NC 3.4.

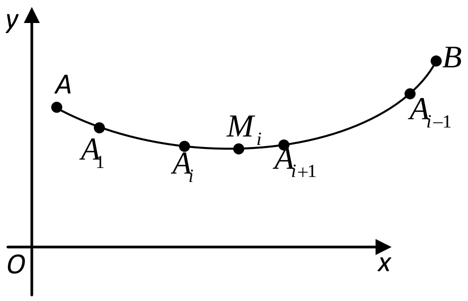
INTEGRALE CURBILINII DE SPEȚA I

- Masa arcului plan
- Integrale curbilinii de speța I. Definiții. Proprietăți
- Calcularea integralei curbilinii de speța I
- Aplicații ale integralei curbilinii de speța I

Problema găsirii masei arcului plan

Fie că în planul XOY este dat un arc *AB* de curbă şi fie cunoscută densitatea liniară $\rho(M)$ în orice punct $M(x,y) \in AB$. Se cere de găsit masa *m* al arcului de curbă *AB*.

Pentru aceasta vom deviza arcul *AB* de punctele $A_0 = A, A_1, \ldots, a_{n-1},\ A_n = B$.



Considerăm pe arcul $A_i A_{i+1}$ punctul arbitrar M_1 cu densitatea respectivă $\rho(M_i)$. Vom presupune că pe arcul $A_i A_{i+1}$ în orice punct este aceeaşi densitate $\rho(M_i)$. Notăm lungimea arcului $A_i A_{i+1}$ cu Δl_i. Atunci masa m_i a arcului este $m_i \approx \rho(M_i)\Delta l_i$. Prin urmare, masa întregului arc *AB* este $m_i \approx \sum_{i=0}^{n-1} M_i = \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i)\Delta l_i$.

Eroarea comisă la calcularea masei este cu atât mai mică cu cât mai mici vor fi lungimile arcelor considerate Δl_i. Notăm $\lambda = \max \Delta l_i$. Atunci, evident $m = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i)\Delta l_i$ sau $m = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(x_i, y_i)\Delta l_i$.

Integrale curbilinii de speța I. Definiții. Proprietăți

În cele ce urmează vom defini integrala curbilinie de speța I. Fie arcul *L* de curbă cu capetele *A* şi *B* şi fie $f(x,y)$ o funcție continuă definită pe *L*. Procedând ca şi mai sus formăm suma $\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i y_i)\Delta l_i$, $\lambda = \max \Delta l_i$.

Definiție: Dacă limita sumei σ_n există, este finită şi nu depinde de modul de divizare al arcului *L*, nici de modul de alegere a punctelor $M_i(x_i, y_i)$, atunci valoare ei se numeşte **integrală curbilinie de speța I a funcției $f(x,y)$ pe arcul** *L*. Se notează cu $\int_L f(x,y)dl$. Deci, $\int_L f(x,y)dl = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i)\Delta l_i$.

Notă. În mod analog poate fi definită integrala curbilinie a unei funcții $f(x,y,z)$ definite pe un arc L de curba spațială. Atunci, $\int_L f(x,y,z)dl = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i,y_i,z_i)\Delta l_i$.

Proprietăți ale integralei curbilinii de speța I

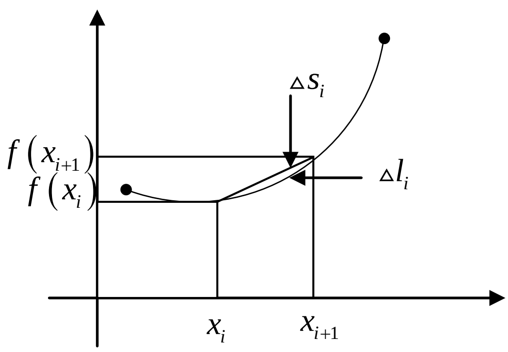
1. Integrala curblinie de speța I nu depinde de direcția integrării, adică $\int_{AB} f(M)dl = \int_{BA} f(M)dl$.
2. $\int_L [f_1(M) \pm f_2(M)]dl = \int_L f_1(M)dl \pm \int_L f_2(M)dl$.
3. $\int_L c\cdot f(M)dl = c\cdot \int_L f(M)dl$, unde c este constantă.
4. Dacă drumul de integrare L este divizat în porțiunile $L_1, L_2, ..., L_n$, atunci $\int_L f(M)dl = \int_{L_1} f(M)dl + ... + \int_{L_n} f(M)dl$.

Calcularea integralei curbilinii de speța I

Calcularea integralei curbilinii de speța I se reduce la calcularea unei integrale definite.

1. Dacă în planul OXY curba L este dată de ecuația $y = y(x)$, unde $x \in [a,b]$, iar funcțiile $y(x)$ și $y'(x)$ sunt continui pe segmentul $[a,b]$, atunci $dl = \sqrt{1+[y'(x)]^2}dx$ și $\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx$.

Într-adevăr,



$f(x_{i+1}) - f(x_i) = \Delta y_i$, $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$

Avem $\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i$.

Conform teoremei Lagrange avem

$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f'(\xi_i)$ cu $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$, de

unde $\Delta s_i = \sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\Delta x_i$. Astfel

$$s \approx \sum \Delta s_i \Rightarrow s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{i=n-1}\Delta s_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx \text{ și}$$

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx.$$

2. Dacă arcul L este definit parametric: $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [t_1, t_2]$ atunci $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$ şi

$$\int_L f(x,y)\,dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.$$

3. Dacă arcul L este dat de ecuația $\rho = \rho(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$ în coordonatele polare, atunci $dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\theta$ şi $\int_L f(x,y)\,dl = \int_\alpha^\beta f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\theta$

4. Dacă L este o curbă spațială şi definită parametric: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t),\ t \in [t_1, t_2] \\ z = z(t) \end{cases}$ atunci

$$\int_L f(x,y,z)\,dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt$$

Exemple:

1. Să se calculeze $\int_L (x^5 + 8xy)\,dl$, unde L este arcul de curbă $4y = x^4$, situat între punctele de abscisă $x = 0$, $x = 1$.

