NC 1.2

BAZE ÎN PLAN ŞI ÎN SPAŢIU. SISTEME DE COORDONATE. OPERAŢII LINIARE CU VECTORI IN COORDONATE

- Dependenţa şi independenţa liniară a vectorilor
- Baze în plan şi în spaţiu. Sisteme carteziene de coordonate. Coordonatele vectorului şi punctului. Operaţii liniare cu vectori în coordonate
- Rezolvarea unor probleme prin metoda coordonatelor
- Sistemul cartezian rectangular de coordonate.

Dependenţa şi independenţa liniară a vectorilor

Fie dat sistemul de vectori $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \ldots, \overline{x}_k$ şi numerele reale $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$.

Definiţia 1.2.1. Vectorul $\overline{y} = \alpha_1 \overline{x}_1 + \alpha_2 \overline{x}_2 + \alpha_3 \overline{x}_3 + \ldots + \alpha_k \overline{x}_k$ se numeşte **combinaţie liniară** a vectorilor $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \ldots, \overline{x}_k$.

Se mai spune că vectorul $\overline{y}$ se exprimă liniar prin vectorii $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \ldots, \overline{x}_k$. Numerele $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ se numesc **coeficienţii** acestei combinaţii liniare.

Combinaţiile liniare ale vectorilor au următoarele proprietăţi:

1) dacă vectorii $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \ldots, \overline{x}_k$ sunt coliniari, atunci orice combinaţie liniară a lor este coliniară cu vectorii daţi;

2) dacă vectorii $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \ldots, \overline{x}_k$ sunt coplanari, atunci orice combinaţie liniară a lor este coplanară cu vectorii daţi.

Definiţia 1.2.2. Sistemul de vectori $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \ldots, \overline{x}_k$ $(k > 1)$ se numeşte **liniar dependent**, dacă cel puţin unul din vectori se exprimă liniar prin ceilalţi , şi se numeşte **liniar independent** în caz contrar. Vom spune că combinaţia liniară $\alpha_1 \overline{x}_1 + \alpha_2 \overline{x}_2 + \alpha_3 \overline{x}_3 + \ldots + \alpha_k \overline{x}_k \equiv \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overline{x}_k$ este netrivială, dacă cel puţin unul din numerele α_i $(i=1, 2, \ldots, k)$ e diferit de zero şi-i trivială dacă toţi $\alpha_i = 0$.

Teorema 1.2.1:. Pentru ca sistemul de vectori să fie liniar dependent este necesar şi suficient să existe combinaţia liniară netrivială a acestor vectori egală cu vectorul nul.

Demonstraţie: $(\Rightarrow)$Presupunem că sistemul de vectori $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \ldots, \overline{x}_k$ este liniar dependent, şi $\overline{x}_1 = \alpha_2 \overline{x}_2 + \alpha_3 \overline{x}_3 + \ldots + \alpha_k \overline{x}_k$. Atunci $-\overline{x}_1 + \alpha_2 \overline{x}_2 + \alpha_3 \overline{x}_3 + \ldots + \alpha_k \overline{x}_k = \overline{0}$, deci există combinaţia liniară netrivială a acestor vectori egală cu vectorul nul (cel puţin coeficientul lui $\overline{x}_1$ e diferit de zero).

$(\Leftarrow)$ Fie că există combinaţia liniară netrivială egală cu zero a vectorilor $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \ldots, \overline{x}_k$: $\alpha_1 \overline{x}_1 + \alpha_2 \overline{x}_2 + \alpha_3 \overline{x}_3 + \ldots + \alpha_k \overline{x}_k = \overline{0}$, astfel încît $\alpha_2 \neq 0$.

Atunci $\overline{x}_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\overline{x}_1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\overline{x}_3 - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_2}\overline{x}_k$, deci vectorul $\overline{x}_2$ se exprimă liniar prin ceilalţi vectori ai sistemului.

Consecinţă: Pentru ca sistemul de vectori să fie liniar independent este necesar şi suficient ca doar combinaţia liniară trivială a acestor vectori să fie egală cu vectorul nul.

