CAPITOLUL 1

SPAȚII VECTORIALE FINIT DIMENSIONALE

1.1 Definiția spațiilor vectoriale

Pentru a introduce noțiunea de spațiu vectorial avem nevoie de noțiunea de *corp comutativ de caracteristică zero*. Aceasta este introdusă de definiția de mai jos.

Definiția 1.1.1 *Spunem că o mulțime K, dotată cu două operații, una notată aditiv (numită adunare) şi cealaltă notată multiplicativ (numită înmulțire), are o structură de corp comutativ dacă împreună cu adunarea este grup abelian, iar față de înmulțire, K - {0} (unde 0 este elementul neutru la adunare) este grup comutativ şi sunt verificate axiomele:*

1. *(distributivitate la dreapta)* $x(y+z) = xy + xz$, *oricare ar fi* $x, y, z \in K$
2. *(distributivitate la stânga)* $(x+y)z = xz + yz$, *oricare ar fi* $x, y, z \in K$.

Definiția 1.1.2 *Caracteristica corpului K este cel mai mic număr* $n \in \mathbf{N}^*$ *pentru care* $na = 0$, *oricare ar fi* $a \in K$.

Dacă $na = 0$, oricare ar fi $a \in K$, are loc numai pentru $n = 0$ atunci corpul K are *caracteristica zero.*

perechea $(G, *)$, $G \times G \to G$, $(x,y) \to x*y$

se numeşte grup abelian dacă: $1° - (x*y)*z = x*(y*z)$

2° - $\exists\, e \in G$ a.î. $x * e = e * x = x,\ \forall x \in G$
3° - $\forall x \in G,\ \exists\, x' \in G$ a.î. $x' * x = x * x' = e$
4° - $x * y = y * x \quad \forall x, y \in G$

Fie K un corp comutativ de caracteristică zero. Vom conveni ca de aici înainte să folosim denumirea mai simplă de corp pentru un corp comutativ de caracteristică zero, dacă nu sunt făcute alte precizări. Acum putem introduce definiția spațiului vectorial.

Definiția 1.1.3 *Un spațiu vectorial (liniar) V peste corpul K este o mulțime nevidă prevăzută cu două operații: o operație internă + : V x V→ V, (x, y) → x + y, numită adunarea vectorilor, împreună cu care V are o structură de grup abelian, adică satisface axiomele:*

1. (x + y)+ z = x + (y + z), oricare ar fi x, y , z ∈V (legea este asociativă);

2. x + y = y + x oricare ar fi x, y ∈V (legea este comutativă);

3. există în V un element 0, vectorul zero, astfel încât x + 0 = 0 + x oricare ar fi x ∈V (există element neutru);

4. oricare ar fi x ∈ V există - x∈V astfel încât x + (- x) = (-x) + x = 0 (orice element admite simetric)

şi o operație externă :K x V→ V, (α, x) → α x (de înmulțire a vectorilor cu scalari) care satisface axiomele:

a. dacă 1∈K este elementul neutru la înmulțire din K atunci 1x = x, oricare ar fi x∈K.

b. (αβ)x = α(βx) oricare ar fi α, β∈K şi x∈V;

c. (α + β) x = αx + βx oricare ar fi α, β ∈K şi x∈V;

d. α(x + y) = αx + αy oricare ar fi α∈K şi x, y∈V.

După cum se subînțelege din cele spuse mai sus, elementele corpului K se vor numi *scalari* şi vor fi notate cu litere ale alfabetului grec, în timp ce elementele spaţiului vectorial V se vor numi *vectori* şi vor fi notate cu litere ale alfabetului latin. Dacă V este un spaţiu vectorial peste corpul K se mai spune că *V este un K- spaţiu vectorial*.

În cazul în care K este corpul numerelor reale (respectiv complex), vom spune că V este spaţiu vectorial real (respectiv complex).

Observaţia 1.1.1 Dacă V este un spaţiu vectorial peste corpul K atunci $\alpha x = 0$ ($\alpha \in K$, $x \in V$) dacă şi numai dacă $\alpha = 0$ sau $x = 0$. Într- adevăr, dacă $\alpha = 0$, atunci, deoarece $0 = 0 + 0$, aplicăm axioma c) din definiţia spaţiului vectorial şi avem $0x = 0x + 0x$. Adunând opusul lui $0x$ în ambii membrii ai egalităţii obţinem $0x = 0$. Raţionând asemănător putem arăta ca $\alpha 0 = 0$.

