$$\begin{array}{l|l} D^2(uv) = uD^2v + C_2^1 DuDv + vD^2u & \times a \\ D(uv) = uDv + vDu & \times b \\ E(uv) = uv & \times c \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} P(D)(uv) = u\left(aD^2v + bDv + cv\right) + \\ + Du\left(aC_2^1 Dv + bEv\right) + \\ + avD^2u. \end{aligned} \tag{2.4.56}$$

Observăm că

$$\begin{aligned} &u\left(aD^2v + bDv + cEv\right) = uP(D)v, \\ &Du\left(aC_2^1 Dv + bEv\right) = Du(2aDv + bEv) = DuP'(D)v, \\ &D^2u(av) = \frac{1}{2}D^2u(2av) = \frac{1}{2!}D^2uP''(D)v. \end{aligned} \tag{2.4.57}$$

Formula (2.4.53) este astfel demonstrată. ◘

## 2.4.3. ECUAȚII DIFERENȚIALE LINEARE ŞI NEOMOGENE

Conform celor spuse în paragraful anterior, deoarece în cazul ecuațiilor diferențiale ordinare cu coeficienți constanți se determină întotdeauna un sistem fundamental de soluții sub formă de funcții elementare, rămâne să determinăm o soluție particulară a ecuației neomogene

$$Ly \equiv a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{2.4.58}$$

Desigur, putem aplica metoda variației constantelor, însă, în cazul coeficienților constanți, dacă termenul liber se exprimă prin funcții elementare, putem găsi metode mai simple decât aceasta.

Distingem mai multe cazuri:

**A**. ***Termenul liber este polinom de gradul*** *m* ***în*** *x*, adică

$$f(x) = P_m(x). \tag{2.4.59}$$

Atunci

- Dacă $a_n \neq 0$, căutăm soluția particulară $Y(x)$ pentru ecuația $LY = P_m(x)$ sub forma unui polinom de acelaşi grad, deci

$$Y(x) = Q_m(x). \tag{2.4.60}$$

Coeficienții lui $Q_m(x)$ se determină simplu, prin identificare.

*Exemplu*. Să se determine o soluție particulară pentru ecuația

$$Ly \equiv y''' + y'' - y' - y = x^2 + 1. \tag{2.4.61}$$

**Soluție**. Ecuația (2.4.61) este lineară şi neomogenă, cu coeficienți constanți. Termenul liber este un polinom de gradul 2, iar $a_3 \equiv -1 \neq 0$. Putem căuta soluția particulară sub forma polinomului de gradul 2

$$Y(x) \equiv Q_2(x) = ax^2 + bx + c. \tag{2.4.62}$$

Derivând şi introducând în ecuație, obținem

$$2a - (2ax + b) - (ax^2 + bx + c) = x^2 + 1, \tag{2.4.63}$$

sau

$$-ax^2 - (2a + b)x + 2a - b - c = x^2 + 1, \tag{2.4.64}$$

Identificând coeficienții, rezultă

$$a = -1, \quad b = 2, \quad c = -5, \tag{2.4.65}$$

deci soluția particulară căutată este

$$\boxed{Y(x) = -x^2 + 2x - 5}. \tag{2.4.66}$$

- Dacă $a_n, a_{n-1}, ..., a_{n-r}$ ($r < n$) sunt nuli, căutăm pe $Y$ sub forma

$$Y(x) = x^{r-1} Q_m(x). \tag{2.4.67}$$

*Exemplu*. Să se determine o soluție particulară pentru ecuația diferențială ordinară lineară şi neomogenă

$$Ly \equiv y''' + y'' = x + 1. \tag{2.4.68}$$

**Soluție**. Ecuația (2.4.68) este cu coeficienți constanți. Termenul liber este un polinom de gradul unu, iar $a_3 = 0, a_2 = 0$. Căutăm, deci, soluția particulară sub forma

