Capitolul 3

Serii Fourier

2017-2018

3.1 Dezvoltarea în serie Fourier a unei funcţii periodice de perioadă 2π

Pornind de la discuţia asupra coardei vibrante începută în anii 1750 între Euler şi d'Alembert, se ajunge la ideea lui D. Bernoulli de a reprezenta o curbă definită pe intervalul $[0, 2\pi]$ printr-o serie de sinusuri şi cosinusuri. Prin 1805 Fourier propune formulele pentru coeficienţii acestei serii. Descoperirea lui Fourier produce un efect extraordinar şi de-a lungul secolului al XIX-lea, este considerată ca una din cele mai importante teoreme ale analizei. Convergenţa seriei Fourier nu a putut fi demonstrată decât prin 1829 de către Dirichlet, utilizând funcţia monotonă pe porţiuni introdusă în 1821 de către Cauchy.

Definiţia 3.1 *O funcţie reală $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, se numeşte* **periodică** *dacă există un număr real $T \neq 0$ astfel încât oricare ar fi $x \in I, x + T \in I$ şi $f(x + T) = f(x)$. Numărul real $T > 0$ minim (dacă există) cu această proprietate se numeşte* **perioada principală** *a lui f.*

Definiţia 3.2 *Funcţia*

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,, a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1, n} \tag{3.1}$$

se numeşte **polinom trigonometric de ordinul** n. *Termenul $a_k \cos kx + b_k \sin kx$ se numeşte* **armonica de ordin** k *a polinomului trigonometric.*

Observaţia 3.1 Notând $a_k = A_k \sin \alpha_k, b_k = A_k \cos \alpha_k$, armonica de ordin k se scrie

$a_k \cos kx + b_k \sin kx = A_k \sin(kx + \alpha_k)$, în care A_k se numeşte **amplitudine**, k **pulsaţie** şi α_k **faza iniţială**. Observăm că polinomul trigonometric *(3.1)* este o funcţie periodică cu perioada $T = 2\pi$.

Definiţia 3.3 *Seria de forma*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right) \tag{3.2}$$

se numeşte **serie trigonometrică**.

Dacă seria trigonometrică este convergentă, atunci suma ei va fi o funcţie periodică de perioadă $T=2\pi$. Seria trigonometrică (3.2) s-a obţinut cu ajutorul sistemului de funcţii $S=(f_0(x)=1,\ f_1(x)=\sin x,\ f_2(x)=\cos x,\dots,f_{2n-1}(x)=\sin nx,\ f_{2n}(x)=\cos nx,.....),n\geq 1$.

Fiind dată o funcţie periodică $f(x)$ de perioadă 2π, ne punem problema să determinăm condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească $f(x)$ astfel încât să putem construi seria trigonometrică (3.2) care să conveargă către $f(x)$.

Presupunem că avem egalitatea

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right). \tag{3.3}$$

Sistemul de funcţii $S=(f_0(x)=1,\ f_1(x)=\sin x,\ f_2(x)=\cos x,\dots,f_{2n-1}(x)=\sin nx,$ $f_{2n}(x)=\cos nx,...),n\geq 1$ este un sistem ortogonal în $\left(C\left([-\pi,\pi],\mathbb{R}\right),\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ cu produsul scalar definit $\langle f,g\rangle=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$.

Reţinem că $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\sin(jx)\,dx=0$,

$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(jx)\,dx=\begin{cases}0, & j\neq k\\ \pi, & j=k.\end{cases}$,

$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\sin(jx)\,dx=\begin{cases}0, & j\neq k\\ \pi, & j=k.\end{cases}$,

$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(jx)\,dx=0.$

Dacă $j\neq k$

$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(jx)\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\cos(k-j)x+\cos(k+j)x\right)dx=$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-j}\sin(k-j)x+\frac{1}{k+j}\sin(k+j)x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=0.$

Dacă $j=k$

$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2(kx)\,dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2(kx)}{2}dx=\pi.$

Dacă $j\neq k$

$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\sin(jx)\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\cos(k-j)x-\cos(k+j)x\right)dx=$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-j}\sin(k-j)x-\frac{1}{k+j}\sin(k+j)x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=0.$

Dacă $j = k$
$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx)\, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \dfrac{1-\cos 2(kx)}{2} dx = \pi.$
$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(jx)\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin(k+j)x + \sin(k-j)x) =$
$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{k+j}\cos(k+j)x - \frac{1}{k-j}\cos(k-j)x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$
deoarece funcţia cos este pară şi $\cos(k+j)\pi - \cos(k+j)(-\pi) = 0$.

