NC 1.8.

LINII DE ORDINUL DOI (CONICE)

- **Cercul. Ecuațiile: canonică; generală; explicite. Poziția unei drepte față de cerc**
- **Elipsa. Ecuațiile: canonică; explicite. Poziția unei drepte față de elipsă**
- **Hiperbola. Ecuațiile: canonică; explicite. Poziția unei drepte față de hiperbolă**
- **Parabola. Ecuațiile: canonică; explicite. Poziția unei drepte față de parabolă**

O **conică** este o curbă, care se obține la intersecția unei suprafețe de con circular drept cu un plan. În cazul când aceasta este o curbă închisă, linia de intersecție va fi o **elipsă** (în caz particular, cînd planul este perpendicular axei conului, obținem un **cerc**). În cazul cînd linia de intersecție nu va fi o curbă închisă, vom obține o **hiperbolă**, dacă planul nu este paralel cu vreo generatoare a conului; altfel (când planul este paralel cu o generatoare a conului) vom obține o **parabolă**. În cazul hiperbolei apar, de fapt., două linii deschise. Ne vom opri la studierea acestor patru linii şi vom deduce ecuațiile lor. Vom considera în plan un sistem rectangular de coordonate OXY

Cercul. Ecuațiile: canonică; generală, explicite.

Poziția unei drepte față de cerc

Definiție. Mulțimea punctelor planului egal depărtate de un punct dat M_0 din plan se numeşte **cerc**.

Fie că în sistemul rectangular de coordonate OXY avem $M_0(x_0, y_0)$, şi R un număr real pozitiv. Cercul C de centru M_0 şi rază R reprezintă mulțimea punctelor $M(x,y)$ ale planului, astfel încât $|M_0M| = R$. Cum $|M_0M| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ obținem $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$ - **(1.8.1)** – **ecuația canonică a cercului** (sau **ecuația carteziană implicită a cercului**).

În caz particular, când $x_0 = y_0 = 0$, adică centrul cercului este originea coordonatelor, avem ecuația $x^2 + y^2 = R^2$.

Deci, $C = \left\{ M(x,y) \middle| (x,y) \in R^2, (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2 \right\}$. Mai simplu se scrie $C : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$. Deoarece ecuația **(1.8.1)** mai poate fi scrisă sub forma $x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0$, care este o ecuație de gradul doi în raport cu x şi y, apare întrebarea, dacă ecuația de forma $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ reprezintă totdeauna un cerc.

Cercetăm mulțimea $\Gamma : x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$. Deoarece ecuația lui Γ mai poate fi scrisă sub forma: $(x+a)^2 + (y+b)^2 = a^2 + b^2 - c$, avem că:

1. Dacă $a^2 + b^2 - c > 0$, atunci Γ este un cerc cu centrul în punctul $(-a, -b)$ şi raza $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$;

2. Dacă $a^2+b^2-c=0$, atunci $\Gamma=\{-a,-b\}$;
3. Dacă $a^2+b^2-c<0$, atunci $\Gamma=\varnothing$.

Ecuația $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$, cu $a^2+b^2-c>0$ **(1.8.2)** se numeşte **ecuația generală a cercului.**

Din ecuația **(1.8.1)** avem $\left[\begin{array}{l} y=y_0+\sqrt{R^2-(x-x_0)^2} \\ y=y_0-\sqrt{R^2-(x-x_0)^2} \end{array}\right.$ **(1.8.1) –ecuații explicite ale cercului.**

Un cerc C separă planul în două mulțimi disjuncte: *interiorul* lui C notat cu $Int\,C$ şi *exteriorul* lui C notat cu $Ext\,C$.Evident,

$$Int\,C=\left\{M(x,y)\middle|x^2+y^2+2ax+2by+c<0\right\} \text{ şi } Ext\,C=\left\{M(x,y)\middle|x^2+y^2+2ax+2by+c>0\right\}.$$

Fie dreapta $l: Ax+By+C=0$ și cercul $C:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$. Poziția dreptei l față de cercul C poate fi determinată de distanța $d(M_0,l)=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ de la centrul M_0 al cercului la dreapta *l*.

