NC 4.3.

ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDIN SUPERIOR. ECUAȚII DIFERENȚIALE CARE PERMIT MICŞORAREA ORDINULUI

Ecuații diferențiale de ordin superior. Generalități

Definiție. Se numeşte **ecuație diferențială ordinară de ordinul n** o ecuație diferențială de forma $F(x,y,y',...,y^{(n)})=0$, (1.1) unde x este variabila independentă, $y=y(x)$ este funcția necunoscută şi F este o funcție continuă în careva domeniu G din spațiul $\mathbf{R}^{n+2}$.

Dacă ecuația (1.1) poate fi rezolvată în raport cu $y^{(n)}$, atunci această ecuație poate fi scrisă în forma $y^{(n)} = f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$.

Definiție. Se numeşte **problemă Cauchy** pentru ecuația $y^{(n)} = f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ problema care constă în determinarea soluției acestei ecuații, care satisface **condițiile inițiale** $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0',..., y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$.

Teorema de existență şi unicitate a soluției problemei Cauchy. Dacă funcția $f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ şi derivatele ei parțiale în raport cu variabilele $y,y',...,y^{(n-1)}$ sunt continue într-un domeniu $D\subset\mathbf{R}^{n+1}$ care conține punctul $(x_0,y_0,y_0',...,y_0^{(n-1)})$, atunci există un interval (a,b) care conține punctul x_0 şi o singură funcție $y(x)$ continuu derivabilă pe (a,b) care verifică ecuația $y^{(n)} = f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$.

Din această teoremă rezultă că dacă x_0 este fixat, atunci oricărui sistem de numere $y_0=C_1$, $y_0'=C_2,...,$ $y_0^{(n-1)}=C_n$ astfel că $(C_1,C_2,...,C_n)\in D$ i se asociază o soluție de forma $y=y(x,C_1,C_2,...,C_n)$ ale ecuației diferențiale.

Definiție. Se numeşte **soluție generală** a ecuației diferențiale funcția $y=y(x,C_1,C_2,...,C_n)$ care satisface condițiile:

1) $y(x,C_1,C_2,...,C_n)$ este soluție a ecuației diferențiale $y^{(n)} = f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ pentru orice valori ale constantelor $C_1,C_2,...,C_n$;

2) pentru orice $(x_0,y_0,y_0',...,y_0^{(n-1)})\in D$ există aşa valori $C_1^{(0)},C_2^{(0)},...,C_n^{(0)}$ ale constantelor $C_1,C_2,...,C_n$, astfel încât funcția $y(x,C_1^{(0)},...,C_n^{(0)})$ este soluție a problemei Cauchy respective.

Definiție. Se numeşte **soluție particulară** a ecuației diferențiale $y^{(n)} = f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ orice soluție a acestei ecuații care se obține din soluția generală pentru valori concrete ale constantelor $C_1,C_2,...,C_n$.

ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDIN SUPERIOR. ECUAȚII DIFERENȚIALE CARE PERMIT MICŞORAREA ORDINULUI

A rezolva o ecuație diferențială de ordinul n înseamnă a găsi soluția generală, dacă condițiile inițiale nu sunt date, şi înseamnă a găsi soluția particulară, adică soluția problemei Cauchy, dacă condițiile inițiale sunt date.

Ecuații diferențiale care permit micşorarea ordinului

Uneori ordinul ecuației diferențiale poate fi micşorat (e exemplu, o ecuație diferențială de ordinul doi poate fi redusă la ecuații de ordinul întâi). Vom examina câteva dintre aceste cazuri.

1. Ecuații diferențiale de forma $y^{(n)} = f(x)$. Această ecuație poate fi rezolvată prin n integrări. La fiecare integrare se rezolvă o ecuație diferențială de ordinul întâi.

Într-adevăr, cum $y^{(n)} = \frac{dy^{(n-1)}}{dx}$, obținem $\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = f(x)$. Am obținut o ecuație diferențială de ordinul întâi în raport cu funcția necunoscută $y^{(n-1)}$. Rezolvăm această ecuație: $dy^{(n-1)} = f(x)dx$, $\int dy^{(n-1)} = \int f(x)dx$, $y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$. Analog obținem $y^{(n-2)} = \int\left[\int f(x)dx + C_1\right]dx + C_2$. Continuând acest proces de n ori, obținem funcția $y(x)$, care este soluția generală a ecuației $y^{(n)} = f(x)$. .

Exemplu. Să se rezolve ecuația diferențială $y''' = 2x$.

Rezolvare. Aplicând raționamentele expuse mai sus, obținem consecutiv:

$$y''' = 2x,\quad \frac{dy''}{dx} = 2x,\quad dy'' = 2x\,dx,\quad \int dy'' = \int 2x\,dx,\quad y'' = x^2 + C_1,\quad \frac{dy'}{dx} = x^2 + C_1,\quad dy' = (x^2 + C_1)dx,$$

$$\int dy' = \int (x^2 + C_1)dx,\quad y' = \frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2,\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2,\quad dy = \left(\frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2\right)dx,$$

$$\int dy = \int\left(\frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2\right)dx,\quad y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3.$$

2. Ecuații diferențiale care nu conțin în mod explicit funcția necunoscută. Ecuațiile de acest tip au forma $F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$. Ele pot fi reduse la ecuații diferențială de ordinul $n-k$ cu ajutorul substituției $y^{(k)} = p(x)$.

Într-adevăr, $y^{(k+1)} = p'(x), \ldots, y^{(n)} = p^{(n-k)}(x)$. Obținem $F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}) = 0$, care este o ecuație diferențială de ordinul $n-k$ Rămâne de rezolvat această ecuație, de găsit $p(x)$ şi apoi de determinat $y(x)$ din ecuația diferențială $y^{(k)} = p(x)$.

