

В.Л.Бонч-Бруевич, И.П.Звягин, И.В.Карпенко, А.Г.Мионов
СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.— 144 с.

Приведены задачи по основным вопросам физики полупроводников (статистика электронов и дырок в полупроводниках, диффузия и дрейф носителей заряда, фото- и термоэлектрические явления и т. д.). Во втором издании добавлен ряд новых задач (в частности, относящихся к полупроводникам со сложным законом дисперсии); введена также новая глава, посвященная оптике полупроводников. В начале каждой главы дана сводка основных формул, задачи снабжены подробными решениями (1-е изд. в 1968 г.);

Для студентов и аспирантов университетов и других вузов, готовящих специалистов по физике полупроводников, полупроводниковому материаловедению и полупроводниковой электронике.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию	3	
Предисловие к первому изданию	4	
		Задачи Решения
<i>Глава 1.</i> Статистика электронов и дырок в полупроводниках	5	57
<i>Глава 2.</i> Рекомбинация носителей заряда в полупроводниках	21	80
<i>Глава 3.</i> Диффузия и дрейф носителей заряда	27	87
<i>Глава 4.</i> Диффузия и дрейф носителей заряда в магнитном поло	34	100
<i>Глава 5.</i> Поверхностные явления	37	103
<i>Глава 6.</i> Термо-э. д. с. в полупроводниках	47	127
<i>Глава 1.</i> Фото-э. д. с. в полупроводниках	51	134
<i>Глава 8.</i> Оптика полупроводников	53	137
<i>Приложения</i>		
1. Некоторые свойства интегралов Ферми	140	
2. Некоторые параметры полупроводниковых материалов	141	

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Первое издание «Сборника задач по физике полупроводников» вышло в 1968 г. Полученные авторами отзывы на него, будучи в целом благожелательными, содержали вместе с тем рекомендации об увеличении числа задач и о возможном расширении тематики сборника. Представления, ставшие классическими уже в 60-е годы, не утратили своего значения и по сей день, хотя круг основных понятий и методов, знание которых сейчас обязательно для всех специалистов по физике полупроводников, расширился. Это было учтено при подготовке второго издания «Сборника задач».

В задачник включен новый раздел, посвященный оптике полупроводников, а также увеличено число задач в других разделах. Введен ряд новых задач, относящихся к полупроводникам с непараболическим законом дисперсии, задач по статистике заполнения многозарядных примесных центров и по физике поверхностных явлений. Численные решения пересмотрены в связи с происшедшим за последние годы уточнением значений параметров полупроводниковых материалов.

Вместе с тем стиль и уровень книги не изменились. Задачи согласованы с соответствующими разделами курса физики полупроводников, читаемого на физическом факультете Московского университета, а также с учебным пособием С. Г. Калашникова и одного из нас — «Физика полупроводников» (М., «Наука», 1977).

Авторы весьма признательны рецензентам: кафедре полупроводниковой электроники факультета физической и квантовой электроники МФТИ, академику АН СССР Ю. В. Гуляеву и профессору П. П. Конорову, сделавшим ряд полезных замечаний.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемый сборник содержит задачи, использовавшиеся авторами в течение ряда лет на семинарских занятиях со студентами кафедры физики полупроводников МГУ и кафедры материаловедения полупроводников МИСиС. Задачи согласованы с общим курсом физики полупроводников, читаемым на 4-м курсе Московского университета. При этом мы старались в основном выбирать задачи, близкие к тем, которые приходится решать экспериментатору, планируя опыт или обрабатывая его результаты. Значения различных параметров (эффективных масс и т. д.), равно как и значения концентраций, времен жизни, длин диффузии и т. д., как правило, соответствуют реальным полупроводникам.

Задачник рассчитан на лиц, знакомых с общим курсом физики полупроводников или изучающих его; краткие введения, предваряющие каждый раздел, содержат лишь сводку необходимых формул и ни в коем случае не могут рассматриваться как попытка связного изложения соответствующего раздела теории.

Математическая подготовка, необходимая для решения задач, не выходит за пределы обычного курса интегрального исчисления и дифференциальных уравнений. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Авторы с удовольствием и глубокой признательностью отмечают дружеский контакт со своими товарищами по кафедре полупроводников МГУ. Мы особенно благодарны С. Г. Калашникову, первоначально читавшему курс, к которому «приноровлены» задачи в настоящем сборнике. Мы весьма признательны также В. С. Вавилову и В. В. Остробородовой за внимание к работе и обсуждение отдельных вопросов.

СТАТИСТИКА ЭЛЕКТРОНОВ И ДЫРОК В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

Концентрация электронов n в зоне проводимости и концентрация дырок p в валентной зоне равны соответственно

$$n = \frac{2}{(2\pi)^3} \int f_n(E_n(\mathbf{k})) d\mathbf{k}, \quad (1.1a)$$

$$p = \frac{2}{(2\pi)^3} \int f_p(E_p(\mathbf{k})) d\mathbf{k}; \quad (1.1б)$$

\mathbf{k} — квазиволновой вектор, интегрирование производится по зоне Бриллюэна; $f_n(E)$ и $f_p(E)$ — функции распределения электронов и дырок по энергиям, равные

$$f_n(E) = [1 + e^{\beta(E-F)}]^{-1}, \quad f_p(E) = 1 - f_n(E); \quad (1.2)$$

$\beta = 1/kT$, F — уровень Ферми, $E_n(\mathbf{k})$ ($E_p(\mathbf{k})$) — закон дисперсии электронов (дырок).

Особый интерес в связи с формулами (1.1a) и (1.1б) представляет поведение функций $E_n(\mathbf{k})$ и $E_p(\mathbf{k})$ вблизи дна зоны проводимости и потолка валентной зоны.

Если дну зоны проводимости соответствует одна точка в зоне Бриллюэна, то это (в кубическом кристалле) должна быть точка $\mathbf{k} = 0$. Тогда для невырожденной зоны

$$E_n(\mathbf{k}) = E_c + \hbar^2 k^2 / 2m_n, \quad (1.3a)$$

где E_c и m_n — постоянные, $m_n > 0$.

Если дну зоны проводимости соответствует несколько точек в зоне Бриллюэна, \mathbf{k}^α ($\alpha = 1, 2, \dots$), то (по-прежнему для невырожденной зоны)

$$E_{n,\alpha}(\mathbf{k}) = E_c + \sum_{i=x,y,z} \frac{\hbar^2}{2m_i} (k_i - k_i^\alpha)^2, \quad m_i > 0. \quad (1.3б)$$

Энергия E_c соответствует дну зоны, m_n называется эффективной массой электрона, в анизотропном случае (1.3б) величины m_i представляют собой компоненты тензора эффективных масс m_{ij} , $m_{ij}^{-1} = \frac{1}{\hbar^2} \cdot \frac{\partial^2 E_n(\mathbf{k})}{\partial k_i \partial k_j}$, приведенного к главным осям. В системе главных осей имеем

$$m_{xx} = m_x, \quad m_{yy} = m_y, \quad m_{zz} = m_z, \quad m_{xy} = m_{xz} = \dots = 0. \quad (1.4)$$

В часто встречающемся случае, когда изоэнергетические поверхности представляют собой эллипсоиды вращения, две из величин m_i одинаковы. Их принято обозначать буквой m_{\perp} (поперечная эффективная масса), а третью величину называют продольной эффективной массой и обозначают через m_{\parallel} .

Соотношения, аналогичные (1.3б), имеют место и для невырожденной валентной зоны; в изотропном случае

$$E_p(\mathbf{k}) = E_v - \hbar^2 k^2 / 2m_p, \quad (1.3в)$$

в анизотропном случае

$$E_{p,\alpha}(\mathbf{k}) = E_v - \sum_{i=x,y,z} \frac{\hbar^2}{2m_i} (k_i - k_i^{\alpha})^2. \quad (1.3г)$$

Величина $E_g = E_c - E_v$ называется шириной запрещенной зоны.

В случае вырожденных зон равенства (1.3а), (1.3б) несправедливы, и зависимость $E(\mathbf{k})$ дается более сложными формулами. Например, если у потолка валентной зоны имеются две вырожденные при $\mathbf{k} = 0$ зоны, то закон дисперсии $E_p(\mathbf{k})$ вблизи края зон имеет вид

$$E_p(\mathbf{k}) = E_v - (\hbar^2 / 2m_0) \{ Ak^2 \pm \pm [B^2 k^4 + C^2 (k_x^2 k_y^2 + k_y^2 k_z^2 + k_z^2 k_x^2)]^{1/2} \}, \quad (1.3д)$$

причем знак плюс относится к зоне так называемых «легких» дырок, а знак минус — к зоне «тяжелых» дырок; m_0 — масса свободного электрона в вакууме, A , B , C — безразмерные параметры.

В ряде полупроводников с узкой запрещенной зоной даже при небольшом удалении от экстремума существенно сказывается непараболичность зоны. Если предположить, что отклонения от параболичности связаны со взаимодействием двух зон — валентной зоны и зоны про-

водимости, а все остальные зоны расположены достаточно далеко, — то закон дисперсии в рассматриваемых зонах можно приближенно записать в виде

$$E(\mathbf{k}) = E_c + \hbar^2 k^2 / 2\tilde{m} + 1/2 \left(\pm \sqrt{E_g^2 + 8/3 \mathcal{P}^2 k^2} - E_g \right). \quad (1.3e)$$

Здесь \tilde{m} — параметр, имеющий размерность массы и обычно близкий к массе свободного электрона; знак плюс относится к зоне проводимости, знак минус — к валентной зоне; \mathcal{P} — параметр, характеризующий «взаимодействие» зон. Закон дисперсии (1.3e) был предложен Кейном. Вводя в (1.3e) значение эффективной массы вблизи края зоны, $m(0) = 3\hbar^2 E_g / 4\mathcal{P}^2$, при $m(0) \ll \tilde{m}$ получаем

$$E(\mathbf{k}) = E_c + 1/2 \left(\pm \sqrt{E_g^2 + 2\hbar^2 k^2 E_g / m(0)} - E_g \right). \quad (1.3ж)$$

Закон дисперсии в таком виде выполняется достаточно хорошо для зон проводимости ряда полупроводников с узкими запрещенными зонами (например, антимонида индия).

Более сложная форма закона дисперсии, также предложенная Кейном, получается при учете вырождения валентной зоны. Формула (1.3e) при этом описывает зону проводимости, $E = E_c(\mathbf{k})$, и зону легких дырок, $E = E_{v,l}(\mathbf{k})$, а для зоны тяжелых дырок закон дисперсии имеет вид*)

$$E_{v,h}(\mathbf{k}) = E_v - \hbar^2 k^2 / 2m_0. \quad (1.3з)$$

Для простой параболической зоны (1.3а) концентрация электронов дается выражением

$$n = N_c \Phi_{1/2}(\eta), \quad \eta = (F - E_c) / kT, \quad (1.5)$$

где величина

$$N_c = 2(m_n kT / 2\pi \hbar^2)^{3/2} \quad (1.6)$$

называется эффективным числом состояний в зоне проводимости, а $\Phi_{1/2}(\eta)$ — интеграл Ферми (см. Приложение 1). В частности, в отсутствие вырождения формула (1.5) принимает вид (см. формулу (II.2))

$$n = N_c \exp \eta. \quad (1.7)$$

В случае более сложной зависимости $E(\mathbf{k})$ концентрация может тем не менее даваться выражениями (1.5) и

*) Все указанные здесь законы дисперсии выписаны в «электронной» нормировке энергии. Желая перейти к спектру дырок, надо изменить знаки $E_{v,l}$ и $E_{v,h}$.

(1.6) с заменой m_n на некоторую величину m_{dn} , называемую эффективной массой плотности состояний в зоне проводимости. Так, в случае (1.3б)

$$m_{dn} = Q^{2/3} (m_x m_y m_z)^{1/3}, \quad (1.8)$$

где Q — число эквивалентных минимумов в зоне проводимости (см. задачу 4).

При решении задач удобно пользоваться следующей формулой для эффективного числа состояний:

$$N_c = 2,510 \cdot 10^{19} (m_{dn}/m_0)^{3/2} (T/300 \text{ K})^{3/2} \text{ см}^{-3} \quad (1.9)$$

и аналогично для N_v с заменой m_{dn} на m_{dp} .

В отсутствие фермиевского вырождения представление об эффективной массе плотности состояний в зоне проводимости можно ввести и для кейновского закона дисперсии, равно как и для любого другого. Для этой цели надо воспользоваться формулой (1.1а), произведя в ней замену переменных

$$k_x, k_y, k_z \rightarrow E, \theta, \varphi,$$

где $E = E_n(\mathbf{k})$, а θ, φ — полярные углы вектора \mathbf{k} (или другие удобные переменные; их следует выбирать, лишь задав явный вид закона дисперсии).

Обозначим через $Z_n(E, \theta, \varphi)$ якобиан перехода от старых к новым переменным. Тогда формула (1.1а) примет вид

$$n = \int_{E_c}^{\infty} \rho_n(E) f_k(E) dE, \quad (1.10a)$$

где

$$\rho_n(E) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^{\pi} \sin \theta \int_0^{2\pi} Z_n(E, \theta, \varphi) d\theta d\varphi. \quad (1.11a)$$

Функция $\rho_n(E)$ называется плотностью состояний в зоне проводимости. В частном случае квадратичного и изотропного закона дисперсии (1.3а) она равна

$$\rho_n(E) = (2m_n)^{3/2} (E - E_c)^{1/2} / 2\pi^2 \hbar^3. \quad (1.11б)$$

В отсутствие вырождения, когда $f_n \approx \exp[(F - E)/kT]$, равенство (1.10а) можно переписать в виде

$$n = \exp \frac{F - E_c}{kT} \int_{E_c}^{\infty} \rho_n(E) \exp \left(- \frac{E - E_c}{kT} \right) dE. \quad (1.10б)$$

Введем новую безразмерную переменную интегрирования x , полагая

$$E = E_c + kTx.$$

Тогда вместо (1.106) получим

$$n = N_c \exp [(F - E_c)/kT], \quad (1.12)$$

где

$$N_c = kT \int_0^{\infty} \rho_n(E_c + kTx) e^{-x} dx = 2(m_{dn}kT/2\pi\hbar^2)^{3/2}. \quad (1.13)$$

Эффективная масса плотности состояний в зоне проводимости, m_{dn} , определяется этим соотношением.

При квадратичном законе дисперсии отсюда получается уже известное нам соотношение (1.6). Видно, что формулу (1.9) можно сохранить при любом законе дисперсии. При этом, однако, эффективная масса плотности состояний будет, вообще говоря, зависеть от температуры.

Совершенно таким же путем можно преобразовать и выражение для концентрации дырок (1.16). Мы получаем

$$p = \int_{-\infty}^{E_v} \rho_p(E) f_p(E) dE, \quad (1.14)$$

где

$$\rho_p(E) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^{\pi} \sin \theta \int_0^{2\pi} Z_p(E, \theta, \varphi) d\theta d\varphi. \quad (1.15)$$

Якобиан перехода от старых переменных (k_x, k_y, k_z) к новым (E, θ, φ) теперь надо вычислять с помощью закона дисперсии для дырок.

Для невырожденного дырочного газа из (1.14) получается

$$p = N_v \exp [(E_v - F)/kT], \quad (1.16)$$

где

$$N_v = kT \int_0^{\infty} \rho_p(E_v - kTx) e^{-x} dx. \quad (1.17)$$

Как и N_c , это выражение можно переписать в виде

$$N_v = 2(m_{dp}kT/2\pi\hbar^2)^{3/2}, \quad (1.18)$$

где m_{dp} есть эффективная масса плотности состояний в валентной зоне. Вообще говоря, она, как и m_{dn} , зависит от температуры.

В случае вырожденных валентных зон, описываемых формулой (1.3д), эффективные массы легких и тяжелых дырок m_{\pm} можно ввести, полагая по определению

$$E_p(k) = E_{\pm} = E_v - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\pm}(\theta, \varphi)}, \quad (1.19)$$

где θ и φ — полярные углы вектора \mathbf{k} . Направляя полярную ось Oz вдоль одной из осей четвертого порядка в кубическом кристалле, мы получаем

$$m_{\pm}^{-1}(\theta, \varphi) = \frac{C}{m_0} f_{\pm}(\theta, \varphi), \quad (1.20)$$

где

$$f_{\pm}(\theta, \varphi) = \frac{A}{C} \pm \left[\frac{B^2}{C^2} + \sin^2 \theta \left(\frac{1}{4} \sin^2 2\varphi \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \right) \right]^{1/2}. \quad (1.21)$$

Каждая из зон, описываемых формулой (1.19), оказывается еще и двукратно вырожденной. Вычисляя плотность состояний по формуле (1.15) с учетом этого обстоятельства, мы получаем

$$\rho_{\pm}(E) = (2m_{d\pm})^{3/2} (E_v - E)^{1/2} / 2\pi^2 \hbar^3, \quad (1.22)$$

где эффективные массы плотности состояний $m_{d\pm}$ даются выражением

$$m_{d\pm} = \frac{m_0}{C} \left[\frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/2} \sin \theta f_{\pm}^{-3/2}(\theta, \varphi) d\varphi d\theta \right]^{2/3}. \quad (1.23)$$

Значения интеграла, фигурирующего в формуле (1.23), надо определять численно, пользуясь экспериментальными данными для параметров A , B и C . Результаты расчета, вместе со значениями указанных параметров, сведены в таблице 1. Через ρ_0 обозначена плотность состояний, получающаяся из (1.22) при замене $m_{d\pm}$ на массу свободного электрона m_0 .

Формулы вида (1.10), (1.11) и (1.14), (1.15) можно написать и для систем, в которых электроны и дырки могут совершать инфинитное движение не в трех, а только в двух независимых направлениях, или в одном. Такие системы называют соответственно двумерными или одномерными. Квазиимпульс, или квазиволновой вектор, в двумерной (одномерной) системе имеет две (одну) независимые компоненты. К числу двумерных систем от-

носятся, например, достаточно тонкие пленки, к числу одномерных — длинные органические молекулы.

В двумерной системе концентрации электронов и дырок даются выражениями

$$n = \frac{2}{(2\pi)^2} \int f_n(E_n(\mathbf{k})) d\mathbf{k} \quad (1.24a)$$

и

$$p = \frac{2}{(2\pi)^2} \int f_p(E_p(\mathbf{k})) d\mathbf{k}. \quad (1.24б)$$

При этом интегралы по \mathbf{k} — двойные, а не тройные, а величины n , p имеют размерность см^{-2} . Пусть в рассматриваемом материале движение происходит в плоскости

Таблица 1. Эффективные массы плотности состояний легких m_{d+} и тяжелых m_{d-} дырок в германии и кремнии

Элементы	A	B	C	$\frac{m_{d+}}{m_0}$	$\frac{\rho_+}{\rho_0}$	$\frac{m_{d-}}{m_0}$	$\frac{\rho_-}{\rho_0}$
Ge	-13,3	-8,57	12,78	0,0424	0,00875	0,352	0,209
Si	-4,27	-0,63	5,03	0,154	0,0607	0,541	0,398

Значения параметров A, B и C для германия взяты из книги Willey J. D. Semiconductors and Semimetals. — N. Y.: Acad. Press. — 1975. — v. 10. — p. 91; для кремния — из работы Balslev I., Lawaetz P. — Phys. Lett. — 1965. — v. 19. — p. 6.

(x , y). Введем в \mathbf{k} -плоскости полярные координаты, полагая $k_x = k \cos \varphi$, $k_y = k \sin \varphi$, и перейдем от переменных k , φ к переменным E , φ , где $E = E_n$ или $E = E_p$. Тогда интегралы (1.24a) и (1.24б) примут вид (1.10a) и (1.14), причем

$$\rho_n(E) = 2 \int_0^{2\pi} Z_n(E, \varphi) d\varphi \quad (1.25a)$$

и

$$\rho_p(E) = 2 \int_0^{2\pi} Z_p(E, \varphi) d\varphi. \quad (1.25б)$$

Здесь через $Z_n(E, \varphi)$ и $Z_p(E, \varphi)$ обозначены якобианы перехода от старых переменных к новым, соответствующие данным законам дисперсии, $E_n(\mathbf{k})$ и $E_p(\mathbf{k})$.

Для одномерного полупроводника мы имеем

$$n = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(E_n(k)) dk, \quad (1.26a)$$

$$p = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_p(E_p(k)) dk. \quad (1.26б)$$

Вводя энергии E_n и E_p как независимые переменные, мы вновь получаем формулы (1.10а) и (1.14), причем

$$\rho_n(E) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{dE_n}{dk} \right)^{-1} \Big|_{E_n=E}, \quad \rho_p(E) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{dE_p}{dk} \right)^{-1} \Big|_{E_p=E}. \quad (1.27)$$

Основным соотношением, используемым для определения уровня Ферми, служит условие электрической нейтральности:

$$p + \sum_j z_j N_j - n = 0. \quad (1.28)$$

Здесь z_j — заряд локализованных примесей j -го сорта в единицах заряда электрона (с учетом знака), N_j — концентрация примеси сорта j .

Степени заполнения уровней следует вычислять с учетом взаимодействия между электронами, находящимися в состояниях, локализованных около одного и того же примесного центра. Если отталкивание между электронами столь сильно, что на центре может локализоваться не более одного электрона, то степени заполнения примесного уровня даются выражениями

$$\frac{N_d^0}{N_d^+} = g_d \exp \frac{F - E_d}{kT}, \quad \frac{N_a^-}{N_a^0} = \frac{1}{g_a} \exp \frac{F - E_a}{kT}. \quad (1.29)$$

Здесь N_d^0 (N_a^0) и N_d^+ (N_a^-) — концентрации нейтральных и заряженных доноров (акцепторов), g_d (g_a) — фактор вырождения примесного уровня, а E_d (E_a) — энергия донорного (акцепторного) примесного уровня. Входящие сюда параметры E_d , E_a , g_d и g_a , вообще говоря, определяются из опыта. В простейшем случае, когда вырождение примесного уровня связано только со спином электрона, фактор вырождения равен двум. Для полупроводника со сложной зонной структурой фактор вырождения зависит и от долиного вырождения (с учетом расщепления за счет кристаллического поля), и от кратности вырождения соответствующих зон.

При конечной энергии взаимодействия электронов, падающих на один и тот же локальный центр, могут оказаться возможными состояния, отвечающие локализации двух или более электронов на центре. В этом случае приращение энергии центра E_j при добавлении к нему j -го электрона зависит от j . Полное изменение энергии центра при добавлении к нему j электронов $E^{(j)}$ связано с энергиями E_j соотношением

$$E^{(j)} = E_1 + E_2 + \dots + E_j. \quad (1.30)$$

При этом справедливы соотношения типа (1.29):

$$\frac{N_j}{N_{j-1}} = \frac{g_j}{g_{j-1}} \exp \frac{F - E_j}{kT} = \frac{g_j}{g_{j-1}} \exp \frac{F - E_1 - U_j}{kT}, \quad (1.31a)$$

где N_j — концентрация центров, содержащих j электронов, g_j — кратность вырождения состояния, отвечающего заполнению центра j электронами (фактор вырождения состояния), а $U_j = E_j - E_1$ — энергия взаимодействия добавляемого j -го электрона с имеющимися $j - 1$ электронами центра (энергия корреляции).

В частном случае, когда центр может содержать 0, 1 или 2 электрона, имеем

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{g_1}{g_0} \exp \frac{F - E_1}{kT}, \quad \frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} \exp \frac{F - E_1 - U}{kT}, \quad (1.31b)$$

где мы положили $U \equiv U_2$. Заметим, что полная концентрация центров рассматриваемого типа равна $N = N_0 + N_1 + N_2$. Соотношения (1.31a) справедливы как для случая положительной энергии корреляции, отвечающего преобладанию кулоновского отталкивания электронов, так и для случая, когда энергия корреляции отрицательна, $U = -U_0 < 0$, т. е. результирующее взаимодействие электронов на центре носит характер притяжения*).

Пользуясь формулами (1.7), (1.29) и условиями

$$N_d^+ + N_d^0 = N_d, \quad N_a^- + N_a^0 = N_a,$$

можно получить следующие соотношения:

$$N_d^+ = N_d \frac{n_1}{n + n_1}, \quad N_d^0 = N_d \frac{n}{n + n_1}, \quad (1.32)$$

$$N_a^- = N_a \frac{p_1}{p + p_1}, \quad N_a^0 = N_a \frac{p}{p + p_1}, \quad (1.33)$$

*) Последнее возможно, например, за счет выигрыша энергии химической связи или энергии электростатической поляризации окружающей среды при локализации на центре более одного электрона.

где

$$n_1 = g_d^{-1} N_c \exp\left(-\frac{E_c - E_d}{kT}\right), \quad p_1 = g_a^{-1} N_v \exp\left(-\frac{E_a - E_v}{kT}\right). \quad (1.34)$$

1. Найти положение уровня Ферми и температурную зависимость концентрации в собственном полупроводнике в невырожденном случае. Как изменится концентрация электронов при изменении температуры от 200 К до 300 К, если $E_g = (0,785 \text{ эВ} - \xi T)$?

2. Концентрация электронов в собственном полупроводнике при температуре 400 К оказалась равной $1,38 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$. Найти значение произведения эффективных масс электрона и дырки, если известно, что ширина запрещенной зоны меняется по закону $E_g = (0,785 - 4 \cdot 10^{-4} T) \text{ эВ}$).

3. В исследуемом полупроводнике по данным измерения эффекта Холла концентрация электронов составляла $1,3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ при 400 К и $6,2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ при 350 К. Найти ширину запрещенной зоны материала, считая, что она меняется с температурой по линейному закону.

4. Найти связь концентрации с уровнем Ферми и определить эффективную массу плотности состояний электронов в германии и кремнии; закон дисперсии в зоне проводимости имеет вид (1.3б). Известно, что поверхности постоянной энергии в k -пространстве имеют вид эллипсоидов вращения, в германии число эквивалентных минимумов $Q = 4$, поперечная масса $m_{\perp} = 0,08152 m_0$, продольная масса $m_{\parallel} = 1,588 m_0$, в кремнии $Q = 6$, $m_{\perp} = 0,1905 m_0$, $m_{\parallel} = 0,9163 m_0$.

5. Закон дисперсии дырок в валентной зоне (1.3д) можно представить в виде

$$E(\mathbf{k}) = E_v -$$

$$-\frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} \left\{ A \pm B' \left[1 + \delta \cdot 6 \left(\frac{k_x^2 k_y^2 + k_y^2 k_z^2 + k_z^2 k_x^2}{k^4} - \frac{1}{6} \right) \right]^{1/2} \right\},$$

где $B' = (B^2 + C^2/6)^{1/2}$, $\delta = C^2/6B'^2$, а значение выражения в круглых скобках не превосходит 1/6. Используя разложение по δ , оценить эффективные массы плотности

*) Здесь и в аналогичных выражениях для температурного изменения ширины запрещенной зоны считается, что температура выражена в кельвинах.

состояний для зон «легких» и «тяжелых» дырок в германии ($A = 13,3$; $B = 8,57$; $C = 12,78$), а также эффективную плотность состояний для всей валентной зоны.

6. Используя результат предыдущей задачи, вычислить, какую долю всех дырок в германии составляют «легкие» дырки.

7. Вычислить собственные концентрации электронов в германии и кремнии при $T = 300$ К. Эффективные массы плотности состояний в валентной зоне m_{dp} принять равными $0,362 m_0$ для Ge (см. задачу 5) и $0,595 m_0$ — для Si. Ширина запрещенной зоны при $T = 300$ К составляет $0,66$ эВ в Ge и $1,1$ эВ в Si.

8. Вычислить удельные сопротивления собственных германия и кремния при $T = 300$ К. Для подвижностей электронов и дырок ($\mu_n = b\mu_p$) в германии и кремнии принять следующие значения: Ge: $\mu_n = 3,8 \cdot 10^3$ см² В⁻¹ с⁻¹, $b = 2,1$; Si: $\mu_n = 1,45 \cdot 10^3$ см² В⁻¹ с⁻¹, $b = 2,9$.

9. Найти положение уровня Ферми и концентрацию электронов в собственном полупроводнике с параболическими зонами при температуре 600 К, если известно, что ширина запрещенной зоны при таких температурах меняется по закону $E_g = (0,26 - 2,7 \cdot 10^{-4} T)$ эВ. Оценить ошибку, которая вносится, если не учитывать вырождение электронного газа в зоне проводимости. Использовать значения эффективных масс $m_n = 0,1 m_p = 0,02 m_0$ и воспользоваться приближенным представлением интеграла Ферми (П.4), считая, что вырождение не слишком сильно.

10. Подвижность электронов в чистом Ge при комнатной температуре (300 К) равна 3800 см² В⁻¹ с⁻¹. Найти удельное сопротивление этого материала при 30 К, считая, что подвижность меняется с температурой по закону $\mu = aT^{-3/2}$, где a — постоянная. Эффективную массу электронов положить равной $0,55 m_0$, а эффективную массу дырок — $0,36 m_0$. При всех рассматриваемых температурах считать, что ширина запрещенной зоны линейно меняется с температурой, $E_g = (0,785 - 4 \cdot 10^{-4} T)$ эВ, а отношение подвижностей электронов и дырок для простоты принять постоянным и равным $b = \mu_n/\mu_p = 2,1$.

11. В зоне проводимости арсенида галлия наряду с основным минимумом (I), лежащим в центре зоны Бриллюэна, имеются побочные минимумы, расположенные на E_c выше основного (рис. 1). Исследовать концентрационную зависимость уровня Ферми в таком полупроводнике для невырожденного электронного газа и в пределе

сильного вырождения. Влиянием остальных зон пренебречь.

12. Рассчитать зависимость населенности верхних минимумов арсенида галлия (рис. 1) от температуры электронного газа в отсутствие вырождения. Чему равно отношение концентрации электронов верхних минимумов n_{II} к концентрации электронов основного минимума n_I при 300 К и при 1000 К? Эффективную массу плотности состояний для электронов верхнего минимума принять равной

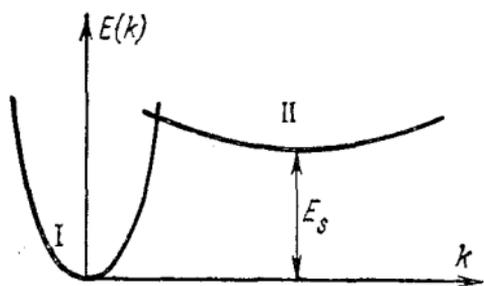


Рис. 1. Неэквивалентные минимумы зоны проводимости.

$m_{II} = 15 m_I$, $E_s = 0,35$ эВ,

а полную плотность электронов считать не зависящей от температуры.

13. Исследовать зависимость проводимости арсенида галлия от температуры электронного газа. Подвижности в минимумах I и II и полную концентрацию электронов считать не зависящими от температуры. Найти изменение проводимости при изменении температуры электронного газа от 300 К до 1000 К, если отношение подвижностей $\mu_I/\mu_{II} = 50$; нужные значения остальных параметров взять из задачи 12.

14. Найти связь концентрации электронов с уровнем Ферми в полупроводнике, если известно, что при малых значениях k закон дисперсии имеет вид $E_n(k) = E_c + (1 - ak^2)\hbar^2 k^2/2m_n$, где a — постоянная.

15. Вычислить плотность состояний и эффективную массу плотности состояний в зоне проводимости при законе дисперсии (1.3ж). Рассмотреть случаи невырожденного и полностью вырожденного полупроводника. В последнем случае найти связь между концентрацией электронов и уровнем Ферми.

16. Соотношение

$$n = 2(m_a kT/2\pi\hbar^2)^{3/2} \Phi_{1/2}(\eta)$$

можно рассматривать как определение эффективной массы m_a и в том случае, когда закон дисперсии отличается от квадратичного. Найти концентрационную зависимость m_a для полупроводника с законом дисперсии (1.3ж) в пределе сильного вырождения. Сравнить полученное выражение с аналогичной зависимостью эффективной мас-

сы m^* , определяемой соотношением $m^*v = \hbar k$, где v — групповая скорость электронов. Установить связь между m_d и m^* для рассматриваемого закона дисперсии.

17. Исследовать температурный ход уровня Ферми в примесной области для невырожденного полупроводника, содержащего один тип одновалентных доноров с концентрацией N_d .

18. Найти температуру, при которой уровень Ферми совпадает с уровнем донорной примеси для германия, легированного сурьмой с концентрацией 10^{16} см $^{-3}$ (уровень сурьмы $E_d = E_c - 0,01$ эВ, g_d положить равным 2). Какова концентрация электронов при этой температуре?

19. Исследовать температурный ход концентрации электронов в полупроводнике с одним типом одновалентных доноров в примесной области. Какова концентрация носителей заряда при комнатной температуре в германии, содержащем $2 \cdot 10^{15}$ см $^{-3}$ сурьмы?

20. Найти температурный интервал, в котором концентрация электронов постоянна и равна концентрации доноров. Оценить границы интервала для германия, содержащего $2 \cdot 10^{15}$ см $^{-3}$ доноров с энергетическим уровнем $E_d = E_c - 0,01$ эВ, если ширина запрещенной зоны изменяется по закону $E_g = \Delta - \xi T$, где $\Delta = 0,785$ эВ и $\xi = 4 \cdot 10^{-4}$ эВ \cdot К $^{-1}$, а фактор вырождения равен двум.

21. Решить аналогичную предыдущей задаче для антимонида индия. Принять, что эффективная масса электрона равна $0,015 m_0$, $\Delta = 0,26$ эВ, $\xi = 2,7 \cdot 10^{-4}$ эВ \cdot К $^{-1}$, $E_d = E_c - 0,001$ эВ, $N_d = 2 \cdot 10^{15}$ см $^{-3}$, $g_d = 2$. Непараболическостью зоны пренебречь.

22. Исследовать температурный ход уровня Ферми в примесной области в полупроводнике, содержащем один тип одновалентных доноров с концентрацией N_d , принимая во внимание влияние вырождения. Оценить для германия и антимонида индия минимальную концентрацию доноров, при которой уровень Ферми попадает в зону проводимости. Вырождение считать не очень сильным ($\eta \leq 1,3$) и воспользоваться приближенным представлением интеграла Ферми (П.4). Числовые значения параметров взять из задач 20 и 21.

23. Вычислить концентрацию дырок и удельное сопротивление кремния, легированного бором ($N_a = 10^{17}$ см $^{-3}$), при комнатной температуре, если эффективная масса плотности состояний дырок равна $0,59 m_0$, подвижность $\mu_p = 100$ см 2 В $^{-1}$ с $^{-1}$, $g_a = 1$, а энергетиче-

ский уровень бора в кремнии равен $E_v + 0,045$ эВ. Чему равна концентрация дырок при 30 К?

24. Определить температурную зависимость концентрации носителей заряда в частично компенсированном образце ($N_d > N_a$) в примесной области в отсутствие вырождения. Какова энергия активации, определяющая наклон низкотемпературной части зависимости $\ln n$ от $1/T$?

25. Найти температурную зависимость концентрации носителей заряда в сильно компенсированном полупроводнике ($N_d \approx N_a$).

26. Германий легирован сурьмой и бором. Концентрация бора равна 10^{16} см $^{-3}$, а степень компенсации $N_d/N_a = 0,5$. Найти концентрацию электронов при 25 К, если $m_{an} = 0,55 m_0$, $E_d = E_c - 0,01$ эВ; фактор вырождения считать равным двум.

27. Качественно представить на графике температурный ход концентрации электронов в частично компенсированном полупроводнике ($N_d > N_a$). Воспользоваться полупологарифмическим масштабом, отложив по осям $\ln n$ и $1/T$.

28. Определить область температур, в которой концентрация электронов в частично компенсированном полупроводнике ($N_d > N_a$) постоянна и равна $N_d - N_a$. Оценить границы этой области для кремния, легированного мышьяком ($E_d = E_c - 0,05$ эВ) с концентрацией $2 \cdot 10^{15}$ см $^{-3}$ и алюминием, концентрация которого составляет $1,2 \cdot 10^{15}$ см $^{-3}$. Эффективная масса плотности состояний для электронов в кремнии равна $1,1 m_0$, а ширина запрещенной зоны меняется с температурой по закону $E_g = (1,21 - 2,8 \cdot 10^{-4} T)$ эВ. Фактор вырождения доноров принять равным двум.

29. Вычислить плотность состояний для двумерной системы с законами дисперсии

$$E_n(k) = E_c + \hbar^2 k^2 / 2m_n,$$

$$E_n(k) = E_c + \hbar^2 k_x^2 / 2m_x + \hbar^2 k_y^2 / 2m_y.$$

30. Вычислить эффективное число состояний для двумерной системы с квадратичным законом дисперсии. Оценить N_c при температуре $T = 300$ К, полагая m_x и m_y равными массе свободного электрона.

31. Вычислить плотность состояний $\rho(E)$ и N_c в одномерном невырожденном электронном газе с законом дисперсии $E(k) = E_c + \hbar^2 k^2 / 2m$.

32. Примесь создает два акцепторных уровня в запрещенной зоне полупроводника. Найти зависимость кон-

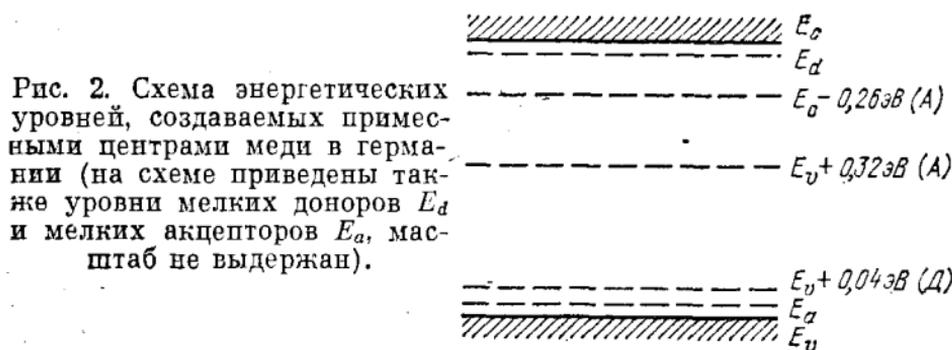
центраций нейтральных, одно- и двукратно заряженных атомов примеси от положения уровня Ферми и от температуры. Построить (качественно) вид зависимостей указанных концентраций от положения уровня Ферми при низких температурах.

33. Амфотерная примесь создает в запрещенной зоне полупроводника два уровня: акцепторный E_a и донорный E_d ($E_a > E_d$). Исследовать температурную зависимость уровня Ферми (тепловым забросом носителей заряда в зоны и наличием других примесей пренебречь).

34. Полупроводник легирован примесью, создающей два акцепторных уровня E_1 и E_2 в глубине запрещенной зоны. Найти зависимость уровня Ферми от температуры и от концентрации вводимых в образец мелких доноров (наличием свободных носителей заряда в зонах пренебречь). Представить качественно на графике зависимость энергии Ферми F от концентрации доноров при низких температурах.

35. Полупроводник легирован амфотерной примесью с концентрацией N , создающей донорный уровень E_d в нижней половине запрещенной зоны и акцепторный уровень E_a — в верхней. Найти разность уровней Ферми в двух образцах, один из которых дополнительно легирован мелкими донорами с концентрацией N_d , а другой — мелкими акцепторами с концентрацией N_a ($N_a, N_d < N$). Определить отношение концентраций основных носителей заряда в этих образцах (факторы вырождения и температуру считать известными).

36. Найти концентрацию основных носителей заряда в германии, легированном медью и компенсированном



сурьмой, при 300 К. Концентрация меди равна $N_{Cu} = 2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$, сурьмы — $N_{Sb} = 6 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$. Медь создает в запрещенной зоне германия уровни: $E_d = E_v + 0,04 \text{ эВ}$ (донорный) и $E_a = E_v + 0,32 \text{ эВ}$ (акцепторный), (рис. 2); положить $g_a = g_d = 1$.

37. В германий введена глубокая акцепторная примесь и мелкая компенсирующая примесь — сурьма, концентрация которой меньше концентрации глубокой примеси. Найти отношение концентрации нейтральных атомов сурьмы к концентрации свободных электронов в зоне проводимости: при 300 К, при 77 К, при 4,2 К. Концентрация сурьмы $N_{sb} = 2 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$; $E_c - E_{sb} = 0,01 \text{ эВ}$.

38. Полупроводник с глубокой примесью, создающей два акцепторных уровня в верхней половине запрещенной зоны, легируют мелкими донорами. Оказалось, что при некоторой концентрации доноров проводимость при комнатной температуре возрастает на 5 порядков, а при дальнейшем увеличении концентрации доноров изменяется мало. Пренебрегая влиянием легирования на подвижность электронов и считая, что указанное изменение проводимости обусловлено смещением уровня Ферми между уровнями глубокой примеси, оценить энергию корреляции.

39. Найти концентрацию меди в одно- и двухзарядном состояниях в германии при 300 К, легированном еще сурьмой. Акцепторные уровни меди в германии суть

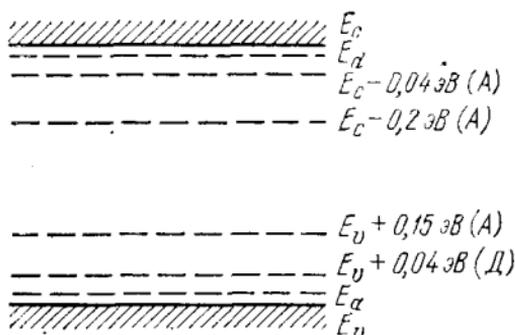


Рис. 3. Схема энергетических уровней, создаваемых примесными центрами золота в германии (на схеме приведены также уровни мелких доноров E_d и мелких акцепторов E_a , масштаб не выдержан).

$E_1 = E_v + 0,32 \text{ эВ}$ и $E_2 = E_c - 0,26 \text{ эВ}$ (рис. 2); положить $g_0 = g_1 = g_2 = 1$, $N_{Cu} = 3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$, $N_{sb} = 1,5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$, $E_g(300 \text{ К}) = 0,66 \text{ эВ}$. Как изменяется концентрация заряженных атомов меди при увеличении концентрации сурьмы до $5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$?

40. Исследовать зависимость уровня Ферми от концентрации мелких доноров и акцепторов в образце германия, легированного золотом, при низких температурах. Золото создает в германии один донорный ($E_d = E_v + 0,04 \text{ эВ}$) и три акцепторных уровня: $E_1 = E_v + 0,15 \text{ эВ}$, $E_2 = E_c - 0,20 \text{ эВ}$ и $E_3 = E_c - 0,04 \text{ эВ}$ (рис. 3). Результат представить на графике (схематически).

41. Оценить равновесную концентрацию электронов в германии, легированном золотом и компенсированном сурьмой, при 300 К.

$$N_{\text{Au}} = 5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}, N_{\text{Sb}} = 1,2 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}.$$

42. Вычислить равновесную концентрацию электронов в германии, легированном золотом и компенсированном сурьмой, при 300 К.

$$N_{\text{Au}} = 5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}, N_{\text{Sb}} = 7,2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}.$$

43. В материале, описанном в предыдущей задаче, оценить равновесную концентрацию свободных электронов при 4,2 К.

