Curs 5

Sisteme de ecuaţii diferenţiale

5.1 Sisteme normale

Definiţie 5.1. Se numeşte ***sistem normal*** sistemul de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n).
\end{aligned}$$

Exemplu 5.2 (Modelul pradă-prădător sau Ecuaţiile Lotka-Volterra)**.** Acest model a fost propus iniţial în 1910 de A. Lotka în studiul reacţiilor chimice, iar apoi independent a fost studiat de matematicianul V. Volterra în anii 1920 în analiza statistică pe care a făcut-o a tipurilor de peşti din Marea Adriatică. Fie $x(t)$ numărul populaţiei pradă la momentul de timp t şi $y(t)$ numărul prădătorilor. Pentru a obţine un model cât mai simplu facem următoarele presupuneri:

1. în absenţa prădătorilor, populaţia pradă creşte cu rata $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = ax,\ a > 0$.
2. în absenţa pradei, populaţia prădătorilor scade cu rata $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = -by,\ b > 0$.
3. când ambele populaţii sunt prezente, consumul pradei de către prădători duce la o scădere în x proporţională cu xy (adică $-pxy,\ p > 0$) şi o creştere în y proporţională cu xy (adică $qxy,\ q > 0$); motivul pentru care am luat proporţionalitate cu produsul dintre x şi y este următorul: dacă oricare din populaţii se dublează, frecvenţa întâlnirilor dintre populaţii se dublează, iar dacă ambele populaţii se dublează, numărul întâlnirilor creşte de patru ori.

Se obţine sistemul

$$\begin{cases} x' = ax - pxy \\ y' = -by + qxy. \end{cases}$$

Definiţie 5.3. Se numeşte soluţie a sistemului normal pe intervalul I o funcţie vectorială $X = (x_1, \ldots, x_n)$ ce verifică egalităţile

$$x_i'(t) = f_i(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)), \qquad \text{pentru orice } i \text{ de la 1 la } n \text{ şi orice } t \in I.$$

Definiţie 5.4. Se numeşte problemă Cauchy cerinţa determinării unei soluţii a sistemului care verifică condiţii iniţiale:

$$x_i(t_0) = x_{i,0}, \quad t_0 \in I, \text{ şi } x_{i,0} \in \mathbb{R}.$$

Observaţie 5.5. Sistemul se poate scrie sub formă vectorială

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = F(t, X) \text{ cu condiţia iniţială } X(t_0) = X_0.$$

Teoremă 5.6 (Teoremă de existenţă şi unicitate)**.** Dacă funcţiile $f_i : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt continue pe $D = \{ (t, x_1, \ldots, x_n) \,|\, t \in [t_0 - a, t_0 + a],\ x_i \in [x_{i,0} - b_i, x_{i,0} + b_i] \}$ şi lipschitziene în raport cu $x_1, \ldots, x_n$ pe D atunci există o unică soluţie a problemei Cauchy

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = F(t, X) \text{ cu condiţia iniţială } X(t_0) = X_0.$$

definită pe intervalul $[t_0 - h, t_0 + h]$ unde $h = \min(a, b_i/M)$ cu $M = \max |f_i(t, x_1, \ldots, x_n)|$.

Demonstraţie. Demonstraţia este analoagă cu cea din cazul ecuaţiilor diferenţiale de ordinul întâi. □

Observaţie 5.7. O ecuaţie de ordin superior $x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)})$ este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \ldots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = f(t, x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Deci teorema de existenţă şi unicitate pentru sisteme se aplică şi unei astfel de ecuaţii.

5.2 Sisteme liniare cu coeficienţi constanţi

Un sistem liniar cu coeficienţi constanţi se poate scrie sub forma matriceală:

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = AX + F,$$

unde A este o matrice de $n \times n$ cu elemente numere reale, iar F este o matrice coloană de $n \times 1$, care are ca şi elemente, funcţiile $f_i(t)$.

$$X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & m_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{bmatrix}, \ F = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}.$$

Dacă $F = 0$, atunci sistemul este liniar omogen.

La fel ca şi la ecuaţii diferenţiale liniare, soluţia sistemului este de forma

$$X = X_o + X_p,$$

X_o fiind soluţia sistemului omogen $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = MX$, iar X_p soluţia particulară.

Vom prezenta în continuare două metode de rezolvare: prima, metoda eliminării succesive a funcţiilor necunoscute şi a doua, metoda vectorilor şi valorilor proprii. Vom ilustra cele două metode prin câteva exemple.