Reciproc, dacă $\alpha x = 0$, atunci presupunem prin absurd că $\alpha \neq 0$ şi $x \neq 0$. Înmulţim egalitatea precedentă, la stânga, cu α^{-1}, inversul lui α, şi obţinem $1x = \alpha^{-1}0$. Acum folosim rezultatul demonstrat mai sus şi axioma a) din Definiţia 1.1.3 şi obţinem $x = 0$, ceea ce contrazice ipoteza. Deci $\alpha x = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ sau $x = 0$.

Observaţia 1.1.2 Conform celor stabilite în observaţia de mai sus avem $0 = 0x = ((-\alpha) + \alpha)x$. Deci $(-\alpha)x + \alpha x = 0$ sau $(-\alpha)x = -\alpha x$.

Observaţia 1.1.3 Spaţiul vectorial cu un singur element, care în mod evident este vectorul 0, se numeşte spaţiul nul şi se notează (0).

Exemplul 1.1.1 *Orice corp comutativ K are o structură de spaţiu vectorial peste el însuşi, dacă vom defini operaţia internă, de adunare a vectorilor, respectiv operaţia de înmulţire a vectorilor cu scalari, ca fiind operaţiile de adunare şi respectiv înmulţire ale corpului K.*

Exemplul 1.1.2 *Fie K un corp comutativ şi* $V = K^n = K \times K \times \ldots \times K$ *(produsul cartezian al lui K cu el însuşi de n ori). Avem* $V = \{(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n) / \alpha_i \in K$, *oricare ar fi* $i \in \{1, 2,\ldots n\}\}$. *Dacă definim adunarea în V şi înmulțirea cu scalari din K după cum urmează*

$$(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_n) = (\alpha_1+ \beta_1, \alpha_2 + \beta_2,\ldots, \alpha_n + \beta_n)$$

$$\alpha(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n) = (\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2,\ldots, \alpha\alpha_n),$$

atunci este uşor de văzut că sunt îndeplinite condițiile cerute de definiția spațiului vectorial şi V este un K spațiu vectorial.

Într-adevăr, V împreună cu operația de adunare are o structură de grup abelian în care elementul neutru este n-uplul (0, 0,…, 0) iar opusul unui vector oarecare $(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n) \in V$ *este* $(-\alpha_1, -\alpha_2,\ldots, -\alpha_n)$. *Operația de înmulțire cu scalari satisface axiomele a) - d) din Definiția 1.1.3 şi rezultă concluzia.*

În cazul particular în care K= ***R*** *(respectiv K =* ***C****), obținem spațiul vectorial real (respectiv complex)* $\mathbf{R}^n$ *(respectiv* $\mathbf{C}^n$*).*

Exemplul 1.1.3 *Fie V mulțimea* $C^0([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbf{R}, f \text{ continuă}\}$, $a, b \in \mathbf{R}$. *Mulțimea V, împreună cu operațiile de adunare a funcțiilor şi de înmulțire a acestora cu numere reale, capătă o structură de spațiu vectorial real.*

Exemplul 1.1.4 *(* ***Complexificatul unui spațiu vectorial real****) Fie V un spațiu vectorial real. Fie mulțimea* $V^C = V \times V$ *şi corpul numerelor complexe* ***C****. Pe această mulțime introducem două operații, adunarea şi înmulțirea cu scalari, astfel*

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v),\ x, z, u, v \in V;$$

$$(\alpha + i\beta)(x, y) = (\alpha x - \beta y,\ \alpha y + \beta x), \text{ oricare ar fi } x, y \in V \text{ şi } \alpha + i\beta \in \mathbf{C}.$$

Operaţia de înmulţire cu scalari de mai sus, arată că (0, y) = i(y, 0). Deoarece elementele $x \in V$ pot fi identificate cu perechile (x, 0), putem face convenţia că (0, y) = y şi (x, y) = x + iy. Acum este uşor de verificat faptul că cerinţele Definiţiei 1.1.3 sunt îndeplinite şi, în concluzie, V^C este un spaţiu vectorial complex.

Exemplul 1.1.5 *Mulţimea polinoamelor în nedeterminata t, de orice grad, cu coeficienţi reali, notată P(t) este spaţiu vectorial real împreună cu operaţia de adunare a polinoamelor şi de înmulţire a acestora cu scalari.(Exerciţiu)*

1.2 Combinaţii liniare. Sisteme liniar dependente şi liniar independente

În cele ce urmează vom conveni să numim familie de vectori o mulţime oarecare de vectori, iar prin sistem de vectori vom înţelege o mulţime cel mult numărabilă de vectori. Fie I o familie oarecare de indici.