Soluție: $y' = 4x^3$. $dl = \sqrt{1 + x^6}\,dx$. Atunci

$$I = \int_0^1 (x^5 + 2x^5)\sqrt{1+x^6}\,dx = 3\int_0^1 x^5\sqrt{1+x^6}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1+x^6}\,d(1+x^6) = \frac{1}{3}\sqrt{(1+x^6)^3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}2\sqrt{2}$$

2. Să se calculeze $\int_L (2x + y)\,dl$, L este conturul ΔABO, unde $A(1,0)$, $B(0,2)$, $O(0,0)$.

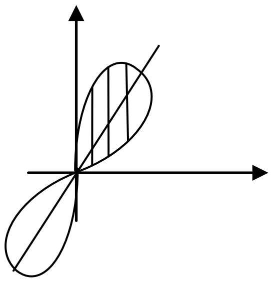
Soluție: $I = \int_{OA} (2x + y)\,dl + \int_{AB} (2x + y)\,dl + \int_{OB} (2x + y)\,dl$.

Pe segmentul OA avem: $y = 0$, $y' = 0$, $I_1 = \int_0^1 2x\,dx = x^2\big|_0^1 = 1$.

Pe segmentul AB avem: $y = -2x + 2$, $y' = -2$, $I_2 = \int_0^1 2\sqrt{xdx} = 2\sqrt{5}$;

Pe segmentul OB avem: $I_3 = \int_0^2 y\,dy = 2$. În final $I = 1 + 2\sqrt{5} + 2 = 3 + 2\sqrt{5}$.

3. Să se calculeze $\int_L (x + y)\,dl$, unde L este o petală a lemniscatei Bernoulli $\rho = a\sqrt{\sin 2\theta}$



Soluție: Avem că $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $x = a\sqrt{\sin 2\theta}\cos\theta$, $y = a\sqrt{\sin 2\theta}\cos\theta$,

$$\rho' = \frac{a\cos 2\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}},$$

$$dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\theta = \sqrt{a^2\sin 2\theta + \frac{a^2\cos^2\theta}{\sin 2\theta}}\,d\theta$$

Atunci

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sqrt{\sin 2\theta}(\cos\theta + \sin\theta)\frac{\sqrt{\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta}}{\sqrt{\sin 2\theta}}\,d\theta =$$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta + \sin\theta)\,d\theta = a^2(\sin\theta - \cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2(1+1) = 2a^2$$

5. Să se calculeze integrala $\int_L (2x + 4y - 4z + 7)\,dl$, de L este segmentul de dreaptă dintre punctele $M_1(8,9,3)$ şi $M_2(6,10,5)$.

Soluție: Scriem ecuația dreptei $M_1M_2 : \frac{x-8}{-2} = \frac{y-9}{1} = \frac{z-3}{2}$. Trecem la ecuațiile parametrice ale dreptei: $x = 8 - 2t$, $y = 9 + t$, $z = 3 + 2t$, $t \in [0,7]$, $x' = -2$, $y' = 1$, $z' = 2$, $dl = \sqrt{4+1+4}dt = 3dt$. Obținem

$$I = \int_0^1 (16 - 4t + 36 + 4t - 12 - 8t + 7)3dt = 3\int_0^1(-8t + 47)\,dt = \left(-12t^2 + 141t\right)\Big|_0^1 = 129.$$

6. Să se calculeze integrala $\int_L \sqrt{x^2 + 2z^2}\,dl$, unde L este cercul format de intersecția sferei $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, cu planul $y = z$.

Soluție: Vom scrie ecuațiile parametrice ale cercului. Punem

$$z = t \Rightarrow y = t \Rightarrow x = \pm\sqrt{R^2 - 2t^2},\ x' = \pm\frac{2t}{\sqrt{R^2 - 2t^2}},\ y' = 1,\ z' = 1,$$

$dl = \sqrt{\frac{4t^2}{R^2 - 2t^2} + 2}dt = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 - 2t^2}}dt$. Să găsim cum variază t. Avem că

$R^2-2t^2\geq 0 \Leftrightarrow t\in\left[-\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}}\right]$. Deci,

$$I=2\int_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}}\sqrt{R^2-2t^2+2t^2}\,\frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{t^2-2t^2}}dt=2R^2\int_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}}\frac{dt}{\sqrt{\frac{R^2}{2}-t^2}}=$$

$$2R^2 arc\sin\frac{\sqrt{2}t}{R}\Bigg|_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}}=2R^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=2R^2\pi$$

Aplicații ale integralei curbilinii de speța I

Dacă $\rho(x,y)$ este densitatea de masă în $M(x,y)\in L$ şi ρ este continuă pe L, atunci

a) **masa arcului material (firului)** L este $m=\int_L \rho(x,y)dl$

b) **momentele statice** în raport cu axele de coordonate sunt

$M_{OX}=\int_L y\rho(x,y)dl$, $M_{OY}=\int_L x\rho(x,y)dl$,

c) **coordonatele centrului de greutate** sunt: $x_L=\frac{M_{OY}}{m}$, $y_L=\frac{M_{OX}}{m}$