Exemplu 5.8. Să se integreze sistemul

$$\begin{cases} x' = x + 3y + 2e^t \\ y' = 3x + y + e^t + e^{-2t}. \end{cases}$$

Metoda I
Derivăm prima ecuaţie şi obţinem

$$x'' = x' + 3y' + 2e^t = 10x + 6y + 7e^t + 3e^{-2t}.$$

Eliminăm pe y, înmulţind prima ecuaţie a sistemului cu -2 şi adunând la relaţia obţinută anterior. Rezultă ecuaţia diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi:

$$x'' - 2x' - 8x = 3e^t + 3e^{-2t},$$

care are soluţia generală

$$x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-2t} - \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{2}te^{-2t}.$$

Din prima ecuaţie a sistemului, se obţine

$$y = \frac{1}{3}(x' - x - 2e^t) = C_1 e^{4t} - C_2 e^{-2t} - \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-2t}.$$

Metoda II
Rezolvăm întâi sistemul omogen $X' = AX$. Căutăm soluţia sub forma

$$X = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} e^{rt}. \tag{5.1}$$

Înlocuind în sistemul de ecuaţii diferenţiale, rezultă sistemul algebric

$$(A - rI) \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = O. \tag{5.2}$$

Acest sistem are soluţii nebanale, dacă $det(A - rI) = 0$. Soluţiile aceste ecuaţii sunt valorile proprii ale matricei A, $r_1 = -2$ şi $r_2 = 4$. Înlocuind $r = -2$ în sistemul (5.2) obţinem $3\alpha + 3\beta = 0$, adică $\beta = -\alpha$. Luând $\alpha = C_1$, rezultă vectorul propriu corespunzător şi deci soluţia corespunzătoare

$$X_1 = C_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Pentru $r = 4$ sistemul (5.2) se reduce la $-3\alpha + 3\beta = 0$, adică $\alpha = \beta$. Luând $\alpha = C_2$, rezultă

$$X_2 = C_2 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Soluţia sistemului omogen este

$$X_o = X_1 + X_2 = C_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pentru a rezolva sistemul neomogen, descompunem pe F într-o formă convenabilă:

$$F = \begin{bmatrix} 2e^t \\ e^t + e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}.$$

Soluţia particulară X_{p_1} o alegem de forma

$$X_{p_1} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} e^t.$$

Înlocuind în sistemul iniţial se obţine $A = -\frac{1}{3}$ şi $B = -\frac{2}{3}$. Soluţia X_{p_2} se caută de forma

$$X_{p_2} = \begin{bmatrix} At + B \\ Ct + D \end{bmatrix} e^{-2t},$$

deoarece -2 este valoare proprie. Înlocuind în sistemul neomogen $X' = AX + F$ se obţine $A = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$ şi $B + D = -\frac{1}{6}$. Putem alege $B = 0$ şi $D = -\frac{1}{6}$ (altfel se renotează $C_1 := C_1 + B$ şi se ajunge la aceeaşi formă a rezultatului). Soluţia generală e sistemului va fi

$$X = X_o + X_{p_1} + X_{p_2} = C_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} e^t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} e^{-2t} \begin{bmatrix} 3t \\ -3t + 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplu 5.9. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} x' = 4x - y - 2z \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = x - y + z. \end{cases}$$

Metoda I

Derivând prima ecuaţie avem

$$x'' = 4x' - y' - 2z' = 4(4x - y - 2z) - (2x + y - 2z) - 2(x - y + z) = 12x - 3y - 8z.$$

Mai derivând încă o dată se obţine

$$x''' = 12x' - 3y' - 8z' = 12(4x - y - 2z) - 3(2x + y - 2z) - 8(x - y + z) = 34x - 7y - 26z.$$

Rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} x' &= 4x - y - 2z \\ x'' &= 12x - 3y - 8z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2z &= 4x - x' \\ 3y + 8z &= 12x - x'' \end{cases}$$

Înmulţim prima ecuaţie cu -3 şi adunăm la a doua. Obţinem $2z = 3x' - x''$. Înmulţim prima ecuaţie cu 4 şi scădem a doua ecuaţie. Rezultă $y = 4x + x'' - 4x'$. Înlocuind aceste relaţii în ecuaţia cu x''' avem

$$x''' = 34x - 7(4x + x'' - 4x') - 13(3x' - x'') = 6x + 6x'' - 11x'.$$

Rezultă ecuaţia liniară de ordinul 3 cu coeficienţi constanţi: $x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 0$. Ecuaţia caracteristică este $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$. Folosind schema lui Horner obţinem

	1	-6	11	-6
1	1	-5	6	0
2	1	-3	0	
3	1	0		

rădăcinile $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ şi $r_3 = 3$. Atunci $x = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t}$. Folosind relaţia $y = 4x+x''-4x'$ rezultă $y = C_1e^t+C_3e^{3t}$, iar din $2z = 3x'-x''$ se obţine $z = C_1e^t+C_2e^{2t}$.