Definiţia 1.2.1 *Vectorul $x \in V$ este combinaţie liniară a familiei de vectori $(x_i)_{i \in I}$, dacă x se poate scrie sub forma $x = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i$, unde numai un număr finit dintre coeficienţii α_i sunt nenuli.*

Observaţia 1.2.1 Vectorul 0 este combinaţie liniară de orice familie de vectori, deoarece putem lua în relaţia din definiţie $\alpha_i = 0$, $i \in I$.

Definiţia 1.2.2 *Familia $G = (x_i)_{i \in I}$ de vectori din V este sistem de generatori pentru V dacă pentru orice vector $x \in V$ există* *familia finită $I_0 \subset I$ astfel încât* $x = \sum_{i \in I_0} \alpha_i x_i$.

Exercițiul 1.2.1 Dacă $G \subset V$ este sistem de generatori pentru V şi $G_1 \subset G$ este "sistem de generatori pentru G", adică orice vector din G_1 se poate scrie ca o combinație liniară de vectori din G, atunci G_1 este sistem de generatori pentru V.

Definiția 1.2.3 *Familia* $(x_i)_{i \in I}$ *de vectori din V este liniar independentă dacă vectorul nul se poate scrie ca o combinație liniară de vectori ai familiei numai cu scalari nuli, adică pentru orice familie $I_0 \subset I$, finită avem*

$$"\sum_{i \in I_0} \alpha_i x_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0,\ i \in I_0\ ".$$

Observația 1.2.2 Orice submulțime a unei familii liniar independente este la rândul ei o familie liniar independentă.

Observația 1.2.3 O familie de vectori formată dintr-un singur vector x este liniar independentă dacă şi numai dacă $x \neq 0$. Într-adevăr, dacă $x \neq 0$ atunci din $\alpha x = 0$ rezultă, conform Observației 1.1.1, $\alpha = 0$ şi deducem că familia este liniar independentă.

Reciproc, dacă $\{x\}$ este familie liniar independentă atunci este necesar ca $x \neq 0$ căci altfel, pentru $x = 0$, avem $\alpha 0 = 0$ pentru orice $\alpha \neq 0 \in K$, ceea ce contrazice ipoteza.

Definiția 1.2.4 *Familia* $(x_i)_{i \in I}$ *de vectori din V este liniar dependentă dacă vectorul nul se poate scrie ca o combinație liniară* *de vectori ai familiei, cu scalari nu toţi nuli, adică există $\alpha_i \in K$, $i \in I$ nu toţi nuli astfel încât* $\sum_{i \in I} \alpha_i x_i = 0$.

Observaţii. 1. Orice familie de vectori din V care conţine vectorul nul este liniar dependentă. Într-adevăr dacă x_i, $i \in I$ sunt ceilalţi vectori ai familiei atunci avem combinaţia nulă $1 \cdot 0 + \sum_{i \in I} 0x_i = 0$.

2. Mai general, orice familie de vectori din V care conţine o familie liniar dependentă este liniar dependentă.

I. Caracterizări ale familiilor liniar dependente

Teorema 1.2.1 *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a)familia de vectori $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, nenuli este liniar dependentă ;

b) există un indice $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât x_j se scrie ca o combinaţie liniară de ceilalţi vectori din familie.

c) există un indice $2 \le j \le m$ astfel încât x_j se scrie ca o combinaţie liniară de vectorii precedenţi lui.

Demonstraţie. "a) $\Rightarrow$ b)" Dacă familia de vectori $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ este liniar dependentă, atunci există scalarii $\alpha_i \in K$, nu toţi nuli, astfel încât

$$0 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{j-1} x_{j-1} + \alpha_j x_j + \alpha_{j+1} x_{j+1} + \ldots + \alpha_n x_n.$$

Fără a restrânge generalitatea presupunem că $\alpha_j \neq 0$. Înmulţim relaţia de mai sus cu inversul lui α_j şi obţinem succesiv

$$0 = (\alpha_j)^{-1}\alpha_1 x_1 + (\alpha_j)^{-1}\alpha_2 x_2 + \ldots + (\alpha_j)^{-1}\alpha_{j-1} x_{j-1} + (\alpha_j)^{-1}\alpha_j x_j +$$
$$(\alpha_j)^{-1}\alpha_{j+1} x_{j+1} + \ldots + (\alpha_j)^{-1}\alpha_n x_n \text{ şi}$$

$$x_j = - (\alpha_j)^{-1}\alpha_1 x_1 - (\alpha_j)^{-1}\alpha_2 x_2 - \ldots - (\alpha_j)^{-1}\alpha_{j-1} x_{j-1} -$$

$$(\alpha_j)^{-1}\alpha_{j+1}x_{j+1} - \ldots - (\alpha_j)^{-1}\alpha_n x_n.$$

Astfel, prima implicație a echivalenței "a) $\Leftrightarrow$ b)", a fost demonstrată. În continuare vom demonstra implicația "b) $\Rightarrow$ a)".

