

Tema: Reprezentările matematice ale sistemelor în spațiul stărilor

TEORIE:

Modele de stare

Modele de stare pentru sisteme cu timp continuu

La un sistem **strict cauzal**, transferul între mărimile de intrare și de ieșire se face prin schema :

$$\text{intrare } u(t) \rightarrow \text{stare } x(t) \rightarrow \text{ieșire } y(t) \quad (1)$$

conform fig. 1. **Vectorul de stare**, de dimensiune n ,

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

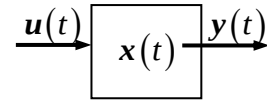


Fig. 1 Sistem în reprezentare de stare

reunește variabilele de stare $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, care caracterizează dinamica sistemului. Dimensiunea vectorului de stare, n , se numește **ordinul sistemului**.

Un sistem cu mai multe mărimi de intrare și de ieșire, se numește **multivariabil**.

Un sistem **neliniar multivariabil** este definit prin:

$$\text{- ecuația de stare:} \quad \dot{x} = f(x, u) \quad (3)$$

care reprezintă forma vectorială a ansamblului de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \end{cases} \quad (3.bis)$$

$$\text{- ecuația de ieșire :} \quad y = g(x) \quad (4)$$

care reprezintă forma vectorială a ansamblului de ecuații algebrice

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_r = g_r(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (4bis)$$

În cazul unui sistem liniar, modelul de stare are forma :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (5)$$

$$y = Cx \quad (6)$$

unde $\dim \mathbf{x} = n$, $\dim \mathbf{u} = m$, $\dim \mathbf{y} = r$ și matricele $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ și $\mathbf{C}$ au dimensiunile $n \times n$, respectiv $n \times m$, $r \times n$.

Dacă sistemul are o singură mărime de intrare și o singură mărime de ieșire, el se numește **monovariabil**. Dacă sistemul este liniar, modelul de stare devine:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (7)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (8)$$

unde $\mathbf{b}$ și $\mathbf{c}$ sunt vectori coloană de dimensiune n .

Sistemele prezentate sunt **strict cauzale**, deoarece variabila de intrare afectează mai întâi variabila de stare, prin *ecuația diferențială de stare* (aceasta definește *dinamica* sistemului), iar variabila de stare determină, printr-o relație algebrică (ecuația de ieșire), variabila de ieșire a sistemului.

Sistemele **la limită cauzale** diferă de cele strict cauzale prin forma ecuației algebrice de ieșire, în care intervine și variabila de intrare:

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, u) \quad (9)$$

în locul ecuației (4),

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \quad (10)$$

unde $\mathbf{D}$ are dimensiunea $r \times m$, în locul ecuației (4), și

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + d.u \quad (11)$$

în locul relației (8).

Forme de reprezentare

Forma standard controlabilă

Sistemul este reprezentat în forma funcției de transfer

$$H(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + b_{n-2} s^{n-2} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_0}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = b_0 - a_0 b_n \quad b_1 - a_1 b_n \quad b_2 - a_2 b_n \quad \dots \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_n \quad x + b_n u.$$

Forma canonică observabilă

Sistemul este reprezentat în forma funcției de transfer

$$H(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + b_{n-2} s^{n-2} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_0}$$

$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{n-1} - a_{n-1}b_n \\ b_{n-2} - a_{n-2}b_n \\ \vdots \\ b_1 - a_1b_n \\ b_0 - a_0b_n \end{bmatrix} u,$	
$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u.$	
Forma canonică diagonală Sistemul este reprezentat în forma funcției de transfer $H(s) = b_n + \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{s + p_k} = b_n + \frac{c_1}{s + p_1} + \frac{c_2}{s + p_2} + \dots + \frac{c_n}{s + p_n}.$	
$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -p_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u,$	
$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u.$	

Sarcina:

1. Funcția de transfer dată după varianta de prezentat în formele:
 - standart controlabilă ;
 - canonică observabilă;
 - canonică diagonală.
 Pentru fiecare formă de prezentat schema bloc.
2. În MATLAB din linia de comandă de făcut convertirea funcției de transfer în modelul intrare-stare-ieșire.
3. În Simulink de asamblat schema cu modelul obținut în forma ecuației de stare și de simulat sistemul când la intrare este aplicat semnalul treaptă unitară.