Metoda II

Scriem sistemul sub formă matricială:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X}.$$

Determinăm mai întâi valorile proprii ale matricei A

$$\begin{vmatrix} 4-r & -1 & -2 \\ 2 & 1-r & -2 \\ 1 & -1 & 1-r \end{vmatrix} = 0.$$

Adunând a doua coloană la prima avem

$$\begin{vmatrix} 3-r & -1 & -2 \\ 3-r & 1-r & -2 \\ 0 & -1 & 1-r \end{vmatrix} = (3-r)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1-r & -2 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-r)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2-r & 0 \\ 0 & -1 & 1-r \end{vmatrix}.$$

Obţinem $(3-r)(2-r)(1-r) = 0$, cu soluţiile $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ şi $r_3 = 3$. Vectorul propriu corespunzător lui r_1 se determină rezolvând sistemul

$$(A - r_1I)\cdot\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha & -\beta & -2\gamma & = 0 \\ 2\alpha & & -2\gamma & = 0 \\ \alpha & -\beta & & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \alpha = \gamma \\ \alpha = \beta \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = C_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vectorul propriu corespunzător lui r_2 se determină rezolvând sistemul

$$(A - r_2I)\cdot\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta - 2\gamma = 0 \\ 2\alpha - \beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha - \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \beta = 0 \\ \alpha = \gamma \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = C_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

iar vectorul propriu corespunzător valorii proprii r_3 se obţine din sistemul

$$(A - r_3I)\cdot\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta - 2\gamma = 0 \\ 2\alpha - 2\beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha - \beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \gamma = 0 \\ \alpha = \beta \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = C_3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Atunci

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1e^t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t} \\ C_1e^t + C_3e^{3t} \\ C_1e^t + C_2e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Metoda III
Dacă $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ şi $z(0) = z_0$, notând $X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$ soluţia sistemului de ecuaţii diferenţiale $X' = A \cdot X$ este
$$X = e^{At} \cdot X_0,$$
unde
$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n.$$
Puterea n a matricei A se calculează utilizând forma Jordan $A = PJP^{-1}$:
$$\begin{aligned} A^n &= A \cdot A \cdots A \\ &= PJP^{-1} \cdot PJP^{-1} \cdots PJP^{-1} \\ &= PJ^nP^{-1}. \end{aligned}$$
Cu această reprezentare a matricei A^n avem
$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = P \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} J^n \cdot P^{-1} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1}.$$
Folosind calculele de la metoda II de rezolvare avem
$$J^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}.$$
Utilizând formula $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, adevărată pentru orice $z \in \mathbb{C}$, obţinem
$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} 2^n & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} 3^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}.$$
Notând $P^{-1} \cdot X_0 = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$ obţinem
$$X = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot X_0 = P \cdot \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^{2t} \\ C_3 e^{3t} \end{bmatrix},$$
adică
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
Exemplu 5.10. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare
$$\begin{cases} x' = -2x - y + z \\ y' = 5x - y + 4z \\ z' = 5x + y + 2z. \end{cases}$$

Metoda I
Derivând prima ecuaţie avem
$$x'' = -2x' - y' + z' = -2(-2x - y + z) - (5x - y + 4z) + (5x + y + 2z) = 4x + 4y - 4z.$$

Rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} x' &= -2x - y + z \\ x'' &= 4x + 4y - 4z \end{cases}$$

Înmulţim prima ecuaţie cu 4 şi adunăm la a doua. Obţinem $x'' + 4x' + 4x = 0$. Ecuaţia caracteristică este $r^2 + 4r + 4 = 0$, care are rădăcinile $r_1 = -2$, $r_2 = -2$. Atunci $x = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$.

Derivăm a doua ecuaţie a sistemului

$$y'' = 5x' - y' + 4z' = 5(-2x - y + z) - (5x - y + 4z) + 4(5x + y + 2z) = 5x + 9z.$$

Din sistemul

$$\begin{cases} y' + y &= 5x + 4z \\ y'' &= 5x + 9z \end{cases}$$

rezultă $5z = y'' - y' - y$ şi $25x = -4y'' + 9y' + 9y$. Calculăm acum y'''.

$$y''' = 5x' + 9z' = 5(-2x - y + z) + 9(5x + y + 2z) = 35x + 4y + 23z.$$

Va rezulta

$$y''' - 2y'' = 25x + 4y + 5z = -4y'' + 9y' + 9y + 4y + y'' - y' - y.$$

Obţinem ecuaţia de ordinul 3: $y''' + y'' - 8y' - 12y = 0$. Ecuaţia caracteristică ataşată este $r^3 + r^2 - 8r - 12 = 0$. Folosind schema lui Horner obţinem

	1	1	-8	-12
-2	1	-1	-6	0
-2	1	-3	0	
3	1	0		

rădăcinile $r_1 = -2$, $r_2 = -2$ şi $r_3 = 3$. Soluţia ecuaţiei diferenţiale este

$$y = C_1' e^{-2t} + C_2' t e^{-2t} + C_3 e^{3t}.$$

Din egalitatea $25x = -4y'' + 9y' + 9y$ obţinem $C_1' = -C_1 - C_2$ şi $C_2' = -C_2$. Din egalitatea $5z = y'' - y' - y$ rezultă $z = -C_1 e^{-2t} - C_2 t e^{-2t} + C_3 e^{3t}$. Soluţia sistemului este