Din definiţia dependenţei şi independenţei liniare a sistemului de vectori rezultă că sunt adevătate următoarele afirmaţii:

1. Sistemul de vectori, ce conţine vectorul nul, este liniar dependent.
2. Sistemul de vectori care conţine un subsistem liniar dependent, este liniar dependent.
3. Orice subsistem al unui sistem liniar independent este liniar independent.

Sensul geometric al dependenţei liniare a vectorilor.

Teorema 1.2.2:. Pentru ca doi vectori să fie liniar dependenţi e necesar şi suficient ca ei să fie coliniari.

Demonstraţie. $(\Rightarrow)$ Fie că vectorii $\overline{x}_1$ şi $\overline{x}_2$ sunt liniar dependenţi. Atunci unul dintre ei, de exemplu, $\overline{x}_1$ se exprimă liniar prin celălalt vector $\overline{x}_2$. Deci, există aşa un număr λ astfel încît $\overline{x}_1 = \lambda\overline{x}_2$. Evident, că pentru orice număr λ vectorii $\overline{x}_2$ şi $\overline{x}_1 = \lambda\overline{x}_2$ sunt coliniari.

$(\Leftarrow)$ Fie că vectorii $\overline{x}_1$ şi $\overline{x}_2$ sunt coliniari. Dacă $\overline{x}_2 \neq \overline{0}$, atunci există un aşa număr λ astfel încît $\overline{x}_1 = \lambda\overline{x}_2$. Rezultă că $\overline{x}_1$ şi $\overline{x}_2$ sînt liniar dependenţi. Dacă $\overline{x}_2 = \overline{0}$, atunci sistemul de vectori $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ este liniar dependent, deoarece conţine vectorul nul.

Corolarul 1:. Pentru ca doi vectori să fie liniar independenţi e necesar şi suficient ca ei să fie necoliniari.

Corolarul 2: Dacă vectorul este paralel planului atunci el poate fi descompus după orice doi vectori necoliniari din acest plan.

Demonstraţie: Fie daţi doi vectori necoliniari din planul $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ şi vectorul coplanar lor $\overline{c} = \overline{OC}$ (vezi fig. 1). Vom aduce la originea O a vectorului $\overline{c}$ originile vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$.

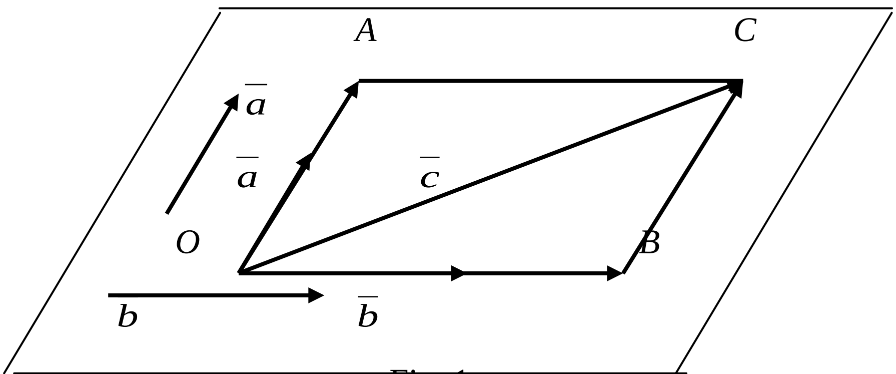


Fig. 1

Construim paralelogramul $OACB$ ca în fig. 1. Atunci $\overline{c} = \overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB}$. Avem că $\overline{OA}$ este coliniar vectorului $\overline{a}$, $\overline{OB}$ coliniar vectorului $\overline{b}$. Atunci există numerele α, β astfel încît $\overline{OA} = \alpha\,\overline{a}$, $\overline{OB} = \beta\,\overline{b}$ şi $\overline{c} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$.

Teorema 1.2.3: Pentru ca trei vectori să fie liniar dependenţi este necesar şi suficient ca ei să fie coplanari.