1. Dacă $d(M_0,l)<R$, atunci dreapta este secantă cercului (are două puncte comune cu cercul);
2. Dacă $d(M_0,l)=R$, atunci dreapta este tangentă cercului;
3. Dacă $d(M_0,l)>R$, atunci dreapta și cercul nu au puncte comune.

Punctele de intersecție ale dreptei cu cercul (dacă există) sunt soluții ale sistemului .

$$\begin{cases}(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \\ Ax+By+C=0\end{cases}$$

Fie cercul $C:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ şi $M_1(x_1,y_1)\in C$. Atunci ecuația de gradul întâi $(x-x_0)(x-x_0)+(y-y_0)(y-y_0)=R^2$ reprezintă **tangenta la cercul** C în punctul M_1.

Elipsa. Ecuațiile: canonică; explicite; poziția unei drepte față de elipsă

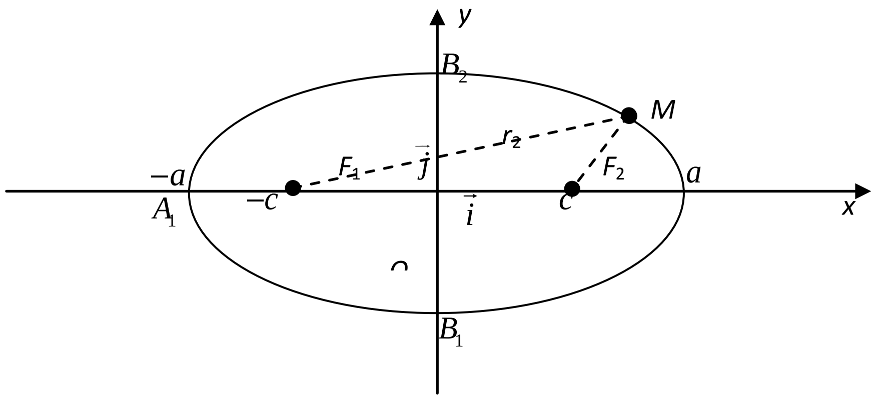
Definiție. Se numeşte **elipsă** locul geometric al punctelor, pentru care suma distanțelor la două puncte fixe, numite **focare**, este constantă.

Fie *c* un număr real pozitiv, F_1 și F_2 două puncte fixate din plan astfel incît $|F_1,F_2|=2c$. Fie $a>c$. Mulțimea *E* a punctelor M ale planului cu proprietatea $|MF_1|+|MF_2|=2a$ reprezintă elipsa. Distanța $|F_1,F_2|=2c$ se numește **distanță focală**, iar dreapta F_1F_2 se numește **axă focală**, iar segmentele de dreaptă $[MF_1]$ şi $[MF_2]$ se numesc **raze focale ale punctului** M .

LINII DE ORDINUL DOI (CONICE)

Fixăm un sistem cartezian de coordonate $\{O,\vec{i},\vec{j}\}$ astfel încât O este mijlocul segmentului F_1F_2, vectorul $\vec{i}$ este coorientat vectorului $\overrightarrow{F_1F_2}$, de unde este evidentă poziția vectorului $\vec{j}$.

Astfel focarele au coordonatele $F_1(-c,0)$ și $F_2(c,0)$.



Punctele $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1\left(0,-\sqrt{a^2-c^2}\right)$, $B_2\left(0,\sqrt{a^2-c^2}\right)$ aparțin elipsei și se numesc **vîrfuri ale elipsei**.

Să deducem ecuația elipsei E. Fie $M(x,y)$ un punct arbitrar al elipsei. Avem $|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, $|MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Avem $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$, de unde $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Ridicînd ambele părți la pătrat şi reducând termenii asemenea, obținem: $a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$. Ridicând ultima ecuație la pătrat și reducând termenii asemenea, obținem: $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$. Cum $a>c>0$ rezultă că $0<a^2-c^2=b^2$, de unde avem că $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ sau

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \textbf{(1.8.2).}$$

Ecuația **(1.8.2)** se numeşte **ecuație canonică a elipsei** sau **ecuație carteziană implicită**. Atunci și vârfurile B_1 și B_2 au coordonatele $B_1(0,-b)$ și $B_2(0,b)$. Distanțele $|A_1A_2|=2a$, $|B_1B_2|=2b$ se numesc **axa mare** și **axa mică**, respectiv, ale elipsei. Jumătățile a și b se numesc semiaxe. Punctul O este centrul de simetrie al elipsei. Din ecuația **(1.8.2)** rezultă

$$\left[\begin{array}{l} y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \\ y=-\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \end{array}\right. \quad \textbf{(1.8.3)}$$

numite **ecuații carteziene explicite** ale elipsei.

