Ecuaţii diferenţiale

- Ecuaţii diferenţiale ordinare
- Ecuaţii cu derivate parţiale
- Ordinul unei ecuaţii
- Soluţia unei ecuaţii diferenţiale ordinare

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis, $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, un domeniu şi $f : I \times G \to \mathbb{R}^n$.

Forma generala a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi este:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{1}$$

- f defineşte o ecuaţie explicită.
- x variabila independentă

- y variabila dependentă (funcţia necunoscută)
- O ecuaţie care nu depinde de x se numeşte autonomă.
- O funcţie $\varphi : I_1 \subseteq I \to G$ este soluţie a ecuaţiei (1) dacă:

  (1) φ este derivabila,

  (2) φ si derivatele ei verifica:

$$\frac{d\varphi}{dx} = f(x, \varphi(x)), \quad \forall x \in I_1.$$

Daca f_i sunt componentele lui f, atunci obtinem sistemul:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, ..., y_n), \quad i = 1, 2, ..., n.$$

O *solutie* a acestui sistem este o functie derivabila,
$\varphi(\cdot) = (\varphi_1(\cdot), ..., \varphi_n(\cdot)) : I_1 \subseteq I \to G$, care verifica:

$$\frac{d\varphi_i}{dx} = f(x, \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)), \quad \forall x \in I_1, \;\; i = 1, ..., n.$$

Probleme fundamentale in teoria ecuatiilor diferentiale ordinare

- **Existenta solutiilor. Problema Cauchy**

Pentru $f : I \times G \to \mathbb{R}^n$ continua, se poate arata usor ca exista, local, o solutie a ecuatiei (1). In plus, pentru orice punct $(x_0, y_0) \in I \times G$, exista o solutie $\varphi : I_1 \subseteq I \to G$ a ecuatiei (1), cu $x_0 \in I_1$ si

$$\varphi(x_0) = y_0.$$

- **Unicitatea solutiei**

- **Studiul calitativ al solutiilor**

- **Gasirea solutiilor**

- - solutii explicite

- \- solutii sub forma implicita:

$$\Psi(x, \phi(x)) \equiv 0, \quad x \in I_1. \tag{2}$$

- \- solutii sub forma parametrica:

$$\begin{cases} x = \alpha(p, C), \\ y = \beta(p, C), \end{cases} \quad p \in J_0 \subseteq \mathbb{R}. \tag{3}$$

- \- solutia generala:

$$\Phi(x, y, C) = 0.$$

unde C este o constanta arbitrara in $J \subseteq \mathbb{R}^n$.

Pentru valori particulare ale constantei C, obtinem *solutii particulare*.

- \- solutii singulare (nu pot fi obtinute din solutia generala prin particularizarea constantei)

Exemplu.

Ecuatia

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y},$$

are solutia generala

$$(x+C)^2 + y^2 = 1, \quad C \in \mathbb{R}$$

si solutiile singulare $y = \pm 1$.

Ecuatii de ordin superior

Ecuatia lui Newton:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}).$$

- Forma generala a unei ecuatii de ordinul n:

$$F(x, y, y^{'}, y^{''}, ..., y^{(n)}) = 0. \tag{4}$$

Solutia generala a ecuatiei (4) depinde de n constante arbitrare:

$$y(x) = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n), \quad C_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{5}$$

$$F(x, \varphi(x), \varphi^{'}(x), \varphi^{''}(x), ..., \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad x \in (a, b). \tag{6}$$

- - solutii implicite:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0, \quad C_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{7}$$

Exemplu.

$$y^{'''} = 0.$$

Integrand de trei ori, obtinem

$$y(x) = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

Fie $f : I \times G \to \mathbb{R}^n$.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{8}$$

- Problema Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{9}$$

Ecuaţii elementare integrabile prin cuadraturi

- **Ecuaţia fundamentală**

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

unde $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o functie continua data.

Solutia generala:

$$y(x) = \int f(x)dx + C,$$

unde C este o constanta reala arbitrara.

Constanta C poate fi determinata daca asociem o problema Cauchy prin impunerea conditiei $y(x_0) = y_0$.

