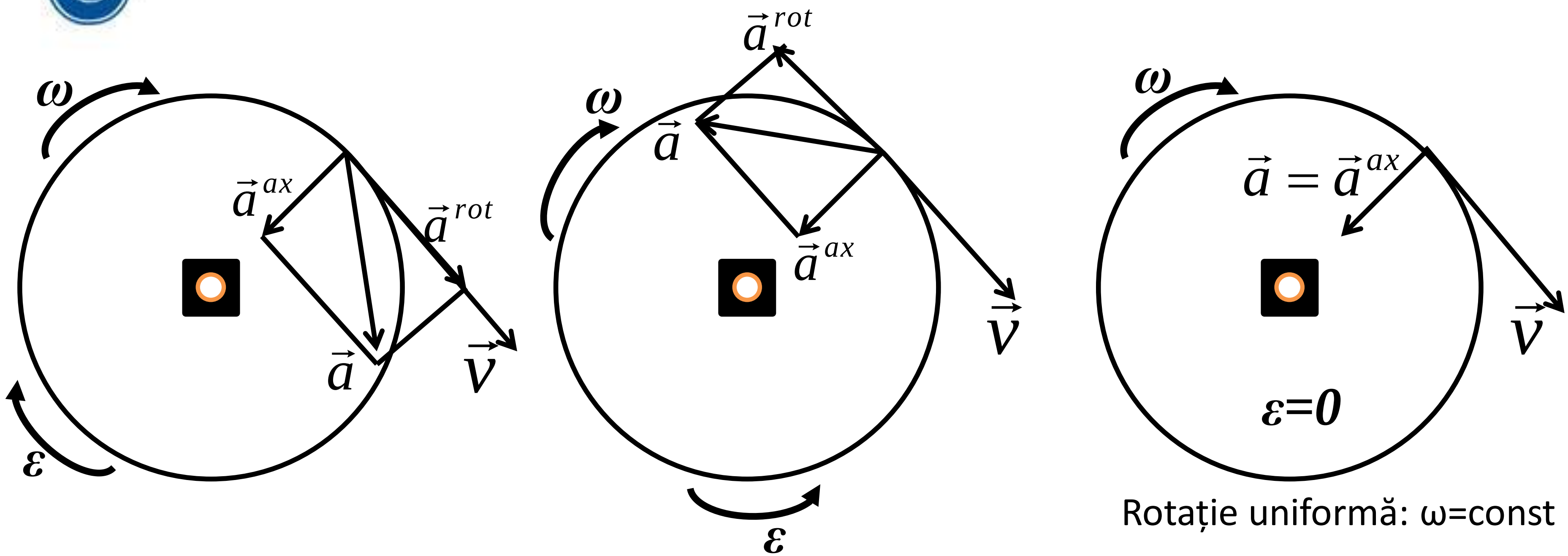
Vectorul accelerației constă din două componente situate în planul perpendicular la axa de rotație. Evident prima componentă este orientată pe tangentă la traiectorie , o notăm $\vec{a}^{rot}$. Ea este orientată în direcția vitezei sau opus. A doua componentă este perpendiculară la prima componentă, o notăm $\vec{a}^{ax}$. Ea este orientată spre axa de rotație, întrucât accelerația totală trebuie să fie orientată în interiorul curburii traiectoriei. Componentele sunt reciproc perpendiculare.

$$\vec{a} = \vec{a}^{rot} + \vec{a}^{ax} \qquad a = \sqrt{(a^{rot})^2 + (a^{ax})^2}$$

$$\vec{a}^{rot} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \qquad a^{rot} = \varepsilon \cdot R$$

$$\vec{a}^{ax} = \vec{\omega} \times \vec{v} \qquad a^{ax} = \omega^2 \cdot R$$

Exemple (rotorul unui motor electric):



