NC 2.1.

FUNCȚII DE DOUĂ ŞI MAI MULTE VARIABILE. GENERALITĂȚI

Noțiune de funcții de două şi mai multe variabile. Domeniul de definiție. Interpretarea geometrică. Graficul funcției

Funcțiile de o singură variabilă nu pot descrie toate fenomenele, procesele ce au loc în natură. Multe dintre ele sînt caracterizate de o dependență a mai multor factori. Cercetarea a astfel de dependențe a dus la apariția noțiunii de **funcție de mai multe variabile**.

Exemple de funcții de mai multe variabile:

- Aria A a unui dreptunghi cu lungimile laturilor x şi y este $A = xy$, adică A este definită de perechile de numere pozitive x şi y.
- Legea lui Home spune că $I = U/R$, unde I este intesitatea curentlui, U este tensiunea, iar R – rezistența. Atunci I depinde de U şi R.
- Funcția de producție Cobb-Douglas $Q = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, unde Q este volumul produsului fabricat; K - cheltuielile de capital; L - resurse de muncă (cheltuieli de muncă), $A > 0$ - parametrul productivității muncii respectiv tehnologiei aplicate, $0 < \alpha < 1$ - cota capitalului în venit.

Definiție. Dacă fiecărei perechi de numere reale $(x; y)$ din mulțimea $D \subseteq R^2$ i se pune în corespondență un număr real z binedeterminat (după o lege careva f), atunci vom spune că pe mulțimea D este definită **funcția de două variabile** $z = f(x, y)$.

Mărimile variabile x şi y se numesc **argumenți**, iar z - **funcție** de aceşti argumenți. Mulțimea $D = D(f)$ se numeşte **domeniu de definiție** al funcției. Domeniul de definiție al unei funcții de două variabile se găseşte, folosind aceleaşi raționamente ca în cazul funcției de o singură variabilă.

Exemple: 1) $z = x^2 + y^2$. Este evident că $D(f) = R^2$

2) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ Avem $D(f) = \{(x, y)|x^2 + y^2 \geq 0\}$

3) $z = arcsin\frac{x}{y}$. Avem $D(f) = \left\{(x, y)| -1 \leq \frac{x}{y} \leq 1\right\}$

Domeniul de definiție al unei funcții de două variabile are **ilustrare geometrică**. Fie că în plan este fixat un sistem cartezian rectangular de coordonate. Fiecărei perechi de numere (x, y) îi corespunde punctul $M(x, y)$ al planului xOy și reciproc. Astfel, domeniul de definiție al unei funcții $z = f(x, y)$ este reprezentat de o mulțime de puncte din planul xOy. Această mulțime de asemenea se numeşte **domeniu de definiție**.

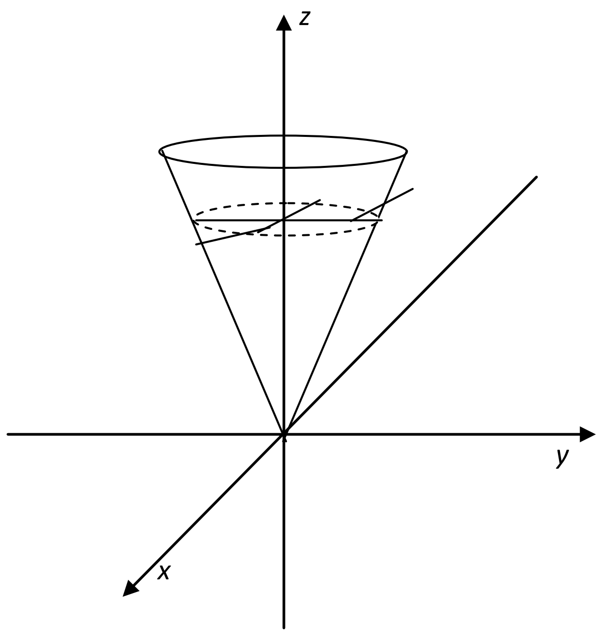
Definiție. Se numeşte **grafic al funcției** $z = f(x, y)$ mulțimea

$$G_f = \{(x, y, f(x, y))|\ (x, y) \in \mathrm{D}(f)\}.$$

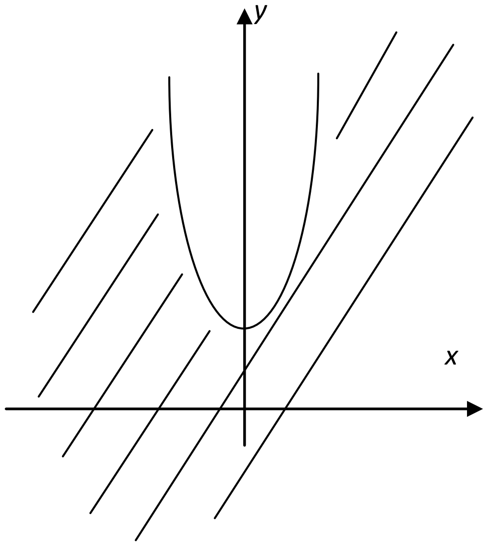
Ca şi în cazul domeniului de definiție, graficul funcției este determinat de o mulțime de puncte în spațiu (deseori, o suprafață).