44. Полупроводник содержит дефекты с отрицательной энергией корреляции с концентрацией N . Исследовать зависимость уровня Ферми от температуры и концентрации мелких примесей. Считать, что абсолютная величина энергии корреляции $U_0 \gg kT$.

45. Положение уровня Ферми в некотором полупроводнике определяется дефектами с отрицательной энергией корреляции, причем $U_0 \gg kT$. Как сместится уровень Ферми при добавлении акцепторов в концентрации, втрое меньшей концентрации дефектов при 300 К? Насколько отличается при 300 К положение уровня Ферми в материале, содержащем вместо доноров акцепторы в той же концентрации? Насколько сместится уровень Ферми в описанном полупроводнике с донорами при изменении температуры от 100 К до 300 К?

Глава 2

РЕКОМБИНАЦИЯ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

При отклонении концентраций носителей заряда от равновесных значений n_0 и p_0 нарушается баланс между процессами тепловой генерации, с одной стороны, и захватом носителей на локальные центры или убылью носителей за счет межзонных переходов, с другой. Становятся отличными от нуля абсолютные темпы рекомбинации электронов R_n и дырок R_p , равные результирующим числам захватов носителей в 1 см³ за 1 с. Равенствами

$$-\left(\frac{\partial \Delta n}{\partial t}\right)_{\text{рек}} = R_n = \frac{\Delta n}{\tau_n}; \quad -\left(\frac{\partial \Delta p}{\partial t}\right)_{\text{рек}} = R_p = \frac{\Delta p}{\tau_p} \quad (2.1)$$

определяются времена жизни электронов и дырок τ_n и τ_p (в нестационарных условиях имеет смысл говорить только об их мгновенных значениях). Величины τ_n и τ_p зависят в общем случае от Δn и Δp . Так, если преобла-

дают процессы прямой межзонной рекомбинации, то

$$R_n = R_p = a(np - n_0p_0), \quad (2.2)$$

где a — постоянная.

Во многих случаях рекомбинация осуществляется путем захвата свободных носителей заряда дефектами решетки (называемыми еще центрами захвата, или ловушками), дающими локальные энергетические уровни в запрещенной зоне. Для описания этого процесса удобно ввести темпы захвата электрона и дырки на данный уровень, r_n и r_p , а также темпы обратного выброса электронов и дырок с данного уровня соответственно в зону проводимости и валентную зону, g_n и g_p . Обозначим эффективные сечения захвата электрона и дырки соответственно через S_n и S_p и введем коэффициенты захвата электрона и дырки, α_n и α_p , полагая по определению $\alpha_n = v_T S_n$, $\alpha_p = v_T S_p$, где $v_T = (3kT/m_0)^{1/2}$ — «тепловая» скорость свободного электрона. Тогда

$$r_n = \alpha_n n N_t (1 - f), \quad r_p = \alpha_p p N_t f, \quad (2.3)$$

где f — доля ловушек, заполненных электронами. Пользуясь принципом детального равновесия и считая газы свободных электронов и дырок невырожденными, можно записать темпы обратного теплового выброса электронов и дырок, g_n и g_p , в следующем виде:

$$g_n = N_t \alpha_n f n_1, \quad g_p = N_t \alpha_p (1 - f) p_1, \quad (2.4)$$

где величины n_1 и p_1 даются формулами типа (1.34).

Результирующие темпы захвата электронов и дырок на данный уровень, R_n и R_p , представляют собой разности величин (2.3) и (2.4):

$$R_n = r_n - g_n, \quad R_p = r_p - g_p. \quad (2.5)$$

В стационарных условиях $R_n = R_p (\equiv R)$. Это равенство определяет величину f , после чего легко получается выражение

$$R_n = R_p = R = N_t \frac{\alpha_n \alpha_p (pn - p_0 n_0)}{\alpha_n (n + n_1) + \alpha_p (p + p_1)}. \quad (2.6)$$

При наличии подсветки помимо тепловой генерации носителей заряда имеет место еще и генерация их за

счет энергии неравновесного излучения. Ее называют оптической *).

Обозначим через J поток фотонов должной частоты, а через S_n^{ph} и S_p^{ph} — эффективные сечения захвата фотона с выбросом электрона в зону проводимости и дырки в валентную зону соответственно. Тогда темпы оптической генерации запишутся в виде

$$g_{n,\text{опт}} = N_t f J S_n^{\text{ph}}, \quad g_{p,\text{опт}} = N_t (1 - f) J S_p^{\text{ph}}. \quad (2.7)$$

Пусть концентрация N_t мала, так что можно пренебречь неравновесным изменением концентрации электронов на ловушках, т. е. отношение

$$\frac{\Delta n_t}{\Delta p} = - \frac{\Delta p_t}{\Delta p} = \frac{N_t}{n_0 + n_1} \frac{\alpha_n n_1 - \alpha_p n_0}{\alpha_p (p_0 + p_1) + \alpha_n \left[n_0 + n_1 + \frac{N_t n_1}{n_0 + n_1} \right]}. \quad (2.8)$$

мало. Это — случай, когда отсутствует прилипание носителей. При этом

$$\tau = \frac{\tau_{n0} (p_0 + p_1 + \Delta n) + \tau_{p0} (n_0 + n_1 + \Delta n)}{n_0 + p_0 + \Delta n}, \quad (2.9)$$

где величины

$$\tau_{n0} = (N_t \alpha_n)^{-1}, \quad \tau_{p0} = (N_t \alpha_p)^{-1} \quad (2.10)$$

суть времена жизни пар носителей при слабом возбуждении в униполярных материалах p - и n -типа соответственно.

Если центр захвата создает в запрещенной зоне два локальных уровня E_1 и E_2 , то при небольшом отклонении от равновесия и в отсутствие заметного прилипания

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1 + n_0/p_0}{1 + p_1/p_0 + p_1 p_2 / p_0^2} N_t \times \left[\frac{1}{1/\alpha_{n1} + n_1/\alpha_{p1} p_0} + \frac{p_1/p_0}{1/\alpha_{n2} + n_2/\alpha_{p2} p_0} \right], \quad (2.11)$$

где вторые индексы у коэффициентов захвата указывают, на какой уровень захватывается носитель, а величины

*) Подчеркнем, что генерация за счет равновесного теплового излучения, всегда имеющегося в полупроводнике, этим понятием не охватывается. Она учитывается коэффициентами α_n и α_p .

n_1, n_2, p_1, p_2 определены аналогично (1.34) с заменой E_i на E_1 или E_2 .

Пусть в полупроводнике помимо центров, через которые идет рекомбинация и которые сами по себе не вызывают заметного прилипания, имеются еще ловушки, способные захватывать только, например, электроны из зоны проводимости и отдавать их обратно. Тогда в образце n -типа при малом отклонении от равновесия справедливы выражения

$$-\frac{\partial \Delta n}{\partial t} = R_n = \frac{\Delta n}{\tau_r} + \frac{\Delta n}{\tau_1} - \frac{\Delta n}{\tau_2}, \quad -\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = R_p = \frac{\Delta p}{\tau_r},$$

$$\Delta n_i = \Delta p - \Delta n, \quad (2.12)$$

где τ_r — рекомбинационное время жизни, τ_1 — среднее время захвата электрона на уровень прилипания, τ_2 — среднее время обратного выброса.

46. В момент времени $t_1 = 10^{-4}$ с после выключения равномерной по объему генерации электронно-дырочных пар неравновесная концентрация носителей оказалась в 10 раз больше, чем в момент $t_2 = 10^{-3}$ с. Определить время жизни τ , если уровень возбуждения невелик и рекомбинация идет через простые дефекты.

47. Вычислить относительное изменение проводимости $\Delta\sigma/\sigma_0$ при стационарном освещении с интенсивностью $J = 5 \cdot 10^{15}$ квантов на 1 см^2 за 1 с. Коэффициент поглощения $\gamma = 100 \text{ см}^{-1}$; толщина образца мала по сравнению с γ^{-1} ; рекомбинация происходит на простых дефектах; $n_0 = 10^{15} \text{ см}^{-3}$, $\tau = 2 \cdot 10^{-4}$ с.

48. Определить закон изменения со временем концентрации носителей в материале n -типа, если после выключения источника генерации в момент $t = 0$ темп рекомбинации $R = a(np - n_i^2)$, где $a = \text{const}$.

49. В n -Ge имеются центры рекомбинации с $N_t = 5 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$ и $E_t = (E_c + E_v)/2$. При 300 К сечения захвата электронов и дырок одинаковы, при малых отклонениях от равновесия $\tau = 10^{-4}$ с, $\rho = 5 \text{ Ом} \cdot \text{см}$. Найти сечение захвата S .

50. В образце n -Ge с $n_0 = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ рекомбинация происходит на простых центрах, их энергетический уровень E_t расположен в верхней половине запрещенной зоны и $N_t = 2 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$. При $T = 300 \text{ К}$ время жизни $\tau = 17 \text{ мкс}$, при $T = 200 \text{ К}$ время жизни $\tau = 2 \text{ мкс}$. При более низких температурах $\tau \sim T^{-1/2}$. Считая постоянными

ми n_0 и сечение захвата дырок S_p , определить E_i и S_p .

51. В образцах Ge с различными n_0 и p_0 имеются простые рекомбинационные центры с $N_i = 2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$. При 300 К в монополярном n -Ge время жизни $\tau = \tau_1 = 8 \text{ мкс}$, при $p_0 = p_{02} = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ время жизни $\tau = \tau_2 = 26 \text{ мкс}$, а максимальное τ было $\tau = \tau_{\text{макс}} = 91 \text{ мкс}$. Определить коэффициенты и сечения захвата носителей и уровень центра E_i , считая его находящимся в нижней половине запрещенной зоны.

52. В германии n -типа (с $n_0 = 10^{15} \text{ см}^{-3}$) стационарным освещением равномерно по объему генерируются пары носителей. При слабом освещении $\tau_0 = 2 \text{ мкс}$, а при $\Delta n/n_0 = 0,1$ рекомбинация идет с $\tau = 4,7 \text{ мкс}$. Считая, что рекомбинация происходит на простых центрах с $E_i = E_c - 0,20 \text{ эВ}$, определить отношение сечений захвата дырок и электронов при 300 К.

53. Для образца n -Ge с $\rho_0 = 1,65 \text{ Ом} \cdot \text{см}$ при 300 К и слабом освещении значение времени жизни $\tau = \tau_0 = 2,0 \text{ мкс}$. При более интенсивном возбуждении $\rho_1 = 1,275 \text{ Ом} \cdot \text{см}$ и $\tau = \tau_1 = 3,3 \text{ мкс}$. Считая, что рекомбинация идет через простые центры с уровнем $E_i = E_v + 0,32 \text{ эВ}$, найти времена жизни для монополярных p - и n -Ge с тем же механизмом рекомбинации.

54. В полупроводник введены акцепторы с концентрацией $N_a = 10^{16} \text{ см}^{-3}$. Их уровень расположен вблизи середины запрещенной зоны. Отношение сечений захвата $S_p/S_n = 100$. Кроме того, в полупроводник введены еще мелкие доноры с $N_d = 10^{15} \text{ см}^{-3}$. При низкой температуре образец освещается светом, генерирующим $g = 10^{19} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$ пар носителей равномерно по объему. Время жизни электронов τ_n равно 10 мкс. Определить τ_p и неравновесные концентрации Δn и Δp , а также коэффициенты захвата α_n и α_p .

55*. При измерении времени жизни неравновесных носителей в p -Ge оказалось, что в интервале от комнатной температуры до $T = 120 \text{ К}$ зависимость времени жизни от температуры имеет следующий вид:

$$\tau = [8,1 + 6,2 \text{ th}(4,41 - 955/T)] 10^{-5} \text{ с.}$$

Известно, что рекомбинация идет с участием центров, создающих два уровня: E_1 — в нижней половине запрещенной зоны и E_2 — в верхней. Считая, что в рассматриваемом интервале температур коэффициенты захвата электронов α_{n1} и α_{n2} , а также p_0 остаются постоянными, оп-

ределить эти величины и E_1 . Считать $N_i = 2 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$ и $N_v = 10^{19} \text{ см}^{-3}$ (пренебречь температурной зависимостью N_v). Определить сечения захвата электронов при 200 К.

56. Определить, как зависят от времени концентрации избыточных носителей в полупроводнике n -типа после прекращения стационарной генерации, создававшей слабое отклонение от равновесия. Считать известными рекомбинационное время τ_r , время захвата на уровне прилипания τ_1 и время обратного выброса τ_2 .

57. В условиях, описанных в предыдущей задаче, определить относительное изменение проводимости в n -Ge с $n_0 = 5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ при стационарной генерации $g = 10^{19} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$ и исследовать количественно характер ее релаксации, если $\tau_r = 2 \text{ мкс}$, $\tau_1 = 5 \text{ мкс}$ и $\tau_2 = 50 \text{ мкс}$.

58. В образце германия n -типа, содержащего $N_{i1} = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ центров рекомбинации с энергией уровня $E_i = E_v + 0,16 \text{ эВ}$, характеризующих коэффициентом захвата дырок $\alpha_p = 10^{-8} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}$, концентрация свободных электронов при 150 К равна $n_0 = 4 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$. Отношение $\Delta p_i / \Delta p$, определенное по фотопроводимости и фотоэлектромагнитному эффекту при слабом возбуждении, оказалось равным 24. Определить времена жизни электронов и дырок при той же температуре и при слабом возбуждении в образце, содержащем $N_{i2} = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ центров той же природы.

59*. Вычислить стационарную концентрацию электронов в образце n -Ge с золотом в условиях заметной примесной подсветки. Концентрацию дырок считать пренебрежимо малой. Температура образца $T = 20 \text{ К}$, концентрации мелких доноров N_d и атомов золота N_{Au} удовлетворяют неравенствам

$$2N_{Au} < N_d < 3N_{Au}.$$

Принять во внимание, что в указанных выше условиях золото в германии играет роль акцептора, способного захватывать два или три электрона. Соответствующая схема уровней представлена на рис. 3 (см. стр. 20). Коэффициент захвата электронов на дважды отрицательно заряженные ионы золота α_n и сечение захвата фотона трижды отрицательно заряженными ионами золота S_n^{ph} принять соответственно равными $10^{-12} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}$ и 10^{-16} см^2 . Поток фотонов составляет $10^{15} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$; концентрации доноров и золота соответственно равны

$$N_d = 2,5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3} \text{ и } N_{Au} = 10^{15} \text{ см}^{-3}.$$

ДИФФУЗИЯ И ДРЕЙФ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА

При неоднородном распределении носителей заряда в образце возникают диффузионные токи. Плотности диффузионных электронного и дырочного токов определяются выражениями:

$$\mathbf{j}_{n \text{ дифф}} = eD_n \text{grad } n, \quad \mathbf{j}_{p \text{ дифф}} = -eD_p \text{grad } p, \quad (3.1)$$

где e — абсолютная величина заряда электрона, D_n и D_p — коэффициенты диффузии электронов и дырок, n и p — их концентрации. Полные плотности электронного и дырочного токов в рассматриваемых условиях складываются из диффузионной и дрейфовой составляющих:

$$\mathbf{j}_n = eD_n \text{grad } n + en\mu_n \mathbf{E}, \quad \mathbf{j}_p = -eD_p \text{grad } p + ep\mu_p \mathbf{E}. \quad (3.2)$$

Здесь μ_n и μ_p — подвижности электронов и дырок.

В состоянии равновесия ток в монополярном — например, электронном — полупроводнике отсутствует:

$$\mathbf{j}_n = \mathbf{j}_{n \text{ дифф}} + \mathbf{j}_{n \text{ др}} = 0. \quad (3.3)$$

Вычислив концентрацию электронов по формуле (1.5) с учетом сдвига дна зоны проводимости на величину $-e\varphi(\mathbf{r})$, где φ — электростатический потенциал, найдем по формуле (3.1)

$$\mathbf{j}_{n \text{ дифф}} = \frac{e^2 D_n}{kT} \frac{dn}{d\eta} \text{grad } \varphi, \quad (3.4)$$

где $\eta = (F - E_c)/kT$.

Отсюда на основании уравнений (3.2) и (3.3) получаем

$$D_n = n\mu_n kT \left/ \left(e \frac{dn}{d\eta} \right) \right. \quad (3.5)$$

Аналогичное соотношение получается и для дырок:

$$D_p = -p\mu_p kT \left/ \left(e \frac{dp}{d\eta} \right) \right. \quad (3.6)$$

В случае невырожденных полупроводников, когда справедлива формула (1.7), равенства (3.5), (3.6) переходят в соотношения Эйнштейна:

$$D_n = \mu_n kT/e, \quad D_p = \mu_p kT/e. \quad (3.7)$$

Кинетика электронов и дырок описывается уравнениями

непрерывности:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = g - \frac{\Delta n}{\tau_n} + \frac{1}{e} \operatorname{div} \mathbf{j}_n, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = g - \frac{\Delta p}{\tau_p} - \frac{1}{e} \operatorname{div} \mathbf{j}_p. \quad (3.8)$$

Здесь Δn и Δp — разности между концентрациями электронов и дырок n и p и их равновесными значениями n_0 и p_0 ; g — число электронно-дырочных пар, генерируемых в единицу времени в единице объема образца.

В случае оптической генерации

$$g = \eta \gamma J \exp(-\gamma x), \quad (3.9)$$

где η — квантовый выход, γ — коэффициент поглощения света, $J \exp(-\gamma x)$ — плотность потока квантов. Далее, τ_n и τ_p — времена жизни электронов и дырок (вычисляемые по формулам (2.1) и (2.6)). При рассмотрении процессов диффузии обычно вводят характерные величины размерности длины

$$L_n = \sqrt{D_n \tau_n} \text{ и } L_p = \sqrt{D_p \tau_p}, \quad (3.10)$$

называемые диффузионными длинами электронов и дырок соответственно.

К уравнениям (3.8) и (3.2) следует в случае нарушения электрической нейтральности добавить еще уравнение Пуассона

$$\operatorname{div} \mathcal{E} = 4\pi \rho / \epsilon, \quad (3.11)$$

где ρ — плотность электрического заряда, а ϵ — диэлектрическая проницаемость полупроводника.

Заметим, однако, что довольно часто можно считать выполненным условие локальной электронейтральности полупроводника. В отсутствие прилипания, т. е. при $\tau_n = \tau_p = \tau$, это означает, что

$$\Delta n = \Delta p, \quad \rho = 0, \quad \operatorname{div}(\mathbf{j}_n + \mathbf{j}_p) = 0. \quad (3.12)$$

При этом диффузия и дрейф электронов и дырок взаимосвязаны: возникает добавочное электрическое поле, тормозящее более быстро диффундирующие носители и подтягивающее более медленные. Распространение единого нейтрального фронта избыточных носителей описывается, согласно (3.8) и (3.12), уравнением

$$\frac{\partial (\Delta p)}{\partial t} = g - \frac{\Delta p}{\tau} + \operatorname{div}(D \operatorname{grad} \Delta p) - \mu \mathcal{E} \operatorname{grad} \Delta p, \quad (3.13)$$

где D — коэффициент биполярной диффузии, μ — бипо-

лярная дрейфовая подвижность:

$$D = \frac{n + p}{n/D_p + p/D_n}, \quad \mu = \frac{n - p}{n/\mu_p + p/\mu_n}. \quad (3.14)$$

Характерной длиной этого процесса является длина биполярной диффузии L

$$L = \sqrt{D\tau}. \quad (3.15)$$

Уравнение биполярной диффузии значительно упрощается в тех случаях, когда D — константа. Это, например, имеет место, если доминируют носители одного типа; при этом D есть коэффициент диффузии неосновных носителей. В условиях собственной проводимости имеем

$$n = p, \quad D = \frac{2D_n D_p}{D_n + D_p}, \quad \mu = 0. \quad (3.16)$$

Наконец, необходимо сформулировать граничные условия к уравнению (3.13). У поверхности полупроводника происходит рекомбинация избыточных носителей заряда. Обозначим через R_s число пар, рекомбинирующих за 1 с на 1 см² поверхности, и определим также скорость поверхностной рекомбинации s (с наименованием см · с⁻¹), связанную с R_s соотношением

$$s = R_s / \Delta n = R_s / \Delta p, \quad (3.17)$$

где $\Delta n = \Delta p$ — концентрация избыточных носителей у поверхности. Электроны и дырки, рекомбинирующие на поверхности, поставляются туда поверхностной генерацией и потоками избыточных носителей, направленными к поверхности. Поэтому граничное условие на поверхности полупроводника p -типа имеет вид

$$g'_s = (\mathbf{j}_n \cdot \mathbf{v}) / e + s \Delta n,$$

где \mathbf{v} — единичный вектор внешней нормали к поверхности.

Далее, граничное условие для плотностей тока носителей на контакте полупроводника будем формулировать, задавая значение коэффициента инжекции ξ , определяемого как отношение плотности тока неосновных носителей к полной плотности тока.

60. Вычислить коэффициенты диффузии электронов и дырок в невырожденных германии и кремнии при температуре 300 К, если подвижности электронов и дырок при этой температуре равны: в германии $\mu_n = 3800 \text{ см}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$,

$\mu_p = 1800 \text{ см}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$, в кремнии $\mu_n = 1450 \text{ см}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$,
 $\mu_p = 500 \text{ см}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$.

61. Вычислить диффузионную длину электронов в невырожденном германии при температуре 300 К, если время жизни электронов составляет: 1) $\tau_n = 10^{-4} \text{ с}$, 2) $\tau_n = 10^{-6} \text{ с}$; подвижность электронов $\mu_n = 3800 \text{ см}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$.

62. Найти связь между коэффициентом диффузии электронов и их концентрацией в случае полного вырождения, если закон дисперсии имеет вид (1.3а).

63. Вычислить коэффициент диффузии электронов в условиях сильного вырождения, если закон дисперсии электронов имеет вид (1.3а); $\mu_n = 300 \text{ см}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$, $n = 10^{18} \text{ см}^{-3}$, $m_n = 0,2 m_0$.

64. Получить выражение для коэффициента диффузии вырожденного электронного газа в полупроводнике, если зависимость энергии от квазиволнового вектора имеет вид (1.3б).

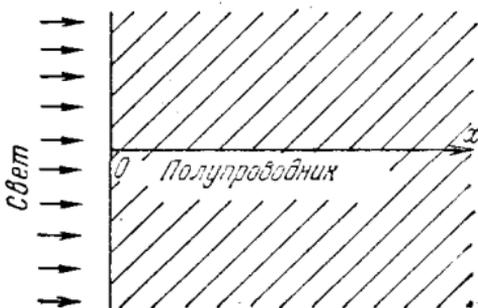


Рис. 4. Полубесконечный образец полупроводника (стрелками указано направление светового потока).

65. Вычислить коэффициент биполярной диффузии для собственного германия при комнатной температуре; $b = 2,1$, $\mu_n = 3800 \text{ см}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$.

66. Вычислить коэффициент биполярной диффузии в арсениде галлия с собственной проводимостью при температуре 300 К; $\mu_n = 8800 \text{ см}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$, $\mu_p = 400 \text{ см}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$.

67. В однородный полубесконечный электронный полупроводник ($x \geq 0$) в плоскости $x = 0$ непрерывно инжектируются дырки, так что $\Delta p(0) = 10^{14} \text{ см}^{-3}$. Найти неравновесную концентрацию дырок на расстоянии $x = 4 \text{ мм}$ от поверхности, если $\tau_p = 10^{-3} \text{ с}$, $D_p = 40 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$.

68. В некоторой точке однородного электронного полупроводника световым зондом генерируются пары носителей. Считая задачу одномерной, определить диффузионную длину дырок, если концентрация неравновесных носителей на расстоянии $x_1 = 2 \text{ мм}$ от зонда равна $\Delta p_1 = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, а при $x_2 = 4,3 \text{ мм}$ она равна $\Delta p_2 = 10^{13} \text{ см}^{-3}$.

69. Найти концентрацию неравновесных носителей заряда на поверхности толстого образца $n\text{-Ge}$ (рис. 4), если оптическая генерация пар равномерна по объему;

$g_0 = 2,5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$, время жизни дырок $\tau_p = 4 \cdot 10^{-6} \text{ с}$, скорость поверхностной рекомбинации $s = 500 \text{ см/с}$, $D_p = 49 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$.

70. Найти диффузионную длину дырок, если концентрация неравновесных носителей заряда на поверхности толстого образца германия n -типа (рис. 4) при равномерной по объему генерации пар равна $\Delta p_1 = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ при скорости поверхностной рекомбинации $s_1 = 8 \cdot 10^2 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$, а при скорости поверхностной рекомбинации $s_2 = 3 \cdot 10^2 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ она равна $\Delta p_2 = 2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$; $\tau_p = 10^{-3} \text{ с}$.

71. Найти концентрацию неравновесных дырок на освещенной поверхности толстого образца n -Ge, если $s = 5 \cdot 10^2 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$, плотность потока квантов $J = 6 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$, квантовый выход $\eta = 1$, коэффициент поглощения света $\gamma = 10^3 \text{ см}^{-1}$, $\tau_p = 10^{-4} \text{ с}$, $D_p = 49 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$.

72. В толстом образце германия n -типа (рис. 4) равномерно по объему генерируются электронно-дырочные пары. Найти скорость поверхностной рекомбинации, если концентрация неравновесных дырок на поверхности образца в 4 раза меньше, чем в объеме; $L_p = 0,2 \text{ см}$, $\tau_p = 10^{-3} \text{ с}$.

73. Найти концентрацию неравновесных дырок на освещенной поверхности толстого образца n -Ge при сильном поглощении света ($\gamma L_p \gg 1$), если плотность потока квантов $J = 6 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$, квантовый выход $\eta = 1$, скорость поверхностной рекомбинации $s = 500 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$, $\tau_p = 10^{-4} \text{ с}$, $D_p = 49 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$.

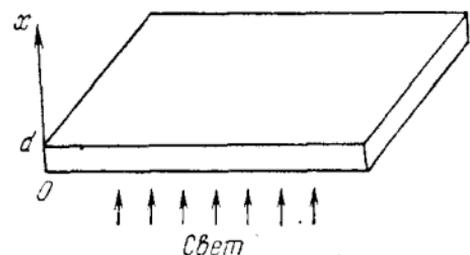
74. Найти распределение неравновесных дырок и вычислить их концентрацию на освещаемой поверхности полубесконечного образца n -Ge, если поверхность образца освещается светом с коэффициентом поглощения $\gamma = 14 \text{ см}^{-1}$, плотность потока квантов $J = 6 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$, квантовый выход $\eta = 1$, скорость поверхностной рекомбинации $s = 500 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$, $\tau_p = 10^{-4} \text{ с}$, $D_p = 49 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$. Провести анализ полученного результата, рассмотрев в общем виде предельные случаи больших и малых коэффициентов поглощения.

75*. Получить выражение для напряженности электрического поля эффекта Дембера, возникающего в направлении, нормальном к поверхности полупроводника (см. рис. 4). Поверхность освещается таким образом, что генерация электронно-дырочных пар имеет место в тонком приповерхностном слое. Проанализировать получен-

ное выражение для германия n -типа при $T = 300$ К, если $L = 0,3$ мм, $n_0 = 5 \cdot 10^{14}$ см $^{-3}$, $\epsilon = 16$. Отклонение от равновесия считать малым: $\Delta\sigma/\sigma_0 \ll 1$. Считать также $|\Delta n - \Delta p| \ll \Delta p$.

76. Рассчитать напряженность электрического поля эффекта Дембера на освещенной поверхности толстого образца германия n -типа (рис. 4), если генерация электронно-дырочных пар происходит в тонком приповерхностном слое с интенсивностью $g_s = 10^{15}$ см $^{-2}$ с $^{-1}$, время жизни неравновесных носителей в объеме $\tau = 10^{-4}$ с, скорость поверхностной рекомбинации $s = 100$ см \cdot с $^{-1}$, $D_p = 49$ см 2 с $^{-1}$, $b = 2,1$, $n_0 = 5 \cdot 10^{14}$ см $^{-3}$.

77*. Найти разность потенциалов, возникающую при эффекте Дембера между освещенной и темной поверхностями толстого образца германия n -типа. Интенсивность поверхностной генерации пар $g_s = 10^{15}$ см $^{-2}$ с $^{-1}$, время жизни неравновесных носителей в объеме $\tau = 10^{-4}$ с, $D_n = 98$ см 2 с $^{-1}$, $b = 2,1$, $n_0 = 5 \cdot 10^{14}$ см $^{-3}$; положить $s = 0$.



78. Как изменится результат предыдущей задачи, если на освещенной поверхности образца рекомбинация избыточных носителей заряда будет происходить со скоростью $s = 500$ см \cdot с $^{-1}$?

Рис. 5. Геометрия опыта по объемной генерации носителей (стрелками указано направление светового потока).

79*. Найти концентрацию неравновесных носителей заряда на верхней и нижней гранях тонкой пластины полупроводника n -типа (рис. 5) в условиях равномерной по объему генерации светом с плотностью потока квантов $J = 5 \cdot 10^{18}$ см $^{-2}$ с $^{-1}$ и коэффициентом поглощения $\gamma = 5$ см $^{-1}$. Квантовый выход $\eta = 1$, толщина пластины $d = 0,7$ -мм, скорость поверхностной рекомбинации $s = 500$ см \cdot с $^{-1}$, $\tau_p = 10^{-4}$ с, $D_p = 49$ см 2 \cdot с $^{-1}$.

80. Найти скорость поверхностной рекомбинации s_0 на нижней грани плоскопараллельной пластины полупроводника n -типа толщиной $d = 7$ мм (рис. 5) в условиях равномерной по объему генерации светом, если скорость поверхностной рекомбинации на верхней грани $s_d = 100$ см \cdot с $^{-1}$, концентрации неравновесных носителей заряда на верхней и нижней гранях равны соответственно $\Delta p(d) = 7 \cdot 10^{12}$ см $^{-3}$, $\Delta p(0) = 5 \cdot 10^{12}$ см $^{-3}$; $\tau_p = 10^{-4}$ с, $D_p = 49$ см 2 с $^{-2}$.

81. Найти распределение неравновесных дырок в длинном питевидном образце n -Ge при стационарной инжекции дырок в точке и при наличии электрического поля $\mathcal{E} = 5 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$ вдоль образца. Температура комнатная, полупроводник невырожден, $L_p = 0,09 \text{ см}$.

82. Вычислить дрейфовую длину неравновесных дырок в германии n -типа при комнатной температуре в электрическом поле $\mathcal{E} = 5 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$, если диффузионная длина дырок $L_p = 7 \cdot 10^{-2} \text{ см}$.

83. В однородный полубесконечный электронный полупроводник ($x \geq 0$) на поверхности $x = 0$ стационарно инжектируются дырки. Вдоль образца в направлении $x > 0$ приложено электрическое поле $\mathcal{E} = 10 \text{ В/см}$. Определить, на каком расстоянии от поверхности образца концентрация неравновесных дырок уменьшится в полтора раза; $L_p = 0,1 \text{ см}$.

84. Решить предыдущую задачу при условии, что электрическое поле имеет противоположное направление.

85. В однородный полубесконечный полупроводник ($x \geq 0$) при $x = 0$ стационарно инжектируются дырки. Определить концентрацию введенных дырок при $x = 0$, если коэффициент инжекции $\xi = 0,5$, полная плотность тока $j = 1,6 \text{ мА} \cdot \text{см}^{-2}$, $L_p = 0,1 \text{ см}$, $D_p = 50 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$. Дрейфом дырок пренебречь.

86. В условиях, аналогичных условиям предыдущей задачи (но с $L_p = 0,05 \text{ см}$), определить напряженность электрического поля в точке инжекции, если удельная проводимость образца $\sigma_0 = 0,1 \text{ Ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$, $b = 2,1$, и можно считать $n_0 \gg p_0$, Δp .

87. Исследовать распределение концентрации неравновесных дырок, стационарно инжектируемых при $x = 0$ в однородный полубесконечный полупроводник ($x \geq 0$) n -типа, если время жизни дырок $\tau_p = a/p$, где a — постоянная. Считать $\Delta p \gg p_0$, дрейфом дырок пренебречь.

88. Вычислить неравновесную концентрацию дырок на границе полубесконечного ($x \geq 0$) слабо легированного электронного полупроводника, к которому при $x = 0$ приложено сильное электрическое поле $\mathcal{E} > 0$. Коэффициент инжекции $\xi = 0,15$, $n_0 = 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $p_0 = 0,5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $b = 2,1$. Считать, что $\Delta n = \Delta p \ll n_0$ и условия стационарны.

89. Вычислить неравновесную концентрацию дырок при $x = 0$ в условиях предыдущей задачи, но при обратном направлении электрического поля ($\mathcal{E} < 0$).

90. В однородный полубескопечный полупроводник ($x \geq 0$) n -типа при $x=0$ стационарно инжектируются дырки. Определить плотность электронного тока при $x=0$, если $\Delta p(0) = 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $L_p = 0,07 \text{ см}$, $D_p = 49 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$, коэффициент инжекции $\xi = 0,4$. Дрейфом неравновесных носителей заряда пренебречь.

Глава 4

ДИФФУЗИЯ И ДРЕЙФ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В однородном и изотропном полупроводнике, находящемся под действием электрического поля \mathcal{E} и слабого магнитного поля \mathbf{H} , перпендикулярного \mathcal{E} , плотности тока носителей выражаются следующим образом:

$$\mathbf{j}_n = ne\mu_n \{ \mathcal{E} [1 - \eta_n (\mu_{nH} H/c)^2] - [\mathcal{E} \times \mathbf{H}] \mu_{nH}/c \}, \quad (4.1a)$$

$$\mathbf{j}_p = pe\mu_p \{ \mathcal{E} [1 - \eta_p (\mu_{pH} H/c)^2] + [\mathcal{E} \times \mathbf{H}] \mu_{pH}/c \}. \quad (4.2a)$$

Здесь μ_{nH} и μ_{pH} — холловские подвижности, а η_n и η_p — константы, определяющиеся зависимостью длин свободного пробега носителей от энергии. Магнитное поле считается слабым в том смысле, что $\mu_{nH} H/c \ll 1$, $\mu_{pH} H/c \ll 1$; в приведенных формулах отброшены члены выше второго порядка по этим параметрам.

В условиях опыта, изображенных на рис. 6, между боковыми торцами образца возникает напряжение Холла V_H , так что в направлении оси y действует холловское поле \mathcal{E}_y . Отношение

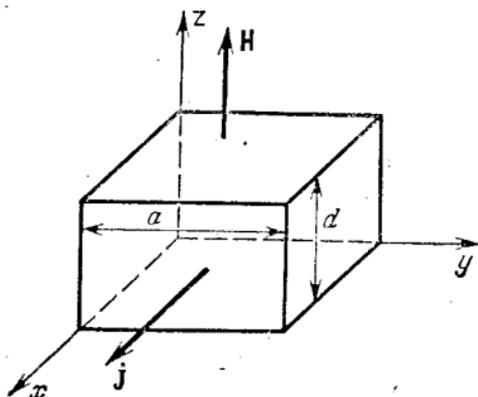


Рис. 6. Геометрия опыта по наблюдению эффекта Холла.

$$R_H = c\mathcal{E}_y/j_x H \quad (4.3)$$

носит название постоянной Холла (j_x — плотность тока вдоль оси x). В этих же условиях связь между \mathcal{E}_x и j_x имеет вид

$$j_x = (\sigma_0 + \Delta\sigma) \mathcal{E}_x, \quad (4.4)$$

где σ_0 — проводимость при $H=0$, а относительное изменение проводимости в слабом магнитном поле обычно

выражается следующим образом:

$$-\Delta\sigma/\sigma_0 = \zeta R_{\text{H}0}^2 \sigma_0^2 H^2/c^2. \quad (4.5)$$

Здесь $R_{\text{H}0}$ — значение постоянной Холла при $H \rightarrow 0$, а ζ — коэффициент магнетосопротивления.

В случае невырожденного неоднородного полупроводника (n и p зависят от координат) в формуле (4.1а) следует провести замену

$$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_n^* = \mathcal{E} + (kT/e) \text{grad} (\ln n), \quad (4.15)$$

а в формуле (4.2а)

$$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_p^* = \mathcal{E} - (kT/e) \text{grad} (\ln p). \quad (4.26)$$

Если магнитное поле велико (но не настолько, чтобы было $eHh/mckT \gg 1$, когда становятся существенными квантовые эффекты), влияние магнитного поля учитывается (в том случае, когда длины свободного пробега носителей не зависят от энергии) уравнениями

$$\mathbf{j}_n = \frac{ne\mu_n}{1 + (\mu_n H/c)^2} \{ \mathcal{E} - [\mathcal{E} \times \mathbf{H}] \mu_n/c \}, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{j}_p = \frac{pe\mu_p}{1 + (\mu_p H/c)^2} \{ \mathcal{E} + [\mathcal{E} \times \mathbf{H}] \mu_p/c \}. \quad (4.7)$$

Первичный поток носителей, отклоняемый затем магнитным полем, может быть создан не только путем приложения внешнего поля \mathcal{E}_x .

Пусть, как показано на рис. 7, одна грань изолированного прямоугольного образца освещается светом, так что возникают неравновесные пары электронов и дырок, причем неравномерно по объему. В направлении оси x создаются диффузионные потоки, а под влиянием магнитного поля, отклоняющего их вдоль оси y ,

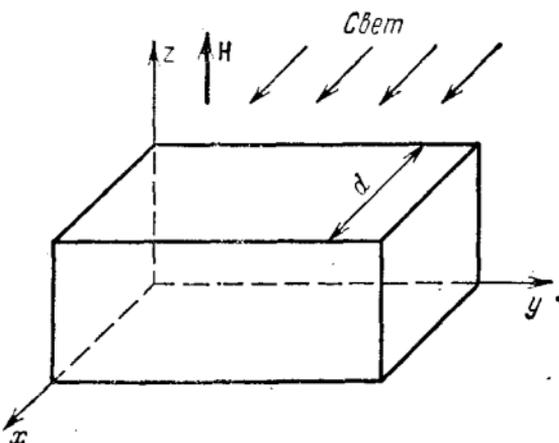


Рис. 7. Геометрия опыта по наблюдению фотоэлектromагнитного эффекта.

возникает напряжение фотоэлектromагнитного (ФЭМ) эффекта $V_{\text{ФЭМ}}$ между торцами образца, перпендикулярного оси y . Будем считать достаточно

большими размеры образца в плоскости zy , так что от переменных z, y ничто не зависит. В стационарных условиях

$$\text{rot } \mathcal{E} = 0, \quad d\mathcal{E}_y/dx = 0,$$

т. е. поле \mathcal{E}_y постоянно везде. Рассматриваемую систему можно описать уравнениями

$$\frac{1}{e} \text{div } \mathbf{j}_n = \frac{\Delta n}{\tau_n} = \frac{\Delta p}{\tau_p} = -\frac{1}{e} \text{div } \mathbf{j}_p \quad (4.8)$$

$$j_{nx} + j_{px} = 0. \quad (4.9)$$

Здесь принято, что изменение заполнения уровней прилипания пропорционально избыточным концентрациям свободных носителей заряда. При малых магнитных полях можно в выражениях для плотностей тока

$$\mathbf{j}_n = \mathbf{j}_n^* - [\mathbf{j}_n^* \times \mathbf{H}] \mu_{nH}/c, \quad \mathbf{j}_n^* = ne\mu_n \mathcal{E} + eD_n \text{grad } n, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{j}_p = \mathbf{j}_p^* + [\mathbf{j}_p^* \times \mathbf{H}] \mu_{pH}/c, \quad \mathbf{j}_p^* = pe\mu_p \mathcal{E} - eD_p \text{grad } p \quad (4.11)$$

пренебречь в первом приближении членами с H . Далее, определим $\Delta n, \Delta p$ из одномерной задачи с граничными условиями (генерация на поверхности $x=0$):

$$g = -j_{nx}/e + s_0 \Delta n, \quad x=0;$$

$$0 = j_{nx}/e + s_d \Delta n, \quad x=d.$$

Теперь плотность тока ФЭМ эффекта j_y (или поле ФЭМ эффекта \mathcal{E}_y при $\int_0^d j_y dx = 0$, например) можно найти из уравнения

$$j_y = e\mathcal{E}_y (n\mu_n + p\mu_p) + D_n^* \frac{dn}{dx} \frac{eH (\mu_{nH} + \mu_{pH})}{c}. \quad (4.12)$$

Здесь $n = n_0 + \Delta n$, D — коэффициент биполярной диффузии (3.14) и

$$D_n^* = D \frac{n\tau_p + p\tau_n}{\tau_n (n+p)}. \quad (4.13)$$

91. В образце n -типа плотность тока вдоль оси x (см. рис. 6) есть $j_x = 0,1 \text{ А} \cdot \text{см}^{-2}$. Магнитное поле по оси z есть $H = 1000 \text{ Э}$. В условиях рассеяния на колебаниях решетки $\mu_{nH} = 1,18\mu_n$. Определить R_H и холловское напряжение V_H , если $n_0 = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ и размер образца в направлении оси y равен $a = 0,5 \text{ см}$.

92. При наложении на образец p -типа магнитного поля $H_z = 4000$ Э, перпендикулярного направлению тока, сопротивление увеличилось на 0,22%. Определить коэффициент магнетосопротивления ξ и коэффициент η_p в формулах (4.1а) и (4.2а), если $\mu_{pH} = 2240$ см² В⁻¹ с⁻¹.

93. Определить постоянную Холла в InSb, содержащем акцепторы с концентрацией $N_a = 5 \cdot 10^{16}$ см⁻³, если отношение холловских подвижностей к дрейфовым равно 1,18, $\mu_n/\mu_p = 80$. Магнитное поле слабое, $n_i = 1,6 \cdot 10^{16}$ см⁻³, $T = 300$ К, акцепторы считать полностью ионизованными.

94. В полупроводнике p -типа при $\beta_p = \mu_{pH}/c = 0,2$ постоянная Холла $R_H = 0$. Определить коэффициент магнетосопротивления ξ , если $b = \mu_n/\mu_p = 30$ и длины свободного пробега электронов и дырок не зависят от энергии.

95. Определить напряжение ФЭМ эффекта между торцами массивного кубического образца n -типа, если $\beta_p = \mu_{pH}/c = 0,07$, максимальная концентрация избыточных электронов (на поверхности $x = 0$) $\Delta n(0) = 10^{14}$ см⁻³, $\rho_0 = 1,6$ Ом·см, $D_p = 45$ см² с⁻¹, $b = 2,1$.

96. Определить время жизни в полупроводнике p -типа, если при наложении вдоль оси y (см. рис. 7) поля напряженности $\mathcal{E}_{iy} = 0,168$ В·см⁻¹ и магнитного поля (по оси z) $H = 1000$ Э ток вдоль оси y не зависит от слабого освещения граней, перпендикулярных оси x . $D_n = 98$ см² с⁻¹, $(\mu_{nH} + \mu_{pH})/(\mu_n + \mu_p) = 1,2$, размеры образца считать большими, прилипания нет.

97. На поверхности $x = 0$ (см. рис. 7) образца n -типа генерируются светом неравновесные носители заряда, так что $\Delta n(0) = 2 \cdot 10^{13}$ см⁻³. Относительное уменьшение сопротивления образца $\delta = 1,2\%$, а $V_{ФЭМ} = 3,8 \cdot 10^{-3}$ В при $\beta_p = \mu_{pH}/c = 0,1$. Определить τ_p и τ_n , если $\mu_n = 3800$ см² В⁻¹ с⁻¹, $b = 2,1$, $D_p = 45$ см² с⁻¹, $d = 0,2$ см, а размер образца вдоль оси y есть $a = 1$ см.