Demonstraţie: $(\Rightarrow)$ Fie că vectorii $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$ sunt liniar dependenţi, şi , de exemplu, $\overline{x}_3 = \alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2$. Conform proprietăţii (2) a combinaţiilor liniare, $\overline{x}_3$ este coplanar cu $\overline{x}_1$ şi $\overline{x}_2$.

$(\Leftarrow)$ Fie acum $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$ trei vectori coplanari. Dacă doi dintre ei sînt coliniari, atunci vectorii $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$ sunt liniar dependenţi. Dacă careva doi din ei, de exemplu, $\overline{x}_1$ şi $\overline{x}_2$ sunt necoliniari, atunci conform corolarului 2 vectorul $\overline{x}_3$ se exprimă liniar prin vectorii $\overline{x}_1$ şi $\overline{x}_2$. Iar aceasta înseamnă că vectorii $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$ sînt liniar dependenţi.

Corolarul 3. Pentru ca trei vectori să fie liniar independenţi este necesar şi suficient ca ei să fie necoplanari.

Teorema 1.2.4. Orice patru vectori sînt liniar dependenţi.

Baze în plan şi în spaţiu. Sisteme carteziene de coordonate
Coordonatele vectorului şi punctului. Operaţii liniare cu vectori în coordonate

Definiţia 1.2.3. Vom numi **bază pe dreaptă** orice vector nenul ce aparţine dreptei; **bază în plan** orice doi vectori necoliniari ai planului; **bază în spaţiu** orice trei vectori necoplanari.

Fie că vectorii $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ formează bază în spaţiu. Atunci pentru orice vector $\overline{a}$ există aşa numere $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, astfel încît $\overline{a} = \alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + \alpha_3\overline{e}_3$. Aceste numere se numesc **coordonatele vectorului** $\overline{a}$ în baza $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$. Analog se definesc coordonatele vectorului în baza de pe dreaptă şi în plan.

Teorema 1.2.5. Coordonatele vectorului în baza dată se determină în mod unic.

Demonstraţie. Vom demonstra teorema pentru cazul spaţiului. Fie că vectorul $\overline{a}$ posedă în baza $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ două descompuneri:

$$\overline{a} = \alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + \alpha_3\overline{e}_3, \quad \overline{a} = \beta_1\overline{e}_1 + \beta_2\overline{e}_2 + \beta_3\overline{e}_3.$$

Atunci, scăzînd aceste egalităţi termen cu termen, obţinem:

$$(\alpha_1 - \beta_1)\overline{e}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\overline{e}_2 + (\alpha_3 - \beta_3)\overline{e}_3 = \overline{a} - \overline{a} = \overline{0}.$$

Cum vectorii $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ sunt liniar independenţi, atunci $\alpha_i - \beta_i = 0$ pentru orice i=1, 2, 3, deci $\alpha_i = \beta_i$ (i=1, 2, 3), ceea ce trebuia de demonstrat.

BAZE ÎN PLAN ŞI ÎN SPAŢIU. SISTEME DE COORDONATE. OPERAŢII LINIARE CU VECTORI IN COORDONATE

Teorema 1.2.6. Într-un spaţiu cu baza fixată, la înmulţirea vectorului cu un număr coordonatele lui se înmulţesc cu numărul dat, iar la adunarea vectorilor se adună coordonatele lor respective.

Prin **sistem cartezian de coordonate** vom înţelege o totalitate formată dintr-un punct şi o bază. Punctul îl vom numi **originea** sistemului de coordonate şi îl vom nota prin O, iar cele trei axe, coorientate vectorilor bazei şi care au originea în punctul O, **axe de coordonate**. De obicei ele se notează prin O_x, O_y, O_z şi se numesc respectiv - **axa absciselor, axa ordonatelor şi axa aplicatelor**. Planele, care trec prin oricare două axe, se numesc **plane de coordonate**.

