3. Vectorul $x = (x_1, x_2, x_3)$ este un vector arbitrar din $\mathbb{R}^3$. Să se arate că transformarea $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ este o transformare liniară:
a) $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 2x_3,\ 2x_1 - x_2 - x_3,\ 0)$;
b) $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3,\ 2x_1 - x_2 + 3x_3,\ 2x_2)$.

4. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Să se construiască transformarea liniară $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, determinată de această matrice, și să se afle nucleul ei.

5. Să se arate că transformarea $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - 2x_3,\ 2x_1 - x_2 + x_3,\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3)$ este o transformare liniară și să se determine nucleul ei.

6. Se consideră transformarea $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2,\ 2x_1 - x_2,\ 3x_1 + x_2 + x_3)$. a) Să se arate că $\mathcal{A}$ este o transformare liniară; b) să se determine nucleul ei.

§ 2. Subspații invariante. Vectori proprii, valori proprii

Considerăm un subspațiu L_1 al spațiului liniar L și $\mathcal{A}$ o transformare liniară a acestui spațiu.

DEFINIȚIA 1. Subspațiul L_1 se numește *invariant* în raport cu transformarea $\mathcal{A}$, dacă $\mathcal{A}x \in L_1$, oricare ar fi vectorul $x \in L_1$.

EXEMPLUL 1. Nucleul unei transformări liniare este un subspațiu invariant în raport cu această transformare. Într-adevăr, dacă $x \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$, atunci $\mathcal{A}x = 0 \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$.

EXEMPLUL 2. În raport cu transformarea nulă ($\mathcal{A}x = 0,\ \forall x \in L$) și transformarea identică oricare subspațiu este invariant.

EXEMPLUL 3. Fie P_n spațiul polinoamelor de grad ce nu depășește n. În raport cu derivarea, oricare subspațiu P_k $(0 \leqslant k \leqslant n)$ este invariant.

PROPOZIȚIE. Dacă L_1 și L_2 sunt două subspații invariante în raport cu transformarea $\mathcal{A}$, atunci intersecția $L_1 \cap L_2$ și suma $L_1 + L_2$ de asemenea sunt invariante în raport cu această aplicație.

DEMONSTRAŢIE. Într-adevăr, fie $x \in L_1 \cap L_2$, adică $x \in L_1$ și $x \in L_2$. Atunci $\mathcal{A}x \in L_1$ și $\mathcal{A}x \in L_2$, adică $\mathcal{A}x \in L_1 \cap L_2$.

Dacă $x \in L_1 + L_2$, atunci $x = u + v$, unde $u \in L_1$, $v \in L_2$. Dar atunci $\mathcal{A}u \in L_1$ și $\mathcal{A}v \in L_2$. Prin urmare, $\mathcal{A}x = \mathcal{A}(u + v) = \mathcal{A}u + \mathcal{A}v \in L_1 + L_2$.

Un interes deosebit reprezintă subspațiile invariante 1-dimensionale. Fie L_1 un asemenea subspațiu și $x \in L_1$, $x \neq 0$. Atunci $\mathcal{A}x \in L_1$, prin urmare, există un scalar real λ astfel, încât $\mathcal{A}x = \lambda x$. Dacă y este oricare vector din L_1 și $y = \alpha x$, atunci:

$$\mathcal{A}y = \mathcal{A}(\alpha x) = \alpha \cdot \mathcal{A}x = \alpha \cdot \lambda x = \lambda \cdot \alpha x = \lambda y.$$

Astfel, pentru spațiul invariant 1–dimensional L_1 transformarea liniară se reduce la înmulțirea vectorilor din L_1 cu *unul și aceлași* scalar λ.

DEFINIȚIA 2. Vectorul nenul x se numește *vector propriu* al transformării liniare $\mathcal{A}$, dacă există un scalar real λ, încât $\mathcal{A}x = \lambda x$. Numărul λ se numește *valoare proprie*, corespunzătoare vectorului x la transformarea $\mathcal{A}$.

Determinarea vectorilor proprii și a valorilor proprii

Fie $\mathcal{A}$ o transformare liniară a spațiului liniar L determinată de matricea:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

iar $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots x_ne_n$ un vector propriu al acestei transformări. Atunci:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}x &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)e_1 + \\ &+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n)e_2 + \\ &+ \dots \qquad \dots \qquad \dots + \\ &+ (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n)e_n = \\ &= \lambda(x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n). \end{aligned}$$

În partea dreaptă se deschid parantezele, termenii se trec în partea stângă și se regrupează cu vectorii bazei $e_1, e_2, \dots, e_n$:

$$\begin{gathered} ((a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)\, e_1 + \\ (a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n)\, e_2 + \\ + \dots + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n)\, e_n = 0. \end{gathered}$$

Vectorii $e_1, e_2, \dots, e_n$ sunt vectorii bazei, iar combinația liniară a lor este nulă. Rezultă

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Cum vectorul x este nenul, sistemul omogen de ecuații are soluții nenule. Prin urmare, determinantul sistemului trebuie să fie nul:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Matricea $\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$ poate fi prezentată astfel:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= A - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = A - \lambda E.$$

Egalitatea (2) poate fi scrisă mai compact: $\det(A - \lambda E) = 0$.