Rotație accelerată
ω-crește

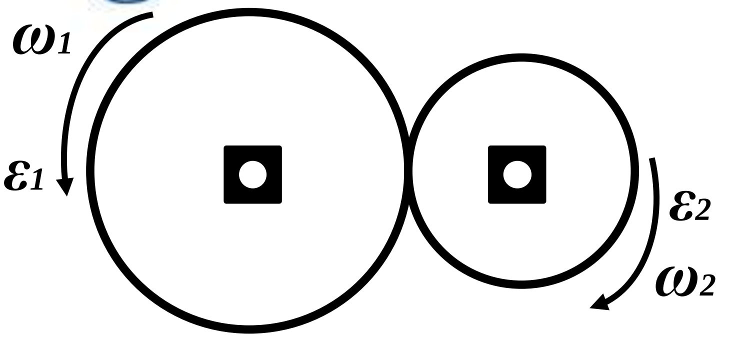
Rotație întârziată
ω- descrește

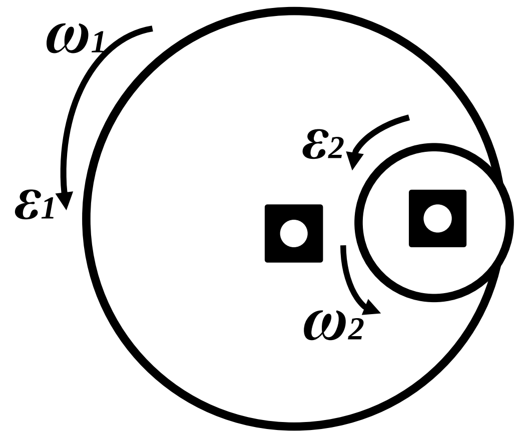
$$a^{rot} = \varepsilon \cdot R$$

$$a^{ax} = \omega^2 \cdot R$$

$$a = \sqrt{(a^{rot})^2 + (a^{ax})^2}$$

§5. Cele mai simple transmisii mecanice.





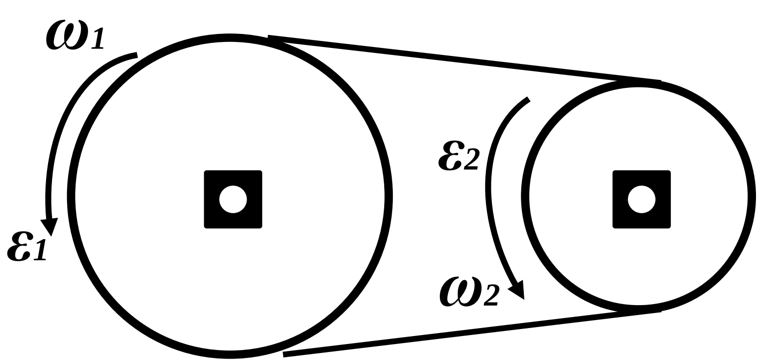
$\omega = \pi n/30$

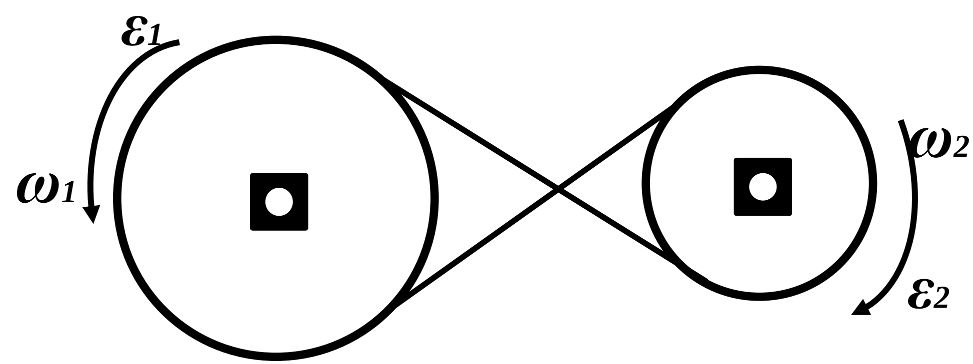
$[\omega]=rad/s$

$[\varepsilon] = rad/s^2$

$[n] = rot/min$

z – numărul de dinți





$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

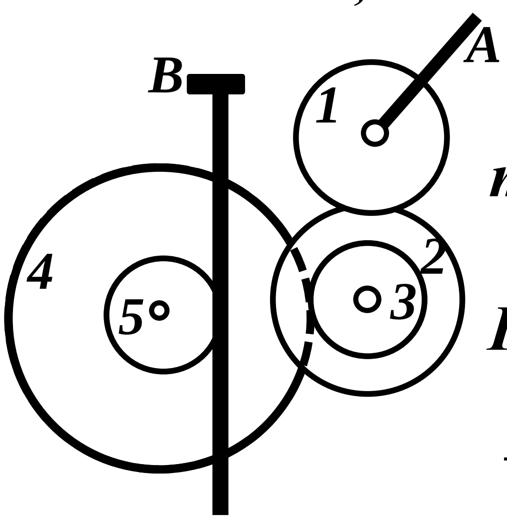
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

§6. Probleme rezolvate

Problema 14.5 din problemarul Meşcerski

În mecanismul unui cric la rotirea manivelei A încep să se rotească roțile dințate 1,2,3,4 și 5, care pun în mișcare cremaliera dințată B. De determinat viteza ultimei, dacă manivela A se rotește cu viteza unghiulară π rad/s. Numărul de dinți la roți sunt: z_1 =6, z_2 =24, z_3 =8, z_4=32; raza roții a cincea r_5=5 cm.



