NC 2.3.

DERIVATA DUPĂ DIRECȚIE.
GRADIENTUL FUNCȚIEI. PROPRIETĂȚI

Derivata funcției după direcție

Fie funcția de două variabile z= $f(x, y)$ definită pe careva domeniu D şi $M_0(x_0, y_0) \subseteq D$. Se ştie că derivatele parţiale ale funcţiei f exprimă "viteza variaţiei funcţiei" de-a lungul axelor de coordonate *OX, OY*. Dar prezintă interes cazul în care funcţia variază într-o directie dată, diferită de cele amintite: de exemplu, dacă este definit cîmpul scalar al temperaturilor, adică dacă este dată temperatura $f(M)$ într-un punct arbitrar M al unei plăci plane (analog $f(M) = f(x, y, z)$ ar putea reprezenta temperatura într-un punct arbitrar M al unui corp). legile de distribuţie şi de "deplasare" a căldurii depinde esenţial de viteza variaţiei temperaturii în toate direcţiile.

Fie indicată o direcție $\bar{l}$, $\overrightarrow{M_0M} \parallel \bar{l}$, Δl - distanța dintre punctele M şi M_0 . Funcția $z = f(x; y)$ va obține o creștere, notată cu $\Delta_l z = f(x, y) - f(x_0, y_0)$.

Definiție. Dacă există şi este finită $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l}$. , atunci valoarea acestei limite se numește **derivata funcției** $z = f(x, y)$ **în punctul** M_0 **după direcția** $\bar{l}$ şi se notează cu $\frac{\partial f(x_0 y_0)}{\partial l}$ sau $\frac{\partial z(M_0)}{\partial l}$. Deci $\frac{\partial f(x_0 y_0)}{\partial l}. = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l}$.

Să găsim o relație dintre această derivată şi derivatele parțiale. Ştim că $\Delta_l z \approx z'_x(M_0)\Delta x + z'_y(M_0)\Delta y = z'_x(M_0)\Delta l \cos\alpha + z'_y(M_0)\Delta l \cos\beta$, unde $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, iar α, β sunt unghiurile formate de vectorul $\bar{l}$ cu axele de coordonate *OX*, *OY*, respectiv. Obținem:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = z'_x(M_0)\cos\alpha + z'_y(M_0)\cos\beta.$$

Această formulă arată cum se calculează **viteza variației funcției f în punctul M_0 după direcția $\bar{l}$**.

DERIVATA DUPĂ DIRECȚIE. GRADIENTUL FUNCȚIEI. PROPRIETĂȚI

Pentru funcția de trei variabile $u = f(x, y, z)$ derivata după direcția $\bar{l} = \{m, n, p\}$ se calculează după formula:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = u_x'(M_0)cos\alpha + u_y'(M_0)cos\beta + \ u_z'(M_0)cos\gamma,$$

unde $cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$, $cos\beta = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$, $cos\gamma = \frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$.

Exemplu. Se dă funcția $u = x^2 + y^2 - z^2$. Să se calculeze derivata funcției în punctul M după direcția vectorului $\overrightarrow{MN}$, dacă $M(1, 1, 2)$, $N(3, 2, 0)$.

Rezolvare. Calculăm derivatele parțiale ale funcției $u = x^2 + y^2 - z^2$ în punctul M.

$$\begin{aligned} u_x' &= (x^2 + y^2 - z^2)_x' = 2x; \quad & u_x'(M) = 2 \cdot 1 = 2; \\ u_y' &= (x^2 + y^2 - z^2)_y' = 2y; \quad & u_y'(M) = 2 \cdot 1 = 2; \\ u_z' &= (x^2 + y^2 - z^2)_z' = -2z; \quad & u_z'(M) = (-2) \cdot 2 = -4. \end{aligned}$$

Aflăm coordonatele și cosinusurile directoare ale vectorului$\overrightarrow{MN}$:

$$\overrightarrow{MN} = \{x_N - x_M;\ y_N - y_M;\ z_N - z_M\} = \{2;\ 1;\ -2\}$$

$$\left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3, \cos\alpha = \frac{2}{3};\ \ \cos\beta = \frac{1}{3};\ \ \cos\gamma = -\frac{2}{3}$$

Aici α, β, γ sunt unghiurile formate de vectorul $\overrightarrow{MN}$ cu axele Ox, Oy, Oz respectiv.