Глава 5

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Наличие поверхностных состояний на поверхности полупроводника приводит к образованию двойного слоя электрического заряда. В зависимости от того, являются ли они акцепторами или донорами, поверхность заряжается отрицательно или положительно. При этом в приповерхностной области возникает слой объемного заряда.

Возникающее электрическое поле вызывает изгиб энергетических зон вверх в случае акцепторных поверхностных состояний, и вниз — в случае донорных:

$$E_c(\mathbf{r}) = E_{c0} - e\varphi(\mathbf{r}), \quad E_v(\mathbf{r}) = E_{v0} - e\varphi(\mathbf{r}). \quad (5.1)$$

Величину изгиба зон на поверхности полупроводника, т. е. разность между значениями электростатического потенциала на поверхности и в объеме, называют поверхностным потенциалом φ_s .

В области объемного заряда концентрации электронов и дырок зависят от координат. Для невырожденных полупроводников эти зависимости имеют вид

$$n(\mathbf{r}) = N_c \exp[(F - E_{c0} + e\varphi(\mathbf{r}))/kT] = n \exp[e\varphi(\mathbf{r})/kT], \quad (5.2)$$

$$p(\mathbf{r}) = N_v \exp[(E_{v0} - e\varphi(\mathbf{r}) - F)/kT] = p \exp[-e\varphi(\mathbf{r})/kT].$$

При изгибе зон вверх (вниз) в полупроводнике p -типа (n -типа) концентрация основных носителей заряда — дырок (электронов) вблизи поверхности увеличивается, образуется обогащенный дырками (электронами) слой. При изгибе зон вниз (вверх) в полупроводнике p -типа (n -типа) происходит уменьшение концентрации основных носителей заряда — образование обедненного слоя. В последнем случае, если изгиб зон достаточно велик (как правило, больше $E_g/2$), вблизи поверхности возникает слой, концентрация электронов (дырок) в котором может стать заметной. Слой вблизи поверхности, проводимость которого сравнима с проводимостью в объеме полупроводника или превосходит ее и создается электронами (дырками) в полупроводниках p -типа (n -типа), называется инверсионным.

Для определения электростатического потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ следует решить уравнение Пуассона с граничными условиями, определяемыми условиями задачи:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \mathbf{D} = \epsilon\mathcal{E} = -\epsilon d\varphi/d\mathbf{r}, \quad (5.3)$$

где ρ — объемная плотность заряда, ϵ — диэлектрическая проницаемость,

$$\rho = e[N_d^+(\mathbf{r}) - N_a^-(\mathbf{r}) + p(\mathbf{r}) - n(\mathbf{r})]. \quad (5.4)$$

Величины $n(\mathbf{r})$ и $p(\mathbf{r})$ определяются формулами (5.2), а концентрации однозарядных ионизованных доноров и акцепторов в области пространственного заряда вычисляются

по формулам:

$$N_d^+ = N_d \{1 + g_d \exp [(F - E_d + e\varphi(r))/kT]\}^{-1} = \\ = N_d \{1 + \exp [(F - E_d^* + e\varphi(r))/kT]\}^{-1}, \quad (5.5a)$$

$$N_a^- = N_a \{1 + g_a \exp [(E_a - F - e\varphi(r))/kT]\}^{-1} = \\ = N_a \{1 + \exp [(E_a^* - F - e\varphi(r))/kT]\}^{-1}. \quad (5.5b)$$

Здесь $E_d^* = E_d - kT \ln g_d$, $E_a^* = E_a + kT \ln g_a$, E_a и E_d — энергии акцепторных и донорных уровней в объеме полупроводника, g_a и g_d — факторы вырождения акцепторного и донорного уровней соответственно.

Ширина области пространственного заряда характеризуется длиной экранирования, или дебаевской длиной L_D . Для электронного полупроводника она равна

$$L_D = \{\epsilon kT / [4\pi e^2 N_c \Phi'_{1/2}((F - E_c)/kT)]\}^{1/2}, \quad (5.6)$$

где $\Phi'_{1/2}(\eta)$ — производная интеграла Ферми. В невырожденном случае

$$L_D = \{\epsilon kT / (4\pi e^2 n)\}^{1/2}, \quad (5.7)$$

где n — концентрация электронов (1.7), а в условиях полного вырождения

$$L_D = \{\epsilon / [4\pi e^2 \rho(F)]\}^{1/2}, \quad (5.8)$$

где $\rho(F)$ — плотность состояний на уровне Ферми.

Для собственного полупроводника в отсутствие вырождения имеем

$$L_D = \{\epsilon kT / (8\pi e^2 n_i)\}^{1/2}. \quad (5.9)$$

Если внешнего электрического поля нет, то полупроводник в целом нейтрален. Условие нейтральности для полубесконечного полупроводникового образца ($x \geq 0$, этот случай и будет рассматриваться в дальнейшем) с поверхностью при $x = 0$ имеет вид

$$\int_0^{\infty} \rho(x) dx + Q_s = 0, \quad (5.10)$$

где Q_s — поверхностная плотность заряда в поверхностных состояниях.

Избыточные концентрации электронов Γ_n и дырок Γ_p в слое пространственного заряда вычисляются по

формулам

$$\Gamma_n = \int_0^{\infty} [n(x) - n_0] dx, \quad \Gamma_p = \int_0^{\infty} [p(x) - p_0] dx, \quad (5.11)$$

где n_0 и p_0 — концентрации электронов и дырок в объеме.

Поверхностная проводимость G определяется как

$$G = e\mu_n^* \Gamma_n + e\mu_p^* \Gamma_p, \quad (5.12)$$

где μ_n^* , μ_p^* — эффективные подвижности электронов и дырок в слое пространственного заряда. Часто полагают, что они равны значениям подвижности в объеме образца.

Изменение проводимости полупроводника в приповерхностной области под действием внешнего электрического поля, приложенного по нормали к поверхности образца, называется эффектом поля.

Полный заряд δQ , индуцированный полем под единицей поверхности, равен

$$\delta Q = \delta Q_b + \delta Q_s, \quad (5.13)$$

где δQ_b — изменение под влиянием поля заряда в приповерхностном слое, δQ_s — часть индуцированного заряда, захваченная быстрыми поверхностными состояниями.

Полный индуцированный заряд определяется экспериментально по измерениям емкости конденсатора, состоящего из полупроводникового образца и полевого электрода,

$$\delta Q = CU. \quad (5.14)$$

Здесь U — приложенное напряжение, C — емкость на единицу площади.

Изменение заряда в приповерхностном слое δQ_b , соответствующее определенному изменению поверхностного потенциала, может быть найдено из уравнения Пуассона (5.3). Зная δQ и δQ_b , из соотношения (5.13) можно найти связанный заряд δQ_s .

В эффекте поля вводят величину $\mu_{э.п.}$, имеющую размерность подвижности и определяемую формулой

$$\mu_{э.п.} = \delta G / \delta Q, \quad (5.15)$$

где δG — изменение поверхностной проводимости в эффекте поля; $\mu_{э.п.}$ зависит от того, какая доля носителей, индуцированных полем, захватывается поверхностными состояниями.

В потенциальной яме, возникающей при искривлении волн около однородной поверхности полупроводника, движение электронов в направлении, перпендикулярном поверхности, квантуется. При этом могут возникать поверхностные энергетические зоны, состояния в каждой из которых отвечают движению электронов вдоль поверхности. Поверхностное квантование необходимо учитывать, если расстояние между поверхностными зонами превышает kT .

98. Вычислить дебаевскую длину при 300 К: а) в собственном германии ($\epsilon = 16$), б) в собственном кремнии ($\epsilon = 12$), в) в германии n -типа с концентрацией электронов, равной 10^{15} см^{-3} . Оценить дебаевскую длину в металле, полагая $\epsilon = 1$, $\rho(F) = 10^{22} \text{ см}^{-3} \text{ эВ}^{-1}$.

99. Определить ход потенциала в обогащенном приповерхностном слое полупроводника n -типа. Оценить толщину обогащенного слоя, если доноры в объеме полупроводника полностью ионизованы.

100. На поверхности кремния p -типа существует обедненный слой, причем концентрация электронов считается пренебрежимо малой. Найти толщину области объемного заряда при 300 К, если $\phi_s = 0,25 \text{ В}$, а концентрация мелких полностью ионизованных акцепторов в объеме $N_a = 10^{15} \text{ см}^{-3}$.

101. В условиях предыдущей задачи оценить напряженность поля на поверхности.

102. На поверхности образца кремния n -типа существует сильный изгиб зон вверх, отвечающий образованию обедненного слоя. При каком значении потенциала в приповерхностной области концентрация дырок сравняется с концентрацией электронов? Оценить толщину приповерхностного слоя, в котором $p(x) > n(x)$, если $e\phi_s = 0,5 \text{ эВ}$, концентрация электронов в объеме $n = 10^{15} \text{ см}^{-3}$, $T = 300 \text{ К}$, $b = \mu_n/\mu_p = 2,9$.

103. Во сколько раз потенциал в точке инверсии проводимости в кремнии p -типа больше, чем в германии p -типа, если концентрации дырок в объеме этих полупроводников одинаковы и равны $p = 2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$; концентрации носителей заряда в собственных германии и кремнии при комнатной температуре равны соответственно: $n_{iGe} = 2,2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $n_{iSi} = 1,05 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$, а отношения подвижностей электронов и дырок равны: $b_{Ge} = 2,1$ и $b_{Si} = 2,9$.

104. Определить форму зон, если к полупроводнику с собственной проводимостью нормально к его поверхности

приложено постоянное электрическое поле \mathcal{E} (рис. 8) настолько слабое, что везде в полупроводнике $e\varphi/kT \ll 1$. Найти скачок потенциала на поверхности, если $\mathcal{E} = 160 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$, $n_i = 2,2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $\epsilon = 16$, $T = 300 \text{ К}$.

105. Перпендикулярно к поверхности дырочного полупроводника с полностью ионизованной акцепторной примесью в объеме приложено слабое электрическое поле $e\varphi/kT \ll 1$ (рис. 9). Определять ход потенциала в приповерхностной области и поверхностный по-

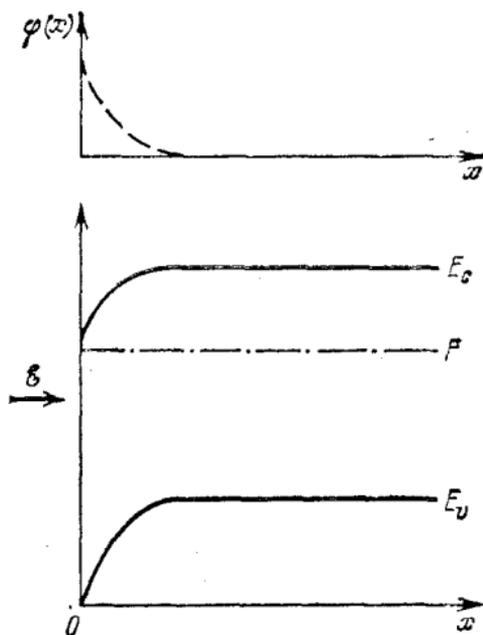


Рис. 8. Изгиб зон и ход потенциала в приповерхностной области собственного полупроводника при наложении электрического поля.

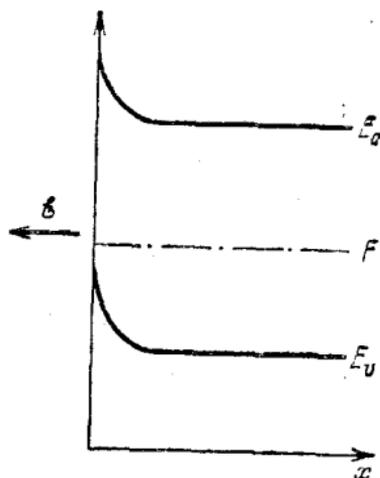


Рис. 9. Изгиб зон в приповерхностной области дырочного полупроводника при наложении электрического поля.

тенциал, если напряженность приложенного поля $\mathcal{E} = 2 \cdot 10^3 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$, $p = 10^{15} \text{ см}^{-3}$, $\epsilon = 16$, $T = 300 \text{ К}$.

106. Найти поверхностный потенциал для собственного германия при комнатной температуре, если концентрация адсорбированной на его поверхности донорной примеси $N = 10^9 \text{ см}^{-2}$. Считать доноры полностью ионизованными, $n_i = 2,2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $\epsilon = 16$, $e\varphi/kT \ll 1$.

107. Найти поверхностный потенциал для собственного германия при комнатной температуре, если концентрация адсорбированной на его поверхности донорной примеси $N = 10^{12} \text{ см}^{-2}$. Ход потенциала $\varphi(x)$ аппроксимировать двумя прямолинейными участками (рис. 10):

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_s - \mathcal{E}x, & 0 \leq x \leq \varphi_s/\mathcal{E}_s \\ 0, & x \geq \varphi_s/\mathcal{E}_s \end{cases}$$

где напряженность поля \mathcal{E} постоянна. Считать искривление зон на поверхности большим: $e\varphi_0/kT \gg 1$, $n_1 = 2,2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $\epsilon = 16$.

108. Найти изменение работы выхода в германии с проводимостью p -типа, если на его поверхности адсорбируется акцепторная примесь с концентрацией $N = 8 \cdot 10^8 \text{ см}^{-2}$. Считать акцепторы в объеме и на поверхности полупроводника полностью ионизованными, $e\varphi_0/kT \ll 1$, $p = 10^{15} \text{ см}^{-3}$, $\epsilon = 16$, $T = 300 \text{ К}$. Оценить, при каких N в рассматриваемом случае справедлива сделанная аппроксимация $e\varphi_0/kT \ll 1$.

109. Найти изменение работы выхода электронов, если на поверхности полупроводника адсорбированы молекулы с дипольным моментом $3 \cdot 10^{-28} \text{ Кл} \cdot \text{м}$ и плотностью $N = 10^{12} \text{ см}^{-2}$ (рис. 11). Во сколько раз изменение работы выхода в этом случае будет меньше, чем в условиях задачи 107? Объяснить полученный результат, принимая во внимание, что концентрация адсорбированных на поверхности частиц в обоих случаях одинакова.

110. Вычислить поверхностный потенциал в условиях задачи 107, если вместо собственного полупроводника взять материал n -типа с полностью ионизованными донорами и концентрацией электронов в объеме $n = 2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$.

111. Найти плотность адсорбированного на поверхности кремния p -типа поверхностного заряда, вызвавшего

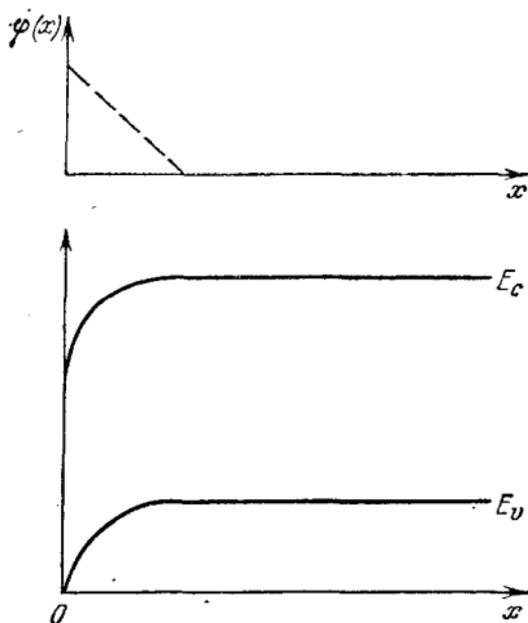


Рис. 10. Изгиб зон в приповерхностной области германия, на поверхности которого адсорбирована донорная примесь; использованная аппроксимация хода потенциала изображена штриховой линией.

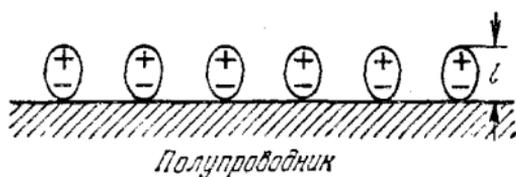


Рис. 11. Поверхность полупроводника с адсорбированными дипольными молекулами.

уменьшение работы выхода на 0,26 эВ. Для потенциала внутри полупроводника использовать аппроксимацию, принятую в задаче 107. Считать акцепторы полностью ионизованными; $p = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $\epsilon = 12$, $T = 300 \text{ К}$.

142*. Для полупроводника, содержащего в объеме полностью ионизованную примесь, найти связь между зарядом на поверхности и поверхностным потенциалом; считать $\varphi|_{x=0} = \varphi_s > 0$.

143*. Вычислить поверхностный потенциал для кремния n -типа, если на поверхности адсорбированы доноры, концентрация которых $N = 10^{11} \text{ см}^{-2}$ (считать все доноры полностью ионизованными, при этом $e\varphi_s/kT \gg 1$); $n = 10^{12} \text{ см}^{-3}$, $\epsilon = 12$, $T = 300 \text{ К}$.

144*. Вычислить плотность заряда на поверхности германия n -типа (доноры в объеме полностью ионизованы), если изгиб зон на поверхности составляет $e\varphi_s = 10kT$; $T = 300 \text{ К}$, $n = 10^{16} \text{ см}^{-3}$, $\epsilon = 16$. Определить концентрацию акцепторных уровней, создающих этот заряд, считая акцепторы полностью ионизованными.

145. При адсорбции центров акцепторного типа на поверхности собственного германия работа выхода увеличилась на 0,052 эВ. Найти концентрацию адсорбированных акцепторов, если они полностью ионизованы; $T = 300 \text{ К}$, $n_i = 2,2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $\epsilon = 16$.

146. При адсорбции акцепторной примеси на поверхности германия p -типа работа выхода электронов увеличилась на 0,13 эВ. Определить плотность адсорбированного заряда, если акцепторы в объеме и на поверхности полностью ионизованы, $p = 2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$, $T = 300 \text{ К}$, $\epsilon = 16$.

147. Найти плотность заряда, адсорбированного на поверхности собственного кремния, если при адсорбции работа выхода уменьшилась на $\Delta\phi = 0,13 \text{ эВ}$; $n_i = 1,05 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$, $\epsilon = 12$, $T = 300 \text{ К}$.

148. Определить плотность заряда, адсорбированного на поверхности германия p -типа, если при адсорбции работа выхода электронов уменьшилась на 0,026 эВ. Акцепторы в объеме полностью ионизованы; $T = 300 \text{ К}$, $\epsilon = 16$, $p = 2,2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$. Вычислить концентрацию донорных уровней, создающих этот заряд.

149*. Для дырочного полупроводника с полностью ионизованными примесями в объеме приблизительно вычислить поверхностную проводимость, если при адсорбции акцепторных молекул энергетические зоны изогнулись на 0,25 эВ; $p = 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $\epsilon = 12$, $\mu_p^* = 10^3 \text{ см}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$, температура комнатная.

120. В условиях предыдущей задачи вычислить поверхностную плотность заряда, создающего изгиб зон, равный $0,25$ эВ.

121*. Определить поверхностный потенциал полупроводника с собственной проводимостью, если поверхностная проводимость $G = 10^{-7}$ Ом $^{-1}$. Считать всюду в полупроводнике $e\varphi/kT \ll 1$ ($\varphi > 0$); $\mu_n^* = \mu_n = 3800$ см 2 В $^{-1}$ с $^{-1}$, $b = 2,1$, $\epsilon = 16$, $n_i = 2,2 \cdot 10^{13}$ см $^{-3}$, $T = 300$ К.

122. Определить поверхностный потенциал германия p -типа при адсорбции акцепторных молекул, если поверхностная проводимость равна $G = 6 \cdot 10^{-7}$ Ом $^{-1}$; $e\varphi/kT \ll 1$, $\mu_p^* = \mu_p = 1800$ см 2 В $^{-1}$ с $^{-1}$, $p = 10^{15}$ см $^{-3}$, $\epsilon = 16$, $T = 300$ К. Считать, что всюду в полупроводнике акцепторы полностью ионизованы.

123. Вычислить поверхностный потенциал кремния n -типа, на поверхности которого адсорбированы доноры, если поверхностная проводимость $G = 5 \cdot 10^{-5}$ Ом $^{-1}$, при этом $e\varphi_s/kT \gg 1$. Для хода потенциала принять аппроксимацию, использованную в задаче 107, где \mathcal{E} — постоянная величина. Считать доноры всюду в полупроводнике полностью ионизованными; $\mu_n^* = \mu_n = 1450$ см 2 В $^{-1}$ с $^{-1}$, $n = 10^{13}$ см $^{-3}$, $\epsilon = 12$, $T = 300$ К.

124. Определить плотность заряда в поверхностных состояниях, если к электронному полупроводнику нормально к его поверхности прикладывается постоянное электрическое поле $\mathcal{E} = 5 \cdot 10^3$ В · см $^{-1}$ ($\varphi > 0$), и при этом поверхностная проводимость оказывается равной 10^{-6} Ом $^{-1}$. Считать, что всюду в полупроводнике выполнено условие $e\varphi/kT \ll 1$; $n = 5 \cdot 10^{14}$ см $^{-3}$, $\epsilon = 16$, $\mu_n^* = \mu_n = 3800$ см 2 В $^{-1}$ с $^{-1}$, $T = 300$ К. Считать доноры в полупроводнике полностью ионизованными.

125*. Определить поверхностный потенциал полупроводника n -типа при адсорбции донорных молекул с поверхностной концентрацией N , если донорная примесь в объеме полупроводника на расстояниях, больших длины экранирования, полностью ионизована; $N_d = n = 3 \cdot 10^{14}$ см $^{-3}$, $\epsilon = 16$, $T = 300$ К. Рассмотреть случаи:

а) $N = 10^9$ см $^{-2}$, считать при этом $e\varphi_s/kT \ll 1$, где $\varphi_s = \varphi|_{x=0}$;

б) $N = 3 \cdot 10^{12}$ см $^{-2}$, при этом $e\varphi_s/kT \gg 1$.

126. Внешним электрическим полем, направленным по нормали к поверхности дырочного полупроводника с полностью ионизованными акцепторами, индуцируется заряд с поверхностной плотностью $\delta Q = 1,8 \cdot 10^{-9}$ Кл · см $^{-2}$, при

этом $\mu_{э.п} = 0,4\mu_p^*$. Определить долю индуцированного заряда, захваченного поверхностными состояниями.

127. Перпендикулярно поверхности дырочного полупроводника приложено электрическое поле, увеличившее поверхностную проводимость на $\delta G = 0,6 \cdot 10^{-8} \text{ Ом}^{-1}$. Определить плотность индуцированного заряда, захваченного поверхностными состояниями, если известно, что емкость на единицу площади конденсатора, состоящего из полупроводникового образца и металлического электрода, равна $C = 90 \text{ пФ} \cdot \text{см}^{-2}$, приложенное напряжение $U = 5,7 \text{ В}$, а $\mu_p^* = 1800 \text{ см}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$.

128. Определить плотность отрицательного заряда на поверхности дырочного полупроводника, если величина поверхностного потенциала равна $|\phi_s| = 0,25 \text{ В}$. Акцепторы в глубине полупроводника (на расстояниях, больших длины экранирования) считать полностью ионизованными; $p = 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $\epsilon = 16$, $T = 300 \text{ К}$.

129. Определить скорость поверхностной рекомбинации s для тонкой и длинной пластины полупроводника n -типа.

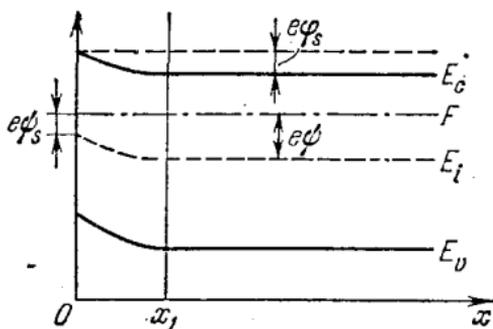


Рис. 12. Зонная схема электронного полупроводника с положительным объемным зарядом в приповерхностной области.

Длина и ширина пластины значительно превышают ее толщину, равную $2a = 0,5 \text{ мм}$, скорости поверхностной рекомбинации для обеих сторон пластины одинаковы, эффективное время жизни неравновесных носителей в пластине $\tau_1 = 125 \text{ мкс}$, а объемное время жизни, измеренное для толстого образца, равно $\tau_p = 250 \text{ мкс}$. Использовать условие $sa/D_p \ll 1$.

130*. Определить скорость поверхностной рекомбинации s_1 на верхней грани тонкой пластины полупроводника n -типа. Длина и ширина пластины значительно превышают ее толщину, равную $2a = 0,2 \text{ мм}$, скорость поверхностной рекомбинации на нижней грани s_2 гораздо меньше, чем s_1 , эффективное время жизни неравновесных носителей заряда в пластине $\tau_1 = 20 \text{ мкс}$, а объемное время жизни $\tau_p = 100 \text{ мкс}$. Использовать условие $s_1 a/D_p \ll 1$.

131*. Найти зависимость скорости поверхностной рекомбинации s от величины ϕ_s , характеризующей изгиб зон на поверхности полупроводника (рис. 12) и связанной с поверхностным потенциалом соотношением $e\phi_s =$

$= F - E_i - e\varphi_s$, где $E_i = (E_c + E_v)/2$. Поверхностная концентрация центров, принимающих участие в рекомбинации, равна N_i , энергия их уровня есть E_i , концентрации избыточных носителей заряда в объеме вблизи области пространственного заряда одинаковы ($\Delta p = \Delta n$ при $x = x_1$). Считать полупроводник невырожденным, отклонение от равновесия малым ($\Delta p \ll n_0$), условия стационарными.

132*. В условиях предыдущей задачи определить отношение сечений захвата электронов и дырок, если известно, что скорость поверхностной рекомбинации $s(\psi_s)$ при изменении ψ_s происходит через максимум при $e\varphi_s = 1,1kT$.

133*. Напряженность электрического поля в обогащенном слое вблизи поверхности полупроводника равна 10^5 В·см⁻¹. Оценить энергию наименьшего энергетического уровня в треугольной потенциальной яме, ограничивающей движение электрона в направлении, перпендикулярном поверхности. Эффективную массу электрона принять равной $0,2m_0$.

Глава 6

ТЕРМО-Э. Д. С. В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

Дифференциальная термоэлектродвижущая сила полупроводника с одним типом носителей заряда дается выражением

$$\alpha = \pm \frac{k}{e} \left(\frac{Q^*}{kT} \pm \eta \right), \quad (6.1)$$

где знак совпадает со знаком носителей заряда, $\eta = F/kT$, F — уровень Ферми (за начало отсчета выбирается край соответствующей зоны), Q^* — величина, называемая энергией переноса. В изотропном случае, который мы рассматриваем в дальнейшем, энергия переноса равна

$$Q^* = q/\sigma. \quad (6.2a)$$

В последней формуле

$$\sigma = \langle e\tau/\tilde{m} \rangle, \quad (6.3a)$$

$$q = \langle e\tau E/\tilde{m} \rangle, \quad (6.3b)$$

знак $\langle \dots \rangle$ означает интегрирование по энергиям с весом $k^3(E) (-\partial f/\partial E)/3\pi^2$:

$$\langle A(E) \rangle = \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{\infty} k^3(E) \left(-\frac{df}{dE} \right) A(E) dE,$$

f — функция Ферми (1.2), τ — время релаксации, зависящее от квазиимпульса (энергии) по закону

$$\tau = \tau_0 \frac{dE}{dk} k^{2(r-1)}, \quad (6.4)$$

а \tilde{m} — величина, имеющая размерность массы и определяемая соотношением

$$\tilde{m}v = \hbar k \quad \left(v = \frac{1}{\hbar} \nabla_k E(k) \right). \quad (6.5)$$

Вообще говоря, величина \tilde{m} зависит от энергии, однако в простейшем случае квадратичного закона дисперсии она постоянна и совпадает с эффективной массой носителей, определяемой обычным образом (см. задачу 16).

В формуле (6.4) величина r определяется механизмом рассеяния импульса носителей. При рассеянии носителей заряда на акустических колебаниях решетки $r=0$; при рассеянии на оптических колебаниях решетки $r=1$ при температуре выше температуры Дебая T_D и $r=1/2$ при $T < T_D$; при рассеянии на заряженных примесях $r=2$.

Если в системе имеется несколько типов носителей заряда, то полная термо-э. д. с. равна

$$\alpha = \sum_i \sigma_i \alpha_i / \sigma, \quad (6.6)$$

где σ_i и α_i — проводимость и термо-э. д. с., связанные с i -м сортом носителей, σ — полная проводимость, суммирование проводится по всем сортам носителей.

При низких температурах в чистых материалах термо-э. д. с. может значительно превышать величину, даваемую формулой (6.1), вследствие эффекта увлечения носителей фононами. Для «фононной» составляющей термо-э. д. с. в этом случае имеет место выражение

$$\alpha_\phi = av_s l_\phi / \mu T, \quad (6.7)$$

где v_s — скорость звука, l_ϕ — длина свободного пробега фононов, μ — подвижность носителей заряда, a — множитель, определяющий относительный вклад рассеяния на акустических колебаниях в полную вероятность рассеяния носителей. Если всё рассеяние носителей происходит на акустических колебаниях решетки, то множитель a — порядка единицы. В магнитном поле*) термо-э. д. с.

*) Мы рассматриваем область не слишком сильных магнитных полей, когда можно пренебречь квантованием энергии электронов в магнитном поле. Условие применимости формул (6.2б), (6.3в) и (6.3г) имеет вид $\hbar e H / \tilde{m} c \ll kT$.

по-прежнему дается выражением (6.1), в котором

$$Q^* = \frac{\sigma_1 q_1 + \sigma_2 q_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \quad (6.26)$$

где

$$\sigma_1 = \left\langle \frac{e\tau}{\tilde{m}} \frac{1}{1+w^2} \right\rangle, \quad \sigma_2 = \left\langle \frac{e\tau}{\tilde{m}} \frac{w}{1+w^2} \right\rangle, \quad (6.3в)$$

$$q_1 = \left\langle \frac{e\tau}{\tilde{m}} \frac{E}{1+w^2} \right\rangle, \quad q_2 = \left\langle \frac{e\tau}{\tilde{m}} \frac{Ew}{1+w^2} \right\rangle, \quad (6.3г)$$

$$w = \frac{eH}{\tilde{m}c} \tau.$$

134. Получить выражение для термо-э. д. с. в отсутствие магнитного поля для носителей с квадратичным законом дисперсии. Оценить термо-э. д. с. типичного металла ($m_{\text{мет}} = m_0$, $n_{\text{мет}} = 2 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$) при комнатной температуре и сравнить ее с термо-э. д. с. вырожденного полупроводника n -типа ($m_{\text{пн}} = 0,2m_0$, $n_{\text{пн}} = 2 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$). Считать, что рассеяние в обоих случаях происходит на заряженной примеси.

135. Качественно представить на графике температурную зависимость термо-э. д. с. германия p -типа в примесной и собственной областях.

136. Считая, что рассеяние происходит на акустических колебаниях, найти величину термо-э. д. с. германия p -типа, содержащего $6 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ мелких акцепторов, при $T = 200 \text{ К}$.

137. Определить положение энергетического уровня доноров в компенсированном полупроводнике n -типа, если термо-э. д. с. при 100 К равна $-2,1 \text{ мВ} \cdot \text{К}^{-1}$. Известно, что $N_d = 2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$, $n_{\text{ид}} \ll N_d$, степень компенсации $N_d/N_a = 0,5$, а рассеяние происходит на акустических колебаниях решетки.

138*. В предельном случае сильного вырождения получить выражение для термо-э. д. с. полупроводника n -типа, закон дисперсии которого имеет вид (1.3ж). Найти термо-э. д. с. антимонда индия с концентрацией электронов 10^{18} см^{-3} при 100 К , если рассеяние происходит на заряженной примеси. Эффективная масса электронов на дне зоны проводимости равна $0,013m_0$, а ширина запрещенной зоны изменяется с температурой по закону $E_g = (0,26 - 2,7 \cdot 10^{-4}T) \text{ эВ}$.

139. Получить выражение для термо-э. д. с. полупроводника n -типа с законом дисперсии (1.3ж) при

произвольном вырождении. Считать, что непараболичность зоны невелика и ограничиться рассмотрением первых поправок, возникающих из-за непараболичности зоны.

140. Оценить величину «фононной» составляющей термо-э. д. с. германия n -типа при температуре 20 К. В исследуемом образце подвижность электронов в основном определяется рассеянием на акустических колебаниях и равна $4 \cdot 10^5 \text{ см}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$, а рассеяние фононов происходит на стенках образца. Поперечные размеры образца порядка 1 мм, а скорость звука $5 \cdot 10^5 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$.

141. Наблюдаемая подвижность электронов в антимониде индия при 20 К равна $2 \cdot 10^5 \text{ см}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$, а оценка подвижности в случае, когда рассеяние происходит только на акустических колебаниях, дает при этой температуре величину порядка $10^8 \text{ см}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$. Считая, что рассеяние фононов происходит на стенках образца, оценить отношение «фононной» составляющей термо-э. д. с. антимонида индия n -типа к «фононной» составляющей термо-э. д. с. n -германия. Скорость звука в InSb равна $10^5 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$, поперечные размеры образцов считать одинаковыми. Данные для германия взять из условия предыдущей задачи.

142. Измерения термо-э. д. с. в полупроводнике p -типа в сильном магнитном поле ($\omega \gg 1$) при комнатной температуре показали, что в исследуемой области полей термо-э. д. с. не зависит от магнитного поля и равна $475 \text{ мкВ} \cdot \text{К}^{-1}$. На основе этих измерений найти эффективную массу дырок, если концентрация их равна $5,6 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$. Закон дисперсии дырок считать квадратичным.

143. Найти выражение для термо-э. д. с. полупроводника n -типа с законом дисперсии (1.3а) в пределе сильных магнитных полей ($\omega \gg 1$) в отсутствие вырождения. Рассмотреть зависимость разности $\Delta\alpha(\infty) = \alpha|_{n \rightarrow \infty} - \alpha|_{n=0}$ от механизма рассеяния.

144. Для вырожденных образцов антимонида индия с концентрацией электронов 10^{17} см^{-3} при 77 К термо-э. д. с. в области сильных магнитных полей не зависит от магнитного поля и равна $68 \text{ мкВ} \cdot \text{К}^{-1}$. Принимая закон дисперсии в виде (1.3ж), найти величину эффективной массы на дне зоны проводимости. Ширина запрещенной зоны при 77 К равна 0,22 эВ.

145. Термо-э. д. с. в вырожденном полупроводнике n -типа в области сильных магнитных полей постоянна и

равна $-27 \text{ мкВ} \cdot \text{К}^{-1}$. Измерения без магнитного поля при той же температуре дали для термо-э. д. с. значение $-51 \text{ мкВ} \cdot \text{К}^{-1}$. Найти параметр r , определяющий характер рассеяния электронов, если известно, что зона проводимости исследуемого материала — параболическая.

146*. Для арсенида индия эмпирически установлен следующий закон дисперсии электронов в зоне проводимости, выполняющийся вплоть до энергии порядка $0,6 \text{ эВ}$:

$$E(k) = 0,28 \ln [1 + 5,9 \cdot 10^{-14} k^2 (\text{см}^{-2})] \text{ эВ}.$$

Найти, при какой концентрации электронов обращается в нуль величина изменения термо-э. д. с. в сильном магнитном поле $\Delta\alpha(\infty)$. Возможно ли обращение в нуль величины $\Delta\alpha(\infty)$, если закон дисперсии электронов имеет вид (1.3ж)? Считать, что рассеяние происходит на заряженной примеси.

Глава 7

ФОТО-Э. Д. С. В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

При освещении полупроводникового образца, помимо дember-эффекта (см. задачу 75), обусловленного неоднородным распределением избыточных носителей, фото-э. д. с. может возникнуть еще и вследствие неоднородности материала полупроводника. Для простоты будем рассматривать только одномерную задачу, когда как равновесные концентрации n_0 и p_0 , так и неравновесные $n = n_0 + \Delta n$ и $p = p_0 + \Delta p$ зависят только от координаты x . В этом случае фото-э. д. с. выражается следующим образом:

$$V = \oint \frac{D_p \frac{dp}{dx} - D_n \frac{dn}{dx}}{\mu_n n + \mu_p p} dx, \quad (7.1)$$

где интегрирование ведется по всей цепи, включающей образец. Если справедливы соотношения Эйнштейна (3.7), то

$$V = \frac{kT}{e} \oint \frac{\frac{dp}{dx} - b \frac{dn}{dx}}{bn + p} dx, \quad b = \frac{\mu_n}{\mu_p}. \quad (7.2)$$

Можно явно выделить из V слагаемое V_1 (вентильную фото-э. д. с.), связанное с неоднородностью образца

(исходим из формулы (7.2)):

$$V = V_1 + V_2,$$

$$V_1 = \frac{kT}{e} \oint \frac{1+b}{bn+p} \Delta n \frac{d \ln n_0}{dx} dx, \quad (7.3)$$

а слагаемое V_2 определяется неоднородностью избыточной концентрации:

$$V_2 = \frac{kT}{e} \oint \frac{1-b}{bn+p} \frac{d\Delta n}{dx} dx. \quad (7.4)$$

147. Найти фото-э. д. с. в полупроводнике с монополярной проводимостью при произвольной степени вырождения.

148. Вычислить фото-э. д. с. в образце n -Ge при $T = 300$ К, если его средняя часть (рис. 13) освещена так,

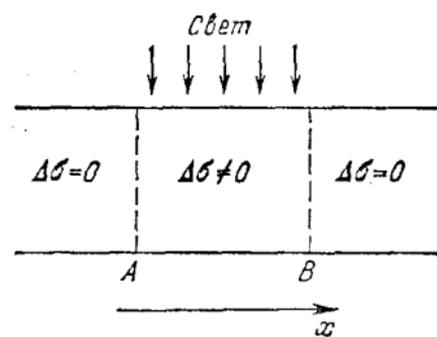


Рис. 13. К расчету фото-э. д. с. при неоднородном возбуждении.

что в ней $\Delta\sigma = 0,2 \text{ Ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$, а вне ее $\Delta\sigma = 0$. В отсутствие освещения удельное сопротивление в сечении A есть $\rho_{0,A} = 15 \text{ Ом} \cdot \text{см}$, а в сечении B $\rho_{0,B} = 5 \text{ Ом} \cdot \text{см}$.

149. В условиях, аналогичных предыдущей задаче, найти фото-э. д. с. при $\rho_{0,A} = 10 \text{ Ом} \cdot \text{см}$, $\rho_{0,B} = 8 \text{ Ом} \cdot \text{см}$ и при двух значениях $\Delta\sigma$: $\Delta\sigma_1 = 0,01 \text{ Ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$ и $\Delta\sigma_2 = 2 \text{ Ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$.

150*. Образец n -Ge освещается в узкой полоске (рис. 14) шириной $\Delta l = 0,1 \text{ мм}$ светом, генерирующим $2,5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$ пар носителей заряда. В точке $x = 0$ удельное сопротивление $\rho(0) = 1 \text{ Ом} \cdot \text{см}$. При передвижении светового зонда вдоль образца фото-э. д. с. изменяется как

$$V(x) = -\frac{A}{1+Bx^2}$$

где $A = 3 \cdot 10^{-4} \text{ В}$, $B = 2 \text{ см}^{-1}$. Найти ρ в точке $x = 2 \text{ см}$; температура комнатная.

151. Вычислить для случая однородного возбуждения вентиляющую фото-э. д. с., возникающую в $p-n$ -переходе в Ge при 75 К. Освещается (рис. 15) участок n -области, прилегающий к $p-n$ -переходу; в нем $\Delta n = 10^{10} \text{ см}^{-3}$,

вне его $\Delta n = 0$. В глубине n -области $n_0 = n_n = 10^{15} \text{ см}^{-3}$, в p -области $p_p = 10^{14} \text{ см}^{-3}$; $\mu_n = 3 \cdot 10^4 \text{ см}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$, $b = 0,5$.

152. Найти разность потенциалов $\Delta \phi$ между гранями образца n -типа толщиной $d = 1 \text{ см}$, если освещением грани $x = 0$ созданы неравновесные концентрации

$$\Delta n(x) = \Delta p(x) = N \exp(-x/L), \quad 0 \leq x \leq d,$$

где $N = 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $L = 0,01 \text{ см}$. Равновесная концентрация

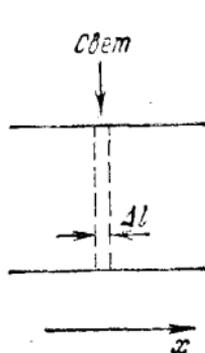


Рис. 14. К определению вентильной фото-э. д. с. в неоднородном образце.

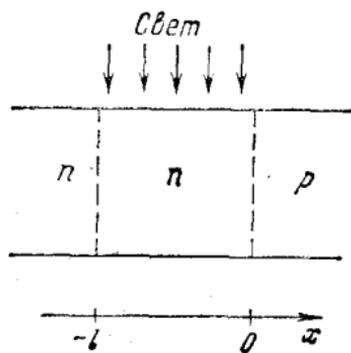


Рис. 15. Геометрия опыта по наблюдению вентильной фото-э. д. с., создаваемой при освещении $p-n$ -перехода.

электронов изменяется линейно от $n'_0 = 5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ при $x = 0$ до $n''_0 = 4 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ при $x = d$; температура 200 К , $b = 2,1$.

153. Вычислить фото-э. д. с. в условиях задачи 147. но при наличии прилипания, считая $\tau_p/\tau_n = 10$.

Глава 8

ОПТИКА ПОЛУПРОВОДНИКОВ

Оптические свойства материала характеризуются его показателем преломления $n(\omega)$ и линейным коэффициентом поглощения $\gamma(\omega)$. Последние связаны с комплексной проводимостью материала $\sigma(\omega)$ на частоте ω (в пренебрежении отличием магнитной проницаемости от единицы) соотношением

$$(n + i\kappa)^2 = 4\pi i\sigma/\omega + \epsilon_0, \quad \kappa = \gamma\lambda/4\pi, \quad (8.1)$$

где ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость материала в отсутствие свободных носителей заряда.

