NC 4.1.

# ROBLEME CE DUC LA NOȚIUNEA DE ECUAȚIE DIFERENȚIALĂ. GENERALITĂȚI

Studierea proceselor, care au loc în lumea înconjurătoare este însoțită de determinarea legităților acestora. Nu întotdeauna însă este posibilă determinarea dependenței funcționale între mărimile, care descriu unul sau alt proces. Deseori mai uşor se stabilește viteza variației unora dintre aceste mărimi în raport cu celelalte. Vom indica niște probleme soluționarea cărora duc la astfel de descrieri.

**Problema 1.** Determinarea temperaturii uni corp.

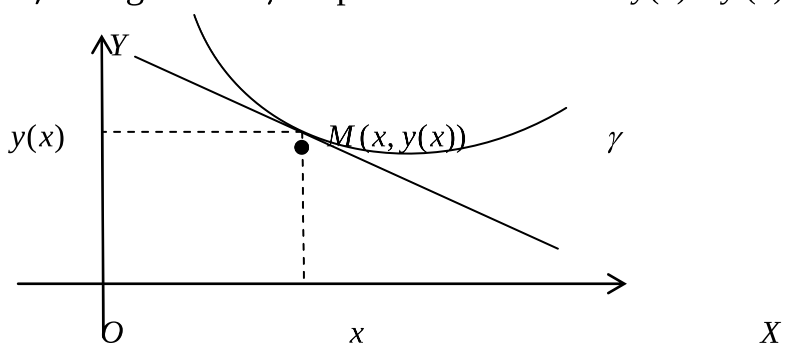
Fie, că un corp cu temperatura $\theta_0$ în momentul de timp $t=0$ este plasat într-un mediu cu temperatura $a$, unde $\theta_0 > a$. Să se găsească legea $\theta(t)$ de variație a temperaturii corpului (evident, în raport cu timpul).

**Soluție.** Din fizică se cunoaște, că viteza de răcire a corpului este direct proporțională diferenței dintre temperatura corpului și temperatura mediului în care este plasat. Deoarece funcția $\theta(t)$, care arată temperatura în momentul de timp $t$, este descrescătoare, folosind sensul mecanic al derivatei, avem: $\dfrac{d\theta}{dt} = -k\left(\theta(t) - a\right)$ (1), unde $k$ – coeficient de proporționalitate. Astfel, funcția căutată $\theta(t)$ trebuie să verifice relația (1).

**Problema 2.** Determinarea ecuației liniei, care satisface condițiile date.

Fie $\gamma$ o linie din planul $Oxy$, pentru care ordonata punctului de intersecție cu axa $Oy$ a tangentei duse la ea, este egală cu dublul ordonatei punctului de tangență. Să se găsească ecuația acestei linii.

**Soluție.** Fie $\gamma$ graficul funcției $y = y(x)$, iar $M(x, y(x))$ un punct arbitrar al liniei. Ecuația tangentei la $\gamma$ în punctul $M$ este $Y - y(x) = y'(x)(X - x)$.




Punctul de intersecție al tangentei cu axa $Oy$ este $\left(0, y(x) - y'(x)\cdot x\right)$. Din condiție: $y(x) - y'(x)\cdot x = 2y(x) \Rightarrow x\cdot y'(x) + y(x) = 0$ sau $y'\cdot x + y = 0$ **(2)**. Deci, ecuația liniei căutate este funcția ce verifică ecuația (2).

**Problema 3.** Oscilațiile libere ale greutății.

Considerăm oscilațiile libere ale unei greutăți de lungul axei OX sub acțiunea unui arc elastic. Dacă abscisa poziției de echilibru a greutății coincide cu originea coordonatelor, atunci proiecția pe axa OX a forței de elasticitate este $F=-kx$, proporțională abaterii $x$. Să se găsească dependența coordonatei $x$ de timp.

**Soluție.** Conform legii a II a lui Newton $F=ma$. Astfel, $ma=-kx \Rightarrow a=-\frac{k}{m}x$. Folosind sensul mecanic al derivatei, obținem $\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x$ (3). Deci, coordonata $x(t)$ verifică relația (3).

Ecuațiile (modelele matematice), care conțin derivatele funcțiilor necunoscute sau diferențialele lor (de exemplu 1, 2, 3) le vom numi **ecuații diferențiale.**

Astfel, unul din modurile de studiere a proceselor din natură constă în alcătuirea ecuațiilor diferențiale, care descriu aceste procese. Mai mult, proceselor care diferă calitativ le pot corespunde ecuații diferențiale similare. De exemplu, ecuația $y'=kx, k\in R$, descrie mai multe procese, cum ar fi: dezintegrarea elementelor radioactive, fermentarea drojdiei, găsirea presiunii adîncimii. Ecuațiile de tipul $y''+\omega^2 y=0, \omega\in R$, apar la cercetările oscilațiilor moleculelor, pendulelor matematic și fizic, numită deseori ecuația oscilațiilor armonice.

**Definiție.** Se numește **ecuație diferențială** o ecuație în care se conține una sau mai multe variabile independente, funcția necunoscută de aceste variabile și derivatele sau diferențialele ei de careva ordine.

Cel mai mare ordin al derivatelor sau al diferențialelor, care se conțin în ecuația diferențială se numește **ordin al ecuației diferențiale**. Dacă funcția necunoscută depinde de o singură variabilă, atunci ecuația se numește **ecuație diferențială ordinară**. Dacă funcția necunoscută depinde de mai multe variabile, atunci ecuația diferențială se numește **ecuație diferențială cu derivate parțiale**. În cele ce urmează, vom studia ecuații diferențiale ordinare, fără a menționa aceasta.

O **ecuație diferențială de ordinul *n*** cu variabila independentă $x$ și funcția necunoscută $y=y(x)$ se scrie sub forma $F(x,y,y',...,y^{(n)})=0$ **(4)**, unde domeniul de definiție al funcției $F$ este mulțimea $G\subseteq R^{n+2}$, iar $y',y'',...,y^{(n)}$ sunt derivate ale funcției necunoscute.

## ROBLEME CE DUC LA NOȚIUNEA DE ECUAȚIE DIFERENȚIALĂ. GENERALITĂȚI

**Definiție**. Se numește **soluție a ecuației diferențiale** **(4)** orice funcție $y = y(x)$, care posedă pe careva interval $I$ derivate pînă la ordinul *n*, inclusiv, și care verifică ecuația dată pentru $\forall x \in I$ .

**Exemple.**

1) Pentru ecuația diferențială $y'' + y = 0$ funcția $y = \sin x$ este soluție pe intervalul $I = (-\infty, \infty)$. În general, orice funcție de forma $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$, unde $c_1, c_2$ sunt constante arbitrare, este soluție a ecuației date.

2) Pentru ecuația diferențială $y'x - x^2 - y = 0$, funcțiile de forma $y = x^2 + cx, c \in R$, este soluție.

3) Pentru ecuația diferențială $y' \cdot x + y = 0$ orice funcție de forma $y = \frac{c}{x}, c \in R$, este soluție.

**A rezolva** o ecuație diferențială înseamnă a găsi toate soluțiile ei. În multe cazuri, soluțiile ecuației diferențiale se găsesc **prin integrări**. Astfel, se spune a integra o ecuație diferențială. Menționăm, că **nu orice ecuație diferențială poate fi rezolvată prin integrări**. Se folosesc alte metode de rezolvare a ecuațiilor diferențiale (folosirea seriilor, metodei lui Euler, aproximațiile etc.).

Graficul soluției ecuației diferențiale se numește **curbă integrală** a ecuației diferențiale.