Prima ecuație a totalității reprezintă porțiunea elipsei cuprinsă în semiplanul $y \geq 0$, iar a doua ecuație reprezintă porțiunea elipsei cuprinsă în semiplanul $y \leq 0$.

Intersecția unei drepte $h: Ax + by + C = 0$ şi elipsei $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ este determinată de soluțiile în R^2 ale sistemului $\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$, ultimele fiind cel mult două la număr.

În cazul când dreapta l are un singur punct comun cu elipsa E, se spune că l este **tangentă la elipsa** E. Fie $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ şi $M_1(x_1, y_1) \in E$. Atunci **ecuația tangentei** la E în punctul M_1 este $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$ **(1.8.4)**

Proprietatea optică a elipsei. Razele de lumină ce pornesc din unul din focarele unei oglinzi eliptice sunt reflectate de oglindă în celălalt focar.

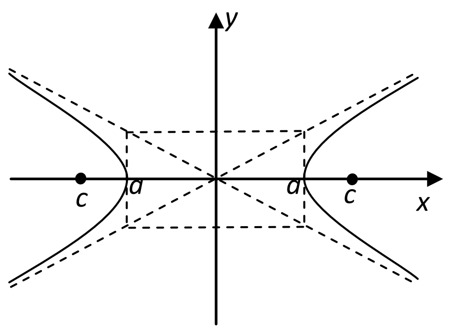
Hiperbola. Ecuațiile: canonică; generală, explicite.

Poziția unei drepte față de hiperbolă

Definiție. Se numește **hiperbolă** locul geometric al punctelor dintr-un plan cu proprietatea că valoarea absolută a diferenței distanțelor pînă la două puncte date, numite focare, este o mărime constantă, mai mică decât distanța dintre focare.

Astfel, fie $c > 0$ şi F_1, F_2 două puncte fixe din plan astfel încât $|F_1, F_2| = 2c$. Fie $0 < a < c$. Mulțimea H a punctelor M cu proprietatea $\left| |MF_1| - |MF_2| \right| = 2a$ determină **hiperbola.**

Punctele F_1, F_2 se numesc **focarele** hiperbolei, dreapta F_1F_2 se numeşte **axa focală**, iar distanța $|F_1F_2| = 2c$, se numeşte **distanța focală**; segmentele $[MF_1]$ şi $[MF_2]$ se numesc **raze focale** ale punctului M. Fixăm sistemul de coordonate $\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ astfel: O este mijlocul segmentului $[F_1F_2]$, luăm $\vec{i} \uparrow\uparrow \overrightarrow{F_1F_2}$, iar poziția lui $\vec{j}$ este evidentă. Atunci focarele au coordonatele $F_1(-c, 0)$ şi $F_2(c, 0)$. Evident, punctele $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ aparțin hiperbolei.



Să deducem ecuația hiperbolei. Fie $M(x, y)$ un punct arbitrar al hiperbolei. Din definiție rezultă

$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a$, de unde $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a$. Ridicînd ambele părți la pătrat și reducînd termenii asemenea, obținem $\pm 2a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-xc$. Ridicînd încă o data ambele părți la pătrat, avem $\left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right)$. Notând $b^2=c^2-a^2$, obținem

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \textbf{(1.8.5)},$$

numită **ecuația canonică a hiperbolei** (sau **ecuația carteziană implicită** a hiperbolei). Punctele $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ se numesc **vîrfuri** ale hiperbolei. Hiperbola nu intersectează axa OY. Astfel axa OX se numeşte **axa transversă** a hiperbolei, iar OY **axă netransversă**. Originea de coordonate O este centru de simetrie al hiperbolei.