$$Y(x) = x^2 Q_1(x) = x^2(ax + b). \tag{2.4.69}$$

Derivând şi introducând în ecuație, obținem

$$6a + (6ax + 2b) = x + 1, \tag{2.4.70}$$

sau

$$6ax + 6a + 2b = x + 1, \tag{2.4.71}$$

Identificând coeficienții, rezultă

$$a = \frac{1}{6}, \quad b = 0, \tag{2.4.72}$$

deci soluția particulară căutată este

$$\boxed{Y(x) = \frac{1}{6}x^3}. \tag{2.4.73}$$

**B**. ***Termenul liber este o exponențială***, adică

$$f(x) = A\mathrm{e}^{\alpha x}. \tag{2.4.74}$$

Distingem şi aici două cazuri:

- $\alpha$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice, deci $P_n(\alpha) \neq 0$. În acest caz, căutăm o soluție particulară a ecuației neomogene de forma termenului liber, adică

$$Y(x) = a\mathrm{e}^{\alpha x}. \tag{2.4.75}$$

Derivând şi introducând în ecuație, obținem

$$aP_n(\alpha)\mathrm{e}^{\alpha x} = A\mathrm{e}^{\alpha x}, \tag{2.4.76}$$

de unde, prin identificare, deducem

$$a = \frac{A}{P_n(\alpha)}. \tag{2.4.77}$$

*Exemplu*. Să se determine o soluție particulară pentru ecuația

$$Ly \equiv y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{3x}. \tag{2.4.78}$$

**Soluție**. Ecuația (2.4.78) este lineară şi neomogenă, cu coeficienți constanți. Termenul liber este de forma unei exponențiale (2.4.75), cu $\alpha = 3$. Ecuația se mai poate scrie şi cu ajutorul polinomului diferențial

$$Ly \equiv \left(\underbrace{D^2 - 3D + 2E}_{P(D)}\right)y = \mathrm{e}^{3x}. \tag{2.4.79}$$

Ecuația caracteristică asociată este

$$r^2 - 3r + 2 = 0, \tag{2.4.80}$$

cu rădăcinile

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 2; \tag{2.4.81}$$

nici una nu coincide cu α. Căutăm, deci, soluția particulară sub forma

$$Y(x) = a\mathrm{e}^{x}. \tag{2.4.82}$$

Derivăm şi introducem în ecuație

$$P(D)\left(a\mathrm{e}^{3x}\right) = a \cdot P\left(\mathrm{e}^{3x}\right) = a\mathrm{e}^{3x}(9 - 3\cdot 3 + 2) = 2a\mathrm{e}^{3x}, \tag{2.4.83}$$

de unde deducem

$$2a\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{3x} \quad \rightarrow \quad a = \frac{1}{2}. \tag{2.4.84}$$

Soluția particulară este deci

$$\boxed{Y(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x}}. \tag{2.4.85}$$

- $\alpha$ este rădăcină multiplă de ordinul $m$, $m \le n$, a ecuației caracteristice, deci

$$P_n(\alpha)=0, \quad P_n'(\alpha)=0, \quad P_n''(\alpha)=0, \quad ...P_n^{(m-1)}(\alpha)\neq 0, \tag{2.4.86}$$

dar

$$P_n^{(m)}(\alpha)\neq 0. \tag{2.4.87}$$

În acest caz, căutăm o soluție particulară a ecuației neomogene de forma

$$Y(x)=ax^m\mathrm{e}^{\alpha x}. \tag{2.4.88}$$

Derivăm folosind formula (2.4.53), luând $u=ax^m, v=\mathrm{e}^{\alpha x}$. Introducând în ecuație, obținem

$$\begin{aligned} &a_0ax^m\underbrace{P_n(\alpha)\mathrm{e}^{\alpha x}}_{=0}+a_1m\,ax^{m-1}\underbrace{P_n'(\alpha)\mathrm{e}^{\alpha x}}_{=0}+...+\\ &+\frac{1}{(m-1)!}(m-1)!ax\cdot a_{m-1}\underbrace{P_n^{(m-1)}(\alpha)\mathrm{e}^{\alpha x}}_{=0}+\\ &+\frac{1}{m!}m!a\cdot a_mP_n^{(m)}(\alpha)\mathrm{e}^{\alpha x}=A\mathrm{e}^{\alpha x}, \end{aligned} \tag{2.4.89}$$