Pentru funcția $z = x^2 + y^2$ domeniul de definiție este mulțimea tuturor punctelor planului xOy, iar graficul lui este un paraboloid eliptic.

Pentru funcția $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ domeniu de definiție este mulțimea tuturor punctelor planului xOy. Graficul funcției este porțiunea suprafeței conice $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, sitat deasupra planului xOy



Pentru funcția $z = \ln(x^2 - 3y + 6)$ domeniul de definiție rezultă din condiția $x^2 - 3y + 6 > 0$ sau $y < \frac{x^2}{3} + 2$. Deci, $D(f)$domeniul este mulțimea punctelor planului xOy de pe parabola $y = \frac{x^2}{3} + 2$ şi din exteriorul ei.



Graficul acestei funcții este o mulțime de puncte în spațiu deloc simplă. O metodă de constrire a acestui grafic este construirea liniilor de nivel (urmează).

Similar se defineşte funcția de n variabile $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sau $u = f(M)$, unde M este un element al spațiului $\mathbb{R}^n$, adică $M \in D = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)|\ x_i \in \mathbb{R}\}$. Formal, graficul funcției de n variabile $(n \geq 3)$ se numeşte **hipersuprafață** în spațiul R^{n+1}. Despre acest grafic se poate vorbi abstract, deoarece nu are interpretare geometrică.

Linii şi suprafețe de nivel

Pentru funcții de două variabile construirea graficului funcției este complicat, iar însăşi suprafața este greu de "imaginat" (nu ca în cazul funcției de o singură variabilă, unde graficul funcției este o linie în plan). Astfel, în cazul funcției $z = f(x, y)$ pentru a studia "comportarea" funcției se folosesc alte metode. Una dintre ele sînt **liniile de nivel**. Noțiunea de linie de nivel este larg aplicată în geodezie, cartografie, la alcătuirea hărților sinoptice, dar şi la descrierea diferitor cîmpuri fizice (al temperaturilor, al presiunilor etc.)

FUNCȚII DE DOUĂ ŞI MAI MULTE VARIABILE. GENERALITĂȚI

Definiție. Se numește **linie de nivel** a unei funcții de două variabile $z = f(x, y)$ mulțimea tuturor punctelor planului xOy coordonatele cărora verifică relația: $f(x, y) = c$, unde c este o constantă (figura de mai jos). În fiecare punct al liniei de nivel funcția are una și aceeași valoare c.

Cu ajutorul liniilor de nivel este comod de analizat carcterul deseori complicat a suprafeței date de funcția $z = f(x, y)$. De obicei, numerele c se iau în progresie aritmetică. Din poziția reciprocă a liniilor de nivel putem face concluzie despre suprafață. Acolo unde liniile de nivel sunt mai „dense”, funcția variază mai „repede”, şi invers.

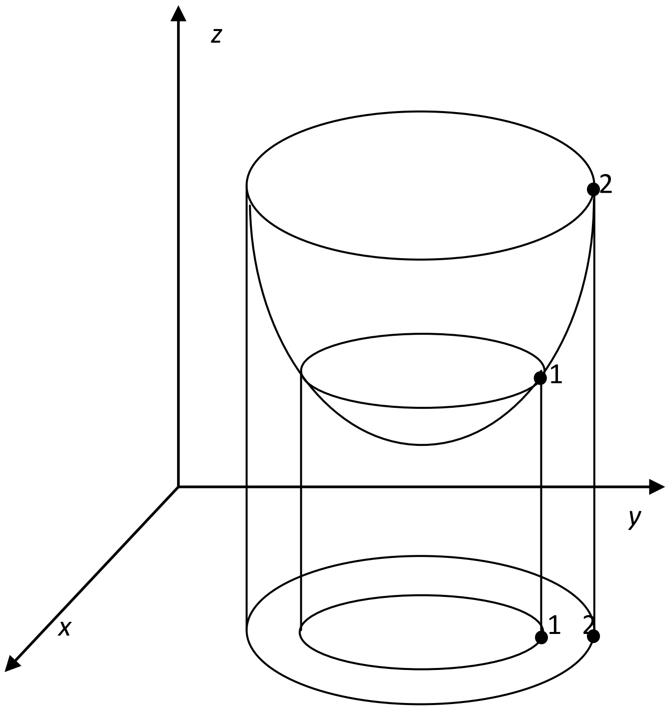


Figura 4

Exemplu. Să găsim liniile de nivel pentru functia $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y$. Avem ecuația

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = c \quad sau \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 + c.$$

Observăm că liniile de nivel ale funcției date constituie mulțimea cercurilor cu centrul în punctul $O(1, 1)$ și raza $R = \sqrt{2 + c}$, $c > -2$. Pentru $c = -2$, avem numai punctul $O(1, 1)$.