Din **(1.8.5)** rezultă $\left[\begin{array}{l} y=\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \\ y=-\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\end{array}\right.$ cu $x\in(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)$ **(1.8.6)**, numite **ecuații carteziene explicite** ale hiperbolei. Dacă considerăm funcțiile $\left[\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \\ f(x)=-\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\end{array}\right.$,

atunci dreptele $y=\pm\dfrac{b}{a}x$, sînt asimptote ale acestor funcții şi se numesc **asimptote ale hiperbolei**.

Intersecția dintre dreapta $l: Ax+By+C=0$ şi hiperbola $H:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ este determinată de soluțiile sistemului $\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$.

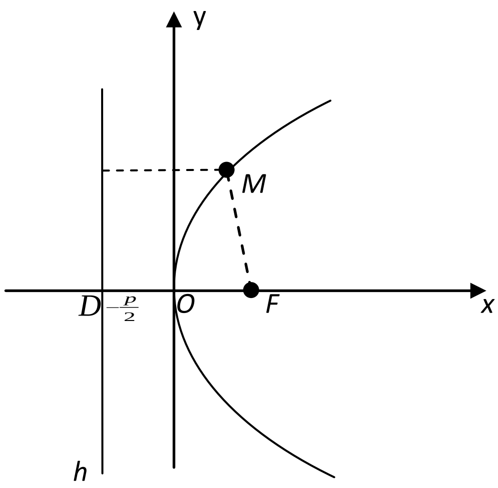
Fie hiperbola $H:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ şi $M_0(x_0,y_0)\in H$. **Ecuația tangentei** la H în punctul M_0 este $\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1$ **(1.8.7)**.

Hiperbola. Ecuațiile: canonică; generală, explicite.

Poziția unei drepte față de hiperbolă

Definiție. Se numeşte **parabolă** locul geometric al punctelor dintr-un plan pentru care distanța pînă la un punct fix F din acest plan este egală cu distanța pînă la dreapta h fixată, situată în planul considerat.

Punctul din definiție se numeşte **focarul parabolei**, iar dreapta h se numeşte **directoarea** parabolei, segmentul $[MF]$ se numeşte **raza focală a punctului** M. Deci, mulțimea P a punctelor M cu proprietatea $d(M,h)=|MF|$ determină **o parabolă**.



Pentru a deduce ecuația canonică a parabolei să alegem sistemul rectangular cartezian de coordonate. Fie punctul D proiecția punctului F pe dreapta h, iar O-mijlocul segmentului FD. Direcția vectorului $\vec{i}$ (respectiv a axei OX), coincide cu direcția vectorului $\overrightarrow{OF}$, iar direcția vectorului $\vec{j}$ (respectiv a axei OY) rezultă imediat. Fie p lungimea segmentului FD. Atunci $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, iar ecuația dreptei h este $x=-\frac{p}{2}$ sau $x+\frac{p}{2}=0$.

Să deducem ecuația canonică a parabolei. Fie $M(x,y)$. Atunci $d(M,h)=\frac{\left|x+\frac{p}{2}\right|}{\sqrt{1+0}}=\left|x+\frac{p}{2}\right|$.

$|MF|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$. Deci, $\left|x+\frac{p}{2}\right|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$. Ridicînd ambele părți la pătrat și reducînd termenii asemenea, obținem

$$y^2=2px \quad \textbf{(1.8.8)} -$$

ecuația canonică a parabolei. Punctul $O(0,0)$ se numeşte **vîrful parabolei**, axa OX se numeşte **axa transversă**, iar OY este **netransversă**. Din **(1.8.8)** avem: $\left[\begin{array}{l} y=-\sqrt{2px} \\ y=\sqrt{2px} \end{array}\right.$ **(1.8.9)**- numite **ecuații explicite ale parabolei**.

Intersecția dreptei $d: ax+by+c=0$ cu parabola $P: y^2=2px$ este determinată de sistemul $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ y^2=2px \end{cases}$.

Fie parabola $P: y^2 = 2px$ şi $M_0\left(x_0, y_0\right) \in P$. Tangenta la parabola P în punctul M_0 are ecuația $yy_0 = p\left(x + x_0\right)$.