Rezolvarea problemei

Roțile fac mișcări de rotație, iar cremaliera face mișcare de translație. Evident, vitezele unghilare ale manivelei și a roții 1 coincid $\omega_1=\pi=3{,}14$ rad/s. Roțile 2 și 3 la fel 4 și 5 sunt cuplate:$\omega_2=\omega_3$,$\omega_4=\omega_5$.

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{z_2}{z_1} \qquad \frac{\omega_3}{\omega_4}=\frac{z_4}{z_3}$$

Din aceste relații obținem:

$$v_B=\omega_5\cdot r_5 \qquad v_B=\frac{\omega_1 z_1 z_3 r_5}{z_2 z_4}=0{,}98\frac{cm}{s}$$

Problemă

R_1=12cm

r_1=6cm

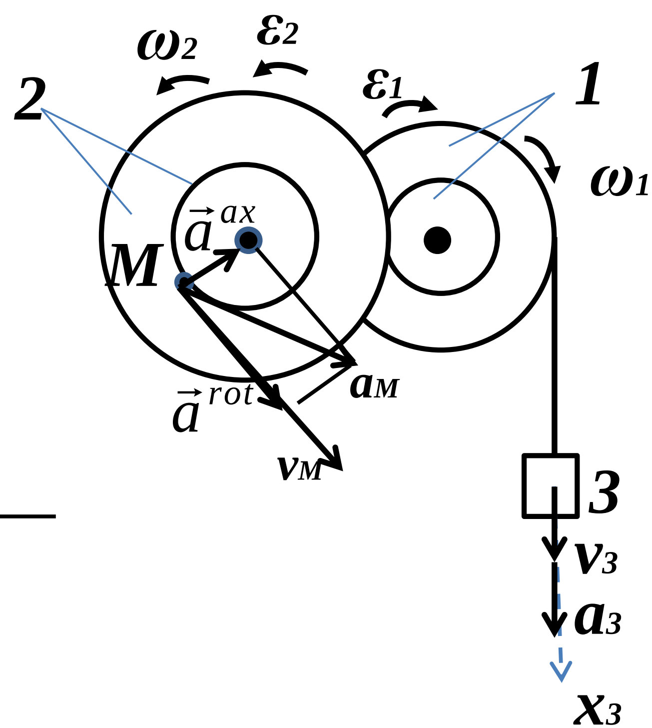
R_2=16cm

r_2=8cm

t_1=1s

$$x_3 = t^2 + t + 1 (cm)$$

v_M -? a_M -?



$$v_M = \omega_2 r_2 = 0{,}8 cm/s$$

$$a_M^{ax} = \omega_2^2 r_2 = 0{,}08 cm/s^2$$

$$a_M^{rot} = \varepsilon_2 r_2 = 0{,}48 cm/s^2$$

$$a_M = \sqrt{(a_M^{ax})^2 + (a_M^{rot})^2} = 0{,}49 cm/s^2$$

Rezolvarea problemei

$$v_3 = \dot{x}_3 = 2t + 1 = 3 cm/s$$

$$a_3 = \ddot{x}_3 = 2 cm/s^2$$

$$\omega_1 = \frac{v_3}{R_1} = \frac{3}{12} = 0{,}25 rad/s$$

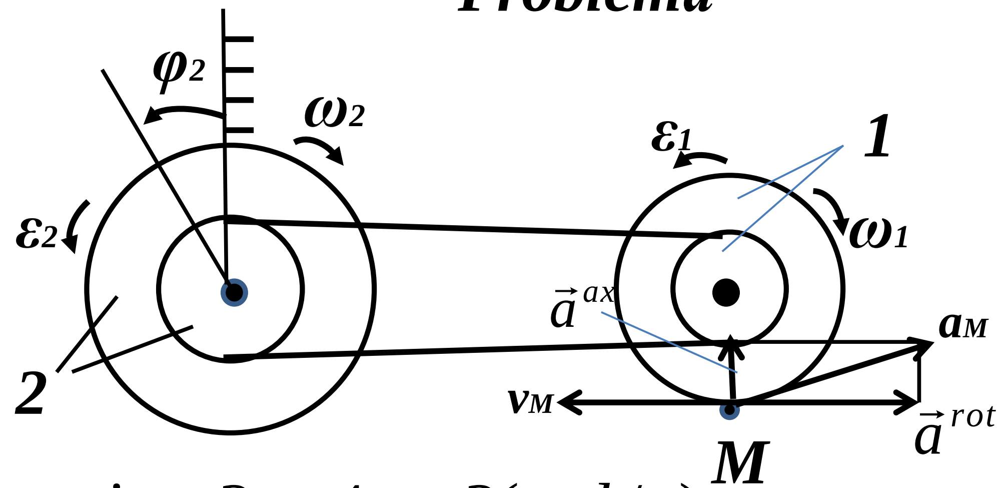
$$\varepsilon_1 = \frac{a_3}{R_1} = \frac{2}{12} = 0{,}17 rad/s^2$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{r_1} \qquad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{R_2}{r_1}$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 r_1}{R_2} = 0{,}1 rad/s$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1 r_1}{R_2} = 0{,}06 rad/s^2$$

