CAPITOLUL VIII
CINEMATICA PUNCTULUI MATERIAL

PROBLEME REZOLVATE

8.1 Se consideră *un punct material având vectorul de poziție în raport cu originea O a sistemului de axe Oxy dat de:* $\bar{r} = \overline{OM} = 4t\,\bar{i} + (16t^2 - 1)\bar{j}$ *(cm).*

Se cer: *1) Ecuația traiectoriei şi trasarea ei în sistemul de axe Oxy; 2) Viteza şi accelerația punctului la momentul t; 3) Poziția, viteza şi accelerația punctului la momentul* $t_1=1/2$ *s, precum şi raza de curbură a traiectoriei la acelaşi moment.*

Rezolvare :

1) Ecuațiile sub formă parametrică ale traiectoriei sunt :

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 16t^2 - 1 \end{cases} \qquad (a)$$

Eliminând parametrul t din ecuațiile (a) se obține ecuația sub formă implicită a traiectoriei:

$$x^2 - y - 1 = 0 \qquad (b)$$

Această ecuație reprezintă o parabolă (fig. 8.1) cu vârful în *V(0,-1)* care intersectează axa Ox în punctele *A(-1, 0) B(1,0)*.

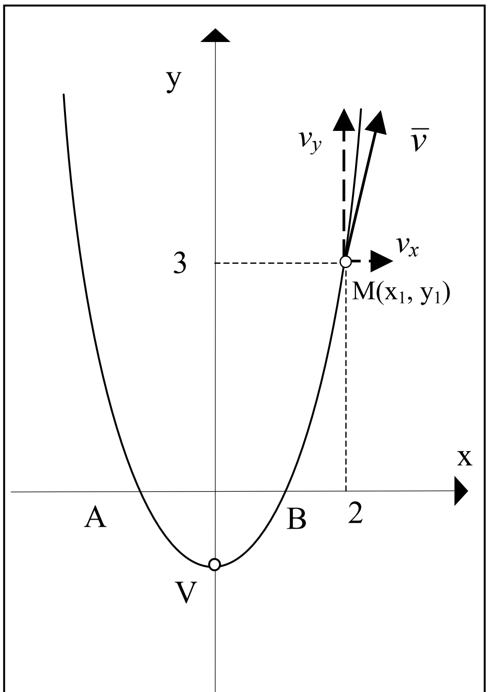

Fig. 8.1.a

2) Viteza şi accelerația punctului la momentul *t* se detremină cu ajutorul proiecțiilor:

- Viteza:

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = 4 \\ v_y &= \dot{y} = 32t \end{aligned} \qquad (c)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{16 + (32t)^2}$$

- Accelarația:

$$a_x = \ddot{x} = 0$$

$$a_y = \ddot{y} = 32$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 32 \qquad (d)$$

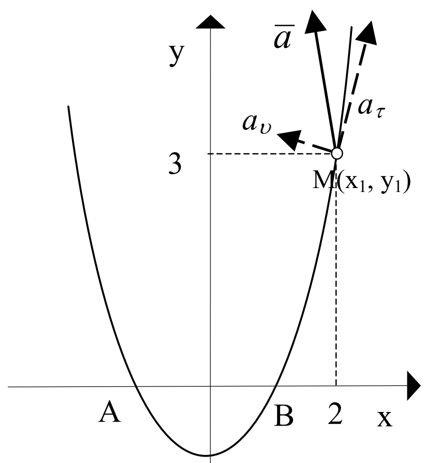

Fig. 8.1.b

3) Poziția, viteza şi accelerația punctului, raza de curbură a traiectoriei la momentul $t_1=1/2\ s$ sunt :

- poziția: $\begin{cases} x(t_1)=2\ cm \\ y(t_1)=3\ \ cm \end{cases}$; (e)
- viteza: $\begin{cases} \dot{x}(t_1)=4 \\ \dot{y}(t_1)=16 \end{cases} \Rightarrow v(t_1)=16{,}5\ cm/s$ (f)
- accelerația: $a(t_1)=32\ cm/s^2$ (g)

Accelerația tangențială la momentul $t_1=1/2\ s$ se obține prin derivarea în raport cu timpul a vitezei:

$$a_\tau=\left|\frac{dv}{dt}\right|=|\dot{v}|=\frac{2v_x\dot{v}_x \pm 2v_y\dot{v}_y}{2\sqrt{v_x^2+v_y^2}}=\frac{v_xa_x+v_ya_y}{v}$$

$$\Rightarrow a_\tau(t_1)=31cm/s^2$$

Accelerația normală la momentul t_1 este prin urmare:

$$a_\nu=\sqrt{a^2-a_\tau^2} \Rightarrow a_\nu(t_1)=7{,}94\ cm/s^2 \quad \text{(h)}$$