Obtinem:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)dx.$$

Exemplul 1.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 - 1}, \qquad x \in I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}. \quad \blacksquare$$

$$y(x) = \int \frac{dx}{x^2 - 1} + C,$$

unde C este o constanta reala arbitrara. Rezulta

$$y(x) = \frac{1}{2} \ln \mid \frac{x-1}{x+1} \mid + C.$$

Exemplul 2.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2}{(x-1)^2}, & x \in I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{1\}, \\ y(0) = -1. \quad \blacksquare \end{cases}$$

Solutia generala este:

$$y(x) = \frac{2}{x-1} + C, \quad x \in I.$$

Din conditia initiala $y(0) = -1$, rezulta $C = 1$.

$$y(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

Ecuaţii cu variabile separabile

Fie I_1 si I_2 intervale deschise in $\mathbb{R}$. Forma generala a unei ecuatii cu variabile separabile este:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y), \tag{10}$$

unde $f : I_1 \to \mathbb{R}$ si $g : I_2 \to \mathbb{R}$ sunt functii continue.

Algoritm.

1) Daca $y_1, y_2, ..., y_i$ sunt solutii ale ecuatiei $g(y) = 0$, atunci $\varphi_i(x) \equiv y_i$, pentru $x \in I_1$, sunt solutii stationare.

2) Fie $J = \{y \mid g(y) \neq 0\}$. Separand variabilele si integrand, obtinem:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

Daca notam cu G o primitiva a functiei $1/g$ si cu F o primitiva a lui f, atunci obtinem solutia generala in forma implicita:

$$G(y) = F(x) + C.$$

Cand e posibil sa explicitam, obtinem:

$$y = \psi(x, C).$$

Deci, integrala completa a ecuatiei (10) este:

$$\begin{cases} y = \psi(x, C), \\ \\ y_i(x) = y_i. \end{cases}$$

Exemplul 1.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \qquad x \in I \subseteq \mathbb{R}_+^*. \quad \blacksquare$$

Evident, $y = 0$ este solutie stationara. Pentru $y \neq 0$, separand variabilele si integrand, obtinem

$$y(x) = Cx, \qquad C \in \mathbb{R}^*.$$

Examplul 2.

$$\frac{dy}{dx} = y \cot x, \qquad x \in (0, \pi/2).$$

Evident, $y = 0$ este solutie stationara. Pentru $y \neq 0$, obtinem

$$y(x) = C \sin x, \qquad C \in \mathbb{R}^*.$$

Examplul 3.

$$x^2 y^2 \frac{dy}{dx} + 1 = y, \qquad x \in I \subseteq \mathbb{R}_+^*. \quad \blacksquare$$

Ecuatia poate fi scrisa in forma normala:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x^2 y^2}.$$

Evident, $y = 1$ este solutie stationara. Pentru $y \neq 1$, separand variabilele si integrand, obtinem solutia generala in forma implicita:

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln \mid y - 1 \mid = -\frac{1}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Examplul 4.

Fie ecuatia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+y^2)\sin x}{2y}.$$

a) Gasiti solutia ei generala.

b) Aflati o solutie particulara care verifica si conditia initiala $y(0) = 1$.

a) Separand variabilele si integrand, rezulta

$$\ln(1+y^2) = -\cos x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Deci

$$y^2 = Ce^{-\cos x} - 1.$$

b) Din conditia initiala rezulta

$$y(x) = \sqrt{2e^{-\cos x + 1} - 1}.$$

Ecuaţii omogene

Fie $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o functie continua. Forma generala a unei ecuatii omogene este:

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x}). \tag{11}$$

Algoritm.

1) Schimbarea de variabile

$$u = \frac{y}{x},$$

ne conduce la

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}, \tag{12}$$

care este o ecuatie cu variabile separabile.

2) Integram ecuatia cu variabile separabile (12) si obtinem solutia generala $u = \psi(x, C)$, unde C este o constanta reala arbitrara, si solutiile stationare $u_i(x) \equiv u_i$, cu u_i solutii ale ecuatiei algebrice $f(u) = u$.

Deci, integrala completa a ecuatiei (12) este:

$$\begin{cases} u(x) = \psi(x, C), \\ \\ u_i(x) = u_i. \end{cases}$$

3) Integrala completa a ecuatiei (11) este:

$$\begin{cases} y(x) = x\psi(x, C), \\ \\ y_i(x) = xu_i(x). \quad \blacksquare \end{cases}$$

Exemplul 1.