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} \\ -C_1 e^{-2t} - C_2 e^{-2t} - C_2 t e^{-2t} + C_3 e^{3t} \\ -C_1 e^{-2t} - C_2 t e^{-2t} + C_3 e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Metoda II

Scriem sistemul sub formă matricială: $X' = A \cdot X$, unde

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determinăm valorile proprii ale matricei A

$$\begin{vmatrix} -2 - r & -1 & 1 \\ 5 & -1 - r & 4 \\ 5 & 1 & 2 - r \end{vmatrix} = 0.$$

Scădem din linia a treia, linia a doua şi adunăm a doua coloană la a treia:

$$\begin{vmatrix} -2-r & -1 & 1 \\ 5 & -1-r & 4 \\ 0 & 2+r & -2-r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-r & -1 & 0 \\ 5 & -1-r & 3-r \\ 0 & 2+r & 0 \end{vmatrix} = (3-r)(2+r)^2 = 0.$$

Obţinem soluţiile $r_1 = -2$, $r_2 = -2$ şi $r_3 = 3$. Soluţia corespunzătoare valorii proprii duble se caută sub forma:

$$X = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 t \\ \beta_1 + \beta_2 t \\ \gamma_1 + \gamma_2 t \end{bmatrix} e^{-2t}.$$

Obţinem sistemele

$$(A - r_1 I) \cdot \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad (A - r_1 I) \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

Din primul sistem notând $\alpha_2 = C_2$ rezultă $\beta_2 = \gamma_2 = -C_2$, iar din cel de-al doilea prin notarea lui $\alpha_1 = C_1$ obţinem $\beta_1 = -C_1 - C_2$ şi $\gamma_1 = -C_1$. Soluţia corespunzătoare valorii proprii r_3 se se caută sub forma

$$X = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} e^{3t}.$$

Rezultă $\alpha = 0$ şi $\beta = \gamma$. Notăm cu C_3 valoarea comună a lui β şi γ. Soluţia sistemului este

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-2t} \left(t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + C_3 e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Metoda III

Dacă $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ şi $z(0) = z_0$, notând $X_0 = \left[\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{smallmatrix}\right]$ soluţia sistemului de ecuaţii diferenţiale $X' = A \cdot X$ este

$$X = e^{At} X_0 = P e^{Jt} P^{-1} X_0.$$

Folosind calculele de la metoda II de rezolvare avem

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad J^n = \begin{bmatrix} (-2)^n & n(-2)^{n-1} & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}.$$

Utilizând formula $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nz^n}{n!} = ze^z$, obţinem

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}(-2)^n & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nt^n}{n!}(-2)^{n-1} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}(-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} 3^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Notând $P^{-1} X_0 = \left[\begin{smallmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{smallmatrix}\right]$ obţinem

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{-2t} + C_2 te^{-2t} \\ -C_1 e^{-2t} - C_2 e^{-2t} - C_2 te^{-2t} + C_3 e^{3t} \\ -C_1 e^{-2t} - C_2 te^{-2t} + C_3 e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Exemplu 5.11. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -4x - 2y + z \\ z' = 4x + y - 2z. \end{cases}$$

Scriem sistemul sub formă matricială: $X' = A \cdot X$, unde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Determinăm valorile proprii ale matricei, rezolvând ecuaţia

$$0 = \begin{vmatrix} 1-r & 1 & 0 \\ -4 & -2-r & 1 \\ 4 & 1 & -2-r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-r & 1 & 0 \\ -4 & -2-r & 1 \\ 0 & -1-r & -1-r \end{vmatrix} = -(1+r) \begin{vmatrix} 1-r & 1 & 0 \\ -4 & -3-r & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Obţinem ecuaţia $(r+1)(r^2+2r+1) = 0$, cu rădăcinile $r_1 = r_2 = r_3 = -1$. Căutăm soluţia sub forma

$$X = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2 \\ \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 t^2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 t + \gamma_3 t^2 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Rezultă $\beta_3 = -2\alpha_3$ şi $\gamma = 2\alpha_3$. Notăm $\alpha_3 = C_3$. De asemenea rezultă $\beta_2 = -2\alpha_2 + 2C_3$ şi $\gamma_2 = 2\alpha_2 - 2C_3$. Vom nota $\alpha_2 = C_2$. Mai rezultă $\beta_1 = -2\alpha_1 + C_2$ şi $\gamma_1 = 2\alpha_1 - C_2 + 2C_3$. Cu notaţia $\alpha_1 = C_1$ obţinem soluţia sub forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t} \left(t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) + C_3 e^{-t} \left(t^2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

Exemplu 5.12. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} x' = 4x - 5y + 7z \\ y' = x - 4y + 9z \\ z' = -4x + 5z. \end{cases}$$