- raza de curbură a traiectoriei (a) se calculează cu ajutorul formulei:

$$\rho=\frac{v^2}{a_\nu}$$

Raza de curbură la momentul $t_1=1/2\ s$ este:

$$\rho(t_1)=34{,}3\ cm \quad \text{(i)}$$

Elementele calculate sunt reprezentate în fig. 8.1. şi sunt trecute în tabelul următor :

Coordonate (cm)		Viteze (cm/s)			Accelerații (cm/s^2)					Raza (cm)
x	y	v_x	v_y	v	a_x	a_y	a	a_τ	a_ν	ρ
2	3	4	16	16,5	0	32	32	31	7,94	34,3

***8.2 Se consideră** un punct material pentru care se cunoaşte vectorul de poziție în raport cu originea O a sistemului de axe Oxy:* $\bar{r}=\overline{OM}=(3\sin\pi t)\bar{i}+(2\cos\pi t)\bar{j}$ *(cm).*

***Se cer:** 1) Ecuația traiectoriei (sub formă parametrică şi implicită în sistemul de axe Oxy) şi să se reprezinte grafic în sistemul de axe Oxy; 2) Viteza şi accelerația punctului; 3) Poziția, viteza şi accelerația punctului la momentul* $t_1=1/3\ s$*, precum şi raza de curbură a traiectoriei la acelaşi moment.*

Rezolvare :

3) Ecuațiile sub formă parametrică ale traiectoriei sunt :

$$\begin{cases} x = 3\sin \pi t \\ y = 2\cos \pi t \end{cases} \qquad (a)$$

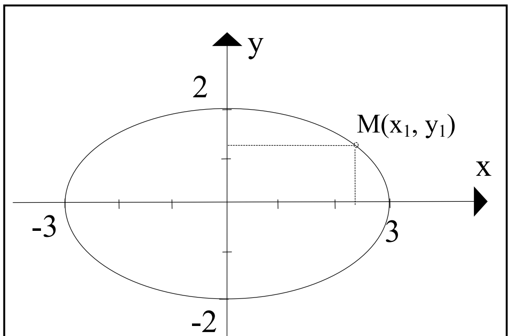

Fig. 8.2

Eliminând parametrul t din ecuațiile (a) se obține ecuația sub formă implicită a traiectoriei:

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} - 1 = 0 \qquad (b)$$

Această ecuație reprezintă o elipsă cu centrul în originea sistemului de axe, de semiaxe: *a=3, b=2* (fig. 8.2)

2) Viteza şi accelerația punctului la momentul *t* se detremină cu ajutorul proiecțiilor:

- Viteza:

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = 3\pi \cos \pi t \\ v_y &= \dot{y} = -2\pi \sin \pi t \end{aligned} \qquad (c)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \pi\sqrt{9\cos^2 \pi t + 4\sin^2 \pi t} = \pi\sqrt{4 + 5\cos^2 \pi t}$$

- Accelarația:

$$\begin{aligned} a_x &= \ddot{x} = -3\pi^2 \sin \pi t \\ a_y &= \ddot{y} = -2\pi^2 \cos \pi t \end{aligned} \qquad (d)$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \pi^2\sqrt{9\sin^2 \pi t + 4\cos^2 \pi t} = \pi^2\sqrt{4 + 5\sin^2 \pi t}$$

3) Poziția, viteza şi accelerația punctului, raza de curbură a traiectoriei la momentul $t_1=1/3\ s$ sunt :

- poziția: $\begin{cases} x(t_1) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = 2{,}598 \quad cm \\ y(t_1) = 1 \quad cm \end{cases}$; (e)

- viteza: $\begin{cases} \dot{x}(t_1) = \dfrac{3\pi}{2} \\ \dot{y}(t_1) = -\pi\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow v(t_1) = \dfrac{\pi\sqrt{21}}{2} = 7{,}198\ cm/s$ (f)

- accelerația: $\begin{cases} \ddot{x}(t_1) = \dfrac{-3\sqrt{3}\pi^2}{2} \\ \ddot{y}(t_1) = -\pi^2 \end{cases} \Rightarrow a(t_1) = \dfrac{\pi^2\sqrt{31}}{2} = 27{,}476\ cm/s^2$ (g)

(h)