Fie $\{O, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ un sistem cartezian de coordonate, A un punct arbitrar. Poziţia punctului A în spaţiu se determină de vectorul $\overline{OA}$, care mai este numit **rază vectoare** a punctului A. Fie $\overline{OA} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2 + z\overline{e}_3$ descompunerea vectorului $\overline{OA}$ în baza $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$. Coordonatele razei vectoare $\overline{OA}$ se vor numi **coordonatele punctului** A în sistemul dat de coordonate. Astfel, fiecărui punct din spaţiu i se pune în corespondenţă un triplet ordonat de numere reale (coordonate), care se notează: $A(x, y, z)$. Conform teoremei 1.2.5. coordonatele punctului în sistemul dat de coordonate se determină în mod unic. Este adevărată şi afirmaţia inversă: fiecărui triplet ordonat de numere reale (α, β, γ) îi corespunde punctul cu coordonatele (α, β, γ)

Rezolvarea unor probleme prin metoda coordonatelor

Problema 1. Să se determine coordonatele vectorului , dacă se cunosc coordonatele originii şi extremităţii sale.

Soluţie: Fie că în sistemul cartezian de coordonate se cunosc coordonatele extremităţilor vectorului $\overline{AB}$: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Atunci avem că $\overline{OA} = x_1\overline{e}_1 + y_1\overline{e}_2 + z_1\overline{e}_3$, $\overline{OB} = x_2\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 + z_2\overline{e}_3$. Deoarece $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ rezultă egalitatea $\overline{AB} = (x_2 - x_1)\overline{e}_1 + (y_2 - y_1)\overline{e}_2 + (z_2 - z_1)\overline{e}_3$.

Deci, pentru a determina coordonatele vectorului trebuie de scăzut din coordonatele extremităţii coordonatele originii sale.

Problema 2. Împărţirea segmentului în raportul dat. Fie date punctele $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ şi numărul λ. Să se determine pe segmentul AB un punct $C(x, y, z)$, astfel încît $\overline{AC} = \lambda\overline{CB}$.

Soluţie: Vom nota razele vectoare ale punctelor A, B şi C respectiv prin $\overline{r_1}, \overline{r_2}$ şi $\overline{r}$.

Cum $\overline{AC} = \overline{r} - \overline{r_1}$, $\overline{CB} = \overline{r_2} - \overline{r}$, atunci $\overline{r} - \overline{r_1} = \lambda(\overline{r_2} - \overline{r})$. De aici rezultă că $\overline{r} = \dfrac{\overline{r_1} + \lambda\overline{r_2}}{1+\lambda}$. Trecînd în ultima egalitate la scrierea pe coordonate obţinem:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

În particular, dacă C este mijlocul segmentului AB, atunci $\lambda=1$. Deci, coordonatele mijlocului unui segment se determină cu ajutorul formulelor:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

Problema 3. Să se determine condiţia de coliniaritate a doi vectori.

Soluţie: Fie că vectorii: $\overline{a}=x_1\overline{e}_1+y_1\overline{e}_2+z_1\overline{e}_3$ şi $\overline{b}=x_2\overline{e}_1+y_2\overline{e}_2+z_2\overline{e}_3$ sunt coliniari, $\overline{b}\neq\overline{0}$. Atunci există aşa un număr λ, astfel încît $\overline{a}=\lambda\overline{b}$. Deci:

$$x_1\overline{e}_1+y_1\overline{e}_2+z_1\overline{e}_3=\lambda\left(x_2\overline{e}_1+y_2\overline{e}_2+z_2\overline{e}_3\right)=(\lambda x_2)\overline{e}_1+(\lambda y_2)\overline{e}_2+(\lambda z_2)\overline{e}_3.$$

Deoarece coordonatele vectorului în careva bază se determină în mod unic atunci $x_1=\lambda x_2$, $y_1=\lambda y_2$, $z_1=\lambda z_2$, sau $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}=\lambda$. Ultima relaţie fiind condiţia de coliniaritate a doi vectori.