Scriem sistemul sub formă matricială: $X' = A \cdot X$, unde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Determinăm valorile proprii, rezolvând ecuaţia

$$\begin{aligned} 0 = \begin{vmatrix} 4-r & -5 & 7 \\ 1 & -4-r & 9 \\ -4 & 0 & 5-r \end{vmatrix} &= -4 \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -4-r & 9 \end{vmatrix} + (5-r) \begin{vmatrix} 4-r & -5 \\ 1 & -4-r \end{vmatrix} \\ &= -4(-45 + 28 + 7r) + (5-r)(r^2 - 16 + 5). \end{aligned}$$

Obţinem ecuaţia $-r^3 + 5r^2 - 17r + 13 = 0$. Folosind schema lui Horner obţinem

	-1	5	-17	13
1	-1	4	-13	0

soluţia $r_1 = 1$ şi ecuaţia $-r^2 + 4r - 13 = 0$, cu soluţiile $r_2 = 2 + 3i$ şi $r_3 = 2 - 3i$. Soluţia corespunzătoare valorii proprii r_1 se se caută sub forma

$$X = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} e^t.$$

Rezultă $\beta = 2\alpha$ şi $\gamma = \alpha$. Notăm cu C_1 valoarea lui α. Soluţia corespunzătoare rădăcinilor complexe o căutăm sub forma

$$X = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} e^{2t} \cos 3t + \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} e^{2t} \sin 3t.$$

Notând $\gamma_2 = 4C_2$ şi $\gamma_3 = 4C_3$ rezultă $\alpha_2 = 3C_2 - 3C_3$, $\alpha_3 = 3C_2 + 3C_3$ şi $\beta_2 = 5C_2 - 3C_3$, $\beta_3 = 3C_2 + 5C_3$. Soluţia este

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \left(e^{2t} \cos 3t \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} + e^{3t} \sin 3t \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + C_3 \left(e^{2t} \cos 3t \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{3t} \sin 3t \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \right).$$

5.3 Sisteme simetrice

Definiţie 5.13. ***Un sistem simetric*** este un sistem scris sub forma

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{f_1(x_1, \dots, x_{n+1})} = \frac{\mathrm{d}x_2}{f_2(x_1, \dots, x_{n+1})} = \dots = \frac{\mathrm{d}x_{n+1}}{f_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1})}.$$

Pentru rezolvarea sistemului se caută integrale prime.

Definiţie 5.14. Se numeşte ***integrală primă*** o funcţie F neconstantă ce ia valori constante pe orice soluţie a sistemului, adică

$$F(x_1, \dots, x_{n+1}) = C.$$

Pentru a rezolva sistemul simetric este nevoie de determinarea a n integrale prime independente, adică $F_1, \dots F_n$ cu proprietatea că există n variabile (de exemplu $x_1, \dots, x_n$) astfel încât determinantul

$$\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

să nu se anuleze. Teoretic aceasta înseamnă că din integralele prime respective se pot exprima variabilele $x_1, \dots, x_n$ în funcţie de x_{n+1}.

Pentru a determina integrale prime folosim următoarele metode:

1. dacă două rapoarte depind doar de două necunoscute (eventual după simplificări) ele reprezintă o ecuaţie de ordinul întâi care se rezolvă;

2. dacă dintr-o integrală primă se poate exprima o necunoscută în funcţie de celelalte, se ajunge uneori la cazul anterior;

3. se fac combinaţii integrabile de forma

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{f_1} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x_{n+1}}{f_{n+1}} = \frac{g_1\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + g_{n+1}\,\mathrm{d}x_{n+1}}{g_1 f_1 + \cdots + g_{n+1} f_{n+1}}$$

cu proprietatea că $g_1 f_1 + \cdots + g_{n+1} f_{n+1} = 0$ şi $g_1\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + g_{n+1}\,\mathrm{d}x_{n+1} = \mathrm{d}\omega$. Va rezulta că $d\omega = 0$ adică $\omega(x_1, \ldots, x_{n+1}) = C$ şi astfel am obţinut o integrală primă.

Exemplu 5.15. Să se rezolve sistemul

$$\frac{\mathrm{d}x}{z^2 - y^2} = \frac{\mathrm{d}y}{z} = \frac{\mathrm{d}z}{-y}.$$

Ultimile două rapoarte ne arată că $-y\,\mathrm{d}y = z\,\mathrm{d}z$. Integrând se obţine $-y^2/2 = z^2/2 + C_1$. După o redenumire a constantei obţinem $y^2 + z^2 = C_1$. Aceasta este prima integrală primă. Amplificând cu z al doilea raport şi cu y al treilea raport şi adunându-le se obţine

$$\frac{\mathrm{d}x}{z^2 - y^2} = \frac{z\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z}{z^2 - y^2}.$$

După simplificarea numitorului avem $\mathrm{d}x = z\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}(z \cdot y)$, de unde $x = zy + C_2$. Am găsit şi cea de-a doua integrală primă: $x - yz = C_2$.