Aflati solutia problemei Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}, \qquad x \in (0, \infty), \\ \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Efectuand schimbarea de variabile

$$z(x) = \frac{y(x)}{x},$$

ecuatia devine

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{xz},$$

cu solutia generala

$$z^2(x) = 2\ln x + C.$$

Astfel,

$$y^2(x) = 2x^2 \ln x + Cx^2.$$

Din conditia initiala $y(1) = 0$, rezulta $C = 0$. Deci, solutia problemei Cauchy date este:

$$y^2(x) = 2x^2 \ln x.$$

Exemplul 2.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{y-x}. \quad \blacksquare$$

$$z(x) = \frac{y(x)}{x},$$

$$x(z-1)\frac{dz}{dx} = 1 + 2z - z^2.$$

Evident, $z = 1 + \sqrt{2}$ si $z = 1 - \sqrt{2}$ sunt solutii stationare. Deci, $y = x(1+\sqrt{2})$ si $y = x(1-\sqrt{2})$ sunt solutii ale ecuatiei initiale. Pentru

$z \neq 1 + \sqrt{2}$ si $z \neq 1 - \sqrt{2}$, separand variabilele si integrand, obtinem

$$x^2(1 + 2z - z^2) = C, \quad C \in \mathbb{R}^*.$$

Deci, solutia generala a ecuatiei initiale, este data implicit de

$$x^2 + 2xy - y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}^*.$$

Exemplul 3.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}, \quad x \in (0, \infty).$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x}.$$

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}$$

$$x\frac{dz}{dx} = z^2 + z.$$

Evident, $z = 0$ si $z = -1$ sunt solutii stationare, de unde obtinem $y = 0$ si $y = -x$.

Pentru $z \neq 0$ si $z \neq -1$, obtinem

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z^2 + z}{x}.$$

Integrand, rezulta

$$Cx = \frac{z}{z+1}, \quad C \in \mathbb{R}^*.$$

Astfel,

$$y = \frac{Cx^2}{1 - Cx},$$

unde C poate fi determinata din conditia initiala.

Ecuaţii care se reduc la ecuaţii cu variabile separabile

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by), \tag{13}$$

unde a si b sunt constante reale date si $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o functie continua.

$$z = ax + by$$

$$\frac{dz}{dx} = a + bf(z), \tag{14}$$

care este o ecuatie cu variabile separabile.

Daca

$$a + bf(z) \neq 0,$$

separand variabilele si integrand, obtinem

$$x = \int \frac{dz}{a + b(z)} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Daca z_i sunt solutii ale ecuatiei algebrice $a + bf(z) = 0$, atunci $z_i(x) \equiv z_i$ sunt solutii stationare ale ecuatiei (14).

Deci, integrala completa a ecuatiei (13) este:

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{dz}{a + b(z)} + C, \\ \\ z_i(x) = z_i. \quad \blacksquare \end{cases}$$

Exemplul 1.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x - 2y - 1}{x - y + 1}. \quad \blacksquare$$

$$z = x - y$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{3z}{z+1}.$$

Evident, $z = 0$ este solutie statioanra. Astefel, $y(x) = x$ este solutie a ecuatiei initiale.

Pentru $z \neq 0$,

$$z + \ln \mid z \mid = 3x + C.$$

$$\ln \mid x - y \mid = 2x + y + C.$$

Exemplul 2.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + y + 1}{2x + 2y - 3}. \quad \blacksquare$$

$$z = x + y$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z-4}{2z-3}.$$

Solutia stationara: $z = 4 \Rightarrow\ y(x) = 4 - x$ solutie stationara.

Pentru $z \neq 4$,

$$2z + 5\ln \mid z - 4 \mid = x + C.$$

Deci, solutia generala este

$$x + 2y + 5\ln \mid x + y - 4 \mid = C.$$

Ecuatii reductibile la ecuatii omogene

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right), \tag{15}$$

unde $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ si $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o functie continua. Fie

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}.$$

Daca $\Delta \neq 0$, fie (x_0, y_0) solutia sistemului

$$\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ \alpha x + \beta y + \gamma = 0. \end{cases}$$

Schimbarea

$$\begin{cases} s = x - x_0, \\ z = y - y_0 \end{cases}$$

ne conduce la

$$\frac{dz}{ds} = f\left(\frac{as + bz}{\alpha s + \beta z}\right),$$

sau

$$\frac{dz}{ds} = f\left(\frac{a + b\frac{z}{s}}{\alpha + \beta\frac{z}{s}}\right) = \varphi\left(\frac{z}{s}\right),$$

care este o ecuatie omogena.

Daca $\Delta = 0$, coeficientii sunt proportionali:

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = k$$

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{k(ax + by) + \gamma}\right) = F(ax + by).$$

Schimbarea $t = ax + by$ ne conduce la o ecuatie cu variabile separabile.