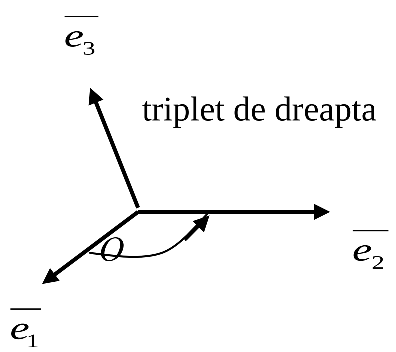
Sistemul cartezian rectangular de coordonate.

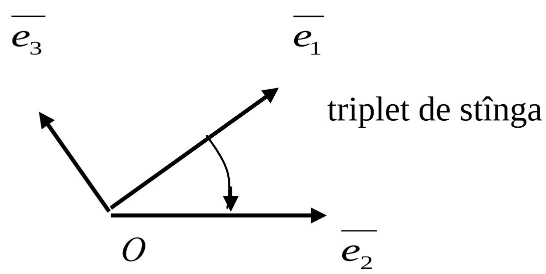
O bază se numeşte **ortogonală** dacă vectorii ei sînt doi cîte doi ortogonali (perpendiculari). Sistemul cartezian de coordonate se numeşte rectangular dacă baza sa este ortogonală.

O bază se numeşte **ortonormată** dacă ea este ortogonală şi vectorii care o formează sunt unitari. Aceste baze se notează standard prin $\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}$.

În continuare vom considera doar sisteme carteziene rectangulare cu baza $\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}$.

Considerăm tripletul de vectori necoplanari ($\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$). Acest **triplet** îl vom numi **de dreapta,** dacă din extremitatea celui de-al treilea vector $\overline{e}_3$ cea mai mică rotaţie de la primul vector $\overline{e}_1$ spre vectorul $\overline{e}_2$ se face împotriva mişcării acelor ceasornicului, în caz contrar **tripletul** se numeşte **de stînga**. Tripletul de dreapta poate fi reprezentat prin degetele: mare, arătător şi mijlociu ale mîinii drepte, iar cel de stînga prin degetele respective ale mîinii stîngi.





Sistemul cartezian de coordonate se numeşte de dreapta (stînga) dacă baza sa este ordonată ca un triplet de vectori de dreapta (stînga) . În continuare, dacă nu se specifică, **vom**

considera doar sisteme de coordonate de dreapta. În aceste condiții axa Ox se consideră coorientată vectorului $\overline{i}$; axa Oy - lui $\overline{j}$; iar Oz - lui $\overline{k}$.

Fie $\overline{a}$ un vector arbitrar. Descompunem acest vector în baza $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$: $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$. Numerele x, y, z se numesc coordonate carteziene rectangulare ale vectorului $\overline{a}$ şi se notează: $\overline{a} = \{x, y, z\}$, sau $\overline{a} = (x, y, z)$. În viitor, dacă nu se specifică, vom presupune că coordonatele vectorului $\overline{a}$ sunt date într-o bază ortonormată $\{x, y, z\}$.

Notă: 1). Avem că $\overline{i} = \{1,0,0\}$, $\overline{j} = \{0,1,0\}$ $\overline{k} = \{0,0,1\}$.

2) Fie că vectorul $\overline{a}$ formează respectiv cu axele de coordonate O_x, O_y, O_z unghiurile α, β, γ. Considerăm versorul $\overline{a_0}$ al vectorului $\overline{a}$. Evident că el va avea coordonatele $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, care mai sunt numite **cosinusuri directoare** ale vectorului $\overline{a}$. Astfel, $\overline{a_0} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

3) . Deoarece $\overline{a} = |\overline{a}| \cdot \overline{a_0}$, atunci semnele coordonatelor vectorului coincid cu semnele coordonatelor versorului său. Astfel, după semnul coordonatei vectorului se poate determina tipul unghiului format de vector cu axele de coordonate. De exemplu, vectorul $\overline{a} = \{1,-2,0\}$ formează cu axa OX un unghi ascuțit, cu axa OY un unghi obtuz, iar cu axa OZ un unghi drept.