Exemplu 5.16. Să se integreze sistemul simetric

$$\frac{\mathrm{d}x}{y+z} = \frac{\mathrm{d}y}{x+z} = \frac{\mathrm{d}z}{x+y}.$$

Adunând toate trei rapoartele şi scăzând din primul raport celelalte rapoarte rezultă:

$$\frac{\mathrm{d}x}{y+z} = \frac{\mathrm{d}y}{x+z} = \frac{\mathrm{d}z}{x+y} = \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z}{2(x+y+z)} = \frac{\mathrm{d}x - \mathrm{d}y}{y-x} = \frac{\mathrm{d}x - \mathrm{d}z}{z-x}.$$

Ultimile două rapoarte prin integrare ne dau $x - y = C_1(x - z)$, iar din penultimile deducem

$$\frac{\mathrm{d}(x+y+z)}{(x+y+z)} = -2\frac{\mathrm{d}(x-y)}{x-y} \Rightarrow \ln(x+y+z) = -2\ln(x-y) + \ln C_2 \Rightarrow x+y+z = \frac{C_2}{(x-y)^2}.$$

Exemplu 5.17. Să se rezolve următorul sistem normal aducându-l sub forma simetrică

$$\begin{cases} y' = y(y+z) \\ z' = z(y+z). \end{cases}$$

Forma simetrică a sistemului este

$$\frac{\mathrm{d}y}{y(y+z)} = \frac{\mathrm{d}z}{z(y+z)} = \mathrm{d}x.$$

Din primele două rapoarte avem $\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{z}$. Prin integrare $\ln y = \ln z + \ln C_1$, adică $y = zC_1$. Înlocuind pe y obţinem

$$\frac{\mathrm{d}z}{z(y+z)} = \frac{\mathrm{d}z}{z^2(C_1+1)} = \mathrm{d}x.$$

Integrând, avem $-\frac{1}{z(C_1+1)} = x - C_2$. Rezultă a doua integrală primă

$$x + \frac{1}{y+z} = C_2.$$

5.4 Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi

Notaţie 5.18. Vom folosi notaţia z'_x pentru derivata parţială a funcţiei z în raport cu x. În unele cursuri se foloseşte notaţia $\frac{\partial z}{\partial x}$ sau z_x în loc de z'_x.

5.4.1 Ecuaţii liniare şi omogene

Definiţie 5.19. Se numeşte ***ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi liniară şi omogenă*** o ecuaţie de forma

$$X_1(x_1, \ldots, x_n) \cdot z'_{x_1} + X_2(x_1, \ldots, x_n) \cdot z'_{x_2} + \cdots + X_n(x_1, \ldots, x_n) \cdot z'_{x_n} = 0$$

unde $X_i : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt funcţii continue pe un domeniu $D \subseteq \mathbb{R}^n$ şi există $i \in \{1, \ldots, n\}$ astfel încât X_i să nu se anuleze pe D.

Pentru a rezolva această ecuaţie ataşăm sistemul simetric

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1} = \frac{\mathrm{d}x_2}{X_2} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x_n}{X_n}.$$

Putem presupune în continuare că X_1 nu se anulează.

Teoremă 5.20. Fie $G : D \longrightarrow \mathbb{R}$ o integrală primă a sistemului simetric ataşat. Atunci $z = G(x_1, \ldots, x_n)$ este o soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale.

Demonstraţie. Deoarece $X_1 \neq 0$, putem considera în sistemul simetric pe x_1 ca variabilă independentă. Avem

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = \frac{X_2}{X_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}x_1} = \frac{X_n}{X_1}.$$

Pentru că G este o integrală primă a sistemului simetric ataşat atunci este verificată relaţia $G(x_1, \ldots, x_n) = C$, unde C este o constantă. Derivând în raport cu x_1 rezultă

$$G'_{x_1} + G'_{x_2} \cdot \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} + \cdots + G'_{x_n} \cdot \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}x_1} = 0.$$

De aici, obţinem

$$G'_{x_1} + G'_{x_2} \cdot \frac{X_2}{X_1} + \cdots + G'_{x_n} \cdot \frac{X_n}{X_1} = 0,$$

ceea ce, după o înmulţire cu X_1, ne arată că G este soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale

$$X_1 \cdot z'_{x_1} + X_2 \cdot z'_{x_2} + \cdots + X_n \cdot z'_{x_n} = 0.$$

□

Teoremă 5.21. Fie $F : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie care are derivate parţiale de ordinul întâi pe $D_1 \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ şi fie $G_1, \ldots, G_{n-1} : D \longrightarrow \mathbb{R}$ $n-1$ integrale prime ale sistemului simetric ataşat. Atunci

$$z = F(G_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, G_{n-1}(x_1, \ldots, x_n))$$

este soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale.