Exemplul 1.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(y + 2)^2}{(x + y - 1)^2}. \quad \blacksquare$$

Deoarece $\Delta \neq 0$, fie $(3, -2)$ solutia sistemului

$$\begin{cases} y + 2 = 0, \\ \\ x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = x - 3, \\ \\ z = y + 2 \end{cases}$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{2z^2}{(z+s)^2}.$$

Schimbarea

$$t = \frac{z}{s},$$

ne conduce la

$$\frac{dt}{ds} = -\frac{t(1+t^2)}{s(1+t)^2}.$$

Evident, avem solutia stationara $t = 0$, care ne conduce la solutia $y = -2$. Pentru $t \neq 0$, separand variabilele si integrand, obtinem

$$t = \frac{C}{s}\, e^{-2\arctan t}.$$

Deci:

$$y + 2 = Ce^{-2\arctan \dfrac{y+2}{x-3}}.$$

Exemplul 2.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+1}{x+y-3}. \quad \blacksquare$$

In acest caz $\Delta \neq 0$. Fie $(1,2)$ solutia sistemului

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ x + y - 3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = x - 1, \\ z = y - 2 \end{cases}$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{s - z}{s + z}.$$

$$t = \frac{z}{s}$$

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1 - 2t - t^2}{s(1 + t)}.$$

Solutii stationare: $t = -1 \pm \sqrt{2}$, care ne conduc la
$y = 2 + (x-1)(-1 \pm \sqrt{2})$.

Pentru $t \neq -1 \pm \sqrt{2}$, obtinem

$$-\frac{1}{2}\ln \mid 1 - 2t - t^2 \mid = \ln \mid s \mid + C.$$

$$x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}^*.$$

Ecuaţii liniare

O *ecuatie liniara de ordinul intai* are forma:

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x), \tag{16}$$

unde $a, b : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt functii continue date.

Daca $b(x) \equiv 0$, ecuatia (16) s.n. *omogena*.

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y. \tag{17}$$

Evident, $y = 0$ este solutie stationara. Pentru $y \neq 0$, obtinem

$$\int \frac{dy}{y} = \int a(x)dx + C_1,$$

unde C_1 este o constanta reala arbitrara.

Solutia generala:

$$y = Ce^{\int a(x)dx},$$

cu $C \in \mathbb{R}^*$.

Integrala completa:

$$\begin{cases} y = C\, e^{\int a(x)\,dx}, \qquad C \in \mathbb{R}^*, \\ \\ y = 0. \quad \blacksquare \end{cases}$$

Daca $a : I \to \mathbb{R}$ este continua, atunci, pentru orice $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, exista o solutie unica $\varphi(\cdot) : I \to \mathbb{R}$ a ecuatiei (17) a.i.

$$\varphi(x_0) = y_0.$$

$$\varphi(x) = y_0\, e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}, \quad x \in I. \quad \blacksquare$$

Exemplul 1.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\, y \sin x. \quad \blacksquare$$

Evident, $y = 0$ este solutie stationara.

Pentru $y \neq 0$,

$$y = Ce^{-\frac{1}{3}\cos x}, \quad C \in \mathbb{R}^*.$$

Exemplul 2.

$$\frac{dy}{dx} = y\, \frac{2x}{x^2 - 1}, \quad x \in (1, \infty). \quad \blacksquare$$

$y = 0$ este solutie stationara.

$$y = C(x^2 - 1), \quad C \in \mathbb{R}^*. \quad \blacksquare$$

Ecuatii neomogene. Metoda variatiei constantelor.

Algoritm.

Fie

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x). \tag{18}$$

1) Consideram ecuatia omogena:

$$\frac{d\overline{y}}{dx} = a(x)\overline{y}, \tag{19}$$

cu solutia generala

$$\overline{y} = Ce^{\int a(x)dx}.$$

2) Cautam solutia ecuatiei (18) de forma:

$$y = C(x)e^{\int a(x)dx}.$$

$$\frac{dC}{dx} = b(x)e^{-\int a(x)dx}$$

$$C(x) = \int b(x)e^{-\int a(s)ds} dx + K,$$

unde K este o constanta reala arbitrara.

$$y(x) = \left(\int b(x)e^{-\int a(s)ds} dx + K\right) e^{\int a(x)dx}. \quad \blacksquare$$

- Solutia generala a unei ecuatii liniare neomogene este suma solutiei generale a ecuatiei omogene atasate si a unei solutii particulare a ecuatiei neomogene. $\blacksquare$

- Daca $y_1(x)$ este o solutie particulara a ecuatiei (18),

$$y(x) = y_1(x) + Ce^{\int a(x)dx}.$$

Exemplul 1.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y + \ln\, x}{x\, \ln\, x}, \qquad x \in I \subseteq \mathbb{R}_+^*. \quad \blacksquare$$