Ortonormăm sistemul de funcţii S şi obţinem $S' = (f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,$ $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \dots,\ f_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ \ f_{2n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx)$

Facem ipoteza că seria trigonometrică este uniform convergentă, deci putem integra termen cu termen şi în baza proprietăţii sistemului S' de a fi ortonormat obţinem

$\left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle = \left\langle \frac{a_0}{2}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$

Înmulţind apoi seria (3.3) cu $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx$ şi respectiv cu $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx$ şi integrând, (sistemul S' este ortonormat), obţinem:
$\left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx\right\rangle = \left\langle b_k \sin kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx\right\rangle \Rightarrow$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx \tag{3.4}$$

şi respectiv
$\left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx\right\rangle = \left\langle a_k \cos kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx\right\rangle \Rightarrow$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx. \tag{3.5}$$

Coeficienţii a_k, b_k determinaţi după formulele (3.5) şi (3.4) se numesc **coeficienţii Fourier** pentru funcţia $f(x)$ iar seria trigonometrică (3.2) cu aceşti coeficienţi se numeşte **seria Fourier** a funcţiei periodice $f(x)$.

Evident că pentru o funcţie periodică f cu perioada 2π, integrabilă, putem determina coeficienţii Fourier corespunzători funcţiei date precum şi seria Fourier (3.2) asociată lui f. Nu putem însă să scriem egalitatea (3.3) deoarece nu ştim dacă seria este convergentă şi în caz de convergenţă, nu ştim dacă suma ei este tocmai funcţia f. Din acest motiv se scrie

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Condiţii suficiente pentru care o funcţie periodică cu perioada 2π să poată fi reprezentată prin seria Fourier asociată ei au fost găsite de Dirichlet.

Definiţia 3.4 *O funcţie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se numeşte* **netedă pe porţiuni** *dacă f este de clasă C^1 pe $[a,b]$ (continuă cu derivata continuă) cu excepţia unui număr finit sau numărabil de puncte în care f are derivate laterale finite.*

Teorema 3.1 (Condiţiile lui Dirichlet) *Dacă funcţia f*
a) este periodică cu perioada 2π,
b) este netedă pe porţiuni pe intervalul $[-\pi,\pi]$,
atunci seria Fourier asociată acestei funcţii este punctual convergentă şi are suma $S(x)$

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & x \in (-\pi,\pi) \\ \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} & x = \pm\pi \end{cases},$$

unde

$$f(c-0) = \lim_{x \nearrow c} f(x), f(c+0) = \lim_{x \searrow c} f(x).$$

Observaţia 3.2 *Dacă f este netedă pe porţiuni pe $[-\pi,\pi]$ şi continuă pe $(-\pi,\pi)$, atunci $S(x) = f(x)$, $(\forall)x \in (-\pi,\pi)$.*

Observaţia 3.3 *Dacă f este netedă pe porţiuni şi continuă pe $[-\pi,\pi]$, atunci $S(x) = f(x)$, $(\forall)x \in [-\pi,\pi]$.*

Teorema 3.2 *Dacă $f^2 \in \mathcal{R}([-\pi,\pi])$ atunci are loc* **egalitatea lui Parseval**

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right),$$

unde a_0, a_n şi b_n sunt coeficienţii Fourier ai funcţiei f.

3.1.1 Prelungire prin imparitate şi paritate a unei funcţii

Definiţia 3.5 *Fie funcţia $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$. Funcţia*

$$f_1(x) = \begin{cases} -f(-x), & x \in [-\pi,0), \\ f(x), & x \in [0,\pi], \end{cases}$$

se numeşte **prelungirea funcţiei f prin imparitate**. *Seria Fourier asociată lui f_1 este seria de sinusuri (3.7).*

Definiţia 3.6 *Fie funcţia $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$. Funcţia*

$$f_2(x) = \begin{cases} f(-x), & x \in [-\pi,0), \\ f(x), & x \in [0,\pi], \end{cases}$$

se numeşte **prelungirea funcţiei f prin paritate**. *Seria Fourier asociată lui f_2 este seria de cosinusuri (3.6).*