Partea stângă a egalității (2) este un polinom de gradul n în raport cu variabila λ, numit *polinom caracteristic* al transformării $\mathcal{A}$. Notând acest polinom cu $P_n(\lambda)$, egalitatea (2) capătă forma:

$$P_n(\lambda) = 0. \qquad (3)$$

Astfel, pentru a determina valorile proprii ale transformării liniare se scrie polinomul caracteristic și se află rădăcinile lui, rezolvând ecuația (3). Pentru fiecare rădăcină aflată se alcătuiește și se rezolvă sistemul de ecuații (1), determinând și vectorul propriu respectiv.

EXEMPLUL 4. Să se afle valorile proprii și vectorii proprii pentru transformarea liniară $\mathcal{A}$, determinată de matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Scriem polinomul caracteristic:

$$P_2(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 6.$$

Rezolvând ecuația $\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$, aflăm rădăcinile $\lambda_1 = -1$ și $\lambda_2 = 6$.

Cazul 1. Pentru valoarea proprie $\lambda_1 = -1$ alcătuim și rezolvăm sistemul de ecuații (1):

$$\begin{cases} (1+1)x_1 + 2x_2 = 0, \\ 5x_1 + (4+1)x_2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; x_1 + x_2 = 0 \; \Leftrightarrow \; x_2 = -x_1.$$

Fie $x_1 = \alpha \neq 0$. Atunci $x_2 = -\alpha$. Vectorul propriu este oricare vector $v_1 = (\alpha, -\alpha)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Cazul 2. Pentru valoarea proprie $\lambda_2 = 6$ alcătuim și rezolvăm sistemul de ecuații (1):

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \; 2x_2 = 5x_1.$$

Fie $x_1 = 2\alpha$, atunci $x_2 = 5\alpha$. Vector propriu va fi $v_2 = (2\alpha, 5\alpha)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

EXEMPLUL 5. Să se afle valorile proprii și vectorii proprii pentru transformare liniară $\mathcal{A}$, determinată de matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Alcătuim polinomul caracteristic

$$P_4(\lambda) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$(1-\lambda) \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda) \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)^3.$$

Valorile proprii: $\lambda_1 = 1$ și $\lambda_2 = 2$. Pentru fiecare din ele aflăm vectorii proprii.

Cazul 1. $\lambda_1 = 1$. Conform (1), se obține sistemul:

$$\begin{cases} x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 = 0, \\ -x_4 = 0, \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{cu soluția generală} \quad \begin{cases} x_1 = \alpha, \\ x_2 = x_3 = x_4 = 0. \end{cases}$$

Pentru $\alpha = 1$ se obține vectorul $a_1 = (1, 0, 0, 0)$; toți vectorii proprii au forma $(\alpha, 0, 0, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Cazul 2. $\lambda_2 = 2$. Conform (1), se obține sistemul:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 0 = 0, \\ -x_3 - x_4 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{cu soluția generală} \quad \begin{cases} x_1 = \alpha, \\ x_2 = -\alpha, \\ x_3 = \beta, \\ x_4 = -\beta. \end{cases}$$

Valorii proprii $\lambda_2 = 2$ îi corespunde oricare vector $a_2 = (\alpha, -\alpha, \beta, -\beta)$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$.

Exemplul 6. Pentru rotația planului cu un unghi φ, matricea acestei transformări este:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Aflăm polinomul caracteristic:

$$P_2(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\cos\varphi \cdot \lambda + 1.$$

Pentru ecuația $\lambda^2 - 2\cos\varphi \cdot \lambda + 1 = 0$ se află discriminantul $\Delta = 4(\cos^2\varphi - 1)$. Soluții reale vor exista doar pentru $\cos\varphi = \pm 1$.

Cazul 1. $\cos\varphi = 1$, $\varphi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Conform (1), se obține sistemul $\begin{cases} (1-\lambda)x_1 = 0 \\ (1-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$. Cum vectorul propriu trebuie să fie nenul, rezultă $\lambda = 1$, prin urmare, $\mathcal{A}x = x$. Rotația planului reprezintă o transformare identică; oricare vector nenul din plan este vector propriu pentru $\lambda = 1$.

Cazul 2. $\cos\varphi = -1$, $\varphi = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. În acest caz, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, iar $\mathcal{A}x = (x_1, x_2) = (-x_1, -x_2)$. Transformarea $\mathcal{A}$ este simetrie centrală; oricare vector nenul este propriu cu valoarea proprie $\lambda = -1$.

Remarcă. Pentru $\cos\varphi \neq 1$ rotația planului nu are vectori proprii.

Exerciții propuse pentru rezolvare

1. Să se afle valorile proprii și vectorii proprii pentru transformarea liniară determinată de matricea $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Să se afle valorile proprii și vectorii proprii pentru transformarea liniară determinată de matricea $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$.