Ecuatia omogena

$$\frac{d\overline{y}}{dx} = \frac{2\overline{y}}{x\, \ln\, x}$$

are solutia generala

$$\overline{y} = C \ln^2 x.$$

Cautam solutii de forma

$$y = C(x) \ln^2 x.$$

Rezulta:

$$\frac{dC}{dx} = \frac{1}{x \ln^2 x}$$

$$C(x) = K - \frac{1}{\ln x}.$$

$$y(x) = -\ln x + K \ln^2 x.$$

Exemplul 2.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x \cos\, x. \quad \blacksquare$$

$$\frac{d\overline{y}}{dx} = \frac{\overline{y}}{x}$$

$$\overline{y} = Cx.$$

MVC:

$$y = C(x)x.$$

$$\frac{dC}{dx} = \cos\, x$$

$$C(x) = \sin\, x + K.$$

$$y(x) = x(\sin\, x + K).$$

Exemplul 3.

$$x\frac{dy}{dx} + (x+1)y = 3x^2e^{-x}, \qquad x \in (0, \infty). \quad \blacksquare$$

Ecuatia omogena

$$\frac{d\overline{y}}{dx} = -\frac{x+1}{x}\,\overline{y}$$

are solutia generala

$$\overline{y} = \frac{Ce^{-x}}{x}.$$

$$y = C(x)\,\frac{e^{-x}}{x}.$$

$$C(x) = x^3 + K.$$

$$y(x) = K\,\frac{e^{-x}}{x} + x^2 e^{-x}.$$

Exemplul 4.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3}{x}\, y + \dfrac{\sin x}{x^3}, & x \in (0, \pi) \\ \\ y(\pi/2) = -2. & \blacksquare \end{cases}$$

$$y(x) = \frac{-\cos\, x + C}{x^3}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$y(x) = -\frac{\cos\, x + \dfrac{\pi^3}{4}}{x^3}.$$

Ecuatii Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x)y^{\alpha}, \tag{20}$$

unde $a, b : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt functii continue si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Pentru $\alpha = 0$, ecuatia (20) este o ecuatie liniara neomogena, iar pentru $\alpha = 1$, ecuatia (20) este liniara si omogena.

Schimbarea de variabila:

$$z = y^{1-\alpha} \tag{21}$$

ne conduce la

$$\frac{dz}{dx} = (1-\alpha)a(x)z(x) + (1-\alpha)b(x). \tag{22}$$

$$z(x) = \psi(x, C).$$

$$y(x) = (\psi(x, C))^{\dfrac{1}{1-\alpha}}. \quad \blacksquare$$

- Este posibil sa utilizam o metoda de tip MVC. Mai precis, cautam solutii de forma

$$y(x) = C(x)e^{\int a(x)dx}. \tag{23}$$

Rezulta $C(x) = \varphi(x, K)$, unde K este o constanta reala arbitrara.

$$y(x) = \varphi(x, K)e^{\int a(x)dx}. \quad \blacksquare$$

Exemplul 1.

$$3y^2 \frac{dy}{dx} - y^3 = x + 1. \quad \blacksquare$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}y + \frac{x+1}{3}y^{-2},$$

adica o ecuatie Bernoulli cu $\alpha = -2$.

$$z = y^3$$

$$\frac{dz}{dx} = z + x + 1$$

$$z(x) = Ce^x - x - 2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$y(x) = \sqrt[3]{Ce^x - x - 2}.$$

Exemplul 2.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y \tan x + y^2, \\ \\ y(\pi/4) = 2. \quad \blacksquare \end{cases}$$

$$z = \frac{1}{y}$$

$$\frac{dz}{dx} = -2z \tan x - 1.$$

$$z(x) = C \cos^2 x - \frac{\sin 2x}{2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

$$y(x) = \frac{1}{C \cos^2 x - \dfrac{\sin 2x}{2}}.$$

Din conditia initiala $y(\pi/4) = 2$, rezulta

$$y(x) = \frac{2}{4 \cos^2 x - \sin 2x}.$$

Ecuatii Riccati

$$\frac{dy}{dx} = a(x) + b(x)y + c(x)y^2, \tag{24}$$

unde $a, b, c : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt functii continue date.

Fie $y_0(x)$ o solutie particulara. Schimbarea

$$z(x) = y(x) - y_0(x)$$

ne conduce la o ecuatie de tip Bernoulli:

$$\frac{dz}{dx} = (b(x) + 2y_0(x)a(x))z + a(x)z^2.$$

$$z(x) = \psi(x, C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$y(x) = y_0(x) + \psi(x, C). \quad \blacksquare$$

Exemplul 1.