При нормальном падении света на толстый образец из среды с $n = 1$ коэффициент отражения света R есть

$$R = [(n - 1)^2 + \kappa^2] / [(n + 1)^2 + \kappa^2]. \quad (8.2)$$

Для света с длиной волны в вакууме λ коэффициент пропускания T (т. е. отношение интенсивностей прошедшей и падающей волн) полупроводниковым слоем конечной толщины d , помещенным в среду с $n = 1$, дается выражением

$$T = \frac{(1 - R)^2 [1 + (\kappa/n)^2]}{[\exp(\gamma d/2) - R \exp(-\gamma d/2)]^2 + 4R \sin^2(\xi + 2\pi n d/\lambda)}. \quad (8.3)$$

Здесь фаза ξ определяется формулой

$$\xi = \arctg [2\kappa / (n^2 + \kappa^2 - 1)]. \quad (8.4)$$

Слагаемое с квадратом синуса в знаменателе (8.3) ответственно за возможные интерференционные эффекты. В их отсутствие — из-за неточной плоскопараллельности поверхностей или из-за некохроматичности света — имеем

$$T = \frac{(1 - R)^2 [1 + (\kappa/n)^2]}{\exp(\gamma d) - R^2 \exp(-\gamma d)}. \quad (8.5)$$

В отсутствие межзонного поглощения света, т. е. при $\hbar\omega < E_g$, возможна ситуация слабого поглощения волн достаточно большой частоты. Именно, пусть $2\pi\gamma\lambda \ll 1$ и

$$\omega^2 \gg \omega_{pl}^2 = 4\pi n e^2 / \epsilon_0 m_{opt}. \quad (8.6)$$

В фигурирующую здесь плазменную частоту ω_{pl} входит та же комбинация эффективных масс эллипсоидального закона дисперсии, что и в проводимость. Именно, в случае закона дисперсии (1.3г)

$$\frac{1}{m_{opt}} = \frac{1}{3} \sum_{i=x,y,z} \frac{1}{m_i}. \quad (8.7)$$

В этой ситуации, пренебрегая еще и решеточным поглощением, т. е. считая, что $\text{Im} \epsilon_0 = 0$, имеем

$$\gamma = 4\pi \text{Re} \sigma(\omega) / c \sqrt{\epsilon_0}. \quad (8.8)$$

При прямых разрешенных переходах коэффициент поглощения света γ дается выражением

$$\gamma = \frac{2(2\pi)^2 e^2 |P_{cr}|^2}{3c m_0^2 \omega \epsilon_1^{1/2}} \rho_{комб}(\omega). \quad (8.9)$$

Здесь c — скорость света в вакууме, ϵ_1 — вещественная часть диэлектрической проницаемости на частоте ω , ρ_{cv} — матричный элемент оператора импульса, связывающий состояния с одинаковым квазиволновым вектором в валентной зоне и зоне проводимости; обычно он предполагается постоянным во всей интересующей нас области энергий электронов в обеих зонах (для разрешенных переходов). Через $\rho_{\text{комб}}(\omega)$ обозначена комбинированная плотность состояний

$$\rho_{\text{комб}}(\omega) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int \delta[E_c(\mathbf{k}) - E_v(\mathbf{k}) - \hbar\omega] d\mathbf{k}. \quad (8.10)$$

В простейшем случае, когда законы дисперсии в зонах проводимости и валентной имеют простой параболический вид

$$E_c(\mathbf{k}) = E_c + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n}, \quad E_v(\mathbf{k}) = E_v - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_p}, \quad (8.11)$$

вычисление интеграла *) в формуле (8.10) дает

$$\rho_{\text{комб}}(\omega) = m_r^{3/2} [2(\hbar\omega - E_g)]^{1/2} / \pi^2 \hbar^3, \quad (8.12)$$

$$m_r^{-1} = m_n^{-1} + m_p^{-1}. \quad (8.13)$$

154. При отражении света с $\lambda = 100$ мкм толстым полупроводниковым образцом коэффициент отражения $R = 0,36$. Коэффициент пропускания пленки из того же материала толщиной $d = 1$ мм равен $T = 0,17$. Найти коэффициент поглощения γ .

155. Найти величины квазиволновых векторов электрона и дырки, рождаемых при поглощении кванта света $\hbar\omega$ в прямозонном полупроводнике с параболическими изотропными законами дисперсии. Оценить степень непертикальности перехода, сравнив результат с величиной волнового вектора \mathbf{q} поглощенного фотона. Принять $E_g =$

*) Для вычисления интеграла удобно ввести полярные координаты в \mathbf{k} -пространстве, а затем воспользоваться формулой интегрирования с δ -функцией:

$$\int_a^b f(x) \delta[\varphi(x)] dx = \sum_i f(x_i) / |\varphi'(x_i)|,$$

где $f(x)$ — произвольная непрерывная функция, а $\varphi(x)$ — дифференцируемая функция, имеющая только простые нули x_i , $a < x_i < b$; пределы a и b могут быть и бесконечными.

$= 0,3$ эВ, эффективные массы $m_n = m_p = 0,4m_0$, $\hbar\omega = 0,31$ эВ, показатель преломления $n = 4$.

156. Решить задачу, аналогичную предыдущей, но взять $\hbar\omega = 0,20$ эВ, $n = 3,3$, $E_g = 0,18$ эВ и считать закон дисперсии кейновским (1.3ж) с $m(0) = 0,015m_0$.

157. Определить энергии частиц, рождающихся при поглощении кванта света $\hbar\omega > E_g$ в полупроводнике с вырожденной валентной зоной. Законы дисперсии считать параболическими и изотропными с эффективной массой электронов $m_n = 0,05m_0$ и эффективными массами легких и тяжелых дырок $m_{pl} = 0,12m_0$ и $m_{ph} = 0,5m_0$ соответственно. Принять $E_g = 1,43$ эВ, $\hbar\omega = 1,5$ эВ.

158*. Вычислить комбинированную плотность состояний для зоны проводимости и зоны легких дырок, описываемых законом дисперсии (1.3ж).

159*. Вычислить комбинированную плотность состояний для зоны проводимости и зоны тяжелых дырок, описываемых формулами (1.3ж) (при знаке «+») и (1.3з) (считать $m_0 \gg m(0)$ и $\hbar\omega - E_g \ll E_g m_0 / m(0)$). Полученный результат сравнить с ответом предыдущей задачи.

Глава 1

СТАТИСТИКА ЭЛЕКТРОНОВ
И ДЫРОК В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

1. Из условия нейтральности $n = p$ в невырожденном случае имеем

$$2(m_n kT/2\pi\hbar^2)^{3/2} \exp[(F - E_c)/kT] = \\ = 2(m_p kT/2\pi\hbar^2)^{3/2} \exp[(E_v - F)/kT].$$

Отсюда

$$\exp[(2F - E_c + E_v)/kT] = (m_p/m_n)^{3/2},$$

и, следовательно,

$$F = 1/2(E_c + E_v) + 3/4 kT \ln(m_p/m_n).$$

Концентрация электронов равна

$$n_i = \sqrt{n p} = 2 [(m_n m_p)^{1/2} kT/2\pi\hbar^2]^{3/2} \exp[(E_v - E_c)/2kT].$$

Полагая $E_c - E_v = E_g = \Delta - \xi T$, находим, что отношение концентраций при 300 К и при 200 К равно

$$\frac{n_{300}}{n_{200}} = \left(\frac{300}{200}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{\Delta}{2k} \left(\frac{1}{300} - \frac{1}{200}\right)\right] = 3,6 \cdot 10^3.$$

2. С учетом температурного изменения ширины запрещенной зоны концентрация в собственном полупроводнике равна

$$n = 2(\sqrt{m_p m_n} kT/2\pi\hbar^2)^{3/2} \exp(\xi/2k) \exp(-\Delta/2kT),$$

где $E_g = \Delta - \xi T$. Отсюда получаем

$$2(\sqrt{m_n m_p} k/2\pi\hbar^2)^{3/2} \exp(\xi/2k) = n T^{-3/2} \exp(\Delta/2kT),$$

и, следовательно,

$$\frac{m_n m_p}{m_0^2} = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{kT}\right)^2 \left(\frac{n}{2}\right)^{2/3} \frac{1}{m_0^2} \exp\left(\frac{2\Delta}{3kT} - \frac{2\xi}{3k}\right) = 0,21,$$

3. Отношение концентраций при температурах T_1 и T_2 равно (см. задачу 1)

$$\frac{n_1}{n_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{\Delta}{2k} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right]$$

($E_g = \Delta - \xi T$). Отсюда

$$\Delta = 2kT_1T_2(T_1 - T_2)^{-1} \ln(n_1T_2^{3/2}/n_2T_1^{3/2}).$$

Для наших условий $\Delta = 0,26$ эВ.

4. Концентрация электронов равна

$$\begin{aligned} n &= \frac{2Q}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \left\{ 1 + \exp \left[\beta \left(E_c - F + \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m_{\pm}} + \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m_{\pm}} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_{\parallel}} \right) \right] \right\}^{-1} = \frac{2Q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\hbar^3} (8m_{\perp}^2 m_{\parallel})^{1/2} (kT)^{3/2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \{ 1 + \exp[\beta(E_c - F + x^2 + y^2 + z^2)] \}^{-1} dx dy dz = \\ &= \frac{4\pi Q}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi_{1/2}[\beta(F - E_c)] (8m_{\perp}^2 m_{\parallel})^{1/2} (kT)^{3/2} = \\ &= 2 \left(\frac{m_{dn} kT}{2\pi\hbar^3} \right)^{3/2} \Phi_{1/2}[\beta(F - E_c)]. \end{aligned}$$

Здесь Q — число эквивалентных минимумов зоны проводимости, $\beta = 1/kT$.

Результат интегрирования по \mathbf{k} не зависит от выбора пределов интегрирования, если эти пределы лежат вне области занятых состояний. Это имеет место в большинстве практически интересных случаев, поэтому мы не совершаем ошибку, выполняя интегрирование по \mathbf{k} в бесконечных пределах.

Таким образом, для эффективной массы плотности состояний имеем

$$m_{dn} = Q^{2/3} (m_{\perp}^2 m_{\parallel})^{1/3}.$$

В Ge имеем $m_{dn} = 0,553m_0$; в Si $m_{dn} = 1,06m_0$.

5. Разложим закон дисперсии (1.3д) по δ и ограничимся членами, линейными по δ :

$$E_p(\mathbf{k}) = E_v - (\hbar^2 k^2 / 2m_{\pm}) [1 \pm 3\delta B' \psi(\theta, \varphi) / (A \pm B')].$$

Здесь $m_{\pm} = m_0 (A \pm B')^{-1}$, $\psi(\theta, \varphi) = \sin^4 \theta \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \frac{1}{6}$, θ и φ — углы сферических координат

вектора \mathbf{k} . Концентрация дырок в этом приближении равна

$$\begin{aligned}
 P_{1,2} &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty k^2 dk \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \times \\
 &\times \left\{ 1 + \exp \left[\frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\pm} kT} \left(1 \pm \frac{3\delta B'}{A \pm B'} \psi(\theta, \varphi) \right) - \eta \right] \right\}^{-1} = \\
 &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk \left\{ \left[1 + \exp \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\pm} kT} - \eta \right) \right]^{-1} \pm \frac{3\delta B'}{A \pm B'} \times \right. \\
 &\times k^2 \frac{\partial}{\partial k^2} \left[1 + \exp \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\pm} kT} - \eta \right) \right]^{-1} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \psi(\theta, \varphi) \left. \right\} = \\
 &= N_{v_{1,2}} \Phi_{1/2}(\eta),
 \end{aligned}$$

где индекс «1» относится к зоне «легких» дырок, индекс «2» — к зоне «тяжелых» дырок, величины $N_{v_{1,2}}$ определены как

$$N_{v_{1,2}} = 2 (m_{dp_{1,2}} kT / 2\pi \hbar^2)^{3/2},$$

а эффективные массы плотности состояний

$$m_{dp_{1,2}} = m_{\pm} \left[1 \mp \frac{\delta B'}{10(A \pm B')} \right].$$

Отсюда получаем для искоемых эффективных масс $m_{dp_1} = 0,042m_0$, $m_{dp_2} = 0,33m_0$. Более точный расчет с учетом членов следующих порядков приводит к несколько большему значению эффективной массы «тяжелых» дырок, $m_{dp_2} = 0,35m_0$. Полная эффективная масса плотности состояний валентной зоны германия при этом равна

$$m_{dp} = (m_{dp_1}^{3/2} + m_{dp_2}^{3/2})^{2/3} = 0,36m_0.$$

6. Доля «легких» дырок в полной концентрации дырок равна

$$\frac{p_1}{p} = \frac{N_{v_1}}{N_{v_1} + N_{v_2}} = \left(\frac{m_{dp_1}}{m_{dp}} \right)^{3/2} = 0,04.$$

Таким образом, «легкие» дырки в германии составляют лишь около 4% всех свободных дырок.

7. Как показано в решении задачи 1,

$$n_i = 2(\sqrt{m_n m_p} kT / 2\pi \hbar^2)^{3/2} \exp(-E_g / 2kT).$$

Подставляя значения эффективных масс и ширины запрещенной зоны, указанные в условии задачи, получаем

$$\text{Ge: } n_i = 2,2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3},$$

$$\text{Si: } n_i = 1,05 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}.$$

8. $\rho = [en_i(\mu_n + \mu_p)]^{-1} = [en_i\mu_n(1 + 1/b)]^{-1}$. Подставляя числа, указанные в условии задачи, получаем

$$\text{Ge: } \rho \approx 50 \text{ Ом} \cdot \text{см},$$

$$\text{Si: } \rho \approx 3,1 \cdot 10^5 \text{ Ом} \cdot \text{см}.$$

9. Из условия нейтральности получаем

$$N_c \Phi_{1,2}(\eta) = N_v \exp[(E_v - F)/kT],$$

поскольку газ дырок в валентной зоне можно считать невырожденным из-за большей величины эффективной массы. Полагая $\eta = (F - E_c)/kT < 1,3$ и используя формулу (П.4)

$$\Phi_{1/2}(\eta) = t(1 + 0,27t)^{-1},$$

где $t = \exp \eta$, приходим к следующему уравнению для t :

$$t^2 - 0,27At - A = 0, \quad A = (m_p/m_n)^{3/2} \exp(-E_g/kT).$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$t = 0,135A + \sqrt{0,0182A^2 + A}.$$

Без учета вырождения мы получили бы результат

$$t_{\text{невыр}} = \sqrt{A}.$$

Отношение $(F - E_c)/(F - E_c)_{\text{невыр}}$ равно

$$\frac{F - E_c}{(F - E_c)_{\text{невыр}}} = \frac{\ln(0,135A + \sqrt{0,0182A^2 + A})}{\ln \sqrt{A}}.$$

Концентрация электронов, равная концентрации дырок, дается обычной формулой

$$n = p = N_c \exp(-E_g/kT) \exp(-(F - E_c)/kT).$$

При 600 К мы имеем $E_g = 9,8 \cdot 10^{-2}$ эВ, $A = 4,74$, $t = 2,91$, $t_{\text{невыр}} = 2,18$;

$$\frac{F - E_c}{(F - E_c)_{\text{невыр}}} = 1,37, \quad \frac{n}{n_{\text{невыр}}} = \frac{t_{\text{невыр}}}{t} = 0,75.$$

Отсюда

$$n = (N_v/t) \exp(-E_g/kT) = 3,3 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}.$$

10. Удельное сопротивление собственного полупроводника равно

$$\rho = [e(n\mu_n + p\mu_p)]^{-1} = (ne\mu_n)^{-1} b / (1 + b) =$$

$$= \frac{b}{2(1+b)e\mu_n} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{\sqrt{m_n m_p} kT} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{E_g}{2kT}\right).$$

При 30 К имеем $E_g = 0,773$ эВ и

$$\rho_{30} = 1,2 \cdot 10^{61} \text{ Ом} \cdot \text{см}.$$

Последнюю цифру, разумеется, нельзя принимать всерьез: в таких условиях играют роль примеси и, может, быть, иные структурные дефекты. Однако проведенная оценка показывает, сколь сильно влияет температура на сопротивление собственного полупроводника.

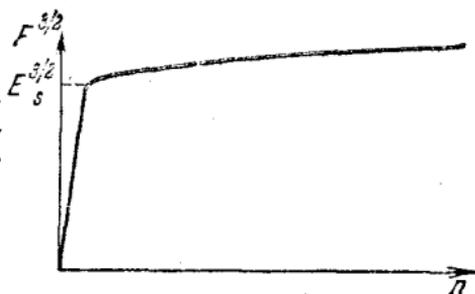


Рис. 16. Концентрационная зависимость уровня Ферми в полупроводнике с неэквивалентными минимумами зоны проводимости в условиях сильного вырождения.

11. Полная концентрация электронов равна сумме концентраций в отдельных минимумах

$$n = n_I + n_{II} = \frac{2}{(2\pi)^3} \int f(E_I(\mathbf{k})) d\mathbf{k} + \frac{2}{(2\pi)^3} \int f(E_{II}(\mathbf{k})) d\mathbf{k},$$

где $E_I(\mathbf{k}) = \hbar^2 k^2 / 2m_I$, $E_{II}(\mathbf{k}) = E_s + \hbar^2 k^2 / 2m_{II}$, а за начало отсчета энергии выбран край нижнего минимума. Отсюда находим

$$n = N_I \Phi_{1/2}(\eta) + N_{II} \Phi_{1/2}(\eta - E_s/kT),$$

где N_I и N_{II} — эффективные числа состояний в минимумах I и II. Для невырожденного случая

$$\eta = \ln [n(N_I + N_{II} \exp(-E_s/kT))^{-1}].$$

В пределе сильного вырождения имеем

$$n = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2m_I}{\hbar^2} \right)^{3/2} F^{3/2} \left[1 + \left(\frac{m_{II}}{m_I} \right)^{3/2} (1 - E_s/F)^{3/2} \theta(F - E_s) \right],$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Примерная зависимость уровня Ферми от концентрации в случае сильного вырождения приведена на рис. 16.

12. Концентрация электронов в верхнем минимуме равна

$$n_{II} = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{E_s}^{\infty} f(E_{II}(\mathbf{k})) d\mathbf{k} = N_{II} \exp\left(\frac{\eta - E_s}{kT}\right) =$$

$$= n\zeta \exp(-E_s/kT) [1 + \zeta \exp(-E_s/kT)]^{-1},$$

где $\zeta = N_{II}/N_I = (m_{II}/m_I)^{3/2} = 58$. Искомое отношение есть

$$n_{II}/n_I = n_{II}/(n - n_{II}) = \zeta \exp(-E_s/kT).$$

Подставляя сюда численные значения параметров, находим

$$\frac{n_{II}(300 \text{ K})}{n(300 \text{ K})} = 0,8 \cdot 10^{-4}, \quad \frac{n_{II}(1000 \text{ K})}{n_I(1000 \text{ K})} \approx 1.$$

13. Проводимость равна

$$\sigma = en_I\mu_I + en_{II}\mu_{II} = en_I\mu_I(1 + n_{II}\mu_{II}/n_I\mu_I) =$$

$$= en_I\mu_I [1 + \zeta(\mu_{II}/\mu_I) \exp(-E_s/kT)] [1 + \zeta \exp(-E_s/kT)]^{-1}.$$

В области $T \ll E_s/k$ имеем $\sigma \approx \sigma_0 = en_I\mu_I$, при высоких тем-

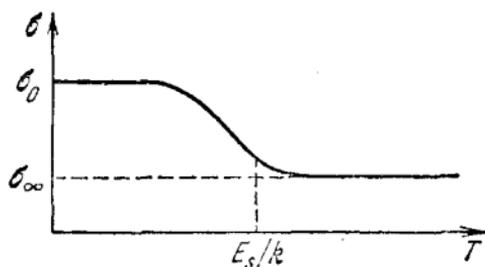


Рис. 17. Температурная зависимость проводимости полупроводника с неэквивалентными минимумами зоны проводимости (схематически).

пературах ($T \gg E_s/k$) $\sigma \approx \sigma_{\infty} = en \frac{\mu_I + \zeta\mu_{II}}{1 + \zeta}$. Примерный ход проводимости показан на рис. 17.

Искомое отношение равно

$$\sigma(1000 \text{ K})/\sigma(300 \text{ K}) \approx 0,5.$$

14. Преобразуем формулу для концентрации электронов:

$$n = \frac{2}{(2\pi)^3} \int f(E) d\mathbf{k} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} k^2 f(E) dk = \int_0^{\infty} \rho(E) f(E) dE_s,$$

где $\rho(E) = (k^2/\pi^2) dk/dE$ — плотность состояний. Выбирая за начало отсчета край зоны проводимости и выражая k^2

через E , находим

$$k^2 = \frac{1}{2a} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{8maE}{\hbar^2}} \right) \approx \frac{2mE}{\hbar^2} \left(1 + \frac{2maE}{\hbar^2} \right),$$

откуда

$$\rho(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2} \left(1 + \frac{5maE}{\hbar^2} \right).$$

Таким образом (см. (П.1)),

$$n = N_c \left[\Phi_{1/2}(\eta) + \frac{15}{2} \frac{makT}{\hbar^2} \Phi_{3/2}(\eta) \right].$$

15. Согласно формуле (1.11а), для вычисления плотности состояний надо найти якобиан $Z(E, \theta, \varphi)$. Вводя сферические координаты в \mathbf{k} -пространстве, мы получаем

$$Z(E, \theta, \varphi) = k^2 \left| \frac{dk}{dE} \right| \sin \theta. \quad (1)$$

Обозначив временно

$$2\hbar^2 E_g / m(0) = a^2, \quad (2)$$

получим, согласно (1.3ж),

$$k = (2/a) [(E - E_c)^2 + E_g(E - E_c)]^{1/2}. \quad (3)$$

Формулы (1) и (3) дают

$$Z = (4/a^3) [(E - E_c)^2 + E_g(E - E_c)]^{1/2} [2(E - E_c) + E_g] \sin \theta. \quad (4)$$

Удобно принять край зоны проводимости за начало отсчета энергии ($E_c = 0$). Тогда, подставляя выражение (4) в правую часть (1.11а), находим, с учетом формулы (2),

$$\rho_n(E) = \frac{[2m(0)]^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} E^{1/2} \left(1 + \frac{E}{E_g} \right) \left(1 + 2 \frac{E}{E_g} \right). \quad (5)$$

При $E_g \gg E$ и $m(0) = m_0$ отсюда вновь получается формула (1.11б). С другой стороны, при $E \gg E_g$ выражение (5) принимает вид

$$\rho_n(E) = [2m(0)]^{3/2} E^2 / \pi^2 \hbar^3 E_g^{3/2}. \quad (6)$$

Вспоминая, что $m(0) = 3\hbar^2 E_g / 4\mathcal{P}^2$, где \mathcal{P} — параметр, фигурирующий в формуле (1.3е), находим окончательно (при $E \gg E_g$)

$$\rho_n(E) = (3/2)^{3/2} E^2 / \pi^2 \mathcal{P}^3. \quad (6')$$

Формулы (1)–(6) не связаны с какими-либо предположениями о степени вырождения электронного газа. От этих предположений зависит лишь связь концентрации электронов с положением уровня Ферми. Обратимся сначала к невырожденному случаю.

Пользуясь формулами (1.13) и (5), получаем для модели Кейна:

$$N_c = \{ [2m(0)]^{3/2} (kT)^3 / \pi^2 \hbar^3 E_g^{3/2} \} \times \\ \times \int_0^\infty \sqrt{x} \exp(-x) (x + E_g/kT)^{1/2} (x + E_g/2kT) dx. \quad (7)$$

В общем случае значения интеграла в правой части (7) приходится находить численно. В предельном случае $E_g \gg kT$ получается прежний результат (1.6) (при $m_n = m(0)$). С другой стороны, при $E_g \ll kT$ мы имеем

$$N_c = 2 [2m(0)]^{3/2} (kT)^3 / \pi^2 \hbar^3 E_g^{3/2}. \quad (8)$$

Сравнивая это выражение с формулой (1.9), находим эффективную массу плотности состояний в зоне проводимости с законом дисперсии (1.3ж) при $E_g \ll kT$:

$$m_{dn} = \frac{4}{\pi^{1/3}} \frac{kT}{E_g} m(0) = \frac{3\hbar^2 kT}{\pi^{1/3} \mathcal{P}^2}. \quad (9)$$

В условиях полного вырождения концентрации электронов дается формулой (по-прежнему при $E_c = 0$)

$$n = \int_0^F \rho_n(E) dE = \frac{1}{3\pi^2} \left[\frac{2m(0)}{\hbar^2} \right]^{3/2} F^{3/2} \left(1 + \frac{F}{E_g} \right)^{3/2}. \quad (10)$$

При $E_g \gg F$ и $m(0) = m_n$ отсюда получается результат, справедливый для квадратичного изотропного закона дисперсии:

$$n = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2m_n F}{\hbar^2} \right)^{3/2}.$$

16. Используя результат предыдущей задачи, находим

$$m_{dn} = m(0) (1 + F/E_g).$$

Выражая F через концентрацию, приходим к следующему выражению для m_{dn} :

$$m_{dn} = \frac{m(0)}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2\hbar^2}{m(0) E_g} (3\pi^2 n)^{2/3}} \right].$$

Эффективная масса m^* для закона дисперсии (1.3ж) равна

$$m^* = \hbar^2 k \left. \frac{dk}{dE} \right|_{E=F} = m(0) \left(1 + \frac{2F}{E_g} \right) = m(0) \sqrt{1 + \frac{2\hbar^2}{m(0)E_g} (3\pi^2 n)^{2/3}}.$$

Найденные массы связаны соотношением

$$m_{dn} = (m(0) + m^*)/2.$$

Для квадратичного закона дисперсии $m_{dn} = m^* = m(0)$.

17. Из условия нейтральности $n = p + N_d^+$ при $p \ll n$ получаем

$$N_c \exp \eta = N_d \{ 1 + g_d \exp \eta \cdot \exp [(E_c - E_d)/kT] \}^{-1}.$$

Решение полученного уравнения, квадратичного относительно $\exp \eta$, дает

$$\exp \eta = (2g_d)^{-1} \exp [-(E_c - E_d)/kT] \times \{ [1 + 4(N_d g_d / N_c) \exp ((E_c - E_d)/kT)]^{1/2} - 1 \},$$

откуда

$$F = E_d + kT \ln \{ (2g_d)^{-1} \{ [1 + 4(N_d g_d / N_c) \exp ((E_c - E_d)/kT)]^{1/2} - 1 \} \}.$$

При $T \rightarrow 0$ имеем $N_c \ll N_d \exp [(E_c - E_d)/kT]$ и

$$F = (E_c + E_d)/2 + (kT/2) \ln [N_d g_d / N_c(T)].$$

При более высоких температурах, когда $N_c \gg N_d \exp [(E_c - E_d)/kT]$, получаем

$$F = E_c - kT \ln (N_c / N_d).$$

Таким образом, при повышении температуры уровень Ферми сначала возрастает от $(E_c + E_d)/2$, а затем, пройдя через максимум, начинает почти линейно убывать с температурой до тех пор, пока концентрация дырок не станет заметной. Примерный ход уровня Ферми показан на рис. 18.

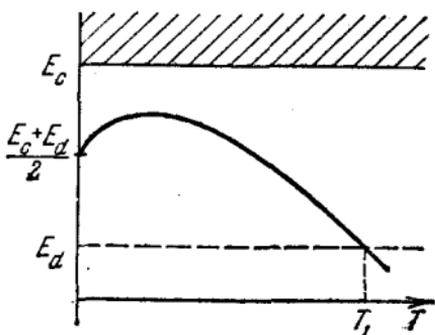


Рис. 18. Температурная зависимость уровня Ферми примесного полупроводника.

18. Из решения предыдущей задачи видно, что уровень Ферми совпадает с

уровнем примеси, когда

$$(1/2g_d)\{(1 + 4(g_d N_d/N_c(T_1)) \exp[(E_c - E_d)/kT])^{1/2} - 1\} = 1$$

(см. рис. 18). Это происходит при температуре, определяемой уравнением

$$kT_1 = (E_c - E_d) [\ln \{N_c(T_1)/4g_d N_d\} [(2g_d + 1)^2 - 1]]^{-1}.$$

Обозначив $kT_0 = E_c - E_d$ и $y = T_0/T_1$, получим

$$y = \ln [N_c(T_0)/N_d] + \ln \{[(2g_d + 1)^2 - 1]/4g_d\} - (3/2) \ln y.$$

Для рассматриваемого случая

$$T_0 = 116 \text{ К}, \quad N_c(T_0) = 2,5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}.$$

Таким образом, уравнение имеет вид

$$y = 6,62 - 1,5 \ln y.$$

Его решение есть $y = 4,4$, следовательно, $T_1 = 26,2 \text{ К}$.

Концентрация электронов при этой температуре равна

$$n = N_c(T_0) y^{-3/2} \exp(-y) = 3,3 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}.$$

19. Из условия нейтральности $n = N_d^+$ получаем уравнение для концентрации электронов

$$n^2 + nn_d/g_d - n_d N_d/g_d = 0, \quad n_d = N_c \exp[(E_d - E_c)/kT],$$

откуда

$$n = (2g_d)^{-1} [(n_d^2 + 4g_d n_d N_d)^{1/2} - n_d].$$

При низких температурах (когда $n_d \ll 4g_d N_d$)

$$n = (n_d N_d/g_d)^{1/2} = (N_d N_c/g_d)^{1/2} \exp[(E_d - E_c)/2kT].$$

Если же $n_d \gg 4g_d N_d$, то $n = N_d$.

При 300 К в Ge имеем $n_d(300 \text{ К}) = 7 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$, $4g_d N_d = 1,6 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$.

Таким образом, $n_d \gg 4g_d N_d$ и

$$n = N_d = 2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}.$$

20. Нижняя температурная граница определяется неравенством

$$n_d \gg 4g_d N_d, \quad n_d = N_c \exp[(E_d - E_c)/kT]$$

и находится из условия

$$N_c(T_1) \exp[(E_d - E_c)/kT_1] = 4g_d N_d.$$

Отсюда

$$T_1 = (E_c - E_d)/k \ln [N_c(T_1)/4g_d N_d].$$

Верхняя температурная граница определяется требова-

нием, чтобы собственные концентрации были малы по сравнению с примесными

$$n_i \ll n.$$

Поэтому верхнюю границу найдем из уравнения

$$N_d = N_c \exp[-(E_c - E_v)/2kT], \quad E_c - E_v = \Delta - \xi T.$$

Она равна

$$T_2 = (\Delta/2k) [\ln [N_c(T_2)/N_d] + \xi/2k]^{-1}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} T'_0 &= (E_c - E_d)/k, & T''_0 &= \Delta/2k, \\ y_1 &= T'_0/T_1, & y_2 &= T''_0/T_2. \end{aligned}$$

Тогда для определения границ имеем два уравнения:

$$\begin{aligned} y_1 &= \ln [N_c(T'_0)/4g_d N_d] - (3/2) \ln y_1, \\ y_2 &= \ln [N_c(T''_0)/N_d] - (3/2) \ln y_2 + \xi/2k. \end{aligned}$$

Для германия эти уравнения приобретают вид

$$y_1 = 5,05 - 1,5 \ln y_1, \quad y_2 = 14,93 - 1,5 \ln y_2,$$

поскольку *)

$$\begin{aligned} T'_0 &= 116 \text{ К}, & T''_0 &= 4,5 \cdot 10^3 \text{ К}, \\ N_c(T'_0) &= 2,5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}, & N_c(T''_0) &= 6,0 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}. \end{aligned}$$

Из этих уравнений получаем

$$\begin{aligned} y_1 &= 3,27, & y_2 &= 11,29, \\ T_1 &= 35 \text{ К}, & T_2 &= 400 \text{ К}. \end{aligned}$$

21. Аналогично решению предыдущей задачи для InSb имеем

$$\begin{aligned} \Delta &= 0,026 \text{ эВ}, & \xi &= 2,7 \cdot 10^{-4} \text{ эВ} \cdot \text{К}^{-1}, \\ T'_0 &= 11,6 \text{ К}, & T''_0 &= 1510 \text{ К}, \\ N_c(T'_0) &= 3,5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}, & N_c(T''_0) &= 5,2 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем уравнения

$$y_1 = -3,82 - 1,5 \ln y_1, \quad y_2 = 7,13 - 1,5 \ln y_2.$$

*) Разумеется, температура T''_0 имеет лишь чисто формальный смысл.

и окончательный ответ имеет вид

$$y_1 = 0,078, \quad y_2 = 4,78, \\ T_1 = 149 \text{ K}, \quad T_2 = 316 \text{ K}.$$

22. Условие нейтральности записывается обычным образом:

$$N_c \Phi_{1/2}(\eta) = N_d \{1 + g_d \exp[(F - E_d)/kT]\}^{-1}, \\ \eta = (F - E_c)/kT,$$

а для интеграла Ферми можно использовать приближенное выражение (П. 4)

$$\Phi_{1/2}(\eta) \approx e^\eta (1 + 0,27e^\eta)^{-1}.$$

В результате приходим к уравнению

$$\exp 2\eta + g_d^{-1} (1 - 0,27N_d/N_c) \exp[-(E_c - E_d)/kT] \exp \eta - \\ - (N_d/g_d N_c) \exp[-(E_c - E_d)/kT] = 0,$$

решение которого имеет вид

$$\exp \eta = \exp[-(E_c - E_d)/kT] \cdot \left[\{(4g_d^2)^{-1} (1 - 0,27N_d/N_c)^2 + \right. \\ \left. + (N_d/g_d N_c) \exp[(E_c - E_d)/kT]\}^{1/2} - (2g_d)^{-1} (1 - 0,27N_d/N_c) \right].$$

Отсюда

$$F - E_d = kT \ln \left[\{(4g_d^2)^{-1} (1 - 0,27N_d/N_c)^2 + \right. \\ \left. + (N_d/g_d N_c) \exp[(E_c - E_d)/kT]\}^{1/2} - (2g_d)^{-1} (1 - 0,27N_d/N_c) \right].$$

При $T \rightarrow 0$ справедливо неравенство

$$(0,27)^2 N_d / 4g_d N_c \ll \exp[(E_c - E_d)/kT],$$

поэтому

$$F = (E_c + E_d)/2 + (kT/2) \ln(N_d/g_d N_c).$$

Если концентрация достаточно велика, уровень Ферми может в определенном интервале температур попасть в зону проводимости. Условие

$$y = [(4g_d^2)^{-1} \{1 - 0,27N_d (\ln y)^{3/2} / N_c(T_0)\}^2 + \\ + N_d y (\ln y)^{3/2} / g_d N_c(T_0)]^{1/2} - \\ - (2g_d)^{-1} [1 - 0,27N_d (\ln y)^{3/2} / N_c(T_0)] \quad (1)$$

определяет температуру, для которой уровень Ферми совпадает с дном зоны проводимости. Мы ввели здесь обозначения

$$y = \exp[(E_c - E_d)/kT], \quad T_0 = (E_c - E_d)/k.$$

При малых концентрациях доноров уравнение (1) вообще не имеет корней, и в этом случае уровень Ферми не попадает в зону.

Исследование уравнения (1) удобнее проводить, переписав его в виде

$$y = -g_d^{-1} + \lambda (\ln y)^{3/2}, \quad (2)$$

где $\lambda = 1,27N_d/g_dN_c(T_0)$ — параметр, пропорциональный концентрации доноров. Примерный ход кривых, описы-

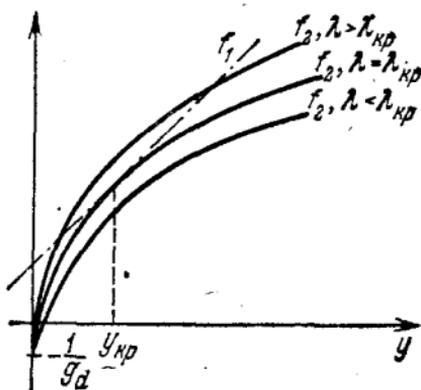


Рис. 19. К определению критических значений температуры и концентрации примеси, при которых уровень Ферми попадает в зону проводимости.

ваемых левой и правой частями уравнения (2), при различных значениях параметра λ показан на рис. 19, где $f_1(y) = y$, а $f_2(y) = \lambda (\ln y)^{3/2} - g_d^{-1}$. Из рисунка видно, что при концентрациях примеси, меньших некоторой критической концентрации N_d^{KP} , уровень Ферми не попадает в зону проводимости ни при каких температурах. При концентрациях, больших критической, имеются две точки пересечения кривой, описываемой правой частью уравнения (2), с прямой, заданной его левой частью; этим точкам пересечения соответствуют две температуры, ограничивающие интервал, в котором уровень Ферми расположен в зоне проводимости. Совместное решение уравнения (2) и уравнения

$$1 = (3\lambda/2) (\ln y)^{1/2}/y \quad (3)$$

определяет критическую температуру T^{KP} и критическую концентрацию доноров, соответствующую касанию дна зоны проводимости уровнем Ферми. Подставляя величину λ из уравнения (3) в уравнение (2), получаем уравнение для определения критической температуры:

$$y = -g_d^{-1} + \frac{2}{3} y \ln y.$$

При $g_d = 2$ решение последнего уравнения есть $y^{KP} = 5,2$.

Таким образом, в германии (см. задачу 20)

$$y^{\text{кр}} = \exp(T_0/T^{\text{кр}}) = 5,2,$$

$$T^{\text{кр}} = T_0/\ln 5,2 = 116 \text{ K}/1,65 = 70 \text{ K};$$

$$N_d^{\text{кр}} = \frac{2g_d}{3} \frac{y^{\text{кр}}}{(\ln y^{\text{кр}})^{1/2}} \frac{N_c(T_0)}{1,27} \approx 10^{19} \text{ см}^{-3}.$$

Для InSb получаем (см. задачу 21)

$$T^{\text{кр}} = 11,6/1,65 = 7 \text{ K}, \quad N_d^{\text{кр}} \approx 1,5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}.$$

23. Оценим границы температурного интервала, в котором концентрация дырок постоянна и равна N_a . Как и в задаче 20, нужно решить уравнения

$$y_1 = \ln [N_v(T'_0)/4g_a N_a] - 3y_1/2,$$

$$y_2 = \ln [N_v(T''_0)/N_a] - 3y_2/2 + \xi/2k.$$

Для кремния

$$\Delta = 1,21 \text{ эВ}, \quad \xi = 2,8 \cdot 10^{-4} \text{ эВ} \cdot \text{K}^{-1};$$

$$T'_0 = (E_a - E_v)/k = 520 \text{ K}, \quad T''_0 = \Delta/2k = 7020 \text{ K};$$

$$N_v(T'_0) = 2,6 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}, \quad N_v(T''_0) = 1,3 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-3}.$$

При этом уравнения принимают вид

$$y_1 = 4,18 - 1,5 \ln y_1, \quad y_2 = 11,09 - 1,5 \ln y_2.$$

Их решения таковы:

$$y_1 = 2,69, \quad y_2 = 7,98;$$

$$T_1 = 194 \text{ K}, \quad T_2 = 879 \text{ K}.$$

Таким образом, при комнатной температуре $p = N_a = 10^{17} \text{ см}^{-3}$. Удельное сопротивление материала равно

$$\rho = (pe\mu_p)^{-1} = 0,62 \text{ Ом} \cdot \text{см}.$$

При 30 K концентрация дырок есть

$$p = (N_a N_v / g_a)^{1/2} \exp[-(E_a - E_v)/2kT] = 3,2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}.$$

24. В примесной области концентрация свободных дырок мала, а уровень Ферми лежит в верхней половине запрещенной зоны, так что

$$N_a^- = N_a \{1 + g_a \exp[(E_a - F)/kT]\}^{-1} \approx N_a.$$

Поэтому уравнение нейтральности имеет вид

$$n + N_a = N_d [1 + g_a n/n_d]^{-1},$$

где $n_d = N_c \exp[(E_d - E_c)/kT]$. Отсюда

$$n = (2g_d)^{-1} \left\{ [n_d^2 + 2g_d(2N_d - N_a)n_d + g_d^2 N_a^2]^{1/2} - (n_d + g_d N_a) \right\}.$$

При низких температурах (когда $n_d \ll N_a$)

$$n = (N_c/g_d) (N_d/N_a - 1) \exp[-(E_c - E_d)/kT],$$

и, следовательно, искомая энергия активации равна $E_c - E_d$.

25. Из результата предыдущей задачи, считая, что

$$2g_d(N_d - N_a)n_d/(n_d + g_d N_a)^2 \ll 1,$$

получаем

$$n = \frac{n_d(N_d - N_a)}{n_d + g_d N_a} = \frac{N_d - N_a}{1 + g_d N_a/n_d}.$$

26. При 25 К имеем $N_c = 2,5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$, а $n_d = 2,4 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$. Таким образом,

$$\frac{2g_d n_d (N_d - N_a)}{(n_d + g_d N_a)^2} = 0,2,$$

и можно применить результат предыдущей задачи:

$$n \approx \frac{N_d - N_a}{1 + g_d N_a/n_d} = 1,1 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}.$$

27. В области низких температур, $T < T_1$, и в области высоких температур, $T > T_2$, зависимость $\ln n$ от темпе-

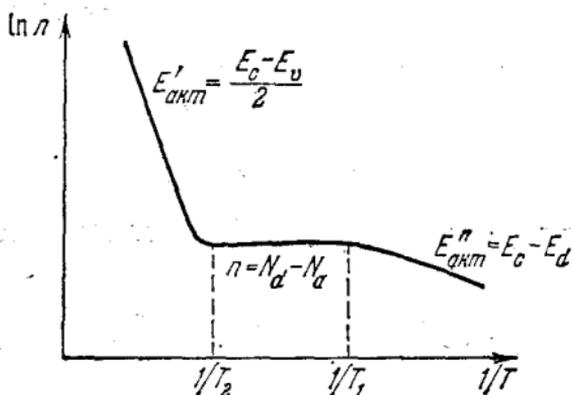


Рис. 20. Температурная зависимость концентрации частично компенсированного полупроводника.

ратуры имеет вид $\ln n = \text{const} - E_{\text{акт}}/kT$, где $E_{\text{акт}}$ — соответствующая энергия активации (рис. 20). В интервале $T_1 < T < T_2$ концентрация электронов практически не изменяется и равна $N_d - N_a$.

28. Нижняя граница области определяется из условия

$$(N_c/g_d)(N_d/N_a - 1) \exp[-(E_c - E_d)/kT_1] = N_d - N_a,$$

определяющего точку пересечения плато, соответствующего $n = N_d - N_a$, и продолжения низкотемпературного участка кривой зависимости $\ln n$ от $1/T$. Отсюда

$$T_1 = (E_c - E_d)/k \ln [N_c(T_1)/g_d N_a].$$

Верхняя граница определяется собственной концентрацией электронов:

$$n = N_c \exp[-(E_c - E_v)/2kT_2] = N_d - N_a,$$

так что

$$T_2 = (\Delta/2k) \{ \ln [N_c(T_2)/(N_d - N_a)] + \xi/2k \}^{-1}.$$

Для кремния с мышьяком и алюминием имеем

$$E_c - E_v = \Delta - \xi T = (1,21 - 2,8 \cdot 10^{-4} T) \text{ эВ},$$

$$T'_0 = (E_c - E_d)/k \approx 580 \text{ К}, \quad y_1 = T'_0/T_{1\tau}$$

$$T''_0 = \Delta/2k \approx 7,02 \cdot 10^3 \text{ К}, \quad y_2 = T''_0/T_{2\tau}.$$

Используя заданные значения параметров, приведем уравнения к виду

$$y_1 = \ln [N_c(T'_0)/g_d N_a] - (3 \ln y_1)/2 = 10,3 - 1,5 \ln y_{1\tau}$$

$$y_2 = \ln [N_c(T''_0)/(N_d - N_a)] + \xi/2k - (3/2) \ln y_2 = \\ = 16,8 - 1,5 \ln y_{2\tau}.$$

Решения этих уравнений таковы:

$$y_1 = 7,32, \quad y_2 = 12,96;$$

$$T_1 = 79 \text{ К}, \quad T_2 = 542 \text{ К}.$$

29. В случае одинаковых эффективных масс мы получаем

$$Z(E, \varphi) = k \frac{dk}{dE} = \left[2m_n \frac{(E - E_c)}{\hbar^2} \right]^{1/2} \nu$$

и согласно (1.25а)

$$\rho_n(E) = m_n/\pi\hbar^2.$$

Случай неравных эффективных масс приводится к предыдущему, если ввести новые переменные, полагая

$$k_x = m_x^{1/2} u_x, \quad k_y = m_y^{1/2} u_y.$$

Тогда $E_n(u) = E_c + \hbar^2(u_x^2 + u_y^2)/2$ и $\rho_n(E) = (m_x m_y)^{1/2} / \pi \hbar^2$. Отметим, что в двумерной системе с параболическим спектром плотность состояний не зависит от энергии.

