

LUCRARE DE LABORATOR NR. 2

Tema: Sinteza sistemelor de reglare automată în spațiul stărilor

Sinteza reglatoarelor în spațiul stărilor la obiecte cu inerție și astatism

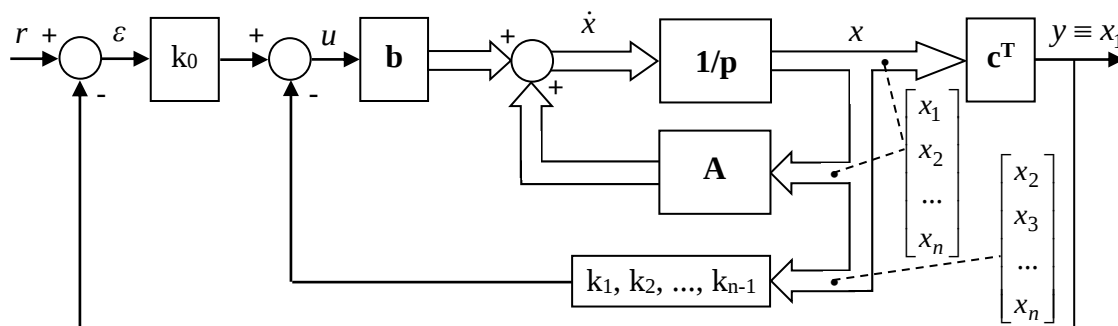


Fig. 1. Schema bloc structurală a SRA pentru obiecte cu inerție și astatism.

1. Se obține ecuația diferențială normalizată după a_0 a obiectului cu inerție și astatism cu parametrii cunoscuți

$$y^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_2\ddot{y}(t) + \alpha_1\dot{y}(t) = \beta_0 u(t).$$

2. Se determină ecuația diferențială în formă vectorial-matricială în realizarea standard controlabilă

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu; \\ y = c^T x. \end{cases}$$

3. Verificarea controlabilității $\text{rang}U = \text{rang}[b, Ab, \dots, A^{n-1}b] = n$.

- În cazul în care condiția este îndeplinită sistemul este controlabil și se poate trece la etapa următoare.
- În caz contrar sistemul nu poate fi condus cu ajutorul acestui algoritm.

4. Se proiectează structura regulatorului

$$u(t) = -[k_1, k_2, \dots, k_{n-1}] \cdot [x_2, x_3, \dots, x_n]^T + k_0 \varepsilon,$$

unde $\varepsilon = (r - y)$, r și y sunt eroarea, mărimea de referință și de ieșire respectiv.

5. Se obține polinomul caracteristic al matricei A

$$\varphi_A(p) = p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \dots + \alpha_2p^2 + \alpha_1p.$$

6. Se determină polinomul caracteristic dorit, în conformitate cu criteriul gradului maximal de stabilitate:

- Se introduce noțiunea de grad maximal de stabilitate J și utilizând substituția $p_i = -J$, polinomul caracteristic obținut la pasul 5 se descompune în n factori liniari și se aduce la forma

$$\varphi_c(p) = (p + J)^n = p^n + q_{n-1}p^{n-1} + \dots + q_1p + q_0,$$

unde n este gradul polinomului caracteristic al sistemului proiectat;

$$q_i = f_i(J, \omega_k), i = (0, \dots, n-1).$$

- Se determină gradul maximal de stabilitate J al sistemului proiectat

$$J = \frac{\alpha_{n-1}}{n} = \frac{a_1}{na_0}.$$

7. În conformitate cu coeficienții polinoamelor caracteristice $\varphi_c(p)$, $\varphi_A(p)$ și relațiile

$$k_0 = q_0 / \beta_0; k_i = q_i - \alpha_i, i = 1, \dots, (n-1)$$

se determină componentele vectorului de reacție (parametrilor de acord).

Tabelul 1. Algoritmi de sinteză a reguletoarelor în spațiul stărilor la modele de obiecte cu inerție și astatism pentru sisteme automate cu răspuns aperiodic

Funcția de transfer a modelului obiectului reglat	$H_F(s) = \frac{k}{s \prod_{i=1}^r (T_i s + 1)} =$ $= \frac{k}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-2} s^2 + a_{n-1} s}, \quad n = r + 1$
Funcția de transfer normalizată	$H_F(s) = \frac{\beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \alpha_{n-2} s^{n-2} + \dots + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s},$ $\alpha_1 = \frac{a_{n-1}}{a_0}; \dots, \alpha_{n-2} = \frac{a_2}{a_0}; \alpha_{n-1} = \frac{a_1}{a_0}; \beta_0 = \frac{k}{a_0}.$
Modelul matematic în formă vectorial-matricială al obiectului reglat	$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$ $y = [\beta_0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] x(t).$
Verificarea controlabilității	$\text{rang} U = \text{rang} [b \quad Ab \quad A^2 b \quad A^3 b \dots \quad A^{n-1} b] = n$
Algoritmul de reglare	$u(t) = -[k_1, k_2, k_3, \dots, k_{n-1}] \cdot [x_2, x_3, x_4, \dots, x_n]^T + k_0 \varepsilon$ unde $\varepsilon = (r - y)$, r și y sunt eroarea, mărimea de referință și de ieșire respectiv
Expresiile algebrice pentru calculul gradului maximal de stabilitate și a coeficienților vectorului de reacție	$J = n-1 \sqrt[n]{\frac{\alpha_1}{n}},$ $k_0 = \frac{J^n}{\beta_0}, \quad k_i = \frac{\prod_{l=1}^i (n-l+1)}{i!} J^{n-i} - \alpha_i, \quad i = 1, \dots, (n-1)$