Integrati ecuatia

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 \sin x + 2\,\frac{\sin x}{\cos^2 x}, \quad x \in (0, \pi/2),$$

stiind ca admite solutia particulara $y_0(x) = \dfrac{1}{\cos x}$. $\blacksquare$

$$y(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{z(x)}$$

$$\frac{dz}{dx} = 2\,\frac{\sin x}{\cos x} z + \sin x,$$

cu solutia generala

$$z(x) = \frac{C}{\cos^2 x} - \frac{\cos\ x}{3}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Deci:

$$y(x) = \frac{1}{\cos\ x} + \frac{3\ \cos^2 x}{3C - \cos^3 x}.$$

Exemplul 2.

Integrati ecuatia Riccati:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - y\ \tan\ x + \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in (0, \pi/2),$$

stiind ca admite solutia particulara $y_0(x) = \tan\ x.$ ■

$$y(x) = \tan\ x + \frac{1}{z(x)}$$

$$\frac{dz}{dx} = -z \tan x - 1$$

$$z(x) = (\ln \left| \frac{\tan\frac{x}{2} - 1}{\tan\frac{x}{2} + 1} \right| + C) \cos x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Deci:

$$y(x) = \tan x + \frac{1}{(\ln \left| \frac{\tan\frac{x}{2} - 1}{\tan\frac{x}{2} + 1} \right| + C) \cos x}.$$

Ecuatii exacte

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domeniu si

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{25}$$

cu P, $Q : D \to \mathbb{R}$ continue si $Q(x,y) \neq 0$.

Ecuatia (25) s.n. *exacta* daca exista o functie $F : D \to \mathbb{R}, \quad F \in C^1(D)$ a.i.

$$dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \tag{26}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P(x,y), \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q(x,y). \end{cases} \tag{27}$$

$$dF(x,y) = 0. \tag{28}$$

Daca $y(x)$ este solutie pentru ecuatia (25), atunci

$$dF(x,y(x)) = 0 \tag{29}$$

si

$$F(x,y(x)) = C, \qquad C \in \mathbb{R}. \tag{30}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y), \quad \forall (x,y) \in D. \quad \blacksquare \tag{31}$$

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} dF = F(x,y) - F(x_0,y_0). \tag{32}$$

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} dF = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} P(x,y_0)dx + \int_{(x,y_0)}^{(x,y)} Q(x,y)dy. \tag{33}$$

Deci:

$$F(x,y) = F(x_0,y_0) + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} P(x,y_0)dx + \int_{(x,y_0)}^{(x,y)} Q(x,y)dy. \tag{34}$$

$$F(x,y) = C. \quad \blacksquare \tag{35}$$

Algoritm.

1) Verificam ca ecuatia

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

este exacta.

2) Scriem sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P(x,y), \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q(x,y). \end{cases} \tag{36}$$

3) Integram sistemul (36) si aflam $F(x,y)$.

4) Solutia generala este data implicit de

$$F(x,y) = C,$$

unde C este o constanta reala arbitrara.

Exemplul 1.

$$(2x + 3x^2 y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0, \quad (x, y) \in D. \quad \blacksquare$$

$$P(x, y) = 2x + 3x^2 y, \qquad Q(x, y) = x^3 - 3y^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y), \quad \forall (x, y) \in D.$$

$$dF(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

$$F(x, y(x)) = C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

$$F(x,y) = F(x_0,y_0) + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} (2x + 3x^2 y_0)dx + \int_{(x,y_0)}^{(x,y)} (x^3 - 3y^2)dy.$$

$$x^2 + x^3 y - y^3 = C.$$

Exemplul 2.

$$(2x - y + 1)dx + (-x + 2y - 1)dy = 0, \quad (x,y) \in D. \quad \blacksquare$$

$$P(x,y) = 2x - y + 1, \qquad Q(x,y) = -x + 2y - 1,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y), \quad \forall (x,y) \in D.$$

$$F(x, y(x)) = C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

$$F(x,y) = F(x_0,y_0) + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} (2x - y_0 + 1)dx + \int_{(x,y_0)}^{(x,y)} (-x + 2y - 1)dy.$$

$$x^2 - xy + y^2 - y + x = C.$$

- Factor integrant

$$\mu : D \to \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \mu \in C^1(D), \tag{37}$$

$$dF(x,y) = \mu(x,y)(P(x,y)dx + Q(x,y)dy). \tag{38}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x,y)P(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x,y)Q(x,y)). \tag{39}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\ln\ \mu(x,y))P(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}(\ln\ \mu(x,y))Q(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{40}$$

Exemplul 1.