30. Согласно результату предыдущей задачи концентрация электронов дается выражением

$$n = (m/\pi \hbar^2) \int_{E_c}^{\infty} f_n(E) dE,$$

где f_n есть функция Ферми,

$$f_n = \{1 + \exp[(E - F)/kT]\}^{-1}.$$

Вычисление интеграла дает

$$n = (mkT/\pi \hbar^2) \ln \{1 + \exp[(F - E_c)/kT]\}.$$

В отсутствие вырождения $F - E_c < 0$ и $|F - E_c|/kT \gg 1$; при этом

$$n = (mkT/\pi \hbar^2) \exp[(F - E_c)/kT],$$

и, следовательно,

$$N_c = mkT/\pi \hbar^2.$$

При $T = 300$ К и $m = m_0$ это дает $N_c \approx 0,98 \cdot 10^{13}$ см⁻².

31. Согласно (1.27) мы получаем

$$\rho_n(E) = (\sqrt{m}/\pi \hbar \sqrt{2}) (E - E_c)^{-1/2}.$$

При этом в отсутствие вырождения

$$n = \frac{\sqrt{2m}}{2\pi \hbar} \int_{E_c}^{\infty} (E - E_c)^{-1/2} \exp \frac{F - E}{kT} dE.$$

Вычисляя интеграл, получаем

$$n = (1/\hbar) \sqrt{mkT/2\pi} \exp[(F - E_c)/kT],$$

т. е.

$$N_c = (1/\hbar) \sqrt{mkT/2\pi}.$$

32. С учетом соотношения $N = N_0 + N_1 + N_2$ из (1.31a) получаем

$$N_0 = g_0 N z^{-1},$$

$$N_1 = g_1 N z^{-1} \exp[(F - E_1)/kT],$$

$$N_2 = g_2 N z^{-1} \exp[(2F - 2E_1 - U)/kT],$$

где

$$z = g_0 + g_1 \exp[(F - E_1)/kT] + g_2 \exp[(2F - 2E_1 - U)/kT].$$

При $F < E_1$, $E_1 - F \gg kT$ имеем $N_0 \approx N$, $N_1 \approx N_2 \approx 0$, при $E_1 < F < E_1 + U$ и $F - E_1$, $E_1 + U - F \gg kT$ получаем $N_1 \approx N$, $N_0 \approx N_2 \approx 0$, а при $F > E_1 + U$, $F - E_1 - U \gg kT$

почти все центры заполнены двукратно, $N_0 \approx N_1 \approx 0$, $N_2 \approx N$.

Зависимости концентраций N_0 , N_1 и N_2 от положения уровня Ферми схематически представлены на рис. 21.

33. Примесный центр может находиться в трех зарядовых состояниях: $+e$, 0 и $-e$, которые отвечают заполнению центра 0, 1 или 2 электронами. Соответственно $N^+ = N_0$, $N^0 = N_1$ и $N^- = N_2$, где N_0 , N_1 и N_2 даются выражениями, полученными в предыдущей задаче. Положение уровня Ферми определяется из условия нейтральности

$$N^+ = N^-$$

откуда следует, что

$$g_0 = g_2 \times \exp[(2F - E_a - E_d)/kT] \\ (E_a = E_1, E_d = E_1 + U),$$

или

$$F = (E_a + E_d)/2 + (kT/2) \ln(g_0/g_2).$$

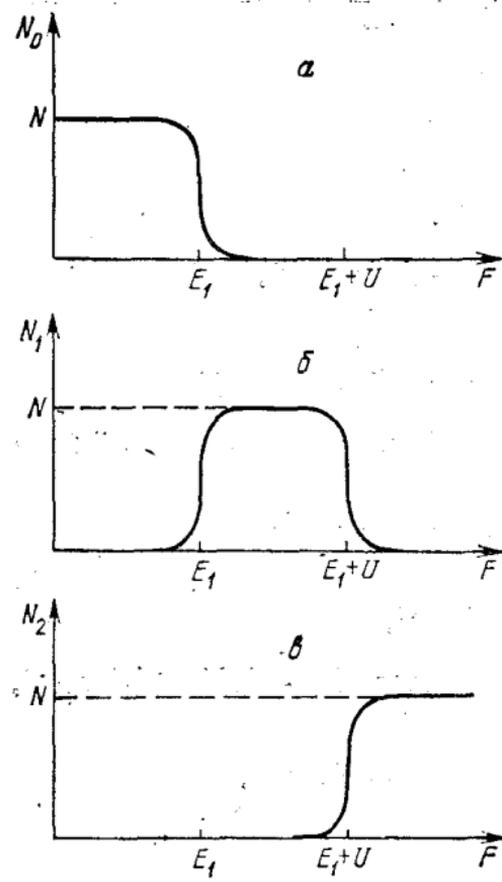


Рис. 21. Зависимость концентраций пустых (а), одно- (б) и двукратно- (в) заполненных центров от положения уровня Ферми при низких температурах (схематически).

Видно, что при $g_0 = g_2$ уровень Ферми расположен посередине между уровнями примеси и не зависит от температуры. При $g_0 \neq g_2$ имеется слабая температурная зависимость уровня Ферми.

34. В условиях полного истощения доноров уравнение нейтральности имеет вид

$$N_1 + 2N_2 = N_d,$$

где выражения для N_1 и N_2 приведены в решении

задачи 32. Введя обозначения

$$x = \exp[(F - E_1)/kT], \quad \xi = \exp[-(E_2 - E_1)/kT], \\ N_d/N = q,$$

мы приходим к уравнению

$$g_2 \xi (2 - q)x^2 + g_1(1 - q)x - g_0 q = 0.$$

При не слишком высоких температурах, когда $E_2 - E_1 \gg kT$, значение $\xi \ll 1$. Тогда в области $q < 1$ получаем

$$x \approx g_0 q / g_1 (1 - q),$$

т. е.

$$F = E_1 + kT \ln [g_0 q / g_1 (1 - q)].$$

В области $1 < q < 2$ имеем

$$x \approx g_1 (q - 1) / g_2 (2 - q) \xi,$$

т. е.

$$F = E_2 + kT \ln [g_1 (q - 1) / g_2 (2 - q)].$$

Концентрационная зависимость уровня Ферми схематически показана на рис. 22.

35. При наличии в образце полностью истощенных мелких доноров и заполненных акцепторов уравнение нейтральности имеет вид

$$N_1 + 2N_2 = N + N_d - N_a.$$

Введя обозначение

$$v = (N + N_d - N_a) / N,$$

где интервал $0 < v < 2$ охватывает всю интересующую нас область легирования мелкими примесями, мы видим, что задача по существу сводится к предыдущей, если q заменить на v . Со-

ответственно искомая разность уровней Ферми равна $\Delta F = F_1 - F_2 = E_a - E_d +$

$$+ kT \ln [g_1^2 (v_1 - 1) (1 - v_2) / g_0 g_2 (2 - v_1) v_2],$$

где $v_1 = 1 + N_d/N$, а $v_2 = 1 - N_a/N$. В образце, легированном акцепторами, уровень Ферми лежит в нижней

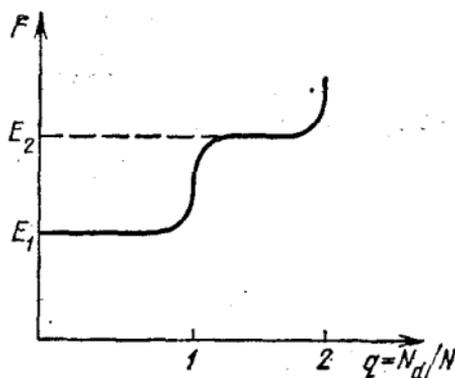


Рис. 22. Зависимость уровня Ферми от концентрации мелких доноров в полупроводнике с глубокой примесью, создающей два акцепторных уровня (схематически).

половине запрещенной зоны, т. е. обычно это — полупроводник p -типа с концентрацией дырок, равной $p = N_v \exp[(E_v - F_2)/kT]$, где F_2 — уровень Ферми в этом образце. Аналогично, при легировании донорами обычно имеем полупроводник n -типа. Отношение концентраций основных носителей заряда в рассматриваемых образцах равно

$$\begin{aligned} n/p &= (N_c/N_v) \exp[(F_2 - E_v - E_c + F_1)/kT] = \\ &= \frac{N_c}{N_v} \frac{g_0(v_1 - 1)v_2}{(1 - v_2)(2 - v_1)} \exp \frac{E_d - E_v - E_c + E_a}{kT}. \end{aligned}$$

36. Используя результаты задач 34 и 35, мы можем написать:

$$F = E_a + kT \ln[g_1(v - 1)/g_2(2 - v)].$$

При $g_1 = g_2 = 1$, $v = 1,3$ имеем

$$F \approx E_v + 0,3 \text{ эВ.}$$

Концентрация дырок в валентной зоне равна

$$p = 5,1 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}.$$

37. Поскольку уровень Ферми расположен глубоко в запрещенной зоне, имеем

$$n = N_c \exp[-(E_c - F)/kT],$$

$$N_{\text{Sb}}^0 = 1/2 N_{\text{Sb}} \exp[-(E_{\text{Sb}} - F)/kT],$$

$$N_{\text{Sb}}^0/n = (N_{\text{Sb}}/2N_c) \exp[(E_c - E_{\text{Sb}})/kT].$$

Отсюда при 300 К получаем $N_{\text{Sb}}^0/n \approx 6,5 \cdot 10^{-3}$, при 77 К получаем $N_{\text{Sb}}^0/n \approx 0,3$ и при 4,2 К получаем $N_{\text{Sb}}^0/n \approx 4,6 \cdot 10^{12}$.

38. Как было показано в задаче 34, в указанных условиях уровень Ферми смещается от одного уровня примеси к другому, и

$$\sigma_2/\sigma_1 \approx n_2/n_1 = \exp[(E_2 - E_1)/kT] = \exp(U/kT).$$

Отсюда

$$U = kT \ln(\sigma_2/\sigma_1) \approx 0,3 \text{ эВ.}$$

39. Согласно задаче 34 при $N_{\text{Sb}} < N_{\text{Cu}}$ уровень Ферми близок к E_1 , а $N_{\text{Cu}}^- \ll N_{\text{Cu}}$, поскольку $E_2 - E_1 \gg kT$. Таким образом, $N_{\text{Cu}}^- \approx N_{\text{Sb}}$, и, полагая $E_2 - E_1 =$

$= E_v(300 \text{ K}) - 0,32 \text{ эВ} - 0,26 \text{ эВ}$, получаем

$$N_{\text{Cu}}^- = \frac{g_0 g_2}{g_1^2} \frac{N_{\text{Sb}}^2}{N_{\text{Cu}} - N_{\text{Sb}}} \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right) \approx 6,8 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}.$$

При $N_{\text{Cu}} < N_{\text{Sb}} < 2N_{\text{Cu}}$ уровень Ферми близок к E_2 , и $N_{\text{Cu}}^- \approx N_{\text{Cu}}$, а $N_{\text{Cu}}^+ = N_{\text{Sb}} - N_{\text{Cu}} = 2 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$.

40. Для того, чтобы обобщить рассмотрение задач 34, 35 на случай полупроводника с четырьмя примесными уровнями, нужно записать условие нейтральности для рассматриваемой системы:

$$N_1 + 2N_2 + 3N_3 = N_{\text{Au}} + N_{\text{Sb}} - N_{\text{B}}. \quad (1)$$

Удобно ввести параметр, характеризующий концентрацию мелких компенсирующих примесей:

$$\nu = (N_{\text{Au}} + N_{\text{Sb}} - N_{\text{B}}) / N_{\text{Au}}.$$

Положение уровня Ферми определяется условием (1) с

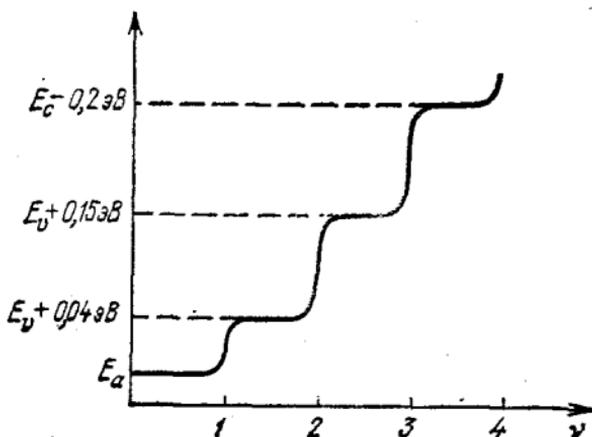


Рис. 23. Изменение положения уровня Ферми при низких температурах в германии с золотом, легированном мелкими примесями (схематически).

учетом соотношений (1.29). Подобно задаче 34 получаем, что концентрационная зависимость уровня Ферми при низких температурах имеет вид, схематически показанный на рис. 23.

41. В рассматриваемых условиях ($2N_{\text{Au}} < N_{\text{Sb}} < 3N_{\text{Au}}$) при записи условия нейтральности достаточно учитывать лишь верхний уровень золота:

$$N_{\text{Au}}^+ + n = N_{\text{Sb}} - 2N_{\text{Au}}.$$

Введя обозначения

$$(N_{\text{Sb}} - 2N_{\text{Au}})/N_{\text{Au}} = 1 - K, \quad x = \exp[(F - E_3)/kT],$$

$$n_0 = N_c \exp[-(E_c - E_3)/kT],$$

получим

$$g_3 x / (g_2 + g_3 x) + n_0 x / N_{\text{Au}} = 1 - K.$$

Отсюда

$$x = (2g_3 n_0 / N_{\text{Au}})^{-1} \{-g_3 K - g_2 n_0 / N_{\text{Au}} + [(g_3 K + g_2 n_0 / N_{\text{Au}})^2 + 4g_2 g_3 (1 - K) n_0 / N_{\text{Au}}]^{1/2}\}. \quad (1)$$

Имеем $n_0 \approx 4,9 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$, т. е. $n_0 \gg N_{\text{Au}}$ и $x = (1 - K)N_{\text{Au}}/n_0$, а концентрация равна

$$n = n_0 x = (1 - K)N_{\text{Au}} = N_{\text{Sb}} - 2N_{\text{Au}} = 2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}.$$

Таким образом, в рассматриваемых условиях верхний уровень золота почти полностью ионизован.

42. Поскольку $N_{\text{Au}} < N_{\text{Sb}} < 2N_{\text{Au}}$, условие нейтральности имеет вид $N_{\text{Au}} + n = N_{\text{Sb}} - N_{\text{Au}}$. Соответственно положение уровня Ферми определяется выражением (1) предыдущей задачи, в котором

$$1 - K = (N_{\text{Sb}} - N_{\text{Au}})/N_{\text{Au}}, \quad n_0 = N_c \exp[-(E_c - E_2)/kT], \\ x = \exp[(F - E_2)/kT],$$

а g_2, g_3 заменены на g_1, g_2 . Имеем $n_0 \approx 10^{15} \text{ см}^{-3}$, $n_0/N_{\text{Au}} \approx 0,2$, и, полагая $g_1 = g_2 = 1$, находим $x \approx 0,5$. Таким образом, искомая концентрация равна $5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$.

43. Поскольку при рассматриваемой низкой температуре $n_0 \ll N_{\text{Au}}$, положение уровня Ферми нетрудно найти из общего выражения для x , полученного в задачах 41, 42. Имеем

$$F = E_2 + kT \ln [g_1 (N_{\text{Sb}} - N_{\text{Au}}) / g_2 (2N_{\text{Au}} - N_{\text{Sb}})].$$

Отсюда

$$n = [g_1 (N_{\text{Sb}} - N_{\text{Au}}) / g_2 (2N_{\text{Au}} - N_{\text{Sb}})] N_c \exp[-(E_c - E_2)/kT] \approx 10^{22}.$$

Разумеется, подобная концентрация ненаблюдаема. Физически гораздо большая (хотя и достаточно малая) концентрация электронов в зоне проводимости даже при очень низких температурах создается за счет неустраняемой подсветки (см. задачу 59).

44. Условие нейтральности имеет вид

$$N_1 + 2N_2 = \nu N,$$

где N_1 и N_2 даются выражениями, приведенными в решении задачи 32, в которых $U = -U_0$, а ν — число электронов на дефект,

$$\nu = (N + N_d - N_a)/N.$$

Введя обозначение

$$x = \exp[(F - E_1)/kT],$$

где E_1 — энергия уровня дефекта, отвечающего присоединению первого электрона, мы найдем

$$(2 - \nu)g_2 \exp[U_0/kT]x^2 + (1 - \nu)g_1x - g_0\nu = 0.$$

Отсюда

$$x = [2(2 - \nu)g_2]^{-1} \left\{ -(1 - \nu)g_1 + [(1 - \nu)^2g_1^2 + 4\nu(2 - \nu)g_0g_2 \exp(U_0/kT)]^{1/2} \right\} \exp(-U_0/kT).$$

В условиях, когда $U_0 \gg kT$, получаем

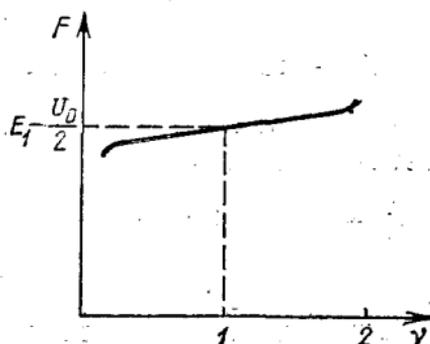
$$x = \sqrt{\frac{\nu}{2 - \nu}} \sqrt{\frac{g_0}{g_2}} \exp\left(-\frac{U_0}{2kT}\right)$$

и

$$F = E_1 - U_0/2 - (kT/2) \ln [g_2(2\nu^{-1} - 1)/g_0].$$

Уровень Ферми слабо (логарифмически) зависит от концентрации мелких примесей во всей области, где дефекты

Рис. 24. Зависимость уровня Ферми от концентрации мелких примесей в полупроводнике, содержащем дефекты с отрицательной энергией корреляции (схематически).



рассматриваемого типа играют основную роль (см. рис. 24).

45. Используя результат предыдущей задачи, находим

$$F(\nu_2) - F(\nu_1) = -(kT/2) \ln [(2\nu_2^{-1} - 1)/(2\nu_1^{-1} - 1)].$$

В рассматриваемых условиях $\nu_1 = 4/3$, $\nu_2 = 2/3$ и $F(2/3) - F(4/3) = -1,8 \cdot 10^{-2}$ эВ.

Температурное смещение уровня Ферми определяется выражением

$$F(T_2) - F(T_1) = (k/2)(T_2 - T_1) \ln(2\nu^{-1} - 1).$$

Отсюда при $\nu = 4/3$, $g_0 = g_2 = 1$ имеем

$$F(300 \text{ K}) - F(100 \text{ K}) = 6 \cdot 10^{-3} \text{ эВ.}$$

Глава 2

РЕКОМБИНАЦИЯ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

46. Релаксация неравновесной концентрации описывается уравнением

$$d\Delta p/dt = -\Delta p/\tau,$$

откуда

$$\Delta p(t) = \Delta p(0) \exp(-t/\tau),$$

$$\Delta p(t_1)/\Delta p(t_2) = \exp[(t_2 - t_1)/\tau],$$

$$\tau = (t_2 - t_1) / \ln[\Delta p(t_1)/\Delta p(t_2)] \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ с.}$$

47. В стационарных условиях имеем

$$g = \Delta p/\tau, \quad g = \gamma J,$$

поэтому

$$\Delta p = \gamma J \tau = 10^{14} \text{ см}^{-3}$$

и

$$\Delta \sigma_0 = e\Delta p(\mu_p + \mu_n)/en_0\mu_n = (\Delta p/n_0)(1 + 1/b) = 0,15.$$

48. Затухание неравновесной концентрации описывается уравнением

$$\begin{aligned} -R = d\Delta n/dt &= -a[(n_0 + \Delta n)(\Delta n + n_i^2/n_0) - n_i^2] = \\ &= a[(\Delta n)^2 + n_0\Delta n]. \end{aligned}$$

Интегрируя это уравнение с начальным условием $\Delta n = \Delta n(0)$ при $t = 0$, получим

$$at = n_0^{-1} \ln[(n_0 + \Delta n)/\Delta n] + \text{const},$$

$$\Delta n = \frac{n_0 \Delta n(0)}{[\Delta n(0) + n_0] \exp(n_0 at) - \Delta n(0)}.$$

49. Из формулы (2.9) при слабом возбуждении имеем

$$\tau = (\alpha N_i)^{-1} (n_0 + p_0 + n_i + p_i) / (n_0 + p_0).$$

Вычислим вошедшие сюда концентрации:

$$n_0 = (\rho \mu_n)^{-1} = 3,3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3},$$

$$p_0 = n_i^2/n_0 = 2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3},$$

$$n_1 = p_1 = n_i = 8 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}.$$

Отсюда

$$\alpha = (\tau N_t)^{-1} \cdot (n_0 + p_0 + 2n_i)/(n_0 + p_0) \approx 2,9 \cdot 10^{-9} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1},$$

$$S = \alpha/v_T \approx 2,5 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2.$$

50. В наших условиях из (2.9) находим

$$\tau = (\alpha_p N_t)^{-1} (1 + n_i/n_0). \quad (1)$$

Так как по условию при $T < 200 \text{ К}$ имеем $\tau \sim T^{-1/2}$ и $\alpha_p = v_T S_p \sim T^{1/2}$, то можно считать, что в этой области $\tau = (\alpha_p N_t)^{-1}$.

Отсюда

$$S_p = (\tau N_t v_T)^{-1},$$

$$v_T (T = 200 \text{ К}) = 0,96 \cdot 10^7 \text{ см/с},$$

$$S_p = 2,6 \cdot 10^{-14} \text{ см}^2.$$

Теперь при $T = 300 \text{ К}$ определим n_1 из (1) и затем найдем $E_c - E_t$ по формуле

$$E_c - E_t = kT \ln(N_c/n_1).$$

Имеем

$$v_T (T = 300 \text{ К}) = 1,17 \cdot 10^7 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1},$$

$$n_1 = n_0 (\tau N_t \alpha_p - 1) = 9,3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3},$$

$$N_c (T = 300 \text{ К}) = 1,03 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}.$$

Таким образом,

$$E_c - E_t = 0,32 \text{ эВ}.$$

51. Из формулы (2.9) следует, что при малом отклонении от равновесия время жизни максимально при $n_0 \approx n_i$. Тогда в наших условиях

$$\tau_{\text{макс}} = \tau_{n_0} p_1 / 2n_i.$$

Далее,

$$\tau_2 = \tau_{n_0} (p_1 + p_{02}) / p_{02}.$$

Отсюда легко найти p_1 и, следовательно, E_t :

$$p_1 = p_{02} [p_{02} \tau_2 / 2n_i \tau_{\text{макс}} - 1]^{-1} = 1,3 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3},$$

$$E_t - E_v = kT \ln(N_v/p_1) = 0,26 \text{ эВ}.$$

Теперь нетрудно определить коэффициенты и сечения захвата:

$$\begin{aligned}\alpha_n &= (N_t \tau_{n_0})^{-1} = p_1 / (2N_t \tau_{\max} n_t) = 4,4 \cdot 10^{-9} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}, \\ \alpha_p &= (N_t \tau_{p_0})^{-1} = (N_t \tau_t)^{-1} = 6,2 \cdot 10^{-9} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}, \\ S_n &= \alpha_n / v_T = 3,8 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2, \\ S_p &= \alpha_p / v_T = 5,3 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2.\end{aligned}$$

52. Выражения для времен жизни в двух наших случаях имеют вид (см. (2.9)):

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{1}{\alpha_p N_t} \left(1 + \frac{n_1}{n_0 + \Delta n} + \frac{\alpha_p}{\alpha_n} \frac{\Delta n}{n_0 + \Delta n} \right), \\ \tau_0 &= (\alpha_p N_t)^{-1} (1 + n_1/n_0).\end{aligned}$$

Отсюда

$$\left(1 + \frac{n_1}{n_0} \right) \frac{\tau}{\tau_0} = 1 + \frac{n_1}{n_0 + \Delta n} + \frac{\alpha_p}{\alpha_n} \frac{\Delta n}{n_0 + \Delta n}.$$

Вычисляя коэффициенты этого уравнения, найдем

$$\begin{aligned}n_1 &= N_c \exp[(E_t - E_c)/kT] = 4,7 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}, \\ n_1/n_0 &= 4,66, \quad \tau/\tau_0 = 2,35.\end{aligned}$$

Отсюда искомое отношение сечений захвата, равное отношению коэффициентов захвата, есть

$$S_p/S_n = \alpha_p/\alpha_n \approx 89.$$

53. В рассматриваемых условиях времена жизни таковы:

$$\tau_0 = (\alpha_p N_t)^{-1} (1 + \alpha_p p_1 / \alpha_n n_0), \quad (1)$$

$$\tau_1 = (\alpha_p N_t)^{-1} (1 + \alpha_p (p_1 + \Delta n) / \alpha_n (n_0 + \Delta n)). \quad (2)$$

Вычислим вошедшие сюда величины:

$$\begin{aligned}n_0 &= (\rho_0 e \mu_n)^{-1} = 10^{15} \text{ см}^{-3}, \\ p_1 &= N_v \exp[(E_v - E_t)/kT] = 2,5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}, \\ \Delta n/n_0 &= b(\rho_0 - \rho) / \rho(1 + b) = 0,2.\end{aligned}$$

Из формул (1) и (2) определим отношение коэффициентов захвата:

$$\frac{\alpha_p}{\alpha_n} = \frac{1 - \tau_0/\tau_1}{(p_1 + \Delta n) \tau_0 / (n_0 + \Delta n) \tau_1 - p_1/n_0}, \quad \frac{\tau_0}{\tau_1} = 0,61.$$

Следовательно, $\alpha_p/\alpha_n = 0,39/0,089 \approx 4,4$. Отсюда имеем

$$\tau_{p0} = \tau_0(1 + \alpha_p p_1/\alpha_n n_0) \approx 1,8 \cdot 10^{-6} \text{ с},$$

$$\tau_{n0} = \alpha_p \tau_{p0}/\alpha_n \approx 8 \cdot 10^{-6} \text{ с}.$$

54. При низких температурах глубокие уровни акцепторов заполнены лишь за счет компенсации донорами:

$$N_d = N_a^- = 10^{15} \text{ см}^{-3}, \quad N_a^0 = 9 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3},$$

Справедливы неравенства $N_a^0, N_a^- \gg n_0, p_0, n_1, p_1$.

Поэтому, считая уровень возбуждения малым ($\Delta n, \Delta p \ll N_a^-$), имеем

$$\tau_n = (\alpha_n N_a^0)^{-1}, \quad \tau_p = (\alpha_p N_a^-)^{-1},$$

$$\Delta n = g\tau_n = 10^{14} \text{ см}^{-3},$$

$$\Delta p = \Delta n \tau_p / \tau_n = \Delta n (S_n / S_p) (N_a^0 / N_a^-) = 9 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3},$$

$$\tau_p = \tau_n \Delta p / \Delta n = 0,9 \cdot 10^{-6} \text{ с};$$

$$\alpha_n = (\tau_n N_a^0)^{-1} = 1,1 \cdot 10^{-11} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1},$$

$$\alpha_p = \alpha_n S_p / S_n = 1,1 \cdot 10^{-9} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}.$$

55*. Проанализируем общую формулу (2.11). При рассматриваемых положениях уровней E_1, E_2 и уровня Ферми можно считать

$$n_0/p_0 \ll 1, \quad n_1/p_0 \ll 1, \quad p_2/p_0 \ll 1.$$

С учетом этого имеем

$$\frac{1}{\tau} = \frac{N_t}{1 + p_1/p_0} \left(\alpha_{n1} + \frac{\alpha_{n2} p_1/p_0}{1 + \alpha_{n2} n_2/\alpha_{p2} p_0} \right).$$

Сравнивая эту формулу с эмпирической, заключаем, что высокотемпературное плато, имеющее место на опыте, возможно лишь, если

$$\alpha_{n2} n_2 / \alpha_{p2} p_0 \ll 1.$$

В этих условиях получаем

$$\tau = (p_0 + p_1) / N_t (\alpha_{n1} p_0 + \alpha_{n2} p_1).$$

Учитывая, что $p_1 = N_v \exp[(E_v - E_1)/kT]$, после преобразования находим

$$2N_t \tau = (\alpha_{n1}^{-1} + \alpha_{n2}^{-1}) -$$

$$- (\alpha_{n2}^{-1} - \alpha_{n1}^{-1}) \text{th} [(E_1 - E_v)/2kT + (1/2) \ln(\alpha_{n1} p_0 / \alpha_{n2} N_v)].$$

Эмпирическая формула имеет тот же вид:

$$2N_i\tau = A - B \operatorname{th}(T_0/T - \chi),$$

где $A = 3,24 \cdot 10^8 \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}$, $B = 2,48 \cdot 10^8 \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}$, $T_0 = 955 \text{ К}$, $\chi = 4,41$. Отсюда находим

$$\alpha_{n1} = 2/(A - B) = 2,64 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \text{с}^{-1},$$

$$\alpha_{n2} = 2/(A + B) = 3,5 \cdot 10^{-9} \text{ см}^3 \text{с}^{-1},$$

$$p_0 = N_v(\alpha_{n2}/\alpha_{n1}) \exp(-2\chi) = 2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3},$$

$$E_1 = E_v + 2kT_0 = E_v + 0,17 \text{ эВ}.$$

Для определения сечений захвата найдем при 200 К

$$v_T = (3kT/m_0)^{1/2} = 0,96 \cdot 10^7 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Окончательно,

$$S_{n1} = \alpha_{n1}/v_T \approx 2,8 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2,$$

$$S_{n2} \approx 3,7 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2.$$

56*. По аналогии с уравнениями (2.12) можно написать

$$\frac{d \Delta n}{dt} = g - R_n = g - \frac{\Delta p}{\tau_r}, \quad (1)$$

$$\frac{d \Delta p}{dt} = g - \frac{\Delta p}{\tau_r} - \frac{\Delta p}{\tau_1} + \frac{\Delta p_t}{\tau_2}, \quad \Delta p_t = \Delta n - \Delta p. \quad (2)$$

В стационарных условиях имеем

$$\Delta p = g\tau_r, \quad \Delta p_t = \Delta p\tau_2/\tau_1, \quad \Delta n = \Delta p(1 + \tau_2/\tau_1).$$

Поведение Δn и Δp в процессе релаксации описывается линейными комбинациями двух экспоненциальных функций времени:

$$\Delta n = A \exp(-k_1 t) + B \exp(-k_2 t),$$

$$\Delta p = C \exp(-k_1 t) + D \exp(-k_2 t).$$

Продифференцировав (2) и выразив $d \Delta n/dt$ из (1), получим характеристическое уравнение

$$k^2 - k/\tau_g + (\tau_2\tau_r)^{-1} = 0,$$

где $\tau_g^{-1} = \tau_r^{-1} + \tau_1^{-1} + \tau_2^{-1}$. Его корни суть

$$k_{1,2} = (2\tau_g)^{-1} \pm [(4\tau_g^2)^{-1} - (\tau_r\tau_2)^{-1}]^{1/2}. \quad (3)$$

Из уравнения (1) следует, что

$$C = \tau_r k_1 A, \quad D = \tau_r k_2 B,$$

а из начальных условий получаем

$$C + D = g\tau_r, \quad A + B = g\tau_r(1 + \tau_2/\tau_1).$$

Отсюда и определяются коэффициенты; окончательный ответ имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta n &= \frac{g\tau_r}{k_1 - k_2} \left(1 + \frac{\tau_2}{\tau_1}\right) \left\{ \left[\frac{1}{\tau_r} - k_2 \left(1 + \frac{\tau_2}{\tau_1}\right) \right] \exp(-k_1 t) + \right. \\ &\quad \left. + \left[k_1 \left(1 + \frac{\tau_2}{\tau_1}\right) - \frac{1}{\tau_r} \right] \exp(-k_2 t) \right\}, \\ \Delta p &= \frac{g\tau_r^2}{k_1 - k_2} \left\{ k_1 \left[\frac{1}{\tau_r} - k_2 \left(1 + \frac{\tau_2}{\tau_1}\right) \right] \exp(-k_1 t) + \right. \\ &\quad \left. + k_2 \left[k_1 \left(1 + \frac{\tau_2}{\tau_1}\right) - \frac{1}{\tau_r} \right] \exp(-k_2 t) \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

57. В стационарных условиях

$$\Delta p = g\tau_r = 2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3},$$

$$\Delta n = \Delta p(1 + \tau_2/\tau_1) = 2,2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3},$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} &= \frac{\Delta p \mu_p + \Delta n \mu_n}{n_0 \mu_n} = \frac{\Delta p}{n_0 b} \left[1 + b \left(1 + \frac{\tau_2}{\tau_1}\right) \right] = \\ &= \frac{2 \cdot 10^{13}}{5 \cdot 10^{15}} \left(\frac{1}{2,1} + 11 \right) = 0,046. \end{aligned}$$

По формуле (3) предыдущей задачи находим

$$k_1 = 5,02 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}, \quad k_2 = 2 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}.$$

Далее, выражения (4) той же задачи в данном случае приобретают вид

$$\Delta n = 2,2 \cdot 10^{14} [0,58 \exp(-k_1 t) + 10,42 \exp(-k_2 t)] \text{ см}^{-3},$$

$$\Delta p = 2 \cdot 10^{13} [0,58 \exp(-k_1 t) + 0,42 \exp(-k_2 t)] \text{ см}^{-3}.$$

Очевидно, за время порядка $1/k_1 \approx \tau_r$ исчезнет небольшая «быстрая» компонента неравновесной проводимости, а затем будет наблюдаться «хвост», затухающий по мере опустошения ловушек с характерным временем $1/k_2 = \tau_2$.

58. В общем выражении (2.8) для $\Delta p_i/\Delta p$ можно пренебречь в наших условиях величинами p_0 , p_1 и n_1 .

Отсюда

$$\Delta p_i / \Delta p = \alpha_p N_{i1} / \alpha_n n_0 = 24,$$

$$\alpha_n = \frac{N_{i1}}{n_0} \alpha_p \frac{\Delta p}{\Delta p_i} \approx 1,04 \cdot 10^{-10} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}.$$

При другой концентрации ловушек имеем

$$\Delta p_i / \Delta p = 0,24,$$

$$\tau_p = (N_{i2} \cdot \alpha_p)^{-1} = 10^{-4} \text{ с},$$

$$\tau_n = (1 + \Delta p_i / \Delta p) \tau_p = 1,24 \cdot 10^{-4} \text{ с}.$$

59. Ясно, что концентрацией свободных дырок в рассматриваемых условиях можно пренебречь. При этом условие локальной нейтральности имеет вид

$$n + 3N_{\text{Au}}^{\equiv} + 2N_{\text{Au}}^{\equiv} = N_d^{\dagger}; \quad N_d^{\dagger} \approx N_d. \quad (1)$$

В условиях задачи в образце имеются только дважды и трижды отрицательно заряженные ионы золота. Следовательно,

$$N_{\text{Au}}^{\equiv} + N_{\text{Au}}^{\equiv} = N_{\text{Au}}, \quad (2)$$

и условие (1) можно переписать в виде

$$n + N_{\text{Au}}^{\equiv} = N_d - 2N_{\text{Au}}^{\equiv} \equiv N_d^*. \quad (3)$$

Через N_d^* здесь обозначена «эффективная» концентрация доноров, вычисленная с учетом компенсации. В стационарных условиях темпы генерации электронов с трехзарядных ионов золота (g_n) и захвата электронов двухзарядными ионами (r_n) должны быть одинаковы. Согласно формулам (2.3), (2.4) и (2.7) мы имеем

$$g_n = N_t (\alpha_n n_1 + JS_n^{\text{ph}}) f, \quad r_n = \alpha_n n (1 - f) N_t, \quad (4)$$

где в данном случае $f = N_{\text{Au}}^{\equiv} / N_{\text{Au}}$ — доля трехзарядных ионов золота.

Введем обозначение

$$n_1^* = n_1 + JS_h^{\text{ph}} / \alpha_n. \quad (5)$$

Тогда условие стационарности концентрации свободных электронов дает

$$n(1 - f) - n_1^* f = 0,$$

откуда

$$f = n / (n + n_1^*), \quad (6)$$

Следовательно,

$$N_{\text{Au}}^{\text{ср}} = N_{\text{Au}} n / (n + n_1^*),$$

п условие (3) принимает вид

$$n + N_{\text{Au}} n / (n + n_1^*) = N_d^*. \quad (7)$$

Отсюда имеем

$$n = -\frac{1}{2} (n_1^* + N_{\text{Au}} - N_d^*) + \\ + [(n_1^* + N_{\text{Au}} - N_d^*)^2 / 4 + n_1^* N_d^*]^{1/2}. \quad (8)$$

Пользуясь указанными выше численными значениями фигурирующих здесь параметров, получаем: $n_1 \ll 10^7 \text{ см}^{-3}$, $JS_n^{\text{ph}} / \alpha_n = 10^{11} \text{ см}^{-3} \gg n_1$, $N_d^* = 5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3} \gg JS_n^{\text{ph}} / \alpha_n$.

При этом формула (8) с хорошим приближением приводится к виду

$$n \approx JS_n^{\text{ph}} N_d^* / \alpha_n (N_{\text{Au}} - N_d^*) = 10^{11} \text{ см}^{-3}.$$

В отсутствие подсветки ($J \rightarrow 0$) мы получили бы

$$n = n_1 N_d^* / (N_{\text{Au}} - N_d^*) \ll 10^7 \text{ см}^{-3}.$$

Глава 3

ДИФфуЗИЯ И ДРЕЙФ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА

60. Используя соотношения Эйнштейна (3.7), получим для германия: $D_n = 98 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$, $D_p = 46,6 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$; для кремния: $D_n = 37,6 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$, $D_p = 13 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$.

61. Согласно формулам (3.10) и (3.7),

$$L_n = (\mu_n kT \tau_n / e)^{1/2}.$$

Отсюда получаем

$$1) L_n = 0,1 \text{ см}, \quad 2) L_n = 0,01 \text{ см}$$

62. Согласно формуле (3.5)

$$D_n = n \mu_n kT / (e dn/d\eta), \quad (1)$$

где $\eta = (F - E_c) / kT$. Далее, на основании (1.5) и (П.3) найдем

$$n = (8\pi / 3h^3) (2m_n kT)^{3/2} \eta^{3/2},$$

откуда

$$\eta = (3h^3 / 8\pi)^{2/3} (2m_n kT)^{-1} n^{2/3},$$

$$(dn/d\eta) / kT = 3m_n (3h^3 / 8\pi)^{-2/3} n^{1/3}. \quad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим

$$D_n = (h^2 \mu_n / 3em_n) (3/8\pi)^{2/3} n^{2/3}.$$

63. Используя результат предыдущей задачи, получим $D_n = 3,6 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$.