Demonstraţie. Avem

$$z'_{x_k} = F'_{G_1} \cdot (G_1)'_{x_k} + \cdots + F'_{G_{n-1}} \cdot (G_{n-1})'_{x_k}$$

pentru orice k de la 1 la n şi

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \cdot z'_{x_k} = \sum_{k=1} X_k \left(\sum_{i=1}^{n-1} F'_{G_i} \cdot (G_i)'_{x_k} \right) = \sum_{i=1}^{n-1} F'_{G_i} \left(\sum_{k=1}^{n} X_k \cdot (G_i)'_{x_k} \right) = 0$$

pentru că G_i sunt integrale prime şi conform teoremei anterioare sunt şi soluţii ale ecuaţiei, adică $\sum_{k=1}^{n} X_k \cdot (G_i)'_{x_k} = 0$. □

Teoremă 5.22. Fie $G_1, \ldots, G_{n-1} : D \longrightarrow \mathbb{R}$ $n-1$ integrale prime independente ale sistemului simetric ataşat ecuaţiei cu derivate parţiale. Atunci orice soluţie a ecuaţiei este de forma

$$z = F(G_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, G_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)).$$

Demonstraţie. Fie z o soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale. Fiindcă şi $G_1, \ldots, G_{n-1}$ sunt soluţii ale ecuaţiei, se obţine sistemul

$$\begin{cases} X_1 \cdot z'_{x_1} + X_2 \cdot z'_{x_2} + \cdots + X_n \cdot z'_{x_n} = 0 \\ X_1 \cdot (G_1)'_{x_1} + X_2 \cdot (G_1)'_{x_2} + \cdots + X_n \cdot (G_1)'_{x_n} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_1 \cdot (G_{n-1})'_{x_1} + X_2 \cdot (G_{n-1})'_{x_2} + \cdots + X_n \cdot (G_{n-1})'_{x_n} = 0. \end{cases}$$

Fiindcă există cel puţin o funcţie X_i care nu se anulează, sistemul are soluţie nebanală. Aceasta înseamnă că determinantul său este identic nul, adică

$$\frac{D(z, G_1, \ldots, G_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0.$$

Aceasta înseamnă că funcţiile $z, G_1, \ldots, G_{n-1}$ sunt funcţional dependente. Fiindcă integralele prime $G_1, \ldots, G_{n-1}$ sunt independente, relaţia de dependenţă se poate scrie

$$z = F(G_1, G_2, \ldots, G_{n-1}).$$

□

Exemplu 5.23. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$(x - z) \cdot u'_x + (y - z) \cdot u'_y + 2z \cdot u'_z = 0.$$

Rezolvăm sistemul simetric

$$\frac{\mathrm{d}x}{x - z} = \frac{\mathrm{d}y}{y - z} = \frac{\mathrm{d}z}{2z}.$$

Avem

$$\frac{\mathrm{d}z}{2z} = \frac{\mathrm{d}x - \mathrm{d}y}{x - y} = \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + 2\,\mathrm{d}z}{x + y + 2z},$$

de unde $2\ln(x - y) = \ln z + \ln C_1$, ceea ce ne arată că $(x - y)^2 = zC_1$. Prima integrală primă este $\frac{(x-y)^2}{z} = C_1$. Pe de altă parte, avem $2\ln(x + y + 2z) = \ln z + \ln C_2$, adică $(x + y + 2z)^2 = zC_2$, ceea ce ne dă a doua integrală primă a sistemului: $\frac{(x+y+2z)^2}{z} = C_2$. Soluţia ecuaţiei cu derivate parţiale este

$$u = F\left(\frac{(x - y)^2}{z}, \frac{(x + y + 2z)^2}{z} \right),$$

unde F este o funcţie oarecare ce admite derivate parţiale de ordinul întâi.

Definiţie 5.24. Problema Cauchy pentru ecuaţia

$$\sum_{i=0}^{n} X_i(x_1, \ldots, x_n) \cdot z'_{x_i} = 0$$

este problema determinării acelei soluţii a ecuaţiei care pentru o valoare fixată a uneia dintre variabile să spunem $x_i = a \in \mathbb{R}$ se reduce la o funcţie dată

$$z(x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{x+1}, \ldots, x_n).$$

Se mai spune că se caută suprafaţa integrală $z = F(x_1, \ldots, x_n)$ care conţine curba

$$\begin{cases} z = g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\ x_i = a. \end{cases}$$

Exemplu 5.25. Să se găsească soluţia ecuaţiei $x \cdot u'_x + y \cdot u'_y + xy \cdot u'_z = 0$ ce corespunde condiţiei $u(x, y, 0) = x^2 + y^2$.