Problemă



R_1=12cm

r_1=6cm

R_2=16cm

r_2=8cm

t_1=1s

$$\varphi_2 = t^2 - 4t(rad)$$

v_M -? a_M -?

$$\omega_2 = \dot{\varphi}_2 = 2t - 4 = -2(rad/s)$$

$$\varepsilon_2 = \ddot{\varphi}_2 = 2(rad/s^2)$$

$$v_M = \omega_1 R_1 = 32{,}4(cm/s)$$

$$a_M^{ax} = \omega_1^2 R_1 = 87(cm/s^2)$$

$$a_M^{rot} = \varepsilon_1 R_1 = 32{,}4(cm/s^2)$$

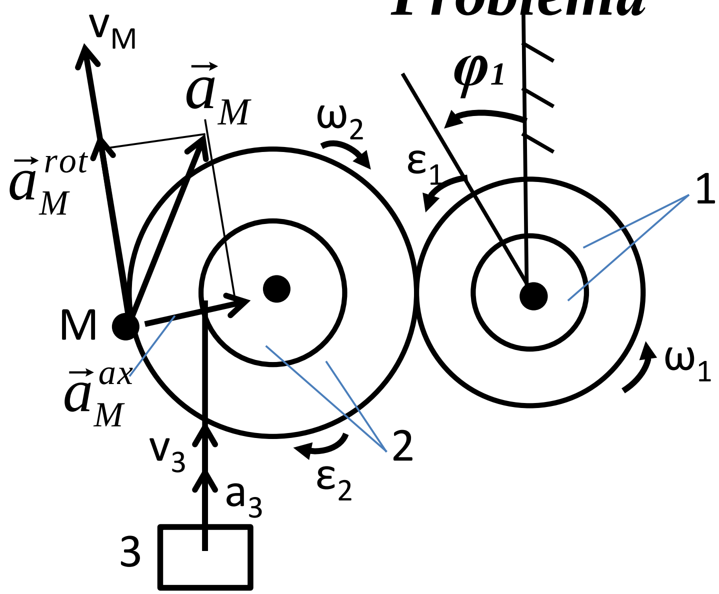
Semnul minus la viteza unghiulară se consideră pe desen.În continuare, $\omega_2 = 2rad/s$ **.**

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} \qquad \omega_1 = \frac{\omega_2 r_2}{r_1} = 2{,}7(rad/s)$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{r_2}{r_1} \qquad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2 r_2}{r_1} = 2{,}7(rad/s^2)$$

$$a_M = \sqrt{(a_M^{ax})^2 + (a_M^{rot})^2} = 93(cm/s^2)$$

Problemă



R₁=12cm

$R_1 = 12cm$

$r_1 = 6cm$

$R_2 = 16cm$

$r_2 = 8cm$

$t_1 = 1s$

$\varphi_1 = t^2/2\ (rad)$

v_M -? a_M -?

v_3 -? a_3 -?

$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1 = t = 1(rad/s$$

$$\varepsilon_1 = \ddot{\varphi} = 1(rad/s^2)$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 R_1}{R_2} = 0,75(rad/s)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1 R_1}{R_2} = 0,75(rad/s^2)$$

$$v_M = \omega_2 R_2 = 0,75 \cdot 16 = 12(cm/s)$$

$$a_M^{ax} = \omega_2^2 R_2 = 9(cm/s^2)$$

$$a_M^{rot} = \varepsilon_2 R_2 = 12(cm/s^2)$$

$$a_M = \sqrt{(a_M^{ax})^2 + (a_M^{rot})^2} = 15(cm/s^2)$$

$$v_3 = v_K = \omega_2 r_2 = 0,75 \cdot 8 = 6(cm/s)$$

$$a_3 = a_K^{rot} = \varepsilon_2 r_2 = 6(cm/s^2)$$