Acum obținem:

$$\frac{\partial u}{\partial MN} = u_x'(M)\cos\alpha + u_y'(M)\cos\beta + u_z'\cos\gamma = 2 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

Gradientul funcției

Întrebare: În ce direcție valoarea derivatei în punctul dat este cea mai mare ?

Fie funcția de 3 variabile (în cazul funcției de 2 variabile este similar) $u = f(x, y, z)$ diferențiabilă în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și vectorul $\vec{l}$. Notăm:

$a = \mathrm{u}_x'(M_0)$, $b = \mathrm{u}_y'(M_0)$, $c = \mathrm{u}_z'(M_0)$. Atunci $\frac{\partial u}{\partial l} = acos\alpha + bcos\beta + \mathrm{c}\cos\gamma =$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}cos\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}cos\beta + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}cos\gamma\right).$$

Fie vectorul unitar

$$\vec{g} = \left\{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right\} = \{cos\mu, cos\tau, cos\sigma\},$$

unde μ, τ, σ sunt unghiurile formate de acest vector cu axele de coordonate. Atunci

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}\,(cos\mu \cdot cos\alpha + cos\tau \cdot cos\beta + cos\sigma \cdot cos\gamma) =$$

$\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot (\vec{g} \cdot \vec{l_o})$, unde este $\vec{l_o} = \{cos\alpha, cos\beta, cos\gamma\}$ este ortul vectorului dat $\vec{l}$, iar $\vec{g} \cdot \vec{l_o}$ este produsul scalar al vectorilor. Avem că $\vec{g} \cdot \vec{l_o} = |\vec{g}| \cdot |\vec{l_o}| \cdot cos\measuredangle(\vec{g}, \vec{l_o})= cos\measuredangle(\vec{g}, \vec{l_o})$. Deci, $\frac{\partial u}{\partial l} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}\, cos\measuredangle(\vec{g}, \vec{l_o})$. Evident, $\frac{\partial u}{\partial l}$ ia valoare maximă atunci cînd $cos\measuredangle(\vec{g}, \vec{l_o}) = 1$, adică $\vec{l_o} = \vec{g}$. Astfel,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = |\{a, b, c\}|$$

Definiție. Vectorul $\{a, b, c\} = \{u'_x(M_0), u'_y(M_0), u'_z(M_0)\}$ se numeşte **gradient al funcției $u = f(x, y, z)$ în punctul M.** Se notează cu simbolul $\overrightarrow{grad\, u}$ Adică,

$$\overrightarrow{\boldsymbol{grad\, u}} = \{u'_x(M_0), u'_y(M_0), u'_z(M_0)\}.$$

Gradientul determină direcția, iar modulul său - mărimea **vitezei maximale** de creștere (de variație) a funcției în punctul M.

Pentru exemplul de mai sus $\overrightarrow{grad\, u} = \{u'_x(M);\ u'_y(M);\ u'_z(M)\} = \{2, 2, 4\}$ şi

$$|\overrightarrow{grad\, u}| = \sqrt{2^2+2^2+4^2} = 2\sqrt{6}$$

Avem că $\frac{\partial u}{\partial \mathrm{grad\, u(M_0)}} = 2\sqrt{6}$. Observăm că viteza creșterii funcției în directia $\overrightarrow{grad\, u}$ este mai mare decât viteza creșterii funcției în direcția vectorului $\overrightarrow{MN}$ $\left(\frac{\partial u}{\partial MN} = \frac{14}{3}\right)$, ceea ce confirmă afirmațiile teoretice.