NC 5.3.

SERII CU TERMENI DE SEMNE VARIABILE. CONVERGENȚA ABSOLUTĂ ŞI SEMICONVERGENȚA

- Serii cu termeni de semne alternante. Criteriul Leibniz
- Serii cu termeni de semne variabile. Convergența absolută şi semiconvergența

Serii cu termeni de semne alternante. Criteriul Leibniz

Definiție. O serie în care oricare doi termeni vecini au semne diferite se numeşte **serie cu termeni de semne alternante** sau **serie alternantă**.

Dacă primul termen al unei serii alternante este pozitiv, atunci ea poate fi scrisă astfel: $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, unde $a_n > 0, n = 1, 2, \ldots$ Dacă însă primul termen al unei serii alternante este negativ, atunci ea poate fi scrisă în forma $-a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ unde $a_n > 0$, $n = 1,2,\ldots$

Evident că seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ este convergentă atunci şi numai atunci, când este convergentă seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$. De aceea vom studia numai convergența seriei alternante de forma $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$.

Exemple: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots$

Teoremă. (Criteriul Leibniz). Dacă termenii seriei alternante $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ verifică condițiile: $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$, $\lim_{n \to \infty n} a_n = 0$, atunci această serie este convergentă şi suma S a ei nu întrece primul termen: $S < a_1$.

Demonstrație. Termenul general al şirului sumelor parțiale de rang par $n = 2m$ ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ este $S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2m-1} - a_{2m})$, $m = 1,2,\ldots$. Evident, acest şir este crescător şi mărginit de sus: $S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m} < a_1$. Deci există $\lim_{m \to \infty} S_{2m} = S$. Cum $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$, avem $\lim_{m \to \infty} S_{2m+1} = \lim_{m \to \infty} (S_{2m} + a_{2m+1}) = S + 0 = S$. Astfel, $\lim_{n \to \infty} S_n = S$, adică seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ este convergentă. Relația $S < a_1$ rezultă din relația $S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots < a_1$.

Exemplu. Seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ este convergentă, deoarece $\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}$, $n=1,2,\ldots$, şi $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Exemplu. Seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$ este convergentă, deoarece $\frac{1}{n!}>\frac{1}{(n+1)!}$, $n=1,2,\ldots$, şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0.$

Serii cu termeni de semne variabile. Convergența absolută şi semiconvergența

O serie $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ se numeşte **serie cu termeni de semne variabile**, dacă ea conține atât termeni pozitivi, cât şi termeni negativi.

Din definiție rezultă că seriile alternante sunt serii cu termeni de semne variabile.

Teoremă. Dacă este convergentă seria $|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$, atunci este convergentă şi seria cu termeni de semne variabile $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

Demonstrație. Notăm cu $s_n^{(1)}$ şi $s_n^{(2)}$ suma termenilor pozitivi şi, respectiv, suma modulelor termenilor negativi care se află printre primii n termeni ai seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$; cu s_n şi σ_n sumele parțiale ale seriilor $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ şi, respectiv, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$. Atunci $s_n=s_n^{(1)}-s_n^{(2)}$ şi $\sigma_n=s_n^{(1)}+s_n^{(2)}$. Şirurile $\{s_n^{(1)}\}$ şi $\{s_n^{(2)}\}$ cu termeni pozitivi sunt nedescrescătoare şi deci din existența limitei $\sigma=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(s_n^{(1)}+s_n^{(2)}\right)$ rezultă existența limitelor $\lim\limits_{n\to\infty}s_n^{(1)}=s^{(1)}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}s_n^{(2)}=s^{(2)}$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(s_n^{(1)}-s_n^{(2)}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}s_n^{(1)}-\lim\limits_{n\to\infty}s_n^{(2)}=s^{(1)}-s^{(2)}$, rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ este convergentă.

Exemplu. Să se cerceteze convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}=\frac{\sin 1}{1^2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\ldots+\frac{\sin n}{n^2}+\ldots$

Rezolvare. Cum $|\sin x|\le 1$, $n=1,2,\ldots$ din convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ rezultă convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$. Astfel, este convergentă şi seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$.

SERII CU TERMENI DE SEMNE VARIABILE. CONVERGENȚA ABSOLUTĂ ȘI SEMICONVERGENȚA

Criteriul Dirichlet. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ este convergentă, dacă sumele parțiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt mărginite (adică $\exists\, M > 0$, astfel încît pentru orice $n \in N$ avem $\left|\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right| \le M$), iar şirul (a_n) tinde monoton spre zero (adică $a_{n+1} \le a_n$ sau $a_{n+1} \ge a_n$ pentru orice $n \ge n_0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$).

Exemplu. Vom demonstra că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ este convergentă. Folosim criteriul Dirichlet: $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \cos n$. Şirul $\left(\frac{1}{n}\right)$ este descrescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Cercetăm şirul sumelor parțiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n$. Avem $S_n = \cos 1 + \cos 2 + ... + \cos n = \dfrac{\cos\frac{n+1}{2}\sin\frac{n}{2}}{\sin\frac{1}{2}}$ şi $|S_n| \le \dfrac{1}{\sin\frac{1}{2}}$. Astfel seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ este convergentă.

Criteriul Abel. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ este convergentă, dacă şirul (a_n) este monoton şi mărginit, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă.

Definiție. Dacă este convergentă seria $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se numeşte **absolut convergentă** (**convergentă absolut**). Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se numeşte **semiconvergentă** (**convergentă neabsolut**).

Exemplu. 1) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ este absolut convergentă.

2) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ este semiconvergentă deoarece ea este convergentă, iar seria alcătuită din modulii termenilor ei este seria armonică şi deci este divergentă.

3) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ este semiconvergentă.