Dacă există $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ şi scalarii $\alpha_i \in K$ astfel încât

$$x_j = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{j-1}x_{j-1} + \alpha_{j+1}x_{j+1} + \ldots + \alpha_n x_n,$$

atunci avem combinația nulă cu scalari nu toți nuli $0 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{j-1}x_{j-1} + (-1)x_j + \alpha_{j+1}x_{j+1} + \ldots + \alpha_n x_n$ şi, conform Definiției 1.2.4, deducem că familia este liniar dependentă. Implicația "c) $\Rightarrow$ b)" este evidentă.

Pentru a termina demonstrația este suficient să arătăm că "a) $\Rightarrow$ c)". Fie $1 \le p \le m$ cel mai mare indice cu proprietatea că familia de vectori $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ este liniar independentă. Existența indicelui p este asigurată de faptul că dacă $x_1 \neq 0$, atunci este clar că $\{x_1\}$ este familie liniar independentă. În cazul în care $\{x_1, x_2\}$ este familie liniar independentă, se continuă procedeul de determinare a lui p (procedeu care se termină într-un număr finit de paşi, căci numărul de vectori din sistem este finit), altfel se alege p = 1.

Dacă sistemul $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ este liniar independent şi p este maxim cu această proprietate atunci familia $\{x_1, x_2,, \ldots, x_p, x_{p+1}\}$ este liniar dependentă. Conform definiției, există scalarii $\alpha_i \in K$, i = 1, p+1, nu toți nuli astfel încât

$$0 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p + \alpha_{p+1}x_{p+1}\,.$$

Este uşor de văzut că dacă $\alpha_{p+1} = 0$ atunci familia $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ este liniar dependentă, ceea ce contrazice ipoteza. Deci $\alpha_{p+1} \neq 0$ şi înmulțind egalitatea de mai sus cu inversul lui α_{p+1} obținem:

$$0 = (\alpha_{p+1})^{-1}\alpha_1 x_1 + (\alpha_{p+1})^{-1}\alpha_2 x_2 + \ldots + (\alpha_{p+1})^{-1}\alpha_p x_p + (\alpha_{p+1})^{-1}\alpha_{p+1}x_{p+1}$$

sau $x_{p+1} = -(\alpha_{p+1})^{-1}\alpha_1 x_1 - (\alpha_{p+1})^{-1}\alpha_2 x_2 - \ldots -(\alpha_{p+1})^{-1}\alpha_p x_p$. Demonstraţia a fost încheiată.

Exemplul 1.2.1 *Dacă vom considera spaţiul vectorial real* $\mathbf{R}^3$ *atunci este uşor de văzut că familia de vectori* $\{x_1 = (-1, 2, -3), x_2 = (0, 3, 4), x_3 = (-1, 5, 1), x_4 = (-2, 3, 4)\}$ *este liniar dependentă, deoarece* $x_3 = x_2 + x_1$ *şi se aplică teorema de mai sus.*

~~II. Caracterizări ale familiilor liniar independente~~

Teorema 1.2.2 *O familie de vectori* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *a K- spaţiului vectorial V este liniar independentă dacă şi numai dacă orice scriere a unui vector x din spaţiu ca o combinaţie liniară cu vectori ai familiei se realizează în mod unic. Altfel spus, dacă avem scrierea* $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$, $\alpha_i \in K$, $i = 1,\ldots,n$ *atunci coeficienţii* α_i, $i = 1,\ldots,n$ *sunt unic determinaţi de vectorul x.*

Demonstraţie. Presupunem că familia $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ este liniar independentă şi mai presupunem că există $x \in V$ astfel încât x se scrie ca o combinaţie liniară de vectori ai familiei. Deci există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ astfel încât