Sinteza sistemelor de reglare automată în spațiul stărilor

Sinteza reguletoarelor în spațiul stărilor la obiecte cu inerție

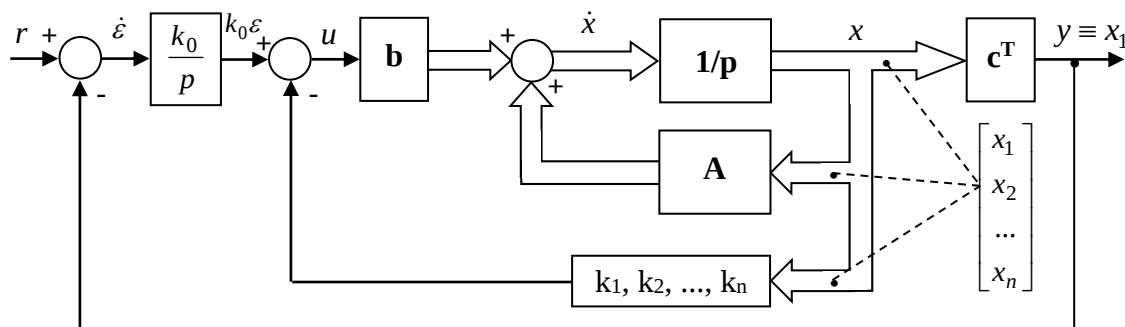


Fig. 2. Schema bloc structurală a SRA pentru obiecte cu inerție.

1. Se obține ecuația diferențială normalizată după a_0 a sistemului monovariabil cu parametri cunoscuți

$$y^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_1y^{(1)}(t) + \alpha_0y(t) = \beta_0u(t).$$

2. Se determină ecuația vectorial-matricială în realizarea standard controlabilă

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu; \\ y = c^T x. \end{cases}$$

3. Ecuația obținută la pasul doi se supune următoarelor transformări

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & O \\ -c^T & 0 \end{bmatrix}}_{\hat{A}} \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}}_{\hat{b}} u + \begin{bmatrix} O \\ 1 \end{bmatrix} r; \\ y = c^T x, \end{cases}$$

unde $O^T = [0, 0, \dots, 0]$.

4. Verificarea controlabilității sistemului $\text{rang}U = \text{rang}[\hat{b}, \hat{A}\hat{b}, \dots, \hat{A}^n\hat{b}] = n + 1$.

- În cazul în care condiția se îndeplinește, se trece la etapa următoare.
- În caz contrar, sistemul nu poate fi condus cu ajutorul acestui algoritm.

5. Se proiectează structura regulatorului după relația

$$u(t) = -[k_1, k_2, \dots, k_n] \cdot [x_1, x_2, \dots, x_n]^T + k_0\varepsilon, \quad \dot{\varepsilon} = (r - y),$$

unde r și y sunt mărimile de referință și de ieșire respectiv.

6. Se obține polinomul caracteristic al matricei $\hat{A}$

$$\varphi_{\hat{A}}(p) = p^{n+1} + \alpha_{n-1}p^n + \dots + \alpha_0p.$$

7. Se determină polinomul caracteristic dorit, în conformitate cu criteriul gradului maximal de stabilitate

- Se introduce noțiunea de grad maximal de stabilitate J și utilizând substituția $p_i = -J$, polinomul caracteristic obținut la pasul 6 se descompune în $(n+1)$ factori liniari și se aduce la forma

$$\varphi_c(p) = (p + J)^{n+1} = p^{n+1} + q_n p^n + \dots + q_1 p + q_0,$$

unde $(n+1)$ - gradul polinomului caracteristic.

- Se determină gradul maximal de stabilitate J al sistemului proiectat

$$J = \frac{\alpha_{n-1}}{n+1} = \frac{a_1}{(n+1)a_0}.$$

8. În conformitate cu coeficienții polinoamelor caracteristice $\varphi_c(p)$, $\varphi_{\hat{A}}(p)$ și relațiile

$$k_0 = q_0 / \beta_0; k_i = q_i - \alpha_{i-1}, i = (1, \dots, n),$$

se determină componentele vectorului de reacție (parametrilor de acord).