Sistemul simetric ataşat este $\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{xy}$. Din primele două rapoarte rezultă $x = yC_1$. Ţinând cont de prima integrală primă, din ultimile două rapoarte rezultă $yC_1\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}z$. De aici $\frac{C_1y^2}{2} = z + C_2$, adică $xy - 2z = C_2$. Pentru a afla soluţia ce corespunde condiţiei iniţiale rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} x = yC_1 \\ xy - 2z = C_2 \\ z = 0 \\ u = x^2 + y^2. \end{cases}$$

Avem $xy = C_2$ şi $x = yC_1$ de unde $x^2 = C_1C_2$ şi $C_2 = y^2C1$. Obţinem $u = C_1C_2 + \frac{C_2}{C_1}$. Rezultă soluţia

$$u = \frac{x}{y}(xy - 2z) + \frac{y}{x}(xy - 2z) = x^2 + y^2 - 2z \cdot \frac{x^2 + y^2}{xy}.$$

5.4.2 Ecuaţii cvasiliniare

Definiţie 5.26. Se numeşte ***ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi cvasiliniară*** o ecuaţie de forma

$$X_1(x_1, \ldots, x_n, z) \cdot z'_{x_1} + \cdots + X_n(x_1, \ldots, x_n, z) \cdot z'_{x_n} = X_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, z).$$

unde $X_i : D \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue pe un domeniu $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ şi există $i \in \{1, \ldots, n\}$ astfel încât X_i să nu se anuleze pe D.

Teoremă 5.27. Soluţia generală a ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul întâi cvasiliniară este dată implicit de ecuaţia

$$F(G_1(x_1, \ldots, x_n, z), \ldots, G_n(x_1, \ldots, x_n, z)) = 0,$$

unde $G_1, \ldots, G_n$ sunt integrale prime ale sistemului

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1} = \frac{\mathrm{d}x_2}{X_2} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x_n}{X_n} = \frac{\mathrm{d}z}{X_{n+1}}.$$

Proof. Căutăm soluţia în forma implicită $V(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0$, unde V este o funcţie ce urmează a fi determinată şi care are derivate parţiale de ordinul întâi astfel încât V'_z nu se anulează.

Avem $V'_{x_i} + V'_z \cdot z'_{x_i} = 0$, pentru orice i de la 1 la n. De aici

$$z'_{x_i} = -\frac{V'_{x_i}}{V'_z}.$$

Înlocuind aceste relaţii în ecuaţia cu derivate parţiale ce trebuie rezolvată rezultă

$$X_1 \cdot V'_{x_1} + \cdots + X_n \cdot V'_{x_n} + X_{n+1} \cdot V'_z = 0.$$

Această ecuaţie omogenă are soluţia

$$V = F(G_1(x_1, \ldots, x_n, z), \ldots, G_n(x_1, \ldots, x_n, z))$$

unde $G_1, \ldots, G_n$ sunt integrale prime ale sistemului simetric ataşat

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1} = \frac{\mathrm{d}x_2}{X_2} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x_n}{X_n} = \frac{\mathrm{d}z}{X_{n+1}}.$$

Aşadar soluţia ecuaţiei cu derivate parţiale cvasiliniară este dată în formă implicită de

$$F(G_1(x_1, \ldots, x_n, z), \ldots, G_n(x_1, \ldots, x_n, z)) = 0.$$

□

Exemplu 5.28. Să se integreze $x \cdot z'_x + (xz + y) \cdot z'_y = z$. Să se scrie soluţia generală a ecuaţiei şi apoi suprafaţa integrală ce se sprijină pe curba $x + y = 2z,\ xz = 1$.

Ataşăm sistemul simetric

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{xz + y} = \frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

Din primul şi ultimul raport deducem că $\ln x = \ln z + \ln C_1$, adică $\frac{x}{z} = C_1$. Din egalitatea $\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{z\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z}{xz - y}$ rezultă $\ln z = \ln(xz - y) - C_2$. A doua integrală primă este $\frac{xz-y}{z} = C_2$. Soluţia generală a ecuaţiei este dată în forma implicită de ecuaţia suprafeţei

$$F\left(\frac{x}{z}, \frac{xz - y}{z}\right) = 0.$$

Pentru a determina suprafaţa ce se sprijină pe curba $x + y = 2z,\ xz = 1$ rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} x = zC_1 \\ xz - y = zC_2 \\ x + y = 2z \\ xz = 1. \end{cases}$$

Din a doua şi a treia relaţie $xz + x = zC_2 + 2z$ şi înlocuind şi prima egalitate şi simplificând cu z rezultă $x = C_2 - C_1 + 2$. Din prima şi ultima relaţie obţinem $x^2 = C_1$. Va rezulta că $(C_2 - C_1 + 2)^2 = C_1$. Ecuaţia suprafeţei căutate este

$$\left(\frac{xz - y}{z} - \frac{x}{z} + 2\right)^2 = \frac{x}{z} \Longleftrightarrow (xz - x - y + 2z)^2 = xz.$$

5.5 Bibliografie

1. I. Crivei, *Matematici speciale*, Editura Fundaţiei pentru Studii Europene, Cluj-Napoca, 2006.
2. S. Toader, G. Toader, *Matematici speciale*, vol 1, U. T. Press, Cluj-Napoca, 2009.
3. C. H. Edwards, D. E. Penney, *Elementary differential equations*, Pearson, 6 edition, 2007.