64. Используя результат задачи 4 и формулы (1.5), (1.6) и (П.3), найдем

$$n = (8\pi Q / 3h^3) (8m_x m_y m_z)^{1/2} (kT)^{3/2} \eta^{3/2},$$

или, полагая $m_{dn} = Q^{2/3} (m_x m_y m_z)^{1/3}$,

$$n = (8\pi / 3h^3) (2m_{dn} kT)^{3/2} \eta^{3/2},$$

$$\eta = (3h^3 / 8\pi)^{2/3} (2m_{dn} kT)^{-1} n^{2/3},$$

$$D_n = (h^2 \mu_n / 3em_{dn}) (3/8\pi)^{2/3} n^{2/3}.$$

65. Используя соотношение Эйнштейна и условие $n = p = n_i$, найдем

$$D = \frac{2n_i}{n_i(1/D_n + 1/D_p)} = \frac{2kT}{e(1/\mu_n + 1/\mu_p)} = \frac{2kT\mu_n}{e(1+b)} = 63 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}.$$

66. Согласно формулам (3.16) и (3.7),

$$D = 2D_n D_p / (D_n + D_p) = 2D_p / (1 + \mu_p / \mu_n).$$

В рассматриваемом случае $\mu_p / \mu_n = 0,045 \ll 1$, поэтому

$$D \approx 2D_p = 2\mu_p kT / e = 20,7 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}.$$

67. Уравнение непрерывности в рассматриваемой задаче записывается в виде

$$D_p \frac{d^2 \Delta p}{dx^2} - \frac{\Delta p}{\tau_p} = 0.$$

Его решение имеет вид

$$\Delta p(x) = \Delta p(0) \exp(-x/L_p),$$

где $L_p = (D_p \tau_p)^{1/2} = 0,2 \text{ см}$. Отсюда находим

$$\Delta p(x) = \Delta p(0) \exp(-x/L_p) = 1,4 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}.$$

68. Решение уравнения непрерывности

$$D_p \frac{d^2 \Delta p}{dx^2} - \frac{\Delta p}{\tau_p} = 0$$

имеет вид

$$\Delta p = \Delta p(0) \exp(-x/L_p).$$

Так как

$$\Delta p_1 = \Delta p(0) \exp(-x_1/L_p), \quad \Delta p_2 = \Delta p(0) \exp(-x_2/L_p),$$

находим

$$\Delta p_1 / \Delta p_2 = \exp[(x_2 - x_1) / L_p],$$
$$L_p = (x_2 - x_1) / \ln(\Delta p_1 / \Delta p_2) = 0,1 \text{ см.}$$

69. Уравнение непрерывности для данной задачи записывается следующим образом (см. рис. 4):

$$D_p \frac{d^2 \Delta p}{dx^2} + g_0 - \frac{\Delta p}{\tau_p} = 0.$$

Граничные условия таковы:

$$D_p \left. \frac{d \Delta p}{dx} \right|_{x=0} = s \Delta p|_{x=0}, \quad \Delta p \rightarrow g_0 \tau_p \text{ при } x \rightarrow \infty,$$

Решение уравнения имеет вид

$$\Delta p(x) = g_0 \tau_p + C_1 \exp(-x/L_p) + C_2 \exp(x/L_p).$$

Из граничных условий $C_2 = 0$ и

$$-D_p C_1 / L_p = s(C_1 + g_0 \tau_p), \quad C_1 = -g_0 \tau_p^2 s / (L_p + s \tau_p),$$

так что

$$\Delta p(x) = g_0 \tau_p [\tau_p s (1 - \exp(-x/L_p)) + L_p] / (L_p + s \tau_p)$$

и $\Delta p(0) = g_0 \tau_p L_p / (L_p + s \tau_p)$. В рассматриваемых условиях имеем

$$\Delta p(0) = 0,88 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}.$$

70. Как вытекает из решения предыдущей задачи,

$$\Delta p_1 = g_0 \tau_p \frac{L_p}{L_p + s_1 \tau_p}, \quad \Delta p_2 = g_0 \tau_p \frac{L_p}{L_p + s_2 \tau_p}$$

и

$$\Delta p_1 / \Delta p_2 = (L_p + s_2 \tau_p) / (L_p + s_1 \tau_p).$$

Отсюда получаем

$$L_p = \tau_p (s_1 - s_2 \Delta p_2 / \Delta p_1) / (\Delta p_2 / \Delta p_1 - 1) = 0,2 \text{ см.}$$

71. Уравнение непрерывности и граничные условия в данном случае имеют вид (см. рис. 4)

$$D_p \frac{d^2 \Delta p}{dx^2} + g_0 \exp(-\gamma x) - \frac{\Delta p}{\tau_p} = 0, \quad g_0 = J \gamma_s$$

$$D_p \left. \frac{d \Delta p}{dx} \right|_{x=0} = s \Delta p|_{x=0}, \quad \Delta p \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Общее решение уравнения таково:

$$\Delta p(x) = -g_0 \tau_p \exp(-\gamma x) / (L_p^2 \gamma^2 - 1) + C_1 \exp(-x/L_p) + C_2 \exp(x/L_p).$$

Определяя константы C_1 и C_2 из граничных условий, находим

$$\Delta p(x) = \frac{g_0 \tau_p}{L_p^2 \gamma^2 - 1} \left[\frac{\gamma L_p^2 + s \tau_p}{L_p + s \tau_p} \exp\left(\frac{-x}{L_p}\right) - \exp(-\gamma x) \right],$$

$$\Delta p(0) = g_0 \tau_p L_p / (L_p \gamma + 1) (L_p + s \tau_p) \approx g_0 \tau_p / \gamma (L_p + s \tau_p),$$

так как в наших условиях $L_p \gamma \gg 1$. Отсюда получаем

$$\Delta p(0) = 0,5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3},$$

72. Из решения задачи 69 получим

$$\Delta p(\infty) = g_0 \tau_p, \quad \Delta p(0) = g_0 \tau_p L_p / (L_p + s \tau_p).$$

Отсюда находим

$$\Delta p(0) / \Delta p(\infty) = L_p / (L_p + s \tau_p),$$

или

$$s = (L_p / \tau_p) [\Delta p(\infty) / \Delta p(0) - 1] = 600 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}.$$

73. Уравнение непрерывности и граничные условия в рассматриваемом случае имеют вид

$$D_p \frac{d^2 \Delta p}{dx^2} - \frac{\Delta p}{\tau_p} = 0, \quad D_p \frac{d \Delta p}{dx} \Big|_{x=0} = s \Delta p \Big|_{x=0} - J,$$

$$\Delta p \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty.$$

Общее решение уравнения таково:

$$\Delta p(x) = C_1 \exp(-x/L_p) + C_2 \exp(x/L_p).$$

Определяя C_1 и C_2 из граничных условий, находим

$$\Delta p(x) = J \exp(-x/L_p) / (s + D_p/L_p),$$

откуда следует

$$\Delta p(0) = J \tau_p / (s \tau_p + L_p) = 0,5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}.$$

74. Уравнение непрерывности и граничные условия имеют в данном случае следующий вид (см. рис. 4):

$$D_p \frac{d^2 \Delta p}{dx^2} + g_0 \exp(-\gamma x) - \frac{\Delta p}{\tau_p} = 0, \quad g_0 = J \gamma,$$

$$D_p \frac{d \Delta p}{dx} \Big|_{x=0} = s \Delta p \Big|_{x=0},$$

$$\Delta p \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty.$$

Общее решение записывается так:

$$\Delta p(x) = C_1 \exp(-x/L_p) + C_2 \exp(x/L_p) - g_0 \tau_p \exp(-\gamma x) / (L_p^2 \gamma^2 - 1).$$

Определяя константы интегрирования из граничных условий, находим

$$\Delta p(x) = \frac{g_0 \tau_p}{L_p^2 \gamma^2 - 1} \left[\frac{\gamma L_p^2 + s \tau_p}{L_p + s \tau_p} \exp\left(-\frac{x}{L_p}\right) - \exp(-\gamma x) \right],$$

$$\Delta p(0) = g_0 \tau_p \frac{L_p}{(L_p \gamma + 1)(L_p + s \tau_p)} = 2,5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}.$$

При $\gamma \rightarrow 0$ имеет место равномерная по объему генерация и

$$\Delta p(0) = g_0 \tau_p L_p / (L_p + s \tau_p),$$

что совпадает с результатом задачи 69. При $L_p \gamma \gg 1$ происходит сильное поглощение света на поверхности:

$$\Delta p(0) = g_0 \tau_p / \gamma (L_p + s \tau_p) = J \tau_p / (s \tau_p + L_p),$$

т. е. получается результат задачи 73.

75*. В стационарных условиях имеем (см. рис. 4) $j_{nx} + j_{px} = 0$, т. е.

$$\sigma \mathcal{E} + e D_n \frac{d \Delta n}{dx} - e D_p \frac{d \Delta p}{dx} = 0_x$$

где

$$\sigma = \sigma_p + \sigma_n, \quad \sigma_p = p e \mu_p, \quad \sigma_n = n e \mu_n.$$

Отсюда находим поле дember-эффекта:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\frac{e}{\sigma} \left(D_n \frac{d \Delta n}{dx} - D_p \frac{d \Delta p}{dx} \right) = \\ &= -\frac{e}{\sigma} \left[(D_n - D_p) \frac{d \Delta p}{dx} - D_n \frac{d (\Delta p - \Delta n)}{dx} \right] = \\ &= -\frac{e}{\sigma} \frac{d}{dx} [(D_n - D_p) \Delta p - D_n (\Delta p - \Delta n)] \end{aligned}$$

Положим $\mathcal{E} = \mathcal{E}' + \mathcal{E}''$, где

$$\mathcal{E}' = -\frac{e}{\sigma} \frac{d \Delta p}{dx} (D_n - D_p), \quad \mathcal{E}'' = \frac{e}{\sigma} D_n \left(\frac{d \Delta p}{dx} - \frac{d \Delta n}{dx} \right).$$

Если выполняется условие $|\Delta p - \Delta n| \ll \Delta p$, то можно пренебречь слагаемым \mathcal{E}'' по сравнению с \mathcal{E}' . При этом для определения $\Delta p - \Delta n$ в уравнение Пуассона можно под-

ставить \mathcal{E}' :

$$|\Delta p - \Delta n| = \frac{\epsilon (D_n - D_p)}{4\pi\sigma_0} \frac{d^2\Delta p}{dx^2}. \quad (1)$$

Концентрацию неравновесных носителей Δp найдем из уравнения непрерывности

$$\operatorname{div}(D \operatorname{grad} \Delta p) - \Delta p/\tau = 0, \quad (2)$$

где D — коэффициент биполярной диффузии, постоянный при слабом отклонении от равновесия, так что уравнение (2) принимает вид

$$\frac{d^2\Delta p}{dx^2} - \frac{\Delta p}{L^2} = 0, \quad L = \sqrt{D\tau}.$$

Решение для образца толщины много большей L есть

$$\Delta p(x) = \Delta p_s \exp(-x/L), \quad (3)$$

где Δp_s — концентрация неравновесных носителей у поверхности при $x=0$. Подставим Δp из (3) в (1):

$$\begin{aligned} \frac{|\Delta p - \Delta n|}{\Delta p} &= \frac{\epsilon (D_n - D_p)}{4\pi\sigma_0 L^2} = \\ &= \frac{\epsilon D_n (1 - b^{-1})}{4\pi e \mu_n (n_0 + p_0/b) L^2} = \frac{\epsilon kT (b - 1)}{4\pi e^2 (bn_0 + p_0) L^2}. \end{aligned}$$

В условиях $n_0 \gg p_0$ получим

$$\frac{|\Delta p - \Delta n|}{\Delta p} = \frac{\epsilon kT (b - 1)}{4\pi e^2 b n_0 L^2}.$$

В рассматриваемых условиях имеем

$$|\Delta p - \Delta n|/\Delta p = 2,7 \cdot 10^{-7} < 10^{-6}.$$

Результат показывает, что требование локальной электронейтральности в обычных условиях выполняется с большой степенью точности. Следовательно, для напряженности электрического поля в эффекте Дембера в хорошем приближении справедливо выражение

$$\mathcal{E} = -\frac{e}{\sigma} (D_n - D_p) \frac{d\Delta p}{dx}.$$

76. Из решения предыдущей задачи имеем

$$\mathcal{E} = -\frac{e}{\sigma_0} (D_n - D_p) \frac{d\Delta p}{dx} \approx -\frac{kT (b - 1)}{en_0 b} \frac{d\Delta p}{dx}. \quad (1)$$

Здесь $\sigma_0 = e(\mu_n n_0 + \mu_p p_0) \approx e\mu_n n_0$. Поскольку по условию задачи $\Delta n, \Delta p \ll n_0$ и $\mu_p p_0 \ll \mu_n n_0$, получаем

$$\Delta p(x) = \Delta p_s \exp\left(-\frac{x}{L_p}\right), \quad \frac{d\Delta p}{dx} = -\frac{\Delta p_s}{L_p} \exp\left(-\frac{x}{L_p}\right).$$

При $x=0$ имеем

$$d\Delta p/dx = -\Delta p_s/L_p.$$

Граничное условие при $x=0$ записывается в виде

$$g_s = s\Delta p_s - D_p(d\Delta p/dx)|_{x=0},$$

откуда находим

$$\Delta p_s = \frac{g_s}{D_p/L_p + s}, \quad \frac{d\Delta p}{dx}\Big|_{x=0} = -\frac{g_s}{D_p + sL_p}. \quad (2)$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), получим

$$\mathcal{E} = \frac{kT(b-1)}{en_0 b} \frac{g_s}{D_p + sL_p} = 4,8 \cdot 10^{-4} \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}.$$

77. Из решения задачи 75* имеем (см. рис. 4)

$$\mathcal{E} = -\frac{e}{\sigma} (D_n - D_p) \frac{d\Delta p}{dx}, \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{eD_n(1-b^{-1})}{e\mu_n(n_0 + p_0/b)} \frac{d\Delta p}{dx}.$$

Поэтому для толстого образца

$$\Delta p = \Delta p_s \exp\left(-\frac{x}{L_p}\right), \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{kT(b-1)}{e(bn_0 + p_0)} \Delta p_s.$$

Граничное условие на освещенной поверхности таково:

$$g_s = -D_p \frac{d\Delta p}{dx}\Big|_{x=0}.$$

Отсюда находим

$$\Delta p_s = g_s L_p / D_p = g_s \sqrt{b\tau_p / D_n},$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{kT(b-1)}{ebn_0} g_s \sqrt{\frac{b\tau_p}{D_n}} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ В}.$$

При этом $\Delta p_s = 1,5 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3} \ll n_0 = 5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, т. е. условие $\Delta p_s \ll n_0$ выполняется.

78. Как показано в задаче 77, разность потенциалов, возникающая при эффекте Дембера, определяется выражением

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{kT(b-1)}{ebn_0} \Delta p_s.$$

Из решения задачи 76 имеем

$$\Delta p_s = \frac{g_s}{D_p/L_p + s} = \frac{g_s}{s + (D_n/b\tau)^{1/2}}.$$

В итоге находим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{kT(b-1)}{ebn_0} \frac{g_s}{s + (D_n/b\tau)^{1/2}} = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ В.}$$

Таким образом, из-за наличия поверхностной рекомбинации разность потенциалов $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ уменьшается в 1,6 раза.

79*. Пусть g_0 — скорость генерации избыточных носителей в объеме образца ($g_0 = J\gamma$). Уравнение непрерывности имеет вид (см. рис. 5)

$$D_p \frac{d^2 \Delta p}{dx^2} + g_0 - \frac{\Delta p}{\tau_p} = 0,$$

а граничные условия —

$$D_p \left. \frac{d \Delta p}{dx} \right|_{x=0} = s \Delta p|_{x=0}, \quad D_p \left. \frac{d \Delta p}{dx} \right|_{x=d} = -s \Delta p|_{x=d}.$$

Решение уравнения имеет вид

$$\Delta p = g_0 \tau_p + C_1 \exp(-x/L_p) + C_2 \exp(x/L_p). \quad (1)$$

Коэффициенты C_1 и C_2 находим из граничных условий:

$$C_1 = \frac{(D_p + sL_p) \exp(d/L_p) + (D_p - sL_p)}{-(D_p + sL_p)^2 \exp(d/L_p) + (D_p - sL_p)^2 \exp(-d/L_p)} \cdot s g_0 \tau_p L_p, \quad (2)$$

$$C_2 = \frac{(D_p + sL_p) + (D_p - sL_p) \exp(-d/L_p)}{-(D_p + sL_p)^2 \exp(d/L_p) + (D_p - sL_p)^2 \exp(-d/L_p)} \cdot s g_0 \tau_p L_p. \quad (3)$$

Используя выражения (1), (2) и (3), находим

$$\Delta p(0) = \Delta p(d) = g_0 \tau_p D_p \frac{(D_p + sL_p) \exp(d/L_p) - (D_p - sL_p) \exp(-d/L_p) - 2sL_p}{(D_p + sL_p)^2 \exp(d/L_p) - (D_p - sL_p)^2 \exp(-d/L_p)}.$$

В нашем случае вычисление дает $\Delta p(0) = 9,8 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$.

80. В рассматриваемом случае $L_p = (D_p \tau_p)^{1/2} = 0,07 \text{ см}$, а $d = 0,7 \text{ см}$, следовательно, $d/L_p = 10 \gg 1$. По этой при-

чине для концентраций неравновесных носителей на нижней и верхней границах имеем соответственно (см. задачу 72)

$$\Delta p(0) = g_0 \tau_p \frac{D_p}{D_p + s_0 L_p}, \quad \Delta p(d) = g_0 \tau_p \frac{D_p}{D_p + s_d L_p}.$$

Таким образом,

$$\Delta p(0)/\Delta p(d) = (D_p + s_d L_p)/(D_p + s_0 L_p),$$

откуда

$$s_0 = \frac{D_p}{L_p} \left[\frac{\Delta p(d)}{\Delta p(0)} - 1 \right] + s_d \frac{\Delta p(d)}{\Delta p(0)} = 420 \text{ см/с}.$$

81. Уравнение непрерывности в данном случае приводится к виду

$$D_p \frac{d^2 \Delta p}{dx^2} - \mathcal{E} \mu_p \frac{d \Delta p}{dx} - \frac{\Delta p}{\tau_p} = 0, \quad x \neq 0,$$

или

$$\frac{d^2 \Delta p}{dx^2} - \frac{e \mathcal{E}}{kT} \frac{d \Delta p}{dx} - \frac{\Delta p}{L_p^2} = 0, \quad x \neq 0.$$

На больших расстояниях от точки инжекции неравновес-

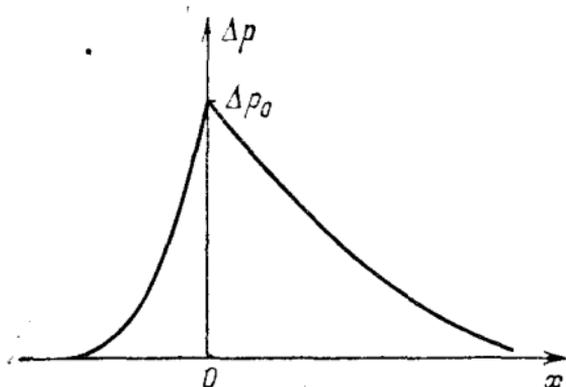


Рис. 25. Распределение неравновесных дырок в нитевидном образце при стационарной инжекции в электрическом поле.

ная концентрация Δp должна обращаться в нуль. Уравнению удовлетворяют решения вида (рис. 25)

$$\Delta p = \begin{cases} \Delta p_0 \exp(k_1 x), & x < 0, \\ \Delta p_0 \exp(k_2 x), & x > 0, \end{cases}$$

где

$$k_{1,2} = e \mathcal{E} / 2kT \pm [e^2 \mathcal{E}^2 / 4k^2 T^2 + L_p^{-2}]^{1/2},$$

а Δp_0 — значение Δp в точке инжекции $x = 0$.

Введем обозначения: $l = kT/e\mathcal{E}$, $L_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\mu_p\tau_p$ ($L_{\mathcal{E}}$ — дрейфовая длина). Тогда легко найти

$$k_{1,2} = (2l)^{-1} \left[1 \pm (1 + 4l/L_{\mathcal{E}})^{1/2} \right].$$

В наших условиях

$$l = 5,2 \cdot 10^{-3} \text{ см}, \quad L_{\mathcal{E}} = e\mathcal{E}L_p^2/kT = 1,57 \text{ см}.$$

Так как $l/L_{\mathcal{E}} \ll 1$, то можно считать, что

$$k_1 \approx 1/l, \quad k_2 \approx -1/L_{\mathcal{E}}.$$

82. Дрейфовая длина дырок равна

$$L_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\mu_i\tau_p.$$

Используя соотношения

$$L_p = (D_p\tau_p)^{1/2}, \quad D_p/\mu_p = kT/e,$$

получим

$$L_{\mathcal{E}} = L_p^2 e\mathcal{E}/kT = 0,95 \text{ см}.$$

83. В нашем случае $L_{\mathcal{E}} \gg l$ (см. решение задачи 81), поскольку

$$L_{\mathcal{E}} = L_p^2 e\mathcal{E}/kT = 3,9 \text{ см}, \quad l = kT/e\mathcal{E} = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ см},$$

и поэтому можно пренебречь диффузией по сравнению с дрейфом. Следовательно,

$$\Delta p(x) = \Delta p(0) \exp(-x/L_{\mathcal{E}}),$$

или

$$\Delta p(0)/\Delta p(x) = \exp(x/L_{\mathcal{E}}).$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} x = L_{\mathcal{E}} \ln [\Delta p(0)/\Delta p(x)] &= \\ &= (L_p^2 e\mathcal{E}/kT) \ln [\Delta p(0)/\Delta p(x)] = 1,6 \text{ см}. \end{aligned}$$

84. Поскольку $L_{\mathcal{E}} \gg l$ (см. задачи 81 и 83), имеем

$$\Delta p(x) = \Delta p(0) \exp(-x/l).$$

Следовательно,

$$\Delta p(0)/\Delta p(x) = \exp(e\mathcal{E}x/kT).$$

Отсюда получаем

$$x = (kT/e\mathcal{E}) \ln[\Delta p(0)/\Delta p(x)] = 10^{-3} \text{ см.}$$

85. Распределение неравновесных дырок в пренебрежении их дрейфом имеет вид

$$\Delta p = \Delta p(0) \exp(-x/L_p).$$

Отсюда

$$j_p(0) = -eD_p d\Delta p/dx|_{x=0} = eD_p \Delta p(0)/L_p.$$

Используя формулу $j_p(0) = \xi j$, найдем

$$\Delta p(0) = \xi L_p j / eD_p = 10^{13} \text{ см}^{-3}.$$

86. В отсутствие прилипания ($\Delta n = \Delta p$) и пренебрегая дрейфовой компонентой дырочного тока, имеем

$$j_p = -eD_p d\Delta p/dx = j\xi \exp(-x/L_p),$$

$$j_n = \sigma_n \mathcal{E} + eD_n d\Delta n/dx = \sigma_0 \mathcal{E} - bj_p,$$

$$\sigma_0 = en_0 \mu_n.$$

Полная плотность тока равна

$$j = j_n + j_p = \sigma_0 \mathcal{E} - (b-1)\xi j \exp(-x/L_p).$$

Отсюда определяем напряженность поля при $x=0$:

$$\mathcal{E}(0) = (j/\sigma_0)[1 + (b-1)\xi] = 0,025 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}.$$

Дырочный ток проводимости будет мал по сравнению с диффузионным током, если $\mathcal{E} \mu_p \ll D_p/L_p$, или $\mathcal{E} \ll kT/eL_p$. В наших условиях это неравенство выполняется.

87. Уравнение непрерывности в данном случае принимает вид

$$D_p \frac{d^2 \Delta p}{dx^2} - \frac{(\Delta p)^2}{a} = 0,$$

Умножая его на $2 d\Delta p/dx$, получаем

$$D_p \frac{d}{dx} \left(\frac{d\Delta p}{dx} \right)^2 - \frac{2}{3a} \frac{d}{dx} (\Delta p)^3 = 0,$$

откуда

$$\left(\frac{d\Delta p}{dx} \right)^2 - \frac{2}{3aD_p} (\Delta p)^3 = \text{const.} \quad (1)$$

Поскольку при $x \rightarrow \infty$ должно быть $\Delta p \rightarrow 0$ и $d\Delta p/dx \rightarrow 0$, то $\text{const} = 0$. Принимая во внимание, что концентрация

избыточных дырок должна уменьшаться при удалении от точки $x = 0$, находим из уравнения (1)

$$\Delta p(x) = \Delta p(0) (1 + x/x_0)^{-2},$$

где

$$x_0 = [6aD_p / \Delta p(0)]^{1/2}.$$

88. Уравнение непрерывности имеет вид

$$D \frac{d^2 \Delta p}{dx^2} - \mathcal{E} \mu \frac{d \Delta p}{dx} - \Delta p / \tau_p = 0,$$

где

$$D = (n_0 + p_0) / (n_0 / D_p + p_0 / D_n), \quad \mu = (n_0 - p_0) / (n_0 / \mu_p + p_0 / \mu_n).$$

Для сильного электрического поля $\mathcal{E} > 0$ решение имеет вид (см. задачу 81)

$$\Delta p(x) = \Delta p(0) \exp(-x/L_{\mathcal{E}}),$$

где

$$L_{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \mu \tau_p.$$

Запишем дырочный ток в точке $x = 0$:

$$j_p|_{x=0} = \xi j = [e\mu_p (p_0 + \Delta p) \mathcal{E}]_{x=0} + (eD_p / L_{\mathcal{E}}) \Delta p(0),$$

или, пренебрегая диффузией по сравнению с дрейфом,

$$j_p|_{x=0} = \xi j = e\mu_p (p_0 + \Delta p) \mathcal{E}|_{x=0}. \quad (1)$$

Полная плотность тока равна

$$j = j_n + j_p = e\mu_n (n_0 + \Delta n) \mathcal{E} + e\mu_p (p_0 + \Delta p) \mathcal{E},$$

откуда

$$\mathcal{E}|_{x=0} = (j / e\mu_p) [bn_0 + p_0 + (b+1)\Delta p(0)]^{-1}. \quad (2)$$

Подставляя выражение (2) в (1), получим

$$\xi j = j \frac{p_0 + \Delta p(0)}{bn_0 + p_0 + (b+1)\Delta p(0)} \approx j \frac{p_0 + \Delta p(0)}{bn_0 + p_0}.$$

Следовательно,

$$\xi = \frac{p_0}{bn_0 + p_0} + \frac{\Delta p(0)}{bn_0 + p_0},$$

откуда

$$\Delta p(0) = \xi (bn_0 + p_0) - p_0. \quad (3)$$

В нашем случае имеем

$$\Delta p(0) = -0,11 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}.$$

Если $\xi = \xi_0 = p_0 / (bn_0 + p_0)$, то из выражения (3) следует, что $\Delta p(0) = 0$; такой контакт называется омическим. Если в слабо легированном электронном полупроводнике осуществляется условие $\xi < \xi_0 = p_0 / (bn_0 + p_0)$, то при наложении сильного положительного поля происходит обеднение приконтактной области неосновными носителями. Это явление носит название эксклюзии носителей заряда.

89. Исходное уравнение таково же, как в предыдущей задаче, но распределение $\Delta p(x)$ (см. задачу 81) иное:

$$\Delta p(x) = \Delta p(0) \exp(-e|\mathcal{E}|x/kT). \quad (1)$$

Дырочный ток в точке $x = 0$ равен

$$j_p(0) = \xi j = -e[p_0 + \Delta p(0)]\mu_p|\mathcal{E}| - eD_p \left. \frac{d\Delta p}{dx} \right|_{x=0},$$

или, учитывая (1),

$$j_p(0) = \xi j = -ep_0\mu_p|\mathcal{E}|. \quad (2)$$

Электронный ток в точке $x = 0$ есть

$$\begin{aligned} j_n(0) &= -e[n_0 + \Delta p(0)]\mu_n|\mathcal{E}| - \frac{eD_n}{kT} \Delta p(0) e|\mathcal{E}| = \\ &= -e[n_0 + 2\Delta p(0)]b\mu_p|\mathcal{E}|. \end{aligned} \quad (3)$$

Складывая выражения (2) и (3), находим

$$\xi = j_p(0)/j = p_0[bn_0 + p_0 + 2b\Delta p(0)]^{-1}.$$

Отсюда $\Delta p(0) = (2b\xi)^{-1}[(1 - \xi)p_0 - \xi bn_0]$. Если $\xi \ll 1$, то $\Delta p(0) = (p_0 - \xi bn_0)/2b\xi$.

В нашем случае

$$\Delta p(0) = 2,9 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3},$$

В слабо легированном электронном полупроводнике, к которому в точке $x = 0$ приложено сильное отрицательное электрическое поле (т. е. направление поля таково, что дырки движутся к электроду в точке $x = 0$), при малых коэффициентах инжекции ξ происходит накопление неосновных носителей — дырок — в области вблизи электрода.

90. Из определения коэффициента инжекции следует

$$j_p(0) = \xi[j_p(0) + j_n(0)],$$

откуда

$$j_n(0) = j_p(0)(1 - \xi)/\xi.$$

Плотность дырочного тока в точке $x = 0$ равна

$$j_p(0) = -eD_p \left. \frac{d\Delta p}{dx} \right|_{x=0}$$

Учитывая, что в рассматриваемом случае

$$\Delta p(x) = \Delta p(0) \exp(-x/L_p),$$

имеем

$$j_p(0) = eD_p \Delta p(0) / L_p.$$

Для плотности электронного тока в точке $x = 0$ получим

$$j_n(0) = eD_p \Delta p(0) (1 - \xi) / \xi L_p = 1,68 \text{ мА} \cdot \text{см}^{-2}.$$

Глава 4

ДИФФУЗИЯ И ДРЕЙФ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

91. Напряженне V_H и поле \mathcal{E}_y определяются из условия $j_y = 0$. Пренебрегая в уравнении (4.1а) членами порядка H^2 , получаем

$$j_x = en_0 \mu_n \mathcal{E}_x,$$

$$j_y = 0 = en_0 \mu_n (\mathcal{E}_y + \mathcal{E}_x \mu_{nH} H / c).$$

Отсюда

$$\mathcal{E}_y = -\mathcal{E}_x \mu_{nH} H / c = -(j_x / en_0 \mu_n) \mu_{nH} H / c$$

и

$$R_H = R_{H0} = -\mu_{nH} / (en_0 \mu_n) = 7,38 \cdot 10^3 \text{ см}^3 \cdot \text{Кл}^{-1},$$

$$V_H = -(\mu_{nH} / \mu_n) (aj_x H / en_0 c) = 3,7 \cdot 10^{-3} \text{ В}.$$

92. Из уравнения (4.2а) следует ($\beta = \mu_{pH} H / c$), если пренебречь членами порядка H^3 ,

$$\mathcal{E}_y = \beta \mathcal{E}_x, \quad j_{px} = p e \mu_p \mathcal{E}_x [1 - \beta^2 (\eta_p - 1)].$$

Отсюда ввиду малости относительного изменения $\rho = 1/\sigma$ имеем

$$\frac{\Delta \sigma}{\sigma_0} = \frac{\Delta \rho}{\rho_0} = (\eta_p - 1) \beta^2, \quad \beta^2 = \left(\frac{\mu_{pH} H}{c} \right)^2 = 8 \cdot 10^{-3}$$

и $\eta_p = 1,3$. По формуле (4.3) $R_{H0} = c\beta / \sigma_0 H$, поэтому $\beta^2 = (R_{H0} \sigma_0 H / c)^2$ и, согласно определению (4.5),

$$\xi = \eta_p - 1 = 0,3.$$

Это значение ξ характерно для рассеяния дырок на акустических колебаниях решетки.

93. Возьмем y -компоненту суммы уравнений (4.1а) и (4.2а):

$$0 = j_{ny} + j_{py} = e(n\mu_n + p\mu_p)\mathcal{E}_y + e(n\mu_n\mu_{pH} - p\mu_p\mu_{pH})\mathcal{E}_x H/c.$$

Отсюда

$$\mathcal{E}_y = (p - nb^2)\mathcal{E}_x\mu_{pH}H/c(p + nb).$$

По формуле (4.3) получаем

$$\begin{aligned} R_H &= \frac{c\mathcal{E}_y}{\tau_0\mathcal{E}_x H} = \frac{c\mathcal{E}_y}{H(n\mu_n + p\mu_p)e} = \\ &= \frac{c\mathcal{E}_y}{H\mathcal{E}_x e\mu_p(p + nb)} = \frac{p - nb^2}{(p + nb)^2} \frac{\mu_{pH}}{\mu_p} \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Определим величины p и n из условия нейтральности:

$$p = n + N_a = N_a + n_i^2/p;$$

отсюда

$$p = N_a/2 + \sqrt{N_a^2/4 + n_i^2} = 5,47 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3},$$

Выбранный знак корня отвечает условию $p > 0$; $n = 0,47 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$.

Окончательно получаем

$$R_H = -1190 \text{ см}^3 \text{ Кл}^{-1}.$$

94. При $R_H = 0$ обращается в нуль \mathcal{E}_y , поэтому из формул (4.6) и (4.7) находим

$$\begin{aligned} 0 = j_{ny} + j_{py} &= \frac{neb\mu_p}{1 + b^2\beta^2} b\beta\mathcal{E}_x - \frac{pe\mu_p}{1 + \beta^2} \beta\mathcal{E}_x, \\ \frac{nb^2}{1 + b^2\beta^2} &= \frac{p}{1 + \beta^2}, \quad \frac{p}{n} = \frac{b^2(1 + \beta^2)}{1 + b^2\beta^2} = 25,3. \end{aligned}$$

При малых β из условия $j_y = 0$ следует

$$R_{H0}\sigma_0 H/c = \mathcal{E}_y/\mathcal{E}_x = \beta(p - nb^2)/(p + nb).$$

Рассматривая x -компоненту суммы выражений (4.6) и (4.7), получим

$$\begin{aligned} j_x = ne\mu_n\mathcal{E}_x [1 - b^2\beta^2 - b\beta^2(p - nb^2)/(p + nb)] + \\ + pe\mu_p\mathcal{E}_x [1 - \beta^2 + \beta^2(p - nb^2)/(p + nb)]. \end{aligned}$$

Отсюда $\Delta\sigma/\sigma_0 = -pn\beta^2(1 + b)^2 b/(p + nb)^2$, и

$$\begin{aligned} \xi &= -(\Delta\sigma/\sigma_0)(c/R_{H0}\sigma_0 H)^2 = nrb(1 + b)^2/(p - nb^2)^2 = \\ &= (p/n)b(1 + b)^2/(p/n - b^2)^2 = 0,95. \end{aligned}$$

95. Интегрируя уравнение (4.12) по x от $x=0$ до $x=d$ (см. рис. 7), находим

$$0 = \sigma_0 \mathcal{E}_y d + eH(\mu_{nH} + \mu_{pH}) D_p \Delta n(0) / c.$$

Так как образец — куб, то $\mathcal{E}_y d = V_{\text{ФЭМ}}$, и

$$V_{\text{ФЭМ}} = -\rho_0 e \beta (1+b) D_p \Delta n(0) = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ В}.$$

96. В данном случае имеет место компенсация ФЭМ напряжения изменением падения напряжения за счет фотопроводимости (ФП). Интегрируя уравнение (4.12), удержим лишь слагаемые порядка

$$\Delta n = \Delta p = \Delta n(0) \exp(-x/L_n),$$

учитывая влияние генерации на грани $x=0$. Получим

$$0 = e \mathcal{E}_{1y} (\mu_n + \mu_p) \Delta n(0) L_n + eH(\mu_{nH} + \mu_{pH}) D_n \Delta n(0) / c.$$

Отсюда

$$\tau = \left(\frac{\mu_{nH} + \mu_{pH}}{\mu_n + \mu_p} \frac{H}{c \mathcal{E}_{1y}} \right)^2 D_n = 5 \cdot 10^{-7} \text{ с}.$$

97. Из уравнений (4.8) — (4.12) следует, что для достаточно толстого образца n -типа

$$\Delta n(x) = \Delta n(0) \exp(-x/L_p), \quad L_p = \sqrt{D_p \tau_p},$$

$$\Delta p(x) = \tau_p \Delta n(x) / \tau_n.$$

Отсюда, поскольку отклонение от равновесия мало, имеем

$$\delta = \frac{1}{d \sigma_0} \int_0^d \Delta \sigma(x) dx = \frac{\Delta n(0)}{n_0} \frac{L_p}{d} \left(1 + \frac{\tau_p}{b \tau_n} \right). \quad (1)$$

Далее, уравнение (4.12) в нашем случае можно записать в виде

$$j_y = \frac{\sigma_0 V_{\text{ФЭМ}}}{a} + e \beta (1+b) D_n \left(\frac{\tau_p}{\tau_n} \right) \frac{d \Delta n}{dx}.$$

Полный ток в направлении y равен нулю, поэтому, интегрируя по x , находим

$$V_{\text{ФЭМ}} = \frac{a}{d} \frac{(1+b) D_p \Delta n(0) \tau_p}{\mu_n n_0 \tau_n}, \quad \frac{\tau_p}{\tau_n} = 10.$$

Подставляя этот результат в (1), получаем

$$\tau_p = \frac{1}{D_p} \left[\frac{n_0}{\Delta n(0)} \frac{\delta \cdot d}{1 + \tau_p / b \tau_n} \right]^2 = 10^{-5} \text{ с}, \quad \tau_n = 10^{-6} \text{ с}.$$

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

98. а) $0,72 \cdot 10^{-4}$ см; б) $2,9 \cdot 10^{-3}$ см; в) $1,5 \cdot 10^{-3}$ см; для металла оценка дебаевской длины по формуле (5.8) дает величину порядка $7 \cdot 10^{-8}$ см.

99. Уравнение Пуассона и граничные условия в рассматриваемом случае записываются в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{4\pi e}{\epsilon} [n - n(x)] = -\frac{4\pi en}{\epsilon} \left[1 - \exp \frac{e\varphi}{kT}\right], \quad (1)$$

$$\varphi \rightarrow 0, \quad \frac{d\varphi}{dx} \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad (2)$$

$$\varphi = \varphi_s < 0 \quad \text{при } x = 0.$$

Отсюда

$$\frac{d\varphi}{dx} = \sqrt{2} \frac{kT}{eL_D} \left[\exp \frac{e\varphi}{kT} - \frac{e\varphi}{kT} - 1 \right]^{1/2}, \quad (3)$$

где

$$L_D = (\epsilon kT / 4\pi n e^2)^{1/2}. \quad (4)$$

Из уравнения (3) с учетом граничных условий (2) видим, что изменение потенциала определяется соотношением

$$\int_{e\varphi/kT}^{e\varphi_s/kT} [\exp v - v - 1]^{-1/2} dv = \sqrt{2} \frac{x}{L_D}. \quad (5)$$

Определим толщину обогащенного слоя \tilde{L} условием $e\varphi(\tilde{L})/kT = 1$. Тогда (при $e\varphi_s/kT \gg 1$)

$$\tilde{L} = aL_D, \quad (6)$$

где

$$a = 2^{-1/2} \int_1^{\infty} [\exp v - v - 1]^{-1/2} dv \approx 1,1.$$

Мы видим, что даже в условиях сильного обогащения ширина обогащенного слоя не сильно отличается от дебаевской длины.

100. Ход потенциала вблизи поверхности определяется уравнением

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{kT}{eL_D^2} \left[1 - \exp \left(-\frac{e\varphi}{kT} \right) \right], \quad (1)$$

где $L_D = (\epsilon kT/4\pi e^2)^{1/2}$, а граничные условия совпадают с условиями (2) задачи 99. Отсюда

$$\int_{e\varphi/kT}^{e\varphi_s/kT} [v - 1 + \exp(-v)]^{-1/2} dv = x \sqrt{2}/L_D. \quad (2)$$

В области, где $e\varphi/kT \ll 1$, объемный заряд мал, а при $e\varphi/kT \gg 1$ объемный заряд почти постоянен и равен $-en$. Границу области объемного заряда можно определить соотношением $e\varphi(w)/kT = 1$, и ширина этой области равна

$$w = L_D 2^{-1/2} \int_1^{e\varphi_s/kT} [v - 1 + \exp(-v)]^{-1/2} dv = L_D (2e\varphi_s/kT)^{1/2},$$

которая скоро $e\varphi_s/kT \gg 1$. Имеем $L_D = (\epsilon kT/4\pi e^2 p)^{1/2} = 1,3 \cdot 10^{-5}$ см. и $w \approx 5,7 \cdot 10^{-5}$ см.

101. Дифференцируя выражение (2) из решения задачи 100 по x , находим

$$\mathcal{E}(0) = -\left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=0} = \frac{kT}{eL_D} \left(\frac{2e\varphi_s}{kT} \right)^{1/2}.$$

Для приведенных в условии задачи 100 параметров имеем

$$\mathcal{E}(0) \approx 9 \cdot 10^3 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}.$$

102. В рассматриваемом случае уравнение Пуассона следует записать с учетом наличия носителей заряда обоих знаков:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{kT}{eL_D^2} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right) + \frac{p}{n} \left[\exp\frac{e\varphi}{kT} - 1 \right] \right\}, \quad (1)$$

где $L_D = (\epsilon kT/4\pi n e^2)^{1/2}$, а n и p — концентрации электронов и дырок в объеме полупроводника. Отсюда

$$\int_{e\varphi/kT}^{e\varphi_s/kT} \left[v + e^{-v} - 1 + \frac{p}{n} (e^v - v - 1) \right]^{1/2} dv = \frac{x \sqrt{2}}{L_D}. \quad (2)$$

Точка $x = x_i$, в которой $n(x_i) = p(x_i)$, определяется условием

$$\varphi(x_i) = (kT/2e) \ln(n/p).$$

Таким образом,

$$x_i = L_D 2^{-1/2} \int_{v_i}^{v_s} \left[v - 1 + e^{-v} + \frac{p}{n} (e^v - v - 1) \right]^{-1/2} dv,$$

где $v_s = e\varphi_s/kT$, $v_i = \frac{1}{2} \ln(n/p)$, причем область, где $p(x) > n(x)$, возникает лишь при $v_s > v_i$, т. е. при $\varphi_s > (kT/2t) \ln(n/p)$. Поскольку в наших условиях $v_i \gg 1$ и $p \gg n$, имеем

$$x_i \approx L_D 2^{-1/2} \int_{v_i}^{v_s} [v + (p \exp v)/n]^{-1/2} dv.$$

При $v_s \ll \ln(n/p)$ вкладом свободных дырок можно пренебречь, и мы получаем

$$x_i \approx L_D \{ [2e\varphi_s/kT]^{1/2} - [\ln(n/p)]^{1/2} \} = 1,4L_D.$$

Принимая во внимание, что $p = n_i^2/n$, где $n_i = 1,03 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ (см. задачи 1, 7), отсюда находим

$$x_i \approx 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ см.}$$

103. В точке инверсии проводимости выполняется условие

$$\mu_p p = \mu_n n(x_i),$$

где $n(x_i) = n \exp(e\varphi_i/kT)$, φ_i — потенциал в точке инверсии. Отсюда

$$\varphi_i = (kT/e) \ln(p^2/bn_i^2),$$

поэтому

$$\frac{\varphi_{iSi}}{\varphi_{iGe}} = \frac{\ln(p^2/b_{Si}n_{iSi}^2)}{\ln(p^2/b_{Ge}n_{iGe}^2)} = 2,8.$$

104.

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{4\pi\rho}{\epsilon}, \quad \rho = e[p(x) - n(x)], \quad (1)$$

где

$$p(x) = n_i \exp[-e\varphi(x)/kT], \quad n = n_i \exp[e\varphi(x)/kT]. \quad (2)$$

Здесь n_i — концентрация электронов (или дырок) в объеме под областью пространственного заряда.

Подставляя формулы (2) в уравнение Пуассона (1), находим

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{4\pi e}{\varepsilon} n_i \left[\exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right) - \exp\frac{e\varphi}{kT} \right] \approx \frac{8\pi e^2 n_i}{\varepsilon kT} \varphi.$$

Поскольку

$$L_D = (\varepsilon kT / 8\pi e^2 n_i)^{1/2},$$

получаем

$$d^2\varphi/dx^2 - \varphi/L_D^2 = 0. \quad (3)$$

Так как потенциал определен с точностью до константы, мы можем считать его равным нулю в глубине образца.

Далее, нормальная составляющая вектора электрической индукции должна быть непрерывна (нет поверхностных зарядов). Поэтому граничные условия имеют вид (см. рис. 8 на с. 42)

$$\begin{aligned} \varphi &= 0, & x &\rightarrow \infty, \\ \mathcal{E} &= -\varepsilon d\varphi/dx, & x &= 0. \end{aligned}$$

Решение уравнения (3) имеет вид

$$\varphi(x) = C_1 \exp(-x/L_D) + C_2 \exp(x/L_D).$$

Из граничных условий находим $C_2 = 0$, $C_1 = \mathcal{E}L_D/\varepsilon$ и

$$\varphi(x) = (\mathcal{E}L_D/\varepsilon) \exp(-x/L_D). \quad (4)$$

На основании (5.1) и (4) получаем

$$\begin{aligned} E_c &= E_{c0} - (e\mathcal{E}L_D/\varepsilon) \exp(-x/L_D), \\ E_v &= E_{v0} - (e\mathcal{E}L_D/\varepsilon) \exp(-x/L_D). \end{aligned}$$

Скачок потенциала на поверхности равен

$$\Delta\varphi = \mathcal{E}L_D/\varepsilon = 0,72 \text{ мВ.}$$

105. Уравнение Пуассона и граничные условия в рассматриваемом случае имеют вид (см. рис. 9 на с. 42)

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{4\pi e}{\varepsilon} [p(x) - N_a] = \frac{4\pi e}{\varepsilon} p \left[\exp\frac{e\varphi}{kT} - 1 \right], \quad (1)$$

$$\varphi \rightarrow 0, \quad \frac{d\varphi}{dx} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty, \quad (2')$$

$$\mathcal{E} = -\varepsilon \frac{d\varphi}{dx} \quad \text{при} \quad x = 0. \quad (2'')$$

Здесь $p(x) = p \exp(e\varphi/kT)$, $p = N_a$.