Tabelul 2. Algoritmi de sinteză a reguletoarelor în spațiul stărilor la modele de obiecte cu inerție, pentru sisteme automate cu răspuns aperiodic

Funcția de transfer a modelului obiectului reglat	$H_F(s) = \frac{k}{\prod_{i=1}^n (T_i s + 1)} = \frac{k}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$
Funcția de transfer normalizată	$H_F(s) = \frac{\beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \alpha_{n-2} s^{n-2} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0},$ $\alpha_0 = \frac{a_n}{a_0}; \alpha_1 = \frac{a_{n-1}}{a_0}; \dots, \alpha_{n-2} = \frac{a_2}{a_0}; \alpha_{n-1} = \frac{a_1}{a_0}; \beta_0 = \frac{k}{a_0}.$
Modelul matematic în formă vectorial-matricială al obiectului reglat	$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$ $y = [\beta_0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] x(t).$
Modelul matematic în formă vectorial-matricială al sistemului și algoritmul de reglare	$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} & 0 \\ -\beta_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\hat{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \\ \varepsilon \end{bmatrix}}_{\hat{b}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\hat{b}} u + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\hat{b}} r,$ $y(t) = [\beta_0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] x(t),$ $\text{rang} U = \text{rang}[\hat{b}, \hat{A}\hat{b}, \hat{A}^2\hat{b}, \dots, \hat{A}^n\hat{b}] = n + 1,$ $u(t) = -[k_1, k_2, \dots, k_n] \cdot [x_1, x_2, \dots, x_n]^T + k_0 \varepsilon,$ unde $\varepsilon = (r - y)$, r și y sunt mărimile de referință și de ieșire respectiv
Expresiile algebrice pentru calculul gradului maximal de stabilitate și a coeficienților vectorului de reacție	$J = n-1 \sqrt{\frac{2\alpha_1}{n^2 + n}},$ $k_0 = \frac{J^{n+1}}{\beta_0}, \quad k_i = \frac{\prod_{l=1}^i (n-l+2)}{i!} J^{n+1-i} - \alpha_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n$

Sarcina:

1. Pentru varianta dată de efectuat sinteza regulatorului în baza algoritmilor prezentați.
2. De verificat rezultatele obținute în MATLAB, Simulink.

Variantele:

$$1. \frac{3}{(2s+1)(4s+1)(7s+1)}; \frac{1}{s(3s+1)(s+1)(7s+1)};$$

$$2. \frac{2}{(s+1)(3s+1)(9s+1)}; \frac{2}{s(3s+1)(s+1)(7s+1)};$$

$$3. \frac{4}{(5s+1)(s+1)(4s+1)}; \frac{5}{s(2s+1)(6s+1)(s+1)};$$

$$4. \frac{5}{(s+1)(3s+1)(7s+1)}; \frac{3}{s(2s+1)(3s+1)(7s+1)};$$

$$5. \frac{6}{(s+1)(8s+1)(2s+1)}; \frac{7}{s(2s+1)(s+1)(7s+1)};$$

$$6. \frac{2}{(s+1)(9s+1)(5s+1)}; \frac{8}{s(2s+1)(6s+1)(7s+1)};$$

$$7. \frac{8}{(4s+1)(6s+1)(5s+1)}; \frac{1}{s(2s+1)(4s+1)(3s+1)};$$

$$8. \frac{10}{(7s+1)(9s+1)(2s+1)}; \frac{2}{s(2s+1)(4s+1)(2s+1)};$$

$$9. \frac{1}{(s+1)(4s+1)(2s+1)}; \frac{4}{s(2s+1)(s+1)(7s+1)};$$

$$10. \frac{4}{(12s+1)(3s+1)(s+1)}; \frac{5}{s(s+1)(4s+1)(7s+1)};$$

11. $\frac{1}{(s+1)(3s+1)(8s+1)}; \frac{2}{s(2s+1)(4s+1)(5s+1)};$
12. $\frac{6}{(s+1)(13s+1)(10s+1)}; \frac{5}{s(2s+1)(s+1)(6s+1)};$
13. $\frac{9}{(15s+1)(s+1)(14s+1)}; \frac{1}{s(2s+1)(s+1)(3s+1)};$
14. $\frac{3}{(s+1)(13s+1)(17s+1)}; \frac{8}{s(2s+1)(4s+1)(5s+1)};$
15. $\frac{4}{(s+1)(18s+1)(6s+1)}; \frac{2}{s(2s+1)(4s+1)(7s+1)};$
16. $\frac{2.5}{(7s+1)(2s+1)(5s+1)}; \frac{3}{s(2s+1)(s+1)(6s+1)};$
17. $\frac{18}{(14s+1)(2s+1)(3s+1)}; \frac{4}{s(s+1)(3s+1)(7s+1)};$
18. $\frac{1}{(4s+1)(5s+1)(s+1)}; \frac{3}{s(2s+1)(8s+1)(7s+1)};$
19. $\frac{11}{(3s+1)(9s+1)(2s+1)}; \frac{2}{s(2s+1)(3s+1)(6s+1)};$
20. $\frac{14}{(2s+1)(8s+1)(9s+1)}; \frac{1}{s(4s+1)(5s+1)(3s+1)};$