FUNCȚII DE DOUĂ ŞI MAI MULTE VARIABILE. GENERALITĂȚI

NC 2.1.

Pentru o funcție de trei variabile $u = f(x, y, z)$ se definește **suprafața de nivel**, adică mulțimea punctelor spațiului $\mathbb{R}^3$ coordonatele cărora verifică relația: $f(x, y, z) = c$, unde c este constantă.

Noțiuni de limită şi continuitate

La studierea funcțiilor de mai multe variabile se aplică în mare măsură aparatul matematic folosit în cazul funcției de o singură variabilă. Astfel, unei funcții de două variabile $z = f(x, y)$ i se asociază două funcții de câte o singură variabilă şi anume (dacă fixăm câte unul din argumente) pentru $x = x_0$ avem funcția $z = f(x_0, y) = f_1(y)$, iar pentru $y = y_0$ obținem funcția $z = f(x, y_0) = f_2(x)$.

Definiție. Se numește **ε-vecinătate** a punctului $M_0(x_0, y_0)$ mulțimea tuturor punctelor discului cu centrul în M_0 şi raza egală cu ε, adică $\left\{M(x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \le \varepsilon,\ \varepsilon > 0\right\}$.

Definiție. Punctul M_0 se numeşte **punct de acumulare** pentru mulțimea D , dacă orice vecinătate a lui conține puncte din D, diferite de M_0.

Definiție. Numărul A se numește **limită a funcției $f(x, y)$ în punctul** M_0, dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încît inegalitatea $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_\varepsilon$ implică inegalitatea $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. Se notează:

$$\lim_{M \to A} f(M) = A \quad sau \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A.$$

Definiție. Vom spune că **funcția $f(x, y)$ are limita $+\infty$ $(-\infty)$ în punctul** M_0 dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ oricît de mare există un număr $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât inegalitatea $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_\varepsilon$ implică inegalitatea $f(x, y) > \varepsilon$ $(f(x, y) < -\varepsilon)$.

Studierea existenței limitei funcției de două variabile în punct este mai complicată decît în cazul funcției de o singură variabilă.

Analog cazului funcției de o singură variabilă, se formulează **criteriul existenței limitei "cu şiruri"**: Pentru ca funcția $f(x, y)$ să aibă limită numărul A în punctul M_0, este necesar şi suficient ca dacă un şir de puncte $\{M_k\}$ din D tinde către M_0, atunci şirul numeric $\{f(M_k)\}$ tinde către A.

Exemplul 1.1 Să se cerceteze existenţa $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Rezolvare: Şirurile de puncte $\left\{M_k\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)\right\}$, $\left\{M_k'\left(\frac{2}{k},\frac{1}{k}\right)\right\}$ tind către punctul (0,0), cînd $k\to\infty$. Dar $\{f(M_k)\}\to\frac{1}{2}$, $\{f(M_k')\}\to\frac{2}{5}$. Deci, limita de sus nu există.

Exemplul 2.2 Să se calculeze: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Rezolvare. Notăm $\sqrt{x^2+y^2}=\rho$. Pentru $x\to 0$ și $y\to 0$ avem $\rho\to 0$ și

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\ln(1+\rho^2)}{\rho} = \lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\rho^2}{\rho} = \lim\limits_{\rho\to 0}\rho = 0$, ținându-se cont de faptul ca $\ln(1+\rho^2)\sim\rho^2$, când $\rho\to 0$.

Definiție. Funcția $z=f(\mathrm{x},\mathrm{y})$ se numeşte **continuă** în punctul $M_0\in D(f)$ dacă în acest punct funcția are limită si această limită coincide cu valoarea funcției în M_0, adică

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$$

Definiție. Funcția $z=f(\mathrm{x},\mathrm{y})$ se numește **continuă pe mulțimea** D dacă ea este continuă în fiecare punct al acestei mulțimi.

Sunt adevărate afirmații similare cazului funcției de o singură variabilă:.

1. Suma, diferența, produsul şi cîtul a doua funcţii continui pe un domeniu este o funcţie continuă.
2. Fie că funcția $z=f(\mathrm{x},\mathrm{y})$ este continuă în domeniul închis şi mărginit D, atunci funcția dată este mărginită pe acest domeniu. Adică există numerele reale m, M astfel încît $m\le f(x,y)\le M$ pentru orice $(x,y)\in D$.
3. Fie că funcția $z=f(\mathrm{x},\mathrm{y})$ este continuă în domeniul D. Dacă în punctele M_1 , M_2 din acest domeniu avem $f(M_1)\cdot f(M_2)<0$, atunci există un punct $M_0\in D$ astfel incît $f(M_0)=0$.