Умножим обе части уравнения (1) на $2d\varphi/dx$ и проинтегрируем по φ :

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = \frac{8\pi e}{\varepsilon} p \left(\frac{kT}{e} \exp\left(\frac{e\varphi}{kT}\right) - \varphi t + C\right). \quad (3)$$

Постоянная C определяется из граничного условия (2'): $C = -kT/e$. Из (3) имеем

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\left\{ \frac{8\pi p kT}{\varepsilon} \times \right. \\ \left. \times \left[\exp(e\varphi/kT) - e\varphi/kT - 1 \right]^{1/2} \right\}.$$

Принимая во внимание, что $e\varphi/kT \ll 1$, получим

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\left(\frac{4\pi p e^2}{\varepsilon kT} \right)^{1/2} \varphi(x), \\ \varphi(x) = \varphi_s \exp(-x/L_D),$$

где

$$L_D = \left(\frac{\varepsilon kT}{4\pi e^2 p} \right)^{1/2} = \\ = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ см.}$$

Из граничного условия (2'') найдем φ_s :

$$\varphi_s = \mathcal{E} L_D / \varepsilon.$$

Окончательно,

$$\varphi(x) = \left(\frac{\mathcal{E} L_D}{\varepsilon} \right) \exp(-x/L_D); \\ \varphi_s = 1,9 \text{ мВ.}$$

106. Аналогично задаче 104 получаем уравнение

$$d^2\varphi/dx^2 - \varphi/L_D^2 = 0,$$

где $L_D = (\varepsilon kT / 8\pi e^2 n_i)^{1/2}$. Граничные условия (рис. 26) таковы:

$$\varphi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty, \\ \mathcal{E} = 4\pi Q_s / \varepsilon \quad \text{при} \quad x = 0,$$

где $Q_s = eN$. Решение уравнения имеет вид

$$\varphi(x) = C_1 \exp(-x/L_D) + C_2 \exp(x/L_D).$$

Используя граничные условия, находим

$$C_2 = 0, \quad C_1 = 4\pi eNL_D / \varepsilon.$$

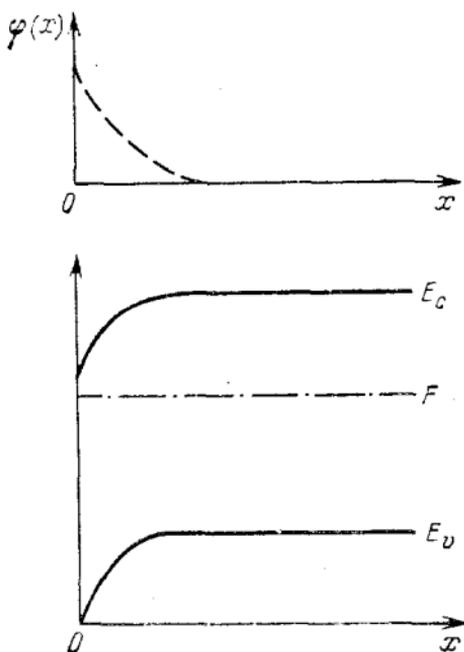


Рис. 26. Изгиб зон и ход потенциала в приповерхностной области собственного германия, на поверхности которого адсорбирована донорная примесь.

Окончательно,

$$\varphi = (4\pi eNL_D/\varepsilon) \exp(-x/L_D),$$
$$\Delta\varphi = (4\pi eNL_D/\varepsilon) = 8,2 \text{ мВ.}$$

107. Из граничного условия имеем

$$\mathcal{E} = 4\pi eN/\varepsilon.$$

Величину φ_s найдем из условия электронейтральности образца в целом:

$$N = \int_0^{\infty} [n(x) - p(x)] dx,$$

где

$$n(x) = n_i \exp(e\varphi/kT), \quad p(x) = n_i \exp(-e\varphi/kT).$$

Таким образом,

$$N = 2n_i \int_0^{\varphi_s/\mathcal{E}} \text{sh}[e(\varphi_s - \mathcal{E}x)/kT] dx.$$

Обозначив $e(\varphi_s - \mathcal{E}x)/kT = y$, получим

$$N = -(2n_i kT/e\mathcal{E}) \int_{e\varphi_s/kT}^0 \text{sh} y dy = -(2n_i kT/e\mathcal{E}) \text{ch} y \Big|_{e\varphi_s/kT}^0 =$$
$$= (n_i kT/e\mathcal{E}) [\exp(e\varphi_s/kT) - 2 + \exp(-e\varphi_s/kT)].$$

Принимая условие $e\varphi_s/kT \gg 1$, будем иметь

$$\exp(e\varphi_s/kT) \approx 4\pi e^2 N^2 / \varepsilon kT n_i,$$

откуда

$$e\varphi_s = kT \ln(4\pi e^2 N^2 / \varepsilon kT n_i) = 0,32 \text{ эВ.}$$

108. Аналогично задаче 105 запишем уравнение Пуассона:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{4\pi e}{\varepsilon} [p(x) - N_a] = \frac{4\pi e}{\varepsilon} \left[\exp\left(\frac{e\varphi}{kT}\right) - 1 \right]. \quad (1)$$

Граничные условия имеют вид

$$\mathcal{E} = 4\pi Q_s/\varepsilon, \quad Q_s = eN \quad \text{при } x = 0; \quad (2')$$

$$\varphi \rightarrow 0, \quad d\varphi/dx \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (2'')$$

Запишем решение уравнения (1) в виде (см. решение

задачи 105)

$$\varphi(x) = \varphi_s \exp(-x/L_D),$$

где

$$L_D = (\epsilon kT/4\pi e^2 p)^{1/2}.$$

Величину φ_s можно выразить из граничного условия (2'):

$$\mathcal{E}|_{x=0} = -\left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=0} = \frac{\varphi_s}{L_D} = \frac{4\pi e N}{\epsilon}; \quad \varphi_s = \frac{4\pi e N L_D}{\epsilon}.$$

Отсюда изменение работы выхода равно

$$\Delta\phi = e\varphi_s > 0, \quad \varphi_s = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ В},$$

т. е. работа выхода увеличилась на величину $\Delta\phi = e\varphi_s = 1,4 \cdot 10^{-3}$ эВ. Подставляя φ_s в условие $e\varphi_s/kT \ll 1$, находим, что это условие выполняется при

$$N \ll \epsilon kT/4\pi e^2 L_D,$$

т. е. в нашем случае при

$$N \ll 1,5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}.$$

109. В рассматриваемом случае изменение работы выхода определяется скачком потенциала φ в двойном слое (см. рис. 11):

$$\Delta\phi = -e\varphi.$$

Здесь $\varphi = 4\pi t$, t — мощность двойного слоя, $t = Nd$, $d = el$, l — плечо диполя-молекулы. Таким образом,

$$\Delta\phi = -4\pi e N d = -3,4 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}.$$

В задаче 107 мы получили, что $\Delta\phi = -e\varphi_0 = -0,32$ эВ. В рассматриваемом случае, как видно из полученного результата, изменение работы выхода в 94 раза меньше. Это связано с тем, что ширина области, в которой на электрон действует электрическое поле, гораздо больше для случая адсорбции ионов, чем при адсорбции дипольных молекул. Действительно, плечо дипольной молекулы равно $l = d/e \approx 2 \cdot 10^{-9}$ см, в то время как ширина области пространственного заряда, индуцированного положительными ионами, равна

$$x_0 = \varphi_s/\mathcal{E} = \varphi_s \epsilon / 4\pi e N = 2,8 \cdot 10^{-6} \text{ см}.$$

Во втором случае электрическое поле совершает при движении электрона гораздо большую работу, чем в

первом, даже несмотря на то, что во втором случае электрическое поле примерно в ϵ раз меньше.

110. Аналогично задаче 107 запишем

$$\mathcal{E} = 4\pi eN/\epsilon, \quad N = \int_0^{\infty} [n(x) - n] dx,$$

где $n(x) = n \exp(e\varphi/kT)$. Вводя обозначение $y = e(\varphi_s - \mathcal{E}x)/kT$, получаем

$$\begin{aligned} N &= - (nkT/e\mathcal{E}) \int_{e\varphi_s/kT}^0 (\exp y - 1) dy = \\ &= - (nkT/e\mathcal{E}) [1 - \exp(e\varphi_s/kT) + e\varphi_s/kT]. \end{aligned}$$

При $e\varphi_s/kT \gg 1$ находим

$$N \approx (nkT/e\mathcal{E}) \exp(e\varphi_s/kT),$$

откуда

$$e\varphi_s = kT \ln(4\pi e^2 N^2 / \epsilon kT n) = 0,2 \text{ эВ.}$$

Видно, что в рассматриваемых условиях неравенство $e\varphi_s/kT \gg 1$ действительно справедливо.

111. В рассматриваемом случае (см. решение задачи 110) имеем

$$\mathcal{E} = \frac{4\pi eN}{\epsilon}; \quad N = \int_0^{\infty} [p(x) - p] dx, \quad p(x) = p \exp\left(\frac{e\varphi}{kT}\right),$$

откуда

$$\begin{aligned} N &= (pkT/e\mathcal{E}) \exp(e\varphi_s/kT) = \\ &= (pkT\epsilon/4\pi e^2)^{1/2} \exp(e\varphi_s/kT) = 6,2 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}. \end{aligned}$$

112*. Имеем уравнение Пуассона

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{4\pi\rho}{\epsilon}; \quad \rho = e[N_d - N_a + p(x) - n(x)].$$

Граничные условия таковы:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_s > 0 && \text{при } x = 0, \\ \varphi &\rightarrow 0, \quad d\varphi/dx \rightarrow 0 && \text{при } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

В объеме полупроводника

$$N_d - N_a = n - p,$$

где n и p — концентрации электронов и дырок в объеме, а

$$n(x) = n \exp(e\varphi/kT), \quad p(x) = p \exp(-e\varphi/kT).$$

Отсюда

$$\rho = en[1 - \exp(e\varphi/kT)] + ep[\exp(-e\varphi/kT) - 1],$$

а так как $np = n_i^2$, т. е. $n/n_i = n_i/p = \gamma$, то

$$\rho = en_i\{\gamma[1 - \exp(e\varphi/kT)] + \gamma^{-1}[\exp(-e\varphi/kT) - 1]\}.$$

Введем обозначение $\psi = e\varphi/kT$, тогда уравнение Пуассона приобретет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{4\pi e^2 n_i}{\epsilon kT} [\gamma(1 - \exp \psi) + \gamma^{-1}[\exp(-\psi) - 1]].$$

Проинтегрируем обе части уравнения по ψ :

$$(d\psi/dx)^2 = -L_D^{-2}[\gamma\psi - \gamma \exp \psi - \gamma^{-1} \exp(-\psi) - \gamma^{-1}\psi] + C,$$

где $L_D^{-2} = 8\pi e^2 n_i / \epsilon kT$, L_D — длина Дебая. Константу C определим из граничного условия $\psi \rightarrow 0$ и $d\psi/dx \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Для константы получаем значение

$$C = -L_D^{-2}(\gamma + \gamma^{-1}).$$

Итак,

$$\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 = L_D^{-2}[\gamma(\exp \psi - 1) + \gamma^{-1}(\exp(-\psi) - 1) + \psi(\gamma^{-1} - \gamma)],$$

откуда

$$\frac{d\varphi}{dx} = \pm (kT/eL_D) \times$$

$$\times \left[\gamma\left(\exp\left(\frac{e\varphi}{kT}\right) - 1\right) + \gamma^{-1}\left(\exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right) - 1\right) + \frac{e\varphi}{kT}(\gamma^{-1} - \gamma)\right]^{1/2}.$$

Знак плюс следует отбросить, поскольку $d\varphi/dx < 0$, т. е. с ростом x потенциал убывает.

При $x = 0$ граничное условие имеет вид

$$\epsilon \mathcal{E}|_{x=0} = 4\pi Q_s,$$

где $\mathcal{E}|_{x=0} = -d\varphi/dx|_{x=0}$, Q_s — плотность заряда на поверхности. Отсюда

$$\mathcal{E}|_{x=0} = \frac{kT}{eL_D} \left[\gamma \left(\exp\left(\frac{e\varphi_s}{kT}\right) - 1 \right) + \gamma^{-1} \left(\exp\left(-\frac{e\varphi_s}{kT}\right) - 1 \right) + \frac{e\varphi_s}{kT} (\gamma^{-1} - \gamma) \right]^{1/2},$$

$$Q_s = 2en_i L_D \times$$

$$\times \left[\gamma \left(\exp\left(\frac{e\varphi_s}{kT}\right) - 1 \right) + \gamma^{-1} \left(\exp\left(-\frac{e\varphi_s}{kT}\right) - 1 \right) + \frac{e\varphi_s}{kT} (\gamma^{-1} - \gamma) \right]^{1/2}.$$

113*. Из задачи 112*

$$Q_s = 2en_i L_D \left[\gamma \left(\exp\left(\frac{e\varphi_s}{kT}\right) - 1 \right) + \right. \\ \left. + \gamma^{-1} \left(\exp\left(-\frac{e\varphi_s}{kT}\right) - 1 \right) + \frac{e\varphi_s}{kT} (\gamma^{-1} - \gamma) \right]^{1/2}, \\ L_D^{-2} = 8\pi e^2 n_i / \epsilon kT, \quad \gamma = n/n_i.$$

По условию задачи $n/n_i \gg 1$ и $e\varphi_s/kT \gg 1$. Тогда

$$Q_s \approx 2en_i L_D [\gamma \exp(e\varphi_s/kT)]^{1/2} = (\epsilon kT n / 2\pi)^{1/2} \exp(e\varphi_s/2kT).$$

Поскольку $Q_s = eN$, мы имеем

$$e\varphi_s/2kT = \ln [eN (2\pi/\epsilon kT n)^{1/2}] = 5,14.$$

Отсюда

$$e\varphi_s = 0,27 \text{ В.}$$

114*. Если зоны изогнуты вниз, то $\varphi > 0$, а если зоны изогнуты вверх, то $\varphi < 0$. Поэтому в решении задачи 112* следует сделать замену $\varphi_s \rightarrow -\varphi_s$:

$$Q_s = 2en_i L_D \left[\gamma \left(\exp\left(-\frac{e\varphi_s}{kT}\right) - 1 \right) + \right. \\ \left. + \gamma^{-1} \left(\exp\left(\frac{e\varphi_s}{kT}\right) - 1 \right) + \frac{e\varphi_s}{kT} (\gamma - \gamma^{-1}) \right]^{1/2}.$$

Здесь φ_s — абсолютная величина загиба зон; $L_D^{-2} = 8\pi e^2 n_i / \epsilon kT$; $\gamma = n/n_i \gg 1$ и $e\varphi_s/kT = 10 \gg 1$. Поэтому

$$Q_s \approx 2en_i L_D [-\gamma + \gamma^{-1} \exp(e\varphi_s/kT) + \gamma e\varphi_s/kT]^{1/2} \approx \\ \sim 2en_i L_D (\gamma e\varphi_s/kT)^{1/2} = (\epsilon n e\varphi_s / 2\pi)^{1/2} = 3,37 \cdot 10^{-8} \text{ Кл} \cdot \text{см}^{-2}.$$

Отсюда $N = Q_s/e = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$.

115. Изменение работы выхода электронов равно $\Delta\phi = e\varphi_s$. В нашем случае $e\varphi_s/kT = 2$.

В решении задачи 112* положим $\gamma = 1$ и заменим φ на $-\varphi$, при этом получим

$$Q_s = eN = 2en_i L_D [\exp(-e\varphi_s/kT) + \exp(e\varphi_s/kT) - 2]^{1/2},$$

откуда

$$N = 2n_i L_D [\exp(e\varphi_s/kT) + \exp(-e\varphi_s/kT) - 2]^{1/2}.$$

Здесь $L_D = (\epsilon kT / 8\pi e^2 n_i)^{1/2} = 0,72 \cdot 10^{-4} \text{ см}$. Таким образом,

$$N = 0,75 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}.$$

116. В решении задачи 112* сделаем замену $\varphi_s \rightarrow -\varphi_s$ и учтем, что в рассматриваемой задаче $\gamma = n/p =$

$= 0,01 \ll 1$ и $\exp(e\varphi_s/kT) = e^5 \gg 1$. Тогда

$$Q_s = eN = 2en_i L_D [\gamma^{-1} \exp(e\varphi_s/kT)]^{1/2},$$

где $L_D = (\epsilon kT/8\pi e^2 n_i)^{1/2}$. Отсюда

$$N = e^{-1} (\epsilon kT p/2\pi)^{1/2} \exp(e\varphi_s/2kT) = 3,7 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}.$$

117. Принимая во внимание, что в нашем случае $|\Delta\phi| = e\varphi_s = 5kT$, $\gamma = n/n_i = 1$, $\exp(e\varphi_s/kT) = e^5 \gg 1$, из решения задачи 112* получим

$$Q_s = eN \approx 2en_i L_D \exp(e\varphi_s/2kT),$$

где $L_D = (\epsilon kT/8\pi e^2 n_i)^{1/2} = 2,9 \cdot 10^{-3}$ см. Отсюда

$$N = 2n_i L_D \exp(e\varphi_s/2kT) = 7,3 \cdot 10^8 \text{ см}^{-2}.$$

118. Поскольку по условию задачи $n_i = 2,2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $\gamma = n_i/p = 0,01$, $e\varphi_s/kT = 1$, получаем (см. решение задачи 112*)

$$Q_s = 2en_i L_D [\gamma(e-1) + \gamma^{-1}(e^{-1}-1) + (\gamma^{-1} - \gamma)]^{1/2} \approx \\ \approx 2en_i L_D \gamma^{-1} e^{-1} = 1,9 \cdot 10^{-8} \text{ Кл} \cdot \text{см}^{-2},$$

где $L_D = (\epsilon kT/8\pi e^2 n_i)^{1/2} = 7,2 \cdot 10^{-5}$ см. Таким образом,

$$N = Q_s/e = 1,1 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}.$$

119*. В рассматриваемом случае поверхностная проводимость имеет вид (ср. с формулой (5.12))

$$G \approx e\mu_p^* \int_0^{\infty} [p(x) - p] dx,$$

где $p(x) = p \exp(e\varphi/kT)$, $\varphi > 0$, т. е.

$$G = e\mu_p^* \int_0^{\infty} p [\exp(e\varphi/kT) - 1] dx = \\ = -e\mu_p^* p \int_0^{\varphi_s} [\exp(e\varphi/kT) - 1] (d\varphi/dx)^{-1} d\varphi. \quad (1)$$

Граничные условия таковы:

$$\varphi = \varphi_s \quad \text{при } x = 0, \quad e\varphi_s = 0,25 \text{ эВ};$$

$$\varphi \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Уравнение Пуассона имеет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{4\pi e}{\epsilon} [p(x) - N_a], \quad \text{где } N_a = p_s$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{4\pi e}{\varepsilon} p \left[\exp \frac{e\varphi}{kT} - 1 \right],$$

откуда

$$\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = \frac{8\pi e p}{\varepsilon} \int \left[\exp \frac{e\varphi}{kT} - 1 \right] d\varphi = \frac{8\pi e p}{\varepsilon} \left[\frac{kT}{e} \exp \frac{e\varphi}{kT} - \varphi + C \right].$$

При $x \rightarrow \infty$ должно быть $\varphi \rightarrow 0$, $d\varphi/dx \rightarrow 0$, следовательно, $C = -kT/e$ и

$$\frac{d\varphi}{dx} = - \left[\frac{8\pi p kT}{\varepsilon} \left(\exp \frac{e\varphi}{kT} - \frac{e\varphi}{kT} - 1 \right) \right]^{1/2}. \quad (2)$$

Подставляя формулу (2) в выражение (1), находим

$$G = e\mu_p^* p \int_0^{\varphi_s} \frac{[\exp(e\varphi/kT) - 1] d\varphi}{[(8\pi p kT/\varepsilon) (\exp(e\varphi/kT) - e\varphi/kT - 1)]^{1/2}}.$$

Поскольку по условию задачи $e\varphi_s/kT = 10 \gg 1$, основной вклад в интеграл дает область значений φ , близких к φ_s , и, следовательно, можно записать:

$$G \approx e\mu_p^* p \left(\frac{\varepsilon}{8\pi p kT} \right)^{1/2} \int_0^{\varphi_s} \frac{[\exp(e\varphi/kT) - 1]}{\exp(e\varphi/2kT)} d\varphi.$$

Отсюда

$$G = e\mu_p^* p \left(\frac{\varepsilon kT}{2\pi p e^2} \right)^{1/2} \exp \left(\frac{e\varphi_s}{2kT} \right) = \sqrt{2} L_D e\mu_p^* p \exp(e\varphi_s/2kT),$$

где $L_D = (\varepsilon kT/4\pi e^2 p)^{1/2}$.

Подставляя данные условия задачи, получаем ответ

$$G = 4,4 \cdot 10^{-5} \text{ Ом}^{-1}.$$

120.

$$N = \int_0^{\infty} [p(x) - p] dx. \quad (1)$$

Из определения поверхностной проводимости и формулы (1) в нашем случае получим

$$G = e\mu_p^* \int_0^{\infty} [p(x) - p] dx = e\mu_p^* N,$$

откуда $N = G/e\mu_p^*$, $Q_s = eN$. Подставляя численные

значения для G и μ_p^* из задачи 119, найдем

$$N = 2,8 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}; \quad Q_s = 4,4 \cdot 10^{-8} \text{ Кл} \cdot \text{см}^{-2}.$$

121*. Поверхностная проводимость равна (см. формулы (5.12) и (5.11))

$$G = e\mu_n \Gamma_n + e\mu_p \Gamma_p = e\mu_n \int_0^{\infty} [n_i \exp(e\varphi/kT) - n_i] dx + \\ + e\mu_p \int_0^{\infty} [n_i \exp(-e\varphi/kT) - n_i] dx,$$

или, поскольку по условию задачи $e\varphi/kT \ll 1$,

$$G \approx e\mu_n n_i \int_0^{\infty} \frac{e\varphi}{kT} dx - e\mu_p n_i \int_0^{\infty} \frac{e\varphi}{kT} dx = \frac{e^2 \mu_n n_i}{kT} (1 - b^{-1}) \int_0^{\infty} \varphi dx. \quad (1)$$

Зависимость $\varphi(x)$ найдем из решения уравнения Пуассона:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{4\pi\rho}{\epsilon}, \quad \text{или} \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{4\pi e}{\epsilon} [p(x) - n(x)]. \quad (2)$$

Граничные условия таковы:

$$\varphi = \varphi_s \quad \text{при} \quad x = 0, \\ \varphi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty.$$

Подставляя в (2) выражения для концентраций электронов и дырок в области пространственного заряда, найдем

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{4\pi e n_i}{\epsilon} \left(\exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right) - \exp\left(\frac{e\varphi}{kT}\right) \right) \approx \frac{8\pi e^2 n_i}{\epsilon kT} \varphi,$$

или $d^2\varphi/dx^2 = \varphi/L_D^2$, где $L_D = (\epsilon kT/8\pi e^2 n_i)^{1/2}$.

Решение уравнения имеет вид

$$\varphi = \varphi_s \exp(-x/L_D).$$

Подставляя его в (1), находим

$$G = e^2 \mu_n n_i L_D \varphi_s (1 - b^{-1})/kT,$$

откуда

$$\varphi_s = G \frac{kT}{e^2 \mu_n n_i L_D (1 - b^{-1})} = \frac{8\pi G L_D}{\epsilon \mu_n (1 - b^{-1})} = 5,2 \text{ мВ}.$$

122. Согласно формулам (5.11) и (5.12) в рассматриваемом случае поверхностная проводимость равна

$$G \approx e\mu_p \int_0^{\infty} [p(x) - p] dx,$$

где $p(x) = p \exp(e\varphi/kT)$. Отсюда

$$G = e\mu_p p \int_0^{\infty} [\exp(e\varphi/kT) - 1] dx. \quad (1)$$

Принимая во внимание, что $e\varphi/kT \ll 1$, получаем

$$G = e\mu_p p \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{e\varphi}{kT} - 1\right) dx = \frac{e^2 \mu_p p}{kT} \int_0^{\infty} \varphi(x) dx. \quad (2)$$

Из решения задачи 108 имеем

$$\varphi(x) = \varphi_0 \exp(-x/L_D),$$

где $L_D = (\epsilon kT/4\pi e^2 p)^{1/2} = 1,5 \cdot 10^{-5}$ см. Подставляя этот результат в формулу (2), найдем

$$G = e^2 \mu_p p \varphi_0 L_D / kT.$$

Отсюда $\varphi_0 = GkT / (e^2 \mu_p p L_D) = 3,6$ мВ.

123. Из решения задачи 110 имеем

$$e\varphi_0 = kT \ln(4\pi e^2 N^2 / \epsilon kT n).$$

Согласно условию нейтральности образца

$$N = \int_0^{\infty} [n(x) - n] dx,$$

где $n(x) = n \exp(e\varphi/kT)$; с другой стороны,

$$G = e\mu_n \int_0^{\infty} [n(x) - n] dx = e\mu_n N,$$

откуда $N = G/e\mu_n$.

Окончательно получаем

$$e\varphi_0 = kT \ln(4\pi G^2 / \epsilon kT n \mu_n^2) = 0,22 \text{ эВ}, \quad \varphi_0 = 0,22 \text{ В}.$$

124. Граничное условие в точке $x=0$ к уравнению Пуассона имеет вид

$$4\pi Q_0 = \epsilon_1 \mathcal{E}_1 - \epsilon_2 \mathcal{E}_2, \quad (1)$$

где $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}$ — внешнее электрическое поле, $\epsilon_1 = 1$, $\mathcal{E}_2 = -\frac{d\varphi}{dx} \Big|_{x=0}$ и $\epsilon_2 = \epsilon = 16$. Уравнение Пуассона записывается в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{4\pi\rho}{\epsilon}, \quad \rho = e \left[n - n \exp \frac{e\varphi}{kT} \right],$$

где $n = N_d$, или, поскольку $e\varphi/kT \ll 1$,

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} \approx \frac{4\pi e^2 n \varphi}{\epsilon kT} = \frac{\varphi}{L_D^2}.$$

Интегрируя это уравнение с граничными условиями

$$\varphi = \varphi_s \quad \text{при} \quad x = 0,$$

$$\varphi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty,$$

находим

$$\varphi = \varphi_s \exp(-x/L_D),$$

откуда

$$\int_0^{\infty} \varphi dx = \varphi_s L_D. \quad (2)$$

Запишем выражение для поверхностной проводимости:

$$G = e\mu_n \int_0^{\infty} [n(x) - n] dx + e\mu_p \int_0^{\infty} [p(x) - p] dx.$$

Вторым слагаемым здесь можно пренебречь, поскольку $n \gg p$ и $n(x) \gg p(x)$ (зоны изогнуты вниз). Используя формулу (2), получим

$$G = e\mu_n n \int_0^{\infty} \frac{e\varphi}{kT} dx = e\mu_n n \frac{e\varphi_s}{kT} L_D.$$

Отсюда

$$\varphi_s = \frac{GkT/e}{e\mu_n n L_D} = \frac{4\pi G L_D}{e\mu_n} = 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ В.}$$

Заряд в поверхностных состояниях найдем из граничного условия (1):

$$Q_s = eN = (\mathcal{E} - \epsilon\varphi_s/L_D)/4\pi,$$

откуда $N = 1,1 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}$.

125*. Запишем условие нейтральности образца в целом:

$$\int_0^{\infty} \rho(x) dx + Q_s = 0, \quad \text{где } Q_s = eN. \quad (1)$$

Граничные условия для уравнения Пуассона $d^2\varphi/dx^2 = -4\pi\rho/e$ таковы: $\varphi \rightarrow 0$, $d\varphi/dx \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Для того чтобы найти связь между поверхностным потенциалом φ_s и поверхностным зарядом Q_s , дважды проинтегрируем уравнение Пуассона — сначала по x , потом по φ :

$$\int_0^{\infty} \rho dx = -\frac{e}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{d^2\varphi}{dx^2} dx = \frac{e}{4\pi} \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=0},$$

$$\int_{\varphi_s}^0 \rho d\varphi = -\frac{e}{4\pi} \int_{\varphi_s}^0 \frac{d^2\varphi}{dx^2} d\varphi = -\frac{e}{8\pi} \int_0^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx = \frac{e}{8\pi} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \Big|_{x=0}.$$

Из этих соотношений находим

$$\int_0^{\infty} \rho(x) dx = \left(\frac{e}{2\pi} \int_{\varphi_s}^0 \rho d\varphi \right)^{1/2}. \quad (2)$$

Подставим (2) в уравнение (1):

$$2\pi Q_s^2/e = \int_{\varphi_s}^0 \rho d\varphi. \quad (3)$$

Объемный заряд равен

$$\rho = e [N_d^+ - n(x)],$$

где

$$N_d^+ = n \{1 + \exp[(F - E_d^* + e\varphi)/kT]\}^{-1}.$$

Под E_d^* следует, вообще говоря, понимать выражение $E_d - kT \ln g_d$, где g_d — кратность вырождения донорного уровня, E_d — энергия доноров. В объеме ($x \gg L_D$) $N_d^+ = n \{1 + \exp[-(E_d^* - F)/kT]\}^{-1} \approx n$, так как

$$(E_d^* - F)/kT \gg 1.$$

В области объемного заряда

$$n(x) = n \exp(e\varphi/kT).$$

Вычисляя интеграл $\int_{\varphi_s}^0 \rho d\varphi$, получим

$$\int_{\varphi_s}^0 \rho d\varphi = kTn \left[\ln \left\{ \frac{1 + \exp \left[- (F - E_d^* + e\varphi_s) / kT \right]}{1 + \exp \left[- (F - E_d^*) / kT \right]} \right\} - \right. \\ \left. - 1 + \exp (e\varphi_s / kT) \right].$$

Преобразуем выражение

$$\ln \left\{ \frac{1 + \exp \left[- (F - E_d^* + e\varphi_s) / kT \right]}{1 + \exp \left[- (F - E_d^*) / kT \right]} \right\} = \\ = \ln \left\{ \frac{\exp \left[(F - E_d^*) / kT \right] + \exp \left[- e\varphi_s / kT \right] + 1 - 1}{1 + \exp \left[(F - E_d^*) / kT \right]} \right\} = \\ = \ln \left\{ 1 + \frac{\exp (-e\varphi_s / kT) - 1}{1 + \exp \left[- (E_d^* - F) / kT \right]} \right\} \approx \\ \approx \ln \left(1 + \exp \left(- \frac{e\varphi_s}{kT} \right) - 1 \right) = - \frac{e\varphi_s}{kT}.$$

Итак,

$$\int_{\varphi_s}^0 \rho d\varphi = kTn \left[- e\varphi_s / kT - 1 + \exp (e\varphi_s / kT) \right].$$

Подставляя полученный результат в формулу (3), находим

$$2\pi Q_s^2 / \varepsilon = kTn \left[- e\varphi_s / kT - 1 + \exp (e\varphi_s / kT) \right]. \quad (4)$$

Рассмотрим два случая:

а) $e\varphi_s / kT \ll 1$.

Из формулы (4) получаем

$$2\pi Q_s^2 / \varepsilon \approx 1/2 kTn (e\varphi_s / kT)^2,$$

откуда $\varphi_s = (4\pi N^2 kT / \varepsilon n)^{1/2} = 3,1$ мВ.

б) $e\varphi_s / kT \gg 1$.

Формула (4) в этом случае принимает вид

$$2\pi Q_s^2 / \varepsilon \approx kTn \exp (e\varphi_s / kT),$$

откуда $\varphi_s = (kT / e) \ln (2\pi e^2 N^2 / \varepsilon kTn) = 0,29$ В.

126. Согласно формулам (5.12), (5.13) и (5.15)

$$\mu_{э.п.} = \frac{\delta G}{\delta Q}, \quad \delta Q = \delta Q_b + \delta Q_s, \quad \delta G = e\mu_p^* \delta \Gamma_p;$$

здесь $e\delta \Gamma_p = \delta Q_b$. Отсюда

$$\delta Q_b = \delta G / \mu_p^* = \mu_{э.п.} \delta Q / \mu_p^* = 0,4\delta Q.$$

Из (5.13) получим

$$\delta Q_s = \delta Q - \delta Q_b = 0,6\delta Q = 1,08 \cdot 10^{-9} \text{ Кл} \cdot \text{см}^{-2}.$$

127. Согласно формулам (5.12) — (5.14) имеем

$$\delta Q = \delta Q_b + \delta Q_s, \quad \delta Q = CU = 0,51 \cdot 10^{-9} \text{ Кл} \cdot \text{см}^{-2},$$

$$\delta G \approx e\mu_p^* \delta \Gamma_p, \quad \delta Q_b = e\delta \Gamma_p = \delta G / \mu_p^* = 0,33 \cdot 10^{-9} \text{ Кл} \cdot \text{см}^{-2}.$$

Отсюда $\delta Q_s = \delta Q - \delta Q_b = 0,18 \cdot 10^{-9} \text{ Кл} \cdot \text{см}^{-2}$.

128*. Объемная плотность заряда ρ равна

$$\rho = e [p(x) - N_a^-],$$

где

$$p(x) = p \exp(e\varphi/kT), \quad N_a^- = p \{1 + \exp[(E_a^* - F - e\varphi)/kT]\}^{-1}$$

($E_a^* = E_a + kT \ln g_a$, E_a — энергия акцепторов, g_a — фактор вырождения акцепторных уровней). В глубине полупроводника ($x \gg L_D$) акцепторы полностью ионизованы, следовательно,

$$N_a^- = p \{1 + \exp[-(F - E_a)/kT]\}^{-1} \approx p.$$

Вычисляя интеграл $\int_{\varphi_s}^0 \rho d\varphi$ аналогично задаче 125*, получим

$$\int_{\varphi_s}^0 \rho d\varphi = p kT [1 - \exp(e\varphi_s/kT) + e\varphi_s/kT].$$

Подставляя этот результат в уравнение

$$2\pi Q_s^2/\epsilon = - \int_{\varphi_s}^0 \rho d\varphi$$

(см. задачу 125*), имеем

$$Q_s = \{(pkT\epsilon/2\pi)[\exp(e\varphi_s/kT) - e\varphi_s/kT - 1]\}^{1/2}.$$

По условию задачи $\varphi_s = 0,25$ В; следовательно, $e\varphi_s/kT \approx \approx 10 \gg 1$ при $T = 300$ К, поэтому из последней формулы приближенно следует

$$Q_s = (pkT\varepsilon/2\pi)^{1/2} \exp(e\varphi_s/2kT),$$

причем $Q_s = eN$, и окончательно

$$N = (pkT\varepsilon/2\pi e^2)^{1/2} \exp(e\varphi_s/2kT) = \\ = \sqrt{2} p L_D \exp(e\varphi_s/kT) = 1,52 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-2}.$$

129. Вычислим изменение со временем концентрации избыточных носителей после выключения источника генерации, который равномерно освещал образец:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = -\frac{\Delta p}{\tau_p} - \operatorname{div} j_p, \quad j_p = -D_p \operatorname{grad} \Delta p. \quad (1)$$

Граничные условия таковы:

$$D_p \frac{d \Delta p}{dx} = \mp s \Delta p \quad \text{при} \quad x = \pm a \quad (2)$$

(ось x направлена перпендикулярно поверхности пластины). Из (1) следует

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = D_p \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x^2} - \frac{\Delta p}{\tau_p}. \quad (3)$$

Уравнение (3) решаем методом разделения переменных:

$$\Delta p = \varphi(t) \psi(x); \quad (4)$$

имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \psi = D_p \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \varphi - \frac{\varphi \psi}{\tau_p},$$

откуда

$$\frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{\tau_p} = D_p \frac{1}{\psi} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = \text{const.}$$

Эту постоянную обозначим через $-1/\tau$, и введем обозначение

$$1/\tau = 1/\tau_p + 1/\tau_0.$$

Тогда уравнение, зависящее от времени, примет вид

$$\frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{\tau} = 0.$$

Его частное решение

$$\varphi(t) = \exp(-t/\tau). \quad (5)$$

Уравнение, зависящее от x , имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{\psi}{\tau_s D_p} = 0.$$

Его решение

$$\psi(x) = A \cos [x (\tau_s D_p)^{-1/2}] + B \sin [x (\tau_s D_p)^{-1/2}]. \quad (6)$$

Решение должно быть симметрично относительно точки $x=0$, поскольку по условию задачи обе стороны пластины имеют одинаковые скорости поверхностной рекомбинации. Поэтому $B=0$, и из формул (4), (5) и (6) следует

$$\Delta p = A \cos [x (\tau_s D_p)^{-1/2}] \exp(-t/\tau). \quad (7)$$

Из граничных условий (2) на основании (7) получаем $D_p A \sin [a (\tau_s D_p)^{-1/2}] \exp(-t/\tau) (\tau_s D_p)^{-1/2} =$
 $= s A \cos [a (\tau_s D_p)^{-1/2}] \exp(-t/\tau),$

или $\frac{a}{(\tau_s D_p)^{1/2}} \operatorname{tg} \frac{a}{(\tau_s D_p)^{1/2}} = \frac{sa}{D_p}$. Введем обозначение $\eta =$
 $= a / (\tau_s D_p)^{1/2}$. Тогда

$$\eta \operatorname{tg} \eta = sa / D_p. \quad (8)$$

Трансцендентное уравнение (8) имеет бесконечное число корней η (а следовательно, и τ_s): η_1, η_2, \dots , причем $\eta_1 < \eta_2 < \eta_3 \dots$. Решение уравнения (3) теперь может быть записано в виде

$$\Delta p = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos [x / (\tau_{sj} D_p)^{1/2}] \exp(-t/\tau_j). \quad (9)$$

Из (9) следует, что слагаемые, соответствующие корням высших порядков, затухают со временем быстрее, чем решение, отвечающее первому корню. Поэтому для не очень малых t (т. е. после начального переходного процесса) всеми слагаемыми, кроме соответствующего первому корню уравнения (8), можно пренебречь. Тогда

$$1/\tau_1 = 1/\tau_p + 1/\tau_{s1},$$

где $1/\tau_{s1} = \eta_1^2 D_p / a^2$. В случае малых s таких, что $sa/D_p \ll 1$, в уравнении (8) для наименьшего корня можно взять $\operatorname{tg} \eta \approx \eta$. Тогда

$$a^2 / \tau_{s1} D_p = sa / D_p$$

и $s = a / \tau_{s1} = a (\tau_1^{-1} - \tau_p^{-1}) = 100 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$.

130*. Вычислим изменение со временем концентрации неравновесных носителей после выключения однородной по объему генерации:

$$\partial \Delta p / \partial t = -\Delta p / \tau_p - \operatorname{div} \mathbf{j}_p, \quad (1)$$

где $\mathbf{j}_p = -D_p \operatorname{grad} \Delta p$. Граничные условия таковы (ось x перпендикулярна поверхности пластины):

$$D_p \frac{\partial \Delta p}{\partial x} = -s_1 \Delta p \quad \text{при } x = a,$$

$$D_p \frac{\partial \Delta p}{\partial x} = s_2 \Delta p \quad \text{при } x = -a.$$

Уравнение (1) решаем методом разделения переменных (ср. задачу 129):

$$\Delta p = (A \cos \alpha x + B \sin \alpha x) \exp(-t/\tau), \quad (2)$$

где $\alpha = (\tau_s D_p)^{-1/2}$, $\tau^{-1} = \tau_p^{-1} + \tau_s^{-1}$. Подставим (2) в граничные условия:

$$-A \sin \alpha a + B \cos \alpha a = -\frac{s_1}{D_p \alpha} (A \cos \alpha a + B \sin \alpha a),$$

$$A \sin \alpha a + B \cos \alpha a = \frac{s_2}{D_p \alpha} (A \cos \alpha a - B \sin \alpha a),$$

или

$$A(-\eta \operatorname{tg} \eta + k_1) + B(k_1 \operatorname{tg} \eta + \eta) = 0, \quad (3)$$

$$A(\eta \operatorname{tg} \eta - k_2) + B(k_2 \operatorname{tg} \eta + \eta) = 0,$$

где $\eta = \alpha a = a/(\tau_s D_p)^{1/2}$, $k_1 = as_1/D_p$, $k_2 = as_2/D_p$. Система однородных уравнений (3) имеет нетривиальные решения, если

$$\begin{vmatrix} -\eta \operatorname{tg} \eta + k_1 & k_1 \operatorname{tg} \eta + \eta \\ \eta \operatorname{tg} \eta - k_2 & k_2 \operatorname{tg} \eta + \eta \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg}^2 \eta + 2 \frac{\eta^2 - k_1 k_2}{\eta(k_1 + k_2)} \operatorname{tg} \eta - 1 = 0. \quad (4)$$

Трансцендентное уравнение (4) имеет бесконечное число корней η_1, η_2, \dots . Решение (2) теперь можно записать в виде

$$\Delta p = \sum_{j=1}^{\infty} \left[A_j \cos \frac{x}{(\tau_{sj} D_p)^{1/2}} + B_j \sin \frac{x}{(\tau_{sj} D_p)^{1/2}} \right] \exp\left(-\frac{t}{\tau_j}\right).$$

Так же, как и в задаче 129, оставляем в решении лишь наиболее медленно затухающее слагаемое, отвечающее первому корню уравнения (4). Тогда

$$\tau_1^{-1} = \tau_p^{-1} + \tau_{s1}^{-1}, \quad \tau_{s1} = a^2/\eta_1^2 D_p. \quad (5)$$

Рассмотрим случай $\eta_1 \ll \pi/2$. При этом $\text{tg } \eta_1 \approx \eta_1$, и уравнение (4) принимает вид

$$\eta_1^2 k_1 + \eta_1^2 k_2 + 2\eta_1^2 - 2k_1 k_2 - k_1 - k_2 = 0,$$

откуда

$$\eta_1^2 = (k_1 + 2k_1 k_2 + k_2)/(k_1 + k_2 + 2). \quad (6)$$

Из выражения (6) следует, что $\eta_1 \ll 1$, когда выполняются условия $k_1 \ll 1$ и $k_2 \ll 1$, или

$$as_1/D_p \ll 1, \quad as_2/D_p \ll 1. \quad (7)$$

Из формул (6) и (5) находим

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_p} + \frac{D_p}{a^2} \frac{s_1 + s_2 + 2s_1 s_2 a/D_p}{s_1 + s_2 + 2D_p/a},$$

или, учитывая неравенства (7),

$$1/\tau_1 \approx 1/\tau_p + (s_1 + s_2)/2a.$$

Если $s_1 \gg s_2$, то $1/\tau_1 = 1/\tau_p + s_1/2a$, откуда $s_1 = 2a(\tau_1^{-1} - \tau_p^{-1}) = 800 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$.

131*. Темп захвата электронов поверхностными центрами рекомбинации равен

$$R_n = c_n[(1 - f_t)n_s - n_{s1}f_t],$$

где f_t — доля ловушек, заполненных электронами, n_s — концентрация электронов на поверхности полупроводника, n_{s1} — концентрация электронов на поверхности полупроводника в равновесии, когда уровень Ферми совпадает с уровнем ловушки, c_n — вероятность захвата одного электрона, когда все ловушки пусты.