Integrati urmatoarea ecuatie cautand un factor integrant de forma $\mu = \mu(x)$:

$$(x^2 - y^2 + 1)dx + 2xydy = 0, \quad (x,y) \in D. \quad \blacksquare$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x,y)P(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x,y)Q(x,y))$$

rezulta

$$\mu(x) = \frac{1}{x^2}.$$

$$\frac{x^2 - y^2 + 1}{x^2}dx + \frac{2y}{x}dy = 0,$$

care este o ecuatie exacta.

$$x^2 - Cx + y^2 - 1 = 0, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Ecuaţii implicite

Forma generala a unei ecuatii implicite:

$$F(x, y, y^{'}) = 0, \tag{41}$$

unde $F : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \;\; F \in C^1(D)$.

O functie derivabila $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este *solutie* a ecuatiei (40) daca $(x, \varphi(x), \varphi^{'}(x)) \in D, \ \forall x \in I$ si

$$F(x, \varphi(x), \varphi^{'}(x)) = 0, \quad x \in I. \tag{42}$$

Ecuatii Lagrange

$$y = x\,a(y^{'}) + b(y^{'}),$$

unde $a, b : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ a, b \in C^1(I)$.

Notam

$$y^{'} = p$$

si diferentiem in raport cu x:

$$xa^{'}(p) + b^{'}(p)\,\frac{dp}{dx} = p - a(p). \tag{43}$$

a) Daca $p - a(p) \neq 0$, atunci, considerand $x = x(p)$, obtinem

$$\frac{dx}{dp} = \frac{a^{'}(p)}{p - a(p)}\, x + \frac{b^{'}(p)}{p - a(p)}. \tag{44}$$

Aceasta este o ecuatie liniara neomogena, integrabila prin MVC. Astfel, obtinem $x = x(p, C),\ \ C \in \mathbb{R}$ si, apoi, $y = x\, a(p) + b(p)$.

Deci, obtinem ecuatiile parametrice ale solutiei generale:

$$\begin{cases} x = x(p, C), \\ \\ y = y(p, C). \end{cases} \tag{45}$$

b) Daca $p - a(p) = 0$ si p_i sunt radacinile reale ale acestei ecuatii algebrice, atunci $y(x) = xa(p_i) + b(p_i)$ sunt solutii singulare.

Exemplul 1.

Integrati ecuatia Lagrange:

$$y = 2xy' + \ln y'. \quad \blacksquare$$

Notand

$$y' = p$$

si diferentiind in raport cu x, obtinem

$$p = 2p + 2x\frac{dp}{dx} + \frac{1}{p}\frac{dp}{dx}, \quad p > 0.$$

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x - \frac{1}{p^2},$$

Solutia generala:

$$x(p) = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} x(p) = \dfrac{C}{p^2} - \dfrac{1}{p}, \\ \\ y(p) = \ln\, p + \dfrac{2C}{p} - 2. \end{cases}$$

Exemplul 2.

$$y = 2xy^{'} - y^{'2}. \quad \blacksquare$$

$$y^{'} = p$$

$$-p = \frac{dp}{dx}\,(2x - 2p).$$

Pentru $p \neq 0$, considerand $x = x(p)$, obtinem

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}\,x + 2,$$

cu solutia generala

$$x(p) = \frac{C}{p^2} + \frac{2p}{3}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} x(p) = \dfrac{C}{p^2} + \dfrac{2p}{3}, \\[2em] y(p) = \dfrac{2C}{p} + \dfrac{p^2}{3}. \end{cases}$$

Pentru $p = 0$, obtinem solutia $y = 0$.

Ecuatii Clairaut

$$y = x\,y^{'} + g(y^{'}), \tag{46}$$

unde $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; g \in C^1(I)$.

$$y^{'} = p$$

$$\frac{dp}{dx}\,(x + g^{'}(p)) = 0. \tag{47}$$

a) Daca $\dfrac{dp}{dx} = 0$, atunci $p = C$ si

$$y(x) = Cx + g(C), \quad C \in I, \tag{48}$$

este solutia generala a ecuatiei (45).

b) Daca $x + g^{'}(p) = 0$, atunci obtinem solutiile singulare:

$$\begin{cases} x(p) = -g^{'}(p)), \\ \\ y(p) = -p\, g^{'}(p)) + g(p). \end{cases} \tag{49}$$

Exemplul 1.