Raza de curbură la momentul $t_1=1/3\ s$ este:

$$\rho(t_1)=\frac{7\sqrt{21}}{16}=2{,}005\ cm \tag{i}$$

***8.3 Acelaşi enunț ca la probema 8.2**, cu următoarele date :*

$$\bar{r}=\overline{OM}=\left(2+sin\frac{\pi}{3}t\right)\bar{i}+\left(1+2cos\frac{\pi}{3}t\right)\bar{j},\ \ cm\ \ ;\ \ momentul\ \ t_1=1\ s;$$

Rezolvare :

1) Ecuațiile sub formă parametrică ale traiectoriei sunt :

$$\begin{cases} x=2+sin\frac{\pi}{3}t \\ y=1+2cos\frac{\pi}{3}t \end{cases} \quad \text{sau:} \quad \begin{cases} x-2=sin\frac{\pi}{3}t \\ \frac{y-1}{2}=cos\frac{\pi}{3}t \end{cases} \tag{a}$$

Ridicând la pătrat relațiile (a) şi însumând membru cu membru, se obține ecuația sub formă implicită a traiectoriei în sistemul Oxy:

$$(x-2)^2+\left(\frac{y-1}{2}\right)^2-1=0 \tag{b}$$

care reprezintă o elipsă având centrul: *C (2 , 1)* de semiaxe: *a=1, b=2* (fig. 8.3).

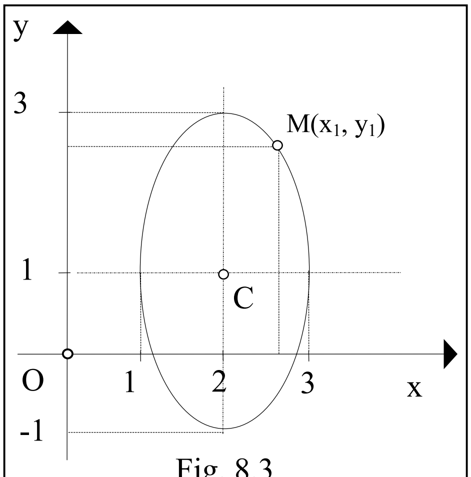

Fig. 8.3

2) Poziția, viteza, şi accelerația punctului la momentul *t* şi la momentul $t_1=1s$ sunt:

- Poziția

$$\begin{cases} x=2+\sin\frac{\pi}{3}t \\ y=1+2\cos\frac{\pi}{3}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t_1)=2+\frac{\sqrt{3}}{2}=2{,}866\,cm \\ y(t_1)=2\quad cm \end{cases} \tag{c}$$

- Viteza:

$$\begin{cases} \dot{x}=\frac{\pi}{3}cos\frac{\pi}{3}t \\ \dot{y}=-\frac{2\pi}{3}sin\frac{\pi}{3}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v(t)=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\frac{\pi}{3}\sqrt{1+3sin^2\frac{\pi}{3}t} \\ v(t_1)=\pi\sqrt{13}/6=1{,}888\ cm/s \end{cases} \tag{d}$$

- Accelerația:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{\pi^2}{9}\sin\dfrac{\pi}{3}t \\ \ddot{y} = -\dfrac{2\pi^2}{9}\cos\dfrac{\pi}{3}t \end{cases} \Rightarrow a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \frac{\pi^2}{9}\sqrt{1 + 3\cos^2\frac{\pi}{3}t} \qquad \text{(e)}$$

$$\Rightarrow a(t_1) = \frac{\pi^2\sqrt{7}}{18} = 1{,}451\ cm/s^2$$

- Raza de curbură a traiectoriei punctului la momentul $t_1 = 1\ s$ este:

$$\rho(t) = \frac{\sqrt{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^3}}{\left|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}\right|}; \qquad \rho(t_1) = \frac{13\sqrt{13}}{16} = 2{,}929\ cm \qquad \text{(f)}$$

8.4. Se consideră *mecanismul bielă-manivelă din figura 8.4, pentru care se cunosc:* $OA = r$, $AB = \ell$, $MB = \ell/3$ *şi legea de mişcare a manivelei OA:* $\varphi(t) = 3\pi t$.