Запишем аналогичное выражение для абсолютного темпа захвата дырок:

$$R_p = c_p[f_t p_s - p_{s1}(1 - f_t)].$$

В стационарном состоянии $R_n = R_p = R$. Находя из этого условия f_t и подставляя найденное выражение в формулу для абсолютного темпа захвата электронов,

получаем

$$R = \frac{c_n c_p (p_s n_s - p_{s1} n_{s1})}{c_n (n_s + n_{s1}) + c_p (p_s + p_{s1})},$$

где

$$p_s = p_{s0} + \Delta p_s = p_{s0} \exp(-eF_p/kT),$$

$$n_s = n_{s0} + \Delta n_s = n_{s0} \exp(eF_n/kT).$$

Здесь F_p, F_n — квазиуровни Ферми для дырок и электронов, индексом «0» отмечаются равновесные величины

$$p_{s0} = n_i \exp(-e\psi_s/kT), \quad n_{s0} = n_i \exp(e\psi_s/kT).$$

Далее,

$$p_{s1} = n_i \exp[(E_i - E_t)/kT], \quad n_{s1} = n_i \exp[(E_t - E_i)/kT],$$

где $E_t = (E_c + E_v)/2 + \frac{3}{4} kT \ln(m_p/m_n)$ (сравните с задачей 1), n_i — концентрация в собственном полупроводнике.

Очевидно, $p_s n_s = pn$ и $p_{s1} n_{s1} = n_i^2$, поэтому

$$R = \frac{c_n c_p (pn - n_i^2)}{c_n (n_{s0} + \Delta n_s + n_{s1}) + c_p (p_{s0} + \Delta p_s + p_{s1})}.$$

Для небольшого уровня инжекции

$$R \approx \frac{c_n c_p (p_0 + n_0) \Delta n}{c_n (n_{s0} + n_{s1}) + c_p (p_{s0} + p_{s1})}. \quad (1)$$

Вводя обозначение

$$c_p/c_n = \exp(2e\psi_0/kT), \quad (2)$$

преобразовывая знаменатель в формуле (1) и подставляя найденное выражение для R в формулу $s = R/\Delta n$, получаем

$$s = (c_p c_n)^{1/2} (p_0 + n_0) (2n_i)^{-1} \times \\ \times \{ \text{ch} [(E_t - E_i - e\psi_0)/kT] + \text{ch} [e(\psi_s - \psi_0)/kT] \}^{-1}.$$

Здесь $c_n = N_t \alpha_n$, $c_p = N_t \alpha_p$, где α_n и α_p — коэффициенты захвата электронов и дырок поверхностными уровнями, равные произведениям эффективных сечений захвата на тепловую скорость. Поэтому ответ для скорости поверхностной рекомбинации можно записать в виде

$$s = \frac{N_t (\alpha_n \alpha_p)^{1/2} (n_0 + p_0) / 2n_i}{\text{ch} [(E_t - E_i - e\psi_0)/kT] + \text{ch} [e(\psi_s - \psi_0)/kT]}. \quad (3)$$

132*. Из условия экстремума выражения (3) предыдущей задачи

$$\frac{ds}{d\psi_s} = 0 = -\frac{e}{kT} \operatorname{sh} \frac{e(\psi_s - \psi_0)}{kT} \cdot \frac{N_i (\alpha_n \alpha_p)^{1/2} (n_0 + p_0)}{2n_i} \times \\ \times \{ \operatorname{ch} [(E_i - E_s - e\psi_0)/kT] + \operatorname{ch} [e(\psi_s - \psi_0)/kT] \}^{-2}$$

имеем $\operatorname{sh} [e(\psi_s - \psi_0)/kT] = 0$.

Отсюда получаем, что $s = s_{\max}$ при $\psi_s = \psi_0$ (см. обозначение (2) предыдущей задачи). Следовательно,

$$S_p/S_n = c_p/c_n = \exp(2e\psi_0/kT) = 9.$$

133*. В треугольной потенциальной яме вблизи поверхности полупроводника (рис. 27) уровни энергии E_n

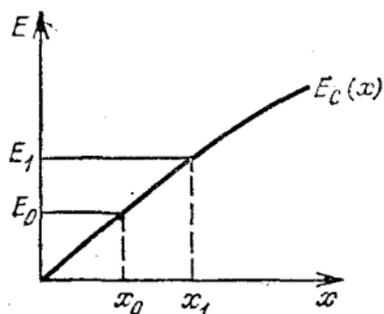


Рис. 27. Квантование спектра электронов в приповерхностной потенциальной яме.

можно найти, воспользовавшись, например, квазиклассическим условием квантования (см. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Квантовая механика.— М.: Наука, 1974, гл. VII):

$$\int_0^{x_n} k_n(x) dx = (n + 3/4)\pi, \quad (1)$$

Здесь

$$k_n(x) = \sqrt{(2m/\hbar^2)(E_n - E_c(x))}, \\ E_c(x) = e\mathcal{E}x, \text{ энергии отсчитываются}$$

от края зоны проводимости на границе, x_n — точка поворота, определяемая условием $E_c(x_n) = E_n$, а n — число узлов волновой функции для данного состояния (в состоянии с наименьшей энергией $n = 0$). Вычисляя интеграл, получаем

$$\int_0^{x_n} \sqrt{E_n - E_c(x)} dx = \frac{1}{e\mathcal{E}} \int_0^{E_n} \sqrt{E_n - E_c} dE_c = \frac{2}{3e\mathcal{E}} E_n^{3/2}.$$

Из условия (1) находим для энергии n -го состояния

$$E_n = \left(\frac{3(4n + 3)\pi}{8} \right)^{2/3} e\mathcal{E} \left(\frac{\hbar^2}{2me\mathcal{E}} \right)^{1/3}.$$

Давая правильную зависимость энергии от n , это выражение применимо и при малых n . Для энергии основного

состояния имеем

$$E_0 = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3} e\mathcal{E} \left(\frac{\hbar^2}{2me\mathcal{E}}\right)^{1/3}$$

а $E_1 = (7/3)^{2/3} E_0$. При $\mathcal{E} = 10^5 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$, $m = 1,8 \cdot 10^{-28} \text{ г}$ находим $E_0 \approx 62 \text{ мэВ}$, а $E_1 - E_0 \approx 0,76 E_0 \approx 47 \text{ мэВ}$. Размер потенциальной ямы, который «чувствует» электрон с энергией E_0 , есть $x_0 = E_0/e\mathcal{E} \approx 60 \text{ \AA}$.

Глава 6

ТЕРМО-Э. Д. С. В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

134. Из формул (6.2а), (6.3а), (6.3б) и (6.4) получаем

$$Q^* = \frac{\int_0^\infty (df/dE) E^{r+2} dE}{\int_0^\infty (df/dE) E^{r+1} dE} = kT (r+2) \frac{\Phi_{r+1}(\eta)}{\Phi_r(\eta)}. \quad (1)$$

Отсюда

$$\alpha = -\frac{k}{e} \left[(r+2) \frac{\Phi_{r+1}(\eta)}{\Phi_r(\eta)} - \eta \right].$$

В вырожденном случае выражение для α переходит в следующее:

$$\alpha = -(r+1) \pi^2 k / 3e\eta.$$

Для типичного металла, используя значение $k/e = 86,3 \text{ мкВ} \cdot \text{К}^{-1}$, получаем $\alpha_{\text{мет}} = -8,2 \text{ мкВ} \cdot \text{К}^{-1}$. Отношение термо-э. д. с. металла к термо-э. д. с. вырожденного полупроводника равно

$$\frac{\alpha_{\text{мет}}}{\alpha_{\text{ПП}}} = \frac{n_{\text{мет}}}{n_{\text{ПП}}} \left(\frac{n_{\text{ПП}}}{n_{\text{мет}}}\right)^{2/3} = 5 \cdot 10^{-2}.$$

Таким образом, вследствие большой концентрации свободных электронов в металлах термо-э. д. с. металлов значительно меньше термо-э. д. с. большинства полупроводников.

135. Когда температура не слишком велика, так что концентрация дырок много больше концентрации электронов, основной вклад в термо-э. д. с. дают дырки (см. формулу (6.6)). В примесной области концентрация ды-

рок p_0 остается почти постоянной, а термо-э. д. с. положительна и равна

$$\alpha = \frac{k}{e} \left[\ln \frac{N_v(T_0)}{p_0} + \frac{3}{2} \ln \frac{T}{T_0} + \frac{Q_p^*}{kT} \right].$$

В этой области термо-э. д. с. медленно растет с температурой. В собственной области в термо-э. д. с. дают вклад оба типа носителей:

$$\alpha = -\frac{k}{e} \left(\frac{b-1}{b+1} \frac{E_g}{2kT} + \frac{3}{4} \ln \frac{m_n}{m_p} - \frac{b}{b+1} \frac{Q_n^*}{kT} - \frac{1}{b+1} \frac{Q_p^*}{kT} \right).$$

Здесь b — отношение подвижностей электронов и дырок, а Q_n^* и Q_p^* — энергии переноса для электронов и дырок соответственно. Вплоть до весьма высоких температур основную роль в круглых скобках играет первый член, и поскольку в германии $b > 1$, то термо-э. д. с. отрицательна и убывает по абсолютной величине при возрастании

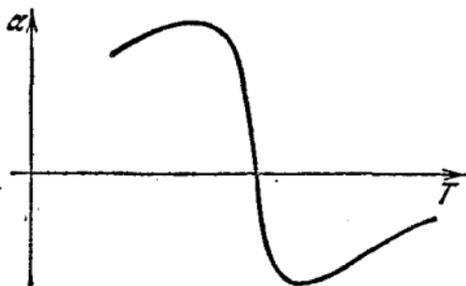


Рис. 28. Температурная зависимость термо-э. д. с. полупроводника p -типа в области перехода от примесной проводимости к собственной (качественно).

температуры. Где-то в области промежуточных температур при переходе от примесной проводимости к собственной термо-э. д. с. меняет знак. Примерный ход термо-э. д. с. представлен на рис. 28.

136. Прежде всего найдем границы примесной области для германия p -типа с типичной мелкой примесью ($E_a - E_v = 0,01$ эВ). Подобно тому, как это делалось в задаче 20, получаем уравнения

$$y_1 = \ln [N_v(T'_0)/4g_a N_a] - 3y_1/2,$$

$$y_2 = \ln [N_v(T''_0)/N_a] - \xi/2k - 3y_2/2,$$

где по-прежнему $E_g = \Delta - \xi T$, $T'_0 = (E_a - E_v)/k = 116$ К, $T''_0 = \Delta/2k = 4,5 \cdot 10^3$ К, $y_1 = T'_0/T_1$, $y_2 = T''_0/T_2$. Отсюда находим (при $g_a \sim 1$)

$$y_1 = 4 - 1,5 \ln y_1, \quad y_1 = 2,6, \quad T_1 = 44 \text{ К}, \\ y_2 = 13,2 - 1,5 \ln y_2, \quad y_2 = 9,8, \quad T_2 = 460 \text{ К}.$$

Таким образом, при 200 К уровень Ферми можно вычислить по формуле

$$F = kT \ln(N_v/N_a).$$

Термо-э. д. с. равна

$$\alpha = \frac{k}{e} \left[2 + \ln \left(\frac{N_v}{N_a} \right) \right] = 0,7 \text{ мВ} \cdot \text{К}^{-1}.$$

137. При рассматриваемых условиях уровень Ферми можно вычислять по формуле (см. задачу 24)

$$F = E_d + kT \ln [(N_d/N_a - 1)/g_d],$$

а энергия переноса равна (см. формулу (1) задачи 134)

$$Q^* = kT(r+2)\Phi_{r+1}(\eta)/\Phi_r(\eta) = 2kT.$$

Подставляя найденные выражения для F и Q^* в формулу (6.1), находим

$$\alpha = -\frac{k}{e} \left\{ -\frac{E_d}{kT} + 2 - \ln \left[\frac{1}{g_d} \left(\frac{N_d}{N_a} - 1 \right) \right] \right\}.$$

Отсюда

$$|E_d| + kT \ln g_d = kT [e|\alpha|/k - 2 + \ln(N_d/N_a - 1)],$$

и при $g_d = 2$

$$|E_d| = 0,2 \text{ эВ}.$$

138. Для произвольного закона дисперсии имеем

$$Q^* = \frac{\int_0^{\infty} (-df/dE) (dE/dk)^2 k^{2r} (E) E dE}{\int_0^{\infty} (-df/dE) (dE/dk)^2 k^{2r} (E) dE}.$$

Для случая сильного выражения, используя разложение (П.6), получаем

$$\frac{Q^*}{kT} = \eta + \frac{\pi^2}{3\eta} \frac{\eta}{k^{2r}(F) (d\eta/dk(F))^2} \frac{d}{d\eta} \left[k^{2r}(F) \left(\frac{d\eta}{dk(F)} \right)^2 \right].$$

Отсюда находим для термо-э. д. с.

$$\alpha = -\frac{\pi^2}{3\eta} \frac{k}{e} \frac{\eta}{k^{2r}(F) (d\eta/dk(F))^2} \cdot \frac{d}{d\eta} \left[k^{2r}(F) \left(\frac{d\eta}{dk(F)} \right)^2 \right]. \quad (1)$$

Из определения (6.5) следует, что значение величины \tilde{m} при энергии, равной энергии Ферми, есть $\tilde{m}_F = \hbar^2 k(F) \times [dk(F)/dF]$. Выражая в формуле (1) $dk(F)/d\eta$ через \tilde{m}_F , а $k(F)$ — через концентрацию, мы приходим к следующей концентрационной зависимости термо-э. д. с. вырожденного электронного газа:

$$\alpha = - \frac{k}{e} \frac{2\pi^2}{3\hbar^2} kT \frac{\tilde{m}_F}{(3\pi^2 n)^{2/3}} \left(r + 1 - 3 \frac{n}{\tilde{m}_F} \frac{d\tilde{m}_F}{dn} \right). \quad (2)$$

Для полупроводников с законом дисперсии электронов (1.3ж) имеем (см. задачу 16)

$$\tilde{m}_F = m(0) [1 + 2\hbar^2 (3\pi^2 n)^{2/3} / m(0) E_g]^{1/2}.$$

Подставляя это выражение в формулу (2) и используя численные данные из условия задачи, получаем для антимонида индия $\alpha = 46$ мкВ · К⁻¹.

139. С учетом поправок первого порядка, возникающих при учете непараболичности зоны, энергия переноса равна

$$Q^* = \frac{\int_0^{\infty} dE (-df/dE) E^{r+2} [1 + (r-3) E/E_g] dE}{\int_0^{\infty} dE (-df/dE) E^{r+1} [1 + (r-3) E/E_g] dE} =$$

$$= kT (r+2) \frac{\Phi_{r+1}(\eta) + (r-3)(r+3) \Phi_{r+2}(\eta) kT/E_g}{\Phi_r(\eta) + (r-3)(r+2) \Phi_{r+1}(\eta) kT/E_g}.$$

Отсюда

$$\alpha = - \frac{k}{e} \left[(r+2) \frac{\Phi_{r+1}(\eta) + (r-3)(r+3) \Phi_{r+2}(\eta) kT/E_g}{\Phi_r(\eta) + (r-3)(r+2) \Phi_{r+1}(\eta) kT/E_g} - \eta \right].$$

Для сильно вырожденного электронного газа найденное выражение совпадает с результатом предыдущей задачи, если в нем провести разложение по степеням параметра E/E_g , определяющего степень непараболичности зоны, и ограничиться поправками первого порядка по этому параметру.

140. Поскольку подвижность электронов определяется рассеянием на акустических колебаниях, то $a \approx 1$, и, полагая $l_\phi \approx 0,1$ см, получаем

$$\alpha_\phi \approx v_\phi l_\phi / \mu \approx 10 \text{ мВ/К.}$$

141. Оценим величину a , определяющую относительный вклад рассеяния на акустических колебаниях в подвижность:

$$a \approx (\mu_{\text{In Sb}})_{\text{набл}} / (\mu_{\text{In Sb}})_{\text{теор}} \approx 2 \cdot 10^{-3}.$$

Для отношения «фононных» составляющих термо-э. д. с., полагая для оценки $(l_{\phi})_{\text{Ge}} \approx (l_{\phi})_{\text{In Sb}}$, получаем

$$\frac{(\alpha_{\phi})_{\text{In Sb}}}{(\alpha_{\phi})_{\text{Ge}}} \approx \frac{a_{\text{In Sb}}}{a_{\text{Ge}}} \frac{v_{\text{In Sb}}}{v_{\text{Ge}}} \frac{\mu_{\text{Ge}}}{\mu_{\text{In Sb}}} \approx 10^{-3}.$$

Таким образом, эффект увлечения электронов фононами в антимониде индия n -типа имеет значительно меньшую величину, чем в германии. Используя значение $(\alpha_{\phi})_{\text{Ge}}$, полученное в предыдущей задаче, находим $(\alpha_{\phi})_{\text{In Sb}} \approx 10 \text{ мкВ} \cdot \text{К}^{-1}$ при 20 К.

142. Для носителей с квадратичным законом дисперсии из формул (6.2б), (6.3в), (6.3г) получаем в случае сильных магнитных полей, когда $\sigma_2 \gg \sigma_1$, $q_2 \gg q_1$,

$$Q^* = \frac{q_2}{\sigma_2} = \frac{\langle E \rangle}{\langle 1 \rangle} = \frac{\int_0^{\infty} (-df/dE) Ek^3(E) dE}{\int_0^{\infty} (-df/dE) k^3(E) dE} = \frac{5}{2} kT \frac{\Phi_{5/2}(-\eta)}{\Phi_{3/2}(-\eta)}.$$

Отсюда следует, что термо-э. д. с.

$$\alpha(\infty) = \frac{k}{e} \left[\eta + \frac{5\Phi_{5/2}(-\eta)}{2\Phi_{3/2}(-\eta)} \right]$$

в области полей $w \gg 1$ не зависит от магнитного поля, а также от механизма рассеяния. Последнее обстоятельство делает измерения термо-э. д. с. в сильных полях удобным способом определения эффективных масс носителей заряда. Для невырожденного газа

$$\alpha(\infty) = \frac{k}{e} \left(\frac{5}{2} + \eta \right).$$

Из этой формулы находим $\eta = 3$; таким образом, предположение о том, что дырочный газ невырожден, хорошо себя оправдывает. Зная концентрацию дырок, нетрудно найти эффективное число дырок $N_v = p \exp \eta = 1,18 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$, откуда $m_p = 0,6m_0$.

143. Для невырожденного полупроводника с квадратичным законом дисперсии имеем

$$\alpha = \alpha(H) |_{H=0} = -\frac{k}{e} [(r+2) - \eta],$$

$$\alpha(\infty) = \alpha(H) |_{H \rightarrow \infty} = -\frac{k}{e} \left(\frac{5}{2} - \eta \right),$$

и, следовательно,

$$\Delta\alpha(\infty) = \alpha(\infty) - \alpha = -(k/e) (1/2 - r).$$

Отсюда, в частности, вытекает, что $\Delta\alpha(\infty)$ обращается в нуль при $r=1/2$, т. е. в том случае, когда рассеяние происходит на оптических колебаниях решетки, а температура ниже температуры Дебая.

144. В области сильных магнитных полей ($w \gg 1$) энергия переноса не зависит от механизма рассеяния и при сильном вырождении электронного газа равна (см. (П.6))

$$Q^* = \frac{\langle E \rangle}{\langle 1 \rangle} = kT \cdot \eta \frac{1 + [\pi^2/6k^3(F)\eta](d^2/d\eta^2)\eta k^3(F)}{1 + [\pi^2/6k^3(F)](d^2/d\eta^2)k^3(F)}.$$

Отсюда для произвольного закона дисперсии получаем

$$\alpha(\infty) = -\frac{\pi^2 k}{e} \frac{1}{k(F)} \frac{dk(F)}{d\eta}.$$

На основании определения (6.5) величина \tilde{m} равна

$$\tilde{m} = \hbar^2 k(E) \frac{dk(E)}{dE}.$$

Поскольку для произвольного закона дисперсии в изотропном случае $k(F) = (3\pi^2 n)^{1/3}$, выражение для $\alpha(\infty)$ можно переписать в виде

$$\alpha(\infty) = -\frac{\pi^2 k}{e} kT \frac{\tilde{m}_F}{\hbar^2 (3\pi^2 n)^{2/3}}, \quad (1)$$

где \tilde{m}_F — значение \tilde{m} при энергии, равной энергии Ферми. Подставляя данные из условия задачи, получаем отсюда $\tilde{m}_F = 0,019m_0$.

Обращая формулу для \tilde{m} из задачи 16, находим эффективную массу электронов на дне зоны:

$$m(0) = -\hbar^2 (3\pi^2 n)^{2/3} / E_g + [\hbar^4 (3\pi^2 n)^{4/3} / E_g^2 + \tilde{m}_F^2]^{1/2} = 0,013m_0.$$

145. Используя формулу (2) из задачи 138 и формулу (1) из задачи 144, можно установить следующую связь между значением термо-э. д. с. в отсутствии магнитного поля и ее значением в сильных магнитных полях для вырожденного полупроводника с квадратичным законом дисперсии:

$$\alpha = \frac{2}{3} \alpha(\infty)(r + 1).$$

Отсюда получаем $r = \frac{3}{2} \frac{\alpha}{\alpha(\infty)} - 1 = 1,8$.

Таким образом, в рассматриваемых условиях рассеяние происходит в основном на заряженных примесях.

146*. Из формулы (2) задачи 138 и формулы (1) задачи 144 имеем

$$\alpha = \frac{2}{3} \alpha(\infty) \left(r + 1 - 3 \frac{n}{\tilde{m}_F} \frac{d\tilde{m}_F}{dn} \right).$$

Таким образом,

$$\Delta\alpha(\infty) = \alpha(\infty) - \alpha = -\frac{1}{3} \alpha(\infty) \left[\frac{6n}{\tilde{m}_F} \frac{d\tilde{m}_F}{dn} - (2r - 1) \right]. \quad (1)$$

Из определения (6.5) для заданного закона дисперсии

$$\frac{\tilde{m}}{m_0} = 0,023 + 1,35 \cdot 10^{-15} k^2 \text{ (см}^{-2}\text{)} = 0,023 + 1,3 \cdot 10^{-14} n^{2/3}.$$

(2)

В (1) выражение в квадратных скобках, а с ним и величина $\Delta\alpha(\infty)$ обращаются в нуль, когда

$$\frac{n}{\tilde{m}_F} \frac{d\tilde{m}_F}{dn} = \frac{2r - 1}{6}. \quad (3)$$

С учетом зависимости (2) это условие принимает вид

$$\frac{2}{3} \frac{1,3 \cdot 10^{-14} n^{2/3}}{0,023 + 1,3 \cdot 10^{-14} n^{2/3}} = \frac{2r - 1}{6}.$$

Таким образом, величина $\Delta\alpha(\infty)$ обращается в нуль при концентрации

$$n = 2,26 \left(\frac{2r - 1}{5 - 2r} \right)^{3/2} 10^{18} \text{ см}^{-3} \approx 10^{19} \text{ см}^{-3}.$$

Когда закон дисперсии имеет вид (1.3ж), то

$$\frac{\tilde{m}_F}{m_0} = \frac{m(0)}{m_0} \left[1 + \frac{2\hbar^2}{m(0)E_g} (3\pi^2 n)^{2/3} \right]^{1/2}$$

(см. задачу 16), и условие обращения $\Delta\alpha(\infty)$ в нуль принимает вид

$$1 - \left[1 + \frac{2\hbar^2}{m(0)E_g} (3\pi^2 n)^{2/3} \right]^{-1} = \frac{3}{2}.$$

Это условие не выполняется ни при каких концентрациях, следовательно, для закона дисперсии (1.3ж) величина $\Delta\alpha(\infty)$ не обращается в нуль.

Глава 7

ФОТО-Э. Д. С. В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

147. Рассмотрим полупроводник, например, p -типа. Тогда в формуле (7.1) следует положить $n = 0$:

$$V = \oint \frac{D_p}{\mu_p} \frac{1}{p} \frac{dp}{dx} dx = \oint \frac{D_p}{p\mu_p} dp.$$

Подынтегральное выражение есть однозначная функция p (сравните с (3.6)), и интеграл по всему контуру тождественно равен нулю, что свидетельствует о существенно биполярном характере фото-э. д. с.

148. Вычислим сначала вентиляющую фото-э. д. с. V_1 по формуле (7.3), опустив в ней p_0 :

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{kT}{e} \int_A^B \frac{b+1}{bn_0 + (b+1)\Delta n} \frac{\Delta n}{n_0} \frac{dn_0}{dx} dx = \\ &= \frac{kT}{e} \Delta n \frac{b+1}{b} \int_A^B \frac{n_0^{-1} dn_0}{n_0 + (b+1)\Delta n/b} = \frac{kT}{e} \ln \frac{1 + (b+1)\Delta n/bn_{0,A}}{1 + (b+1)\Delta n/bn_{0,B}} = \\ &= \frac{kT}{e} \ln \frac{1 + \Delta\sigma/\sigma_{0,A}}{1 + \Delta\sigma/\sigma_{0,B}}. \end{aligned}$$

Второе слагаемое вычислим, разбивая интеграл в (7.4) на два, по двум участкам малой ширины 2ϵ вблизи A и B ,

где $d \Delta n / dx \neq 0$:

$$\begin{aligned}
 V_2 &= -\frac{kT}{e} \frac{b-1}{b+1} \left[\int_{A-\varepsilon}^{A+\varepsilon} \frac{d\Delta n}{\Delta n + bn_{0,A}/(b+1)} + \int_{B-\varepsilon}^{B+\varepsilon} \frac{d\Delta n}{\Delta n + bn_{0,B}/(b+1)} \right] = \\
 &= -\frac{kT}{e} \frac{b-1}{b+1} \left[\ln \frac{\Delta n + bn_{0,A}/(b+1)}{bn_{0,A}/(b+1)} + \ln \frac{bn_{0,B}/(b+1)}{\Delta n + bn_{0,B}/(b+1)} \right] = \\
 &= -\frac{kT}{e} \frac{b-1}{b+1} \ln \frac{1 + (b+1) \Delta n / bn_{0,A}}{1 + (b+1) \Delta n / bn_{0,B}}.
 \end{aligned}$$

Складывая V_1 и V_2 , находим

$$V = \frac{2}{b+1} \frac{kT}{e} \ln \frac{1 + \Delta\sigma \cdot \rho_{0,A}}{1 + \Delta\sigma \cdot \rho_{0,B}} = 1,17 \cdot 10^{-2} \text{ В.}$$

149. Из ответа предыдущей задачи имеем в предельном случае $\Delta\sigma/\sigma_0 \ll 1$:

$$V = \frac{2}{b+1} \frac{kT}{e} \Delta\sigma (\rho_{0,A} - \rho_{0,B}),$$

и в обратном предельном случае $\Delta\sigma/\sigma_0 \gg 1$:

$$V = \frac{2}{b+1} \frac{kT}{e} \ln \left(\frac{\rho_{0,A}}{\rho_{0,B}} \right).$$

В рассматриваемых условиях

$$\Delta\sigma_1 \rho_{0,A} = 0,1 \ll 1, \quad V' = 3,4 \cdot 10^{-4} \text{ В;}$$

$$\Delta\sigma_2 \rho_{0,B} = 16 \gg 1, \quad V'' = 3,0 \cdot 10^{-3} \text{ В.}$$

150*. Считая, что изменение ρ при сдвиге на Δl невелико, положим

$$\rho(x + \Delta l) = \rho(x) + \frac{d\rho}{dx} \Delta l.$$

Из формулы для V задачи 148 получим

$$V = -\frac{2}{b+1} \frac{kT}{e} \left(\frac{\Delta\sigma \Delta l d\rho/dx}{1 + \Delta\sigma \cdot \rho} \right)$$

в предположении о малости выражения в круглых скобках. Отсюда

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\Delta\sigma d\rho}{1 + \Delta\sigma \cdot \rho} = \frac{A(b+1)e}{2kT \Delta l} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + Bx} = C \ln(1 + Bx).$$

Здесь

$$C = \frac{A}{B} \frac{(b+1)e}{2kT\Delta l} = 0,89.$$

Интегрируя по ρ , найдем

$$\frac{1 + \Delta\sigma \cdot \rho(x)}{1 + \Delta\sigma \cdot \rho(0)} = (1 + Bx)^C,$$

откуда

$$\rho(x) = \frac{[1 + \Delta\sigma \cdot \rho(0)](1 + Bx)^C - 1}{\Delta\sigma}$$

и

$$\Delta\sigma = \Delta n e \mu_n (b+1) = 4,7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}.$$

При $x = 2$ получим

$$\rho = 4,9 \text{ Ом} \cdot \text{см}.$$

Проверка показывает, что сделанное выше предположение выполняется.

151. По формуле (7.3) находим

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{kT}{e} \frac{b+1}{b} \Delta n \int_{-l}^0 \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dx} \left[n_0 + \frac{\Delta n (b+1)}{b} \right]^{-1} dx = \\ &= \frac{kT}{e} \frac{b+1}{b} \Delta n \int_{n_n}^{n_p} \frac{dn_0}{n_0 [n_0 + \Delta n (b+1)/b]} = \\ &= \frac{kT}{e} \ln \frac{n_p [n_n + \Delta n (b+1)/b]}{n_n [n_p + \Delta n (b+1)/b]}. \end{aligned}$$

В рассматриваемых условиях (см. таблицу, Приложение 2) на основании формулы (1) задачи 1 имеем

$$n_i = 10^{-7} \text{ см}^{-3}, \quad n_p = n_i^2/n_n = 10^{-29} \text{ см}^{-3},$$

$$kT/e = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ В}.$$

В результате получим $V_1 \approx -0,11$.

152. Используя формулу (7.2) (см. также задачи 75*, 77*), находим

$$n_0(x) = n_0'(1 - \xi x), \quad \xi = 0,2 \text{ см}^{-1},$$

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \frac{kT}{e} \int_0^d \frac{(1-b)N[-L^{-1} \exp(-x/L)] + b\xi n_0'}{bn_0'(1-\xi x)} dx = \\ &= \frac{kT}{e} \frac{b-1}{b} \frac{N}{n_0'} \int_0^{d/L} \frac{\exp(-z) dz}{1-\xi Lz} + \frac{kT}{e} \int_0^d \frac{\xi dx}{1-\xi x}, \quad z = \frac{x}{L}. \end{aligned}$$

В первом интеграле существенны $z \ll 1$, и можно заметить знаменатель на единицу, так как $\xi L = 0,2 \cdot 0,01 \ll 1$. Интегрирование дает результат

$$\Delta\varphi = \frac{kT}{e} \left(\frac{b-1}{b} \frac{N}{n_0} + \ln \frac{1}{1-\xi d} \right).$$

Отсюда $\Delta\varphi = 4,1 \cdot 10^{-3}$ В.

153. Подобно тому, как получаются формулы (7.3) и (7.4) из (7.2), в нашем случае при $\Delta p = \Delta n \tau_p / \tau_n$ находим

$$V_1 = \frac{kT}{e} \int \frac{b + \tau_p / \tau_n}{bn_0 + (b + \tau_p / \tau_n) \Delta n} \frac{\Delta n}{n_0} \frac{dn_0}{dx} dx,$$

$$V_2 = \frac{kT}{e} \int \frac{\tau_p / \tau_n - b}{bn_0 + (b + \tau_p / \tau_n) \Delta n} \frac{d \Delta n}{dx} dx.$$

Далее, аналогично задаче 148 получаем

$$V_1 = \frac{kT}{e} \ln \frac{1 + \Delta\sigma \cdot \rho_{0,A}}{1 + \Delta\sigma \cdot \rho_{0,B}},$$

$$V_2 = \frac{\tau_p / \tau_n - b}{\tau_p / \tau_n + b} \frac{kT}{e} \ln \frac{1 + \Delta\sigma \cdot \rho_{0,A}}{1 + \Delta\sigma \cdot \rho_{0,B}}.$$

Окончательно,

$$V = V_1 + V_2 = \frac{2\tau_p / \tau_n}{b + \tau_p / \tau_n} \ln \frac{1 + \Delta\sigma \rho_{0,A}}{1 + \Delta\sigma \rho_{0,B}} = 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ В.}$$

Глава 8

ОПТИКА ПОЛУПРОВОДНИКОВ

154. Предположим, что $\kappa = \lambda\gamma/4\pi \ll n$. Тогда по известной величине R с помощью формулы (8.2) находим $n = 4$. В тех же условиях формула (8.5) упрощается:

$$T = (1 - R)^2 \exp(-\gamma d) [1 - R^2 \exp(-2\gamma d)]^{-1}.$$

Отсюда, обозначив $x = \exp(\gamma d)$, получим для x уравнение

$$x^2 + x(1 - R)^2 / R^2 T - R^{-2} = 0.$$

Его решение есть $x = 0,48$; следовательно,

$$\gamma = d^{-1} \ln(1/x) = 7,3 \text{ см}^{-1}.$$

При этом $\kappa = 5,8 \cdot 10^{-3} \ll n$, так что исходное предположение хорошо выполняется.

155. Определив приведенную массу

$$m_r = (m_n^{-1} + m_p^{-1})^{-1} = 0,05m_0,$$

найдем значение волнового вектора частиц

$$k \approx \hbar^{-1} [2m_r (\hbar\omega - E_g)]^{1/2} = 1,2 \cdot 10^6 \text{ см}^{-1}.$$

Сравнив это с волновым вектором фотона в среде,

$$q = n\omega/c = 6,6 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1},$$

получим

$$q/k = 5,5 \cdot 10^{-2}.$$

156. Для непараболического закона дисперсии (1.3ж) имеем

$$k = \hbar^{-1} \{m(0) [(\hbar\omega)^2 - E_g^2] / 2E_g\}^{1/2} = 6,5 \cdot 10^6 \text{ см}^{-1}.$$

Далее,

$$q = n\omega/c = 3,35 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1},$$

и степень невертикальности перехода такова:

$$q/k = 5,2 \cdot 10^{-3}.$$

157. В случае рождения легкой дырки в качестве приведенной массы надо взять

$$m_{rl} = (m_n^{-1} + m_{pl}^{-1})^{-1} = 0,035m_0.$$

Определив, пренебрегая невертикальностью, значения квазиволновых векторов электрона и легкой дырки (см. задачу 155), найдем далее

$$E_n = (m_{rl}/m_n) (\hbar\omega - E_g) = 4,9 \cdot 10^{-2} \text{ эВ},$$

$$E_{pl} = (m_{rl}/m_{pl}) (\hbar\omega - E_g) = 2,1 \cdot 10^{-2} \text{ эВ}.$$

Аналогично при рождении тяжелой дырки получим

$$m_{rh} = 0,0454m_0, \quad E_n = 6,4 \cdot 10^{-2} \text{ эВ}, \quad E_{ph} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}.$$

158. Введем для краткости обозначение $a^2 = 2\hbar^2 E_g / m(0)$. Тогда имеем

$$E_{n,p}(k) = E_c + \frac{1}{2} \left(\pm \sqrt{E_g^2 + a^2 k^2} - E_g \right), \quad (1)$$

где знаки «+» и «-» соответствуют зоне проводимости (n) и валентной зоне (p). Совместим начало отсчета энергии с дном зоны проводимости, полагая $E_c = 0$. Тогда, согласно формулам (8.10) и (8.12), мы получаем

$$\rho_{\text{комб},l} = \pi^{-2} \int_0^{\infty} k^2 \delta \left(\sqrt{E_g^2 + a^2 k^2} - \hbar\omega \right) dk, \quad (2)$$

Индекс l указывает на то, что здесь рассматриваются зона проводимости и зона легких дырок. Пользуясь правилом интегрирования с δ -функцией, находим

$$\rho_{\text{комб},l}(\omega) = \frac{\hbar\omega}{\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{m(0)}{2E_g} \right)^{3/2} \sqrt{\hbar^2\omega^2 - E_g^2}. \quad (3)$$

При $\hbar\omega \rightarrow E_g$ это выражение (с другими постоянными коэффициентами) дает ту же форму частотной зависимости, $\rho_{\text{комб},l}(\omega)$ (и, следовательно, коэффициента поглощения света), что и в случае квадратичных законов дисперсии электронов и дырок с эффективными массами $m(0)$: $\rho_{\text{комб},l}(\omega) \sim (\hbar\omega - E_g)^{1/2}$, что и следовало ожидать.

С другой стороны, при $\hbar\omega \gg E_g$ мы получаем

$$\gamma \sim \rho_{\text{комб},l}(\omega) \sim \omega^2. \quad (4)$$

Так, в частности, обстоит дело при $E_g \rightarrow 0$, когда в центре зоны Бриллюэна зоны проводимости и валентная смыкаются или «почти смыкаются».

159. Пользуясь формулами (1.3е) и (1.3з) и полагая $a^2 = 2\hbar^2 E_g / m(0)$, мы получаем

$$\begin{aligned} \rho_{\text{комб},h}(\omega) &= \\ &= \pi^{-2} \int_0^{\infty} k^2 \delta \left(E_g/2 + 1/2 \sqrt{E_g^2 + a^2 k^2} - \hbar\omega + \hbar^2 k^2 / m_0 \right) dk. \end{aligned} \quad (1)$$

Индекс « h » указывает на то, что здесь рассматриваются зона проводимости и зона тяжелых дырок. Неравенства, указанные в условиях задачи, позволяют пренебречь последним слагаемым в скобках. Тогда, вычисляя интеграл, получаем

$$\rho_{\text{комб},h}(\omega) = \frac{[2m(0)]^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \left[\frac{\hbar\omega (\hbar\omega - E_g)}{E_g} \right]^{1/2} \left(\frac{\hbar\omega}{E_g} - \frac{1}{2} \right). \quad (2)$$

Сравнивая это с выражением (3) из решения предыдущей задачи, находим

$$\frac{\rho_{\text{комб},h}}{\rho_{\text{комб},l}} = 8 \left(\frac{\hbar\omega}{E_g} - \frac{1}{2} \right) \left[\frac{\hbar\omega}{E_g} \left(\frac{\hbar\omega}{E_g} + 1 \right) \right]^{-1/2}. \quad (3)$$

Видим, что при $\hbar\omega \rightarrow E_g$, т. е. вблизи порога поглощения, $\rho_{\text{комб},h} / \rho_{\text{комб},l} \rightarrow 2^{3/2}$.

1. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛОВ ФЕРМИ

Интеграл Ферми $\Phi_j(\eta)$ определяется соотношением

$$\Phi_j(\eta) = \frac{1}{\Gamma(j+1)} \int_0^{\infty} \frac{e^j dx}{1 + \exp(e - \eta)}, \quad (\text{П.1})$$

где $\Gamma(j+1)$ — гамма-функция. В классическом пределе, когда величина η отрицательна и достаточно велика по абсолютной величине,

$$\Phi_j(\eta) \approx \exp \eta. \quad (\text{П.2})$$

Для больших положительных η (в статистике этому соответствует случай почти полного вырождения) имеет место асимптотический ряд

$$\Phi_j(\eta) = \frac{\eta^{j+1}}{\Gamma(j+2)} \left[1 + \frac{\pi^2}{6\eta^2} \frac{\Gamma(j+2)}{\Gamma(j)} + \dots \right]. \quad (\text{П.3})$$

Для интеграла Ферми $\Phi_{1/2}(\eta)$ часто бывает полезна следующая приближенная формула:

$$\Phi_{1/2}(\eta) = \exp \eta / (1 + 0,27 \exp \eta), \quad (\text{П.4})$$

дающая при $\eta \leq 1,3$ погрешность, не превосходящую 3%. При $\eta \geq 1$ приближенная формула

$$\Phi_{1/2}(\eta) = \frac{4\eta^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{1,15}{\eta^2} \right) \quad (\text{П.5})$$

также дает погрешность не более 3%. Таким образом, приближенные формулы (П.4) и (П.5) перекрывают весь интервал значений от случая сильного вырождения до невырожденного (классического) случая.

В ряде случаев оказывается полезным несколько более сложное приближенное аналитическое выражение для интегралов Ферми [X. Aumerich-Humet, F. Serra-Mestres,

J. Millán, *J. Appl. Phys*, 1983, v. 54, p. 2850], справедливое для всех η и для вещественных $j > -1$:

$$\Phi_j(\eta) = \left\{ \exp(-\eta) + \frac{\Gamma(j+2) 2^{j+1}}{[b + \eta + (|\eta - b|^c + a^c)^{1/c}]^{j+1}} \right\}^{-1}, \quad (\text{П.6})$$

Здесь

$$a = \left\{ 1 + \frac{15}{4}(j+1) + \frac{1}{40}(j+1)^2 \right\}^{1/2}, \quad (\text{П.7a})$$

$$b = 1,8 + 0,61j, \quad (\text{П.7б})$$

$$c = 2 + (2 - \sqrt{2})2^{-j}. \quad (\text{П.7в})$$

В интервале $-1/2 < j < 4$ выражение (П.6) дает погрешность, не превышающую 1,2% для всех η .

Для оценки интегралов, содержащих функцию Ферми или ее производные, в случае сильного вырождения часто используется разложение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dG(\varepsilon)}{d\varepsilon} \cdot \frac{1}{1 + \exp(\varepsilon - \eta)} d\varepsilon = -G(\infty) + G(\eta) + \frac{\pi^2}{6} \frac{d^2G}{d\eta^2} + \dots \quad (\text{П.8})$$

Здесь $G(\varepsilon)$ — произвольная функция энергии, плавная вблизи точки $\varepsilon = \eta$.

2. НЕКОТОРЫЕ ПАРАМЕТРЫ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ

Материал	E_g^* , эВ	$\frac{m_{dn}}{m_0}$	$\frac{m_{dp}}{m_0}$	μ_n (300 К), см ² ·В ⁻¹ с ⁻¹	μ_p (300 К), см ² ·В ⁻¹ с ⁻¹
Ge	0,74	0,55	0,36	3800	1800
Si	1,16	1,06	0,59	1450	500
InSb	0,22	0,013	0,4	78000	750
InAs	0,43	0,023	0,41	33000	460
InP	1,40	0,067	—	4600	150
GaSb	0,80	0,047	0,23	4000	1400
GaAs	1,52	0,068	0,5	8800	400

*) В таблице приведены значения ширины запрещенной зоны при 77 К, полученные из оптических измерений.

Данные, приведенные в таблице для германия и кремния, в основном взяты из книги Р. Смита «Полупроводники». — М.: Мир, 1982, а для полупроводниковых соединений $A^{III}B^V$ — из обзора К. Хилсума «Некоторые основные черты соединений типа $A^{III}B^V$ », опубликованного в сборнике «Semiconductors and Semimetals», v. 1, Acad. Press, 1966. При пользовании таблицей следует иметь в виду, что с развитием техники эксперимента фигурирующие в ней числовые значения параметров могут подвергнуться уточнению.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию	3	
Предисловие к первому изданию	4	
		Задачи Решения
<i>Глава 1.</i> Статистика электронов и дырок в полупроводниках	5	57
<i>Глава 2.</i> Рекомбинация носителей заряда в полупроводниках	21	80
<i>Глава 3.</i> Диффузия и дрейф носителей заряда	27	87
<i>Глава 4.</i> Диффузия и дрейф носителей заряда в магнитном поле	34	100
<i>Глава 5.</i> Поверхностные явления	37	103
<i>Глава 6.</i> Термо-э. д. с. в полупроводниках	47	127
<i>Глава 7.</i> Фото-э. д. с. в полупроводниках	51	134
<i>Глава 8.</i> Оптика полупроводников	53	137
<i>Приложения</i>		
1. Некоторые свойства интегралов Ферми		140
2. Некоторые параметры полупроводниковых материалов		141