Exemplu. Să se rezolve ecuația diferențială $xy'' = y'$.

Rezolvare. Notăm $y' = p(x)$ Cum $y'' = p'$ din ecuația dată obținem consecutiv: $xp' = p$, $x\dfrac{dp}{dx} = p$, $\dfrac{dp}{p} = \dfrac{dx}{x}$, $\int\dfrac{dp}{p} = \int\dfrac{dx}{x}$ $\ln|p| = \ln|x| + \ln|C_1|$, $p = C_1 x$. Găsim funcția $y(x)$ din egalitatea $y' = C_1 x$. Avem consecutiv: $\dfrac{dy}{dx} = C_1 x$, $\int dy = \int C_1 x dx$, $y = \dfrac{1}{2}C_1 x^2 + C_2$.

Ecuații diferențiale care nu conțin în mod explicit variabila independentă. Fie ecuația diferențială de forma $F(y, y', y'') = 0$, unde $y = y(x)$ este funcția necunoscută de variabila x, care nu se conține explicit în această ecuație. Această ecuație poate fi redusă la o ecuație diferențială de ordinul întâi folosind substituția $y' = p(y)$.

Într-adevăr, avem $y'' = \dfrac{d}{dx}\left[p(y)\right] = \dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx} = p'p$. Introducând aceste expresii pentru y' şi y'' în ecuația $F(y, y', y'') = 0$, obținem ecuația diferențială de ordinul întâi față de funcția necunoscută $p(y)$: $F(y, p, pp')$. Rămâne să rezolvăm ecuația obținută şi apoi să determinăm $y(x)$ din relația $y' = p(y)$.

Exemplu. Să se rezolve ecuația diferențială $y'' = y'$.

Rezolvare. Fie $y' = p(y)$. Atunci $y'' = pp'$. Înlocuind aceste expresii în ecuația dată, obținem $pp' = p$, sau $p(p' - 1) = 0$. Această ecuație este echivalentă cu totalitatea a două ecuații: $p = 0$ şi $p' - 1 = 0$. Din prima ecuație obținem soluția $y = C$, iar din a doua $p = y + C_1$ şi apoi succesiv: $\dfrac{dy}{dx} = y + C_1$, $\dfrac{dy}{y + C_1} = dx$, $\int\dfrac{dy}{y + C_1} = \int dx$, $\ln|y + C_1| = x + \ln|C_2|$, $\ln|y + C_1| = \ln|C_2 e^x|$, $y = C_2 e^x - C_1$. Observăm că soluția $y = C$ rezultă din $y = C_2 e^x - C_1$, ultima fiind, deci, soluție generală a ecuației date.

Substituția $y' = p(y)$ poate fi aplicată pentru micşorarea ordinului ecuației de ordin mai mare decât doi $F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$.

4. **Ecuații diferențiale cu partea stângă omogenă.**

Fie că în ecuația $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ partea stângă este omogenă de gradul m în raport cu variabilele $y, y', \ldots, y^{(n)}$, adică verifică egalitatea $F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}), t > 0$. Substituția $y' = yz(x)$, $y \neq 0$, reduce ecuația dată la una de ordinul $n-1$ față de funcția necunoscută $z = z(x)$. Într-adevăr, avem: $y'' = (yz)' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y\left(z^2 + z'\right)$, …, $y^{(n)} = y\,\phi\left(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\right)$.
Introducând aceste expresii în ecuația inițială şi ținând cont de omogenitate, obținem consecutiv $F(x, y, yz, y\left(z^2 + z'\right), \ldots, y\,\phi\left(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\right)) = 0$,

$$y^m\ F\left(x, 1, z, \left(z^2 + z'\right), \ldots, \phi\left(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\right)\right) = 0$$

$F\left(x,1,z,(z^2+z'),...,\phi(z,z',...,z^{(n-1)})\right)=0$ - o ecuație diferențială de ordinul $n-1$ cu funcția necunoscută $z(x)$. Dacă $z=z(x,C_1,C_2,...,C_{n-1})$ este soluția generală a acestei ecuații, atunci obținem: $y'=y\,z\left(x,C_1,C_2,...,C_{n-1}\right)$, $\frac{dy}{y}=z\left(x,C_1,C_2,...,C_{n-1}\right)dx$, de unde $\ln|y|=\int z(x,C_1,C_2,...,C_{n-1})dx+\ln|C_n|$ şi $y=C_n e^{\int z(x,C_1,C_2,...,C_{n-1})dx}$ - soluția generală a ecuației.

Exemplu. Să se rezolve ecuația diferențială $(y')^2+3yy''=0$.

Rezolvare. Cum $(ty')^2+3(ty)(ty'')=t^2[(y')^2+3yy'']$, partea stângă a ecuației date este o funcție omogenă de gradul doi față de y, y' şi y''. Folosim substituția $y'=yz(x)$. Cum $y'=yz$ şi $y''=y(z^2+z')$, avem succesiv: $y^2z^2+3y^2(z^2+z')=0$, $3z'+4z^2=0$. Funcția $z=0$ este soluție a ecuației obținute. Din ea obținem soluția $y=C$ a ecuației inițiale. Presupunând că $z\neq 0$, obținem $z=\frac{3}{4(x+C_1)}$. Introducând această funcție în substituția $y'=yz(x)$ obținem consecutiv: $\frac{dy}{dx}=\frac{3y}{4(x+C_1)}$, $\frac{dy}{y}=\frac{3dx}{4(x+C_1)}$, $y=C_2\sqrt[4]{(x+C_1)^3}$.