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n.$$

Presupunem prin absurd că mai există o altă scriere a lui x ca o combinaţie liniară de vectori ai familiei date. Fie scalarii $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in K$ astfel încât $x = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n$ şi cel puţin pentru un indice $i \in \{1,2,\ldots n\}$ $\alpha_i \neq \beta_i$. Scăzând cele două relaţii de mai sus, membru cu membru, şi aplicând axiomele spațiului vectorial obținem

$$0 =(\alpha_1- \beta_1)x_1 + (\alpha_2- \beta_2)x_2 +\ldots+ (\alpha_i- \beta_i)x_i +\ldots+ (\alpha_n- \beta_n)x_n,\ \alpha_i - \beta_i \neq 0.$$

Relația de mai sus contrazice Definiția 1.2.3, deci faptul că familia dată este liniar independentă. În concluzie, presupunerea că x nu se scrie în mod unic ca o combinație liniară de vectori ai familiei este falsă. Reciproc, presupunem că orice scriere a unui vector $x\in V$ ca o combinație liniară de vectori ai familiei considerate se realizează în mod unic. Observăm că $0\in V$ şi $0 = 0x_1 + 0x_2 +\ldots+ 0x_n$. Orice altă scriere $0 = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 +\ldots+ \alpha_nx_n$ conduce la şirul de relații $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0,\ldots, \alpha_n = 0$. Aplicăm Definiția 1.2.3. şi obținem concluzia.

În cazul familiilor finite de vectori din spațiul vectorial real $\mathbf{R}^n$ avem următoare teoremă de caracterizare a familiilor liniar independente.

Teorema 1.2.3 *O familie de vectori $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ a spațiului vectorial real $\boldsymbol{R}^n$ este liniar independentă dacă şi numai dacă matricea care are pe coloane componentele vectorilor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ are rangul n.*

Demonstrație. Familia de vectori $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ este liniar independentă dacă şi numai dacă "$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \ldots + \alpha_nx_n = 0,\ \alpha_i\in \mathbf{R},\ i = 1, 2,\ldots,n \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots= \alpha_n = 0$". Dacă $x_i = (x_{1,i}, x_{2,i},\ldots,x_{n,i}),\ i = 1, 2,\ldots,n$ atunci afirmația de mai sus este echivalentă cu faptul că sistemul liniar şi omogen $X\alpha^T = 0$ admite numai soluția nulă, unde α^T este transpusa*) matricei linie $\alpha = (\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\alpha_n)$ iar $X \in M_n(\mathbf{R})$**), $X = (x_{ij})_{i=1,n,j=1,n}$. Acest

* Dacă $A= (a_{ij})_{i=1,n,j=1,m}$ este o matrice cu elemente din corpul K atunci vom nota cu $A^T = (a_{ji})_{j=1,m\ i=1,n}$, transpusa matricei A.

** $M_n(\mathbf{R})$ (respectiv $M_{n,m}(\mathbf{R})$) este mulțimea matricelor pătrate de ordinul n (respectiv cu n linii şi m coloane) cu elemente reale.

lucru este posibil dacă şi numai dacă rangul matricei sistemului, adică rangul matricei X este egal cu numărul de necunoscute.
Sistemul având *n* necunoscute, rezultă concluzia.

Propoziţia următoare este o consecinţă directă a acestei teoreme, motiv pentru care lăsăm demonstraţia ca exerciţiu pentru cititor:

Propoziţia 1.2.1 *Familia de vectori* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \boldsymbol{R}^n$ *este liniar dependentă dacă şi numai dacă rangul matricei care are pe coloane (sau linii) componentele vectorilor* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *are rangul k mai mic decât n. Mai mult, orice subfamilie a acesteia care conţine vectori ce au componente într-un minor de ordinul k nenul este liniar independentă. Numărul maxim de elemente al unei subfamilii liniar independente este egal cu rangul k al matricei despre care am vorbit mai sus.*

Observaţia 1.2.4 Afirmaţiile Teoremei 1.2.3 rămân valabile dacă vom considera în loc de $\mathbf{R}^n$ spaţiul K^n , unde K este un corp.

Exemplul 1.2.2 *Familia de vectori S={(-1, 3, 4, 0, 5), (2, 4, 5, -1, 0), (0, 0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0, 0)} din* $\boldsymbol{R}^5$ *este liniar independentă deoarece rangul matricei asociate conform Teoremei 1.2.3 este egal cu numărul de vectori, adică cu 4.*

În schimb, familia de vectori F = {(-1, 3, 4, 0, 5), (2, 4, 5, -1, 0), (0, 0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 2), (3, 2, 4, 5, 6)} din acelaşi spaţiu este liniar dependentă, conform aceleiaşi teoreme, deoarece rangul matricei asociate nu poate depăşi cea mai mică dimensiune a acesteia 5, iar numărul de vectori este 6.