EP 2.3

DERIVATA DUPĂ DIRECȚIE.
GRADIENTUL FUNCȚIEI. PROPRIETĂȚI

1. a) Să se afle gradientul funcției $u = f(x,y,z)$ în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

b) Să se calculeze derivata funcției u după direcția vectorului $\vec{l} = \overrightarrow{M_0M_1}$.

c) Să se compare valoarea obținută cu valoarea derivatei acestei funcții după direcția gradientului său în punctul M_0:

1.1. $f(x,y,z)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $M_0(0,-1,1)$; $M_1(0,2,3)$.

1.2. $f(x,y,z)=(\sin x)^{yz}$; $M_0\left(\dfrac{\pi}{6},1,2\right)$; $M_1(\frac{\pi}{6},2,3)$.

1.3. $f(x,y,z)=\ln(x^3+2y^3-z^3)$; $M_0(2,1,1)$; $M_1(0,2,3)$.

1.4. $f(x,y,z)=\dfrac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$; $M_0(1,0,1)$; $M_1(0,2,3)$.

1.5. $f(x,y,z)=\ln\cos(x^2y^2+z)$; $M_0\left(0,0,\dfrac{\pi}{4}\right)$; $M_1(1,2,\frac{\pi}{4})$.

1.6. $f(x,y,z)=27\sqrt[3]{x+y^2+z^3}$; $M_0(3,4,2)$; $M_1(0,2,3)$.

1.7. $f(x,y,z)=arctg(xy^2+z)$; $M_0(2,1,0)$; $M_1(0,2,3)$.

1.8. $f(x,y,z)=\arcsin\left(\dfrac{x^2}{y}-z\right)$; $M_0(2,5,0)$; $M_1(0,2,3)$.

1.9. $f(x,y,z)=\sqrt{z}\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$; $M_0(2,0,4)$; $M_1(0,2,3)$.

1.10. $f(x,y,z)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+z^2}}$; $M_0(-1,1,0)$; $M_1(0,2,3)$.

1.11. $f(x,y,z)=arctg\left(\dfrac{xz}{y^3}\right)$; $M_0(2,1,1)$; $M_1(0,2,3)$.

1.12. $f(x,y,z)=\ln\sin\left(x-2y+\dfrac{z}{4}\right)$; $M_0\left(1,\dfrac{1}{2},\pi\right)$; $M_1(0,1,\pi)$.

1.13. $f(x,y,z)=\frac{y}{x}+\frac{z}{y}-\frac{x}{z}$; $M_0(1,1,2)$; $M_1(1,3,3)$.

1.14. . $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}}$; $M_0(1,2,2)$; $M_1(0,1,1)$.

1.15. $f(x,y,z)=\ln(x+y^2)-\sqrt{x^2z^2}$; $M_0(5,2,3)$; $M_1(4,1,4)$.

1.16. . $f(x,y,z)=\sqrt{z}x^y$; $M_0(1,2,4)$; $M_1(1,4,3)$.

1.17. $f(x,y,z)=-\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $M_0(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2})$; $M_1(0,\sqrt{2},0)$.

1.18. $f(x,y,z)=\ln(x^3+\sqrt[3]{y}-z)$; $M_0(2,1,8)$; $M_1(1,2,6)$.

1.19. $f(x,y,z)=\frac{z}{x^4+y^4}$; $M_0(2,3,25)$; $M_1(1,2,23)$.

1.20. $f(x,y,z)=8\sqrt[5]{x^3+y^2+z}$; $M_0(3,2,1)$; $M_1(1,2,2)$.

2. Să se găsească derivate funcției f în punctul M în direcția indicată, dacă:

a) $f=3x^4+y^3+xy$, $M(1,2)$, în direcția razei, ce formează cu axa OX unghiul 135°;

b) $f=arctg(y/x)$, $M(1/2,\sqrt{3}/2)$, în direcția normalei exterioare duse la cercul $x^2+y^2=2x$ în punctul M,

c) $f=x^2-3yz+4$, $M(1,2,-1)$ în direcția razei, ce formează cu toate axele de coordonate unghiuri egale,

d) $f=\ln(e^x+e^y+e^z)$, $M(0,0,0)$, în direcția razei, ce formează cu axele de coordonate unghiuri egale cu $\pi/3, \pi/4, \pi/3$, respectiv,

e) $f=tg(xz)$, $M(\pi/4,\pi/4,1)$ în direcția gradientului funcției $f_1=\sin(yz)$ în punctul M.

3. Să se găsească unghiul dintre gradienții funcției *f* în punctele *A* şi *B*, dacă:

a) $f = \arcsin\left(x/(x+y)\right)$, $A(1,1)$, $B(3,4)$,

b) $f = x/\left(x^2+y^2+z^2\right)$, $A(1,,2,2)$, $B(-3,1,0)$

4. Să se găsească unghiul dintre gradienții funcțiilor

$f_1 = \sqrt{x^2 - y^2}$, $f_2 = x^3 + y^3 - 3xy$ în punctul $M(4,3)$.

5. Să se demonstreze că unghiul dintre gradienții funcțiilor $f_1 = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ şi $f_2 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4x + 5y + 6z$ în punctul $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ tinde către zero, cînd M pleacă spre infinit.