Variante

1. $\frac{1}{4s^2 + 3s + 1}; \frac{3s + 2}{4s^2 + 3s + 1}; \frac{1}{10s + 1}.$
2. $\frac{6s + 2}{8s^2 + 2s + 1}; \frac{1}{15s^2 + 3s + 1}; \frac{7s^2 + 8s + 1}{4s^2 + 3s + 1}.$
3. $\frac{1}{10s + 1}; \frac{1}{12s^2 + 9s + 1}; \frac{s^2 + 9s + 1}{4s^2 + 3s + 1}.$
4. $\frac{4s + 1}{8s^2 + 4s + 1}; \frac{4}{25s^2 + 3s + 1}; \frac{1}{3s + 1}.$
5. $\frac{8s^2 + 4s + 1}{14s^2 + 13s + 1}; \frac{4s + 1}{6s + 1}; \frac{4}{s^2 + 3s + 1}.$
6. $\frac{8s^2 + s + 1}{10s^2 + 3s + 1}; \frac{4s + 1}{3s + 1}; \frac{1}{8s^2 + 5s + 1}.$
7. $\frac{4}{2s^2 + 2s + 1}; \frac{8s^2 + 4s + 1}{9s^2 + 2s + 1}; \frac{1}{2s + 1}.$
8. $\frac{10}{3s + 1}; \frac{8s^2 + 4s + 1}{6s^2 + 7s + 1}; \frac{1}{5s^2 + 2s + 1}.$
9. $\frac{1}{3s^2 + s + 1}; \frac{s^2 + 4s + 1}{4s^2 + 3s + 1}; \frac{1}{8s^2 + 4s}.$
10. $\frac{2s^2 + 2s + 1}{8s^2 + 3s + 1}; \frac{1}{5s^2 + 7s + 1}; \frac{2s^2 + 8s + 1}{4s^2 + 3s + 1}.$
11. $\frac{1}{2s^2 + 6s + 1}; \frac{9s^2 + 3s + 1}{4s^2 + 3s + 1}; \frac{1}{7s + 1}.$
12. $\frac{3s^2 + 2s + 1}{7s^2 + 3s + 1}; \frac{1}{9s^2 + 3s + 1}; \frac{3s + 1}{5s + 1}.$
13. $\frac{3s^2 + 2s + 1}{5s^2 + 3s + 1}; \frac{2s + 1}{8s^2 + 3s}; \frac{2}{4s^2 + 3s + 1}.$
14. $\frac{1}{6s^2 + 8s + 1}; \frac{s^2 + 4s + 1}{2s^2 + 4s + 1}; \frac{1}{7s^2 + 8s + 1}.$
15. $\frac{s^2 + 4s + 1}{3s^2 + 2s + 1}; \frac{1}{7s^2 + 8s + 1}; \frac{2s + 1}{2s^2 + 3s + 1}.$

$$16. \frac{s+1}{3s^2+6s+1}; \frac{9s^2+3s+1}{4s^2+3s+1}; \frac{1}{7s+1}.$$

$$17. \frac{3s^2+2s+1}{3s^2+8s+1}; \frac{1}{9s^2+3s+1}; \frac{3s+1}{5s+1}.$$

$$18. \frac{3s^2+2s+1}{5s^2+3s+1}; \frac{2s+1}{5s^2+3s}; \frac{2}{4s^2+3s+1}.$$

$$19. \frac{1}{2s^2+8s+1}; \frac{s^2+4s+1}{7s^2+4s+1}; \frac{4}{7s^2+8s+1}.$$

$$20. \frac{1}{5s^2+6s+1}; \frac{9s^2+3s+1}{4s^2+3s+1}; \frac{1}{8s+1}.$$