de unde, prin identificare, deducem

$$a=\frac{A}{a_mP_n^{(m)}(\alpha)}. \tag{2.4.90}$$

*Exemplu*. Să se determine o soluție particulară pentru ecuația

$$Ly\equiv y'''-3y''+3y'-y=\mathrm{e}^x. \tag{2.4.91}$$

**Soluție**. Ecuația (2.4.91) este lineară şi neomogenă, cu coeficienți constanți.

Termenul liber este de forma unei exponențiale (2.4.75), cu $\alpha=1$. Ecuația se mai scrie şi cu ajutorul polinomului diferențial

$$Ly \equiv \Big(\underbrace{D^3 - 3D^2 + 3D - E}_{P(D)}\Big)y = e^x. \tag{2.4.92}$$

Ecuația caracteristică asociată este

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0, \tag{2.4.93}$$

care se mai scrie şi

$$(r-1)^3 = 0. \tag{2.4.94}$$

Rezultă că 1 este rădăcină triplă a ecuației caracteristice. Căutăm, deci, soluția particulară sub forma

$$Y(x) = ax^3 e^x. \tag{2.4.95}$$

Derivăm folosind formula (2.4.53), luând $u = ax^3$, $v = e^{\alpha x}$. Calculăm mai întâi

$$\begin{aligned} &P'(D) = 3D^2 - 6D + 3E = 3(D-E)^2, \\ &P''(D) = 6D - 6E = 3!(D-E), \\ &P'''(D) = 6E. \end{aligned} \tag{2.4.96}$$

Evident,

$$P(D)e^x = 0, \quad P'(D)e^x = 0, \quad P''(D)e^x = 0, \quad P'''(D)e^x = 6e^x. \tag{2.4.97}$$

Aplicând formula (2.4.53), obținem

$$P(D)\left(ax^3 e^x\right) = ax^3 \underbrace{P\left(e^x\right)}_{=0} + 3ax^2 \underbrace{P'\left(e^x\right)}_{=0} + \frac{1}{2!}6ax\underbrace{P''\left(e^x\right)}_{=0} + \frac{1}{3!}3!a \cdot P'''\left(e^x\right) = e^x, \tag{2.4.98}$$

de unde, ținând seama şi de (2.4.97), deducem

$$a = \frac{1}{6}. \tag{2.4.99}$$

Soluția particulară este deci

$$Y(x) = \frac{1}{6} x^3 e^x . \qquad (2.4.100)$$

**C**. ***Termenul liber este o exponențială înmulțită cu un polinom,*** adică

$$f(x) = P_m(x) e^{\alpha x} . \qquad (2.4.101)$$

Distingem din nou două cazuri:

- $\alpha$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice. În acest caz, căutăm o soluție particulară a ecuației neomogene de forma termenului liber, adică

$$Y(x) = Q_m(x) e^{\alpha x} . \qquad (2.4.102)$$

*Exemplu*. Să se determine o soluție particulară pentru ecuația diferențială ordinară

$$Ly \equiv y'' - 3y' + 2y = x e^{3x} . \qquad (2.4.103)$$

**Soluție**. Ecuația (2.4.103) este lineară şi neomogenă, cu coeficienți constanți. Termenul liber este de forma (2.4.101), unde $\alpha = 3$, iar $P_m(x) = x$. Am arătat mai sus că ecuația se mai scrie şi cu ajutorul polinomului diferențial (2.4.79) şi am calculat rădăcinile ecuației caracteristice (2.4.80), care nu coincid cu $\alpha$ . Căutăm soluția particulară sub forma

$$Y(x) = (ax + b) e^{3x} . \qquad (2.4.104)$$

Derivăm folosind formula (2.4.53), pentru $u = ax + b, v = e^{3x}$ . Ținând seama de faptul că