Integrati ecuatia Clairaut:

$$y = xy^{'} + \frac{1}{2y^{'}}. \quad \blacksquare$$

$$y^{'} = p$$

Rezulta $p \neq 0$.

$$\frac{dp}{dx}\,(x - \frac{1}{2p^2}) = 0.$$

a) Daca $\dfrac{dp}{dx} = 0$, atunci $p = C$ si

$$y(x) = Cx + \frac{1}{2C}, \quad C \in I \subseteq \mathbb{R}^*.$$

b) Daca $x - \dfrac{1}{2p^2} = 0$, atunci

$$\begin{cases} x(p) = \dfrac{1}{2p^2}, \\ \\ y(p) = \dfrac{1}{p}. \end{cases}$$

Eliminand p, obtinem

$$y^2(x) = 2x.$$

Exemplul 2.

$$y = xy^{'} + \frac{ay^{'}}{\sqrt{1+y^{'2}}}, \quad a > 0$$

Solutia generala:

$$y = Cx + \frac{Ca}{\sqrt{1+C^2}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Solutia singulara:

$$\begin{cases} x(p) = -\dfrac{a}{(1+p^2)^{3/2}}, \\ \\ y(p) = \dfrac{ap^3}{(1+p^2)^{3/2}}. \end{cases}$$

Eliminand parametrul p, obtinem

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},$$

care este ecuatia unei astroide. $\blacksquare$

Probleme rezolvate

1. Integrati:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y(1-y), \\ \\ y(0) = 2. \quad \blacksquare \end{cases}$$

Pentru ca $y = 0$ si $y = 1$ nu sunt solutii ale problemei date, separam variabilele:

$$\frac{dy}{y(1-y)} = dx.$$

$$\frac{y}{1-y} = C\,e^{x}, \quad C \in \mathbb{R}^{*}.$$

$$y(x) = \frac{2}{2-e^{-x}}.$$

2. Integrati ecuatia

$$\frac{dy}{dx} = -2 - y + y^2,$$

stiind ca $y_0 = 2$ este o solutie particulara. $\blacksquare$

$$y(x) = 2 + \frac{1}{u(x)}$$

$$\frac{du}{dx} = -3u + 1$$

$$u(x) = Ce^{-3x} - \frac{1}{3}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$y(x) = \frac{1}{Ce^{-3x} - 1/3} + 2.$$

3. Dinamica populatiei.

a) Modelul *exponential*. Rata de schimbare este proportionala cu marimea ei la momentul dat.

Daca $P(t)$ este populatia la momentul t, avem

$$\frac{dP}{dt} = kP, \tag{50}$$

unde k este o constanta data. Pentru $k > 0$, avem crestere, iar pentru $k < 0$ avem descrestere.

Daca impunem conditia initiala

$$P(0) = P_0,$$

obtinem

$$P(t) = P_0 e^{kt}. \tag{51}$$

b) Modelul logistic (*Verhulst-Pearl*).

$$\frac{dP}{dt} = kP(1 - \frac{P}{L}), \tag{52}$$

unde L este o marime limita a populatiei.

Evident, avem solutiile stationare $P = 0$ si $P = L$.

Pentru $P \neq 0$ si $P \neq L$, separand variabilele si integrand, avem

$$P(t) = \frac{LCe^{kt}}{L + Ce^{kt}}, \quad C \in \mathbb{R}^*. \tag{53}$$

Daca

$$P(0) = P_0,$$

unde $P_0 \neq 0$ si $P_0 \neq L$, obtinem

$$P(t) = \frac{LP_0}{P_0 + (L - P_0)e^{-kt}}. \tag{54}$$

Deci,

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = L.$$

4. Legea lui Newton. Fie T temperatura unui obiect dat la momentul t. Avem

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - S), \quad k > 0,$$

unde S este temperatura mediului. Impunem si conditia initiala $T(0) = T_0$. Rezulta

$$T(t) = S + (T_0 - S)e^{-kt}.$$

$$\frac{T(t_1) - S}{T(t_2) - S} = e^{-k(t_1 - t_2)}$$

$$k(t_1 - t_2) = -\ln\left|\frac{T(t_1) - S}{T(t_2) - S}\right|.$$

Astfel, putem determina constanta k daca stim intervalul $t_1 - t_2$ (si reciproc).

Aplicatie: determinarea *timpului mortii*.

Sa presupunem ca un corp omenesc este descoperit intr-o camera de hotel la ora $10:00$ p.m. si temperatura lui este de $27°C$. Temperatura camerei este constanta, $15°C$. Doua ore mai tarziu, temperatura corpului a scazut la $24°C$. Sa aflam timpul mortii.

Determinam intai constanta k. Avem

$$k = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{24 - 15}{27 - 15}\right| \simeq 0.14.$$

Temperatura normala a unei persoane sanatoase este de $36.6°C$. Atunci:

$$t_d = -\frac{1}{k}\ln\left|\frac{36.6-15}{27-15}\right| \simeq -4.21 \text{ ore},$$

ceea ce inseamna ca moartea s-a produs in jurul orei $5:48$ p.m.