Se cer*: 1) Ecuația traiectoriei punctului M sub formă parametrică şi explicită;*

2) Poziția, viteza, accelerația punctului şi raza de curbură a traiectoriei la momentul $t_1 = 1/6\ s$*, dacă se cunosc valorile numerice:* $r = 10cm$, $\ell = 30cm$

Rezolvare :

Se notează cu α unghiul OBA (fig. 8.4). Coordonatele punctului M față de axele sistemului Oxy sunt:

$$\begin{cases} x_M = OA' + A'M' = r\,sin\,\varphi + \dfrac{2}{3}\ell\,cos\,\alpha \\ y_M = M'M = \dfrac{\ell}{3}sin\,\alpha \end{cases} \qquad \text{(a)}$$

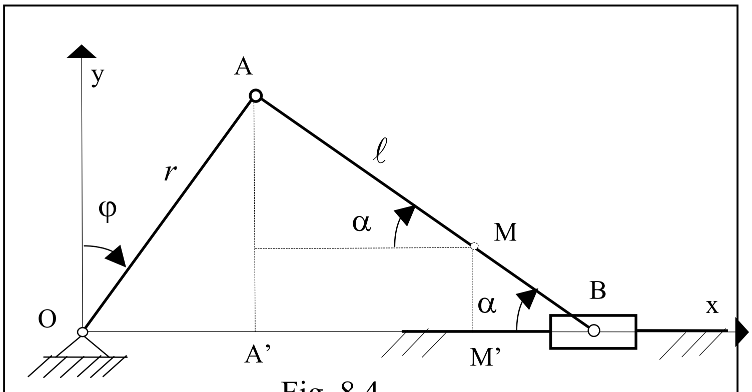

Fig. 8.4

Teorema sinusurilor în triunghiul OAB se scrie:

$$\frac{l}{sin\left(90^0 - \varphi\right)} = \frac{r}{sin\,\alpha}$$

$$\Rightarrow sin\,\alpha = \frac{r}{\ell}cos\,\varphi$$

$$\Rightarrow cos\,\alpha = \sqrt{1 - \frac{r^2}{\ell^2}cos^2\,\varphi}$$

Prin urmare, ecuațiile parametrice (a) devin:

$$\begin{cases} x = r\,sin\,\varphi + \dfrac{2}{3}\sqrt{\ell^2 - r^2\,cos^2\,\varphi} \\ y = \dfrac{r}{3}cos\,\varphi \end{cases} \tag{a}$$

Eliminând parametrul φ din ecuațiile parametrice (a'), se obține ecuația explicită a traiectoriei punctului M în sistemul de axe Oxy:

$$x = \sqrt{r^2 - 9y^2} + \frac{2}{3}\sqrt{\ell^2 - 9y^2} \tag{b}$$

2) Poziția, viteza, accelerația punctului şi raza de curbură la momentul $t_1=1/6\ s$, ($\varphi=\pi/2$, $\dot{\varphi} = 3\pi$; $\ddot{\varphi} = 0$) se determină astfel:

- $$\begin{cases} x = r\sin\varphi + \dfrac{2}{3}\sqrt{\ell^2 - r^2\cos^2\varphi} \\ y = \dfrac{r}{3}\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t_1) = r + \dfrac{2\ell}{3} = 30\ cm \\ y(t_1) = 0 \end{cases} \tag{c}$$

- $$\begin{cases} \dot{x} = \dot{\varphi} r\left(cos\,\varphi + \dfrac{r}{3}\cdot\dfrac{sin\,2\varphi}{\sqrt{\ell^2 - r^2\,cos^2\,\varphi}}\right) \\ \dot{y} = -\dot{\varphi} r\left(\dfrac{1}{3}sin\,\varphi\right) \end{cases} \tag{d}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t_1) = 0 \\ \dot{y}(t_1) = -\pi r \end{cases} \Rightarrow v(t_1) = 31{,}416\ cm/s$$

- $$\begin{cases} \ddot{x} = \dot{\varphi}^2 r\left(-\sin\varphi + \dfrac{r}{6}\cdot\dfrac{4\cos 2\varphi\left(\ell^2 - r^2\cos^2\varphi\right) - r^2\sin^2 2\varphi}{\sqrt{\left(\ell^2 - r^2\cos^2\varphi\right)^3}}\right) \\ \ddot{y} = -\dot{\varphi}^2 r\left(\dfrac{1}{3}\cos\varphi\right) \qquad (deoarece \quad \ddot{\varphi} = 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}(t_1) = 9\pi^2 r\left(-1 - \dfrac{2r}{3\ell}\right) \\ \ddot{y}(t_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow a(t_1) = 220\ cm/s^2 \tag{e}$$

- Raza de curbură a traiectoriei punctului momentul $t_1=1/6\ s$ este:

$$\rho(t) = \frac{\sqrt{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^3}}{\left|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}\right|};$$

$$\rho(t_1) = \frac{13\sqrt{13}}{16} = 4{,}486\ cm \tag{f}$$