$$\begin{aligned} P'(D) &= 2D - 3E, \\ P''(D) &= 2E, \end{aligned} \qquad (2.4.105)$$

obținem

$$\begin{aligned} & P(D)\left((ax + b) e^{3x}\right) = (ax + b) \cdot P\left(e^{3x}\right) + aP'\left(e^{3x}\right) = \\ & = (ax + b)(9 - 3 \cdot 3 + 2) + a \cdot (6 - 3) = (2ax + 3a + 2b) e^{3x} , \end{aligned} \qquad (2.4.106)$$

de unde

$$\left(2ax+3a+2b\right)e^{3x}=xe^{3x}\quad\rightarrow\quad a=\frac{1}{2},\,b=-\frac{3}{4}. \tag{2.4.107}$$

Soluția particulară este deci

$$\boxed{Y(x)=\frac{1}{4}(2x-3)e^{3x}}. \tag{2.4.108}$$

- α este rădăcină multiplă de ordinul $r$, $r\le n$, a ecuației caracteristice. În acest caz, căutăm o soluție particulară a ecuației neomogene de forma

$$Y(x)=x^{r}Q_{m}(x)e^{\alpha x}. \tag{2.4.109}$$

În ambele cazuri formula (2.4.53) este foarte utilă.

*Observație*. Dacă α este rădăcină multiplă a ecuației caracteristice, este mai simplu să folosim mai întâi schimbarea de funcție

$$y(x)=z(x)e^{\alpha x}. \tag{2.4.110}$$

Aplicând formula (2.4.53), obținem o ecuație diferențială ordinară în $z$, în care exponențiala se simplifică şi al cărui termen liber este un polinom; suntem deci într-unul din cazurile **A**.

*Exemplu*. Să se determine o soluție particulară pentru ecuația diferențială

$$Ly\equiv y'''-3y''+3y'-y=x^{5}e^{x}. \tag{2.4.111}$$

**Soluție**. Ecuația (2.4.111) este lineară şi neomogenă, cu coeficienți constanți. Termenul liber este de forma (2.4.101), cu $\alpha=1$. Am mai scris ecuația cu ajutorul polinomului diferențial (2.4.92) şi am arătat că ecuația sa caracteristică admite pe 1 ca rădăcină multiplă de ordinul 3.

Efectuăm echimbarea de funcție

$$y(x)=z(x)e^{\alpha x}, \tag{2.4.112}$$

folosind formula (2.4.53) pentru $u = z(x), v = \mathrm{e}^{\alpha x}$ şi ținând seama de calculele derivatelor formale ale polinomului diferențial din (2.4.96). Obținem

$$P(D)\left(z\mathrm{e}^{x}\right) = z\underbrace{P\left(\mathrm{e}^{x}\right)}_{=0} + z'\underbrace{P'\left(\mathrm{e}^{x}\right)}_{=0} + \frac{1}{2!}z''\underbrace{P''\left(\mathrm{e}^{x}\right)}_{=0} + \frac{1}{3!}z''' \cdot P'''\left(\mathrm{e}^{x}\right) = x^5\mathrm{e}^{x}, \qquad (2.4.113)$$

de unde deducem, după simplificarea cu $\mathrm{e}^{x}$,

$$z''' = x^5. \qquad (2.4.114)$$

Aceasta este o ecuație diferențială ordinară lineară şi neomogenă, de ordinul III în *z*. O soluție particulară a sa se obține imediat prin integrare directă

$$Z(x) = \frac{1}{6\cdot 7\cdot 8}x^8. \qquad (2.4.115)$$

Soluția particulară căutată pentru ecuația (2.4.109) este deci

$$\boxed{Y(x) = \frac{1}{6\cdot 7\cdot 8}x^8\mathrm{e}^{x}}. \qquad (2.4.116)$$

**D**. ***Termenul liber este o funcție trigonometrică*** (sin, cos)

$$f(x) = a\sin\alpha x + b\cos\alpha x. \qquad (2.4.117)$$

Distingem din nou două cazuri:

- $i\alpha$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice. În acest caz, căutăm o soluție particulară a EDO neomogene de forma termenului liber, adică

$$Y(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x. \qquad (2.4.118)$$

*Exemplu*. Să se determine o soluție particulară pentru ecuația diferențială

$$Ly \equiv y'' - 5y' + 4y = \cos x. \qquad (2.4.119)$$

**Soluție**. Ecuația (2.4.78) este lineară şi neomogenă, cu coeficienți constanți. Termenul liber este de forma (2.4.118), cu $\alpha = 1$. Ecuația se mai poate scrie şi cu ajutorul polinomului diferențial

$$Ly \equiv \left(\underbrace{D^2 - 5D + 4E}_{P(D)}\right) y = \cos x. \qquad (2.4.120)$$

Ecuația caracteristică asociată este

$$r^2 - 5r + 4 = 0, \qquad (2.4.121)$$

cu rădăcinile reale

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 4. \qquad (2.4.122)$$

Căutăm soluția particulară sub forma:

$$Y(x) = a\cos x + b\sin x. \qquad (2.4.123)$$

Derivăm şi introducem în ecuație:

$$\begin{aligned} &L(a\cos x + b\sin x) = (-a\cos x - b\sin x) - 5(-a\sin x + b\cos x) + \\ &+ 4(a\cos x + b\sin x) = \cos x. \end{aligned} \qquad (2.4.124)$$

De aici deducem, prin identificarea coeficienților sistemul algebric,

$$\begin{cases} 3a - 5b = 1, \\ 5a + 3b = 0, \end{cases} \quad \rightarrow \quad a = \frac{3}{34}, b = -\frac{5}{34}. \qquad (2.4.125)$$

Soluția particulară este

$$\boxed{Y(x) = \frac{1}{34}(3\cos x - 5\sin x)}. \qquad (2.4.126)$$

- $i\alpha$ este rădăcină multiplă de ordinul $m$ a ecuației caracteristice. În acest caz, căutăm o soluție particulară a ecuației neomogene de forma

$$Y(x) = x^m (a\cos x + b\sin x). \qquad (2.4.127)$$

**E**. ***Dacă termenul liber este o funcție de forma***

$$f(x) = P_m(x)(a\cos\alpha x + b\sin\alpha x)e^{\beta x}, \qquad (2.4.128)$$

am putea căuta din nou soluția particulară sub o formă asemănatoare cu termenul liber, ținând seama şi de rădăcinile ecuației caracteristice.

Însă este mai simplu să efectăm mai întâi schimbarea

$$y(x) = z(x)\mathrm{e}^{\beta x}, \tag{2.4.129}$$

folosind formula (2.4.53) şi, după simplificarea cu $\mathrm{e}^{\beta x}$, să determinăm o soluție particulară pentru ecuația în *z*, conform celor arătate la punctul precedent.

## 2.5. ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDIN SUPERIOR, INTEGRABILE PRIN CUADRATURI

**1.** Cea mai simplă ecuație de ordinul *n* integrabilă prin cuadraturi este

$$y^{(n)} = f(x), \tag{2.5.1}$$

unde $f \in C^0(\mathrm{I}), \quad \mathrm{I} \subseteq \mathfrak{R}$.

Soluția generală se poate obține prin *n* cuadraturi şi este dată de formula

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)dt + C_0 + C_1\frac{x-x_0}{1!} + \ldots + C_{n-1}\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{2.5.2}$$

$$x \in \mathrm{I}, \; C_0, C_1, \ldots C_{n-1} \in \mathfrak{R}.$$

Într-adevăr, din ecuația $y^{(n)} = f(x)$ se obține

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t + C_{n-1}, \qquad x \in \mathrm{I}, \tag{2.5.3}$$

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t + C_{n-1}(x-x_0) + C_{n-2}, \qquad x \in \mathrm{I}. \tag{2.5.4}$$

Rezultă