АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ УСТРОЙСТВ

CONF. UNIV. DR. VIORICA SUDACEVSCHI

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

- Цель курса – изучение логических и арифметическмх основ цифровых устройств, изучение методов синтеза логических схем.
- Лекции – 45 часов
- Семинары – 15 часов
- Лабораторные работы– 15 часов
- Кредиты – 5
- Две аттестации (на основе тестов, контрольных работ, сдачи лаб. Работ), 60% конечной оценки
- Экзамен - 40% конечной оценки

ВВЕДЕНИЕ

Количество информации, содержащееся в некотором стандартном сообщении, называется *единицей информации*. Чаще всего за единицу информации принимается количество информации, посредством которого выделяется одно из двух альтернативных и равновероятных состояний. Эта единица информации может - принимать два равновероятных значения (например, 0 и 1) и называется *двоичной единицей,* или *битом* (bit—binary digit, т. е. двоичная цифра).

Информация может быть представлена в одной из двух форм: или непрерывной, или дискретной.

В вычислительных системах на основе микропроцессоров, как и в любых цифровых устройствах, используется дискретная форма представления информации.

ЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЦИФРОВЫХ АВТОМАТОВ

Тема 1. Алгебра логики

Основные соотношения булевой алгебры

Для логических функций дизъюнкция, конъюнкция и отрицание справедливы следующие утверждения:

И	ИЛИ	НЕТ
$0 \cdot 0 = 0$	$0 + 0 = 0$	$\overline{0} = 1$
$0 \cdot 1 = 0$	$0 + 1 = 1$	$\overline{1} = 0$
$1 \cdot 0 = 0$	$1 + 0 = 1$	
$1 \cdot 1 = 1$	$1 + 1 = 1$	

АХИОМЫ

1.	$x + 0 = x$	$x \cdot 1 = x$	*Нейтральные элементы*
2.	$x + 1 = 1$	$x \cdot 0 = 0$	*Нуллевые элементы*
3.	$x + x = x$	$x \cdot x = x$	*Идемпотентность*
4.	$\overline{\overline{x}} = x$		*Инволюция*
5.	$x + \bar{x} = 1$	$x \cdot \bar{x} = 0$	*Дополняемость*

Доказательство методом совершенной индукции:

[x=0] 0+0=0

[x=1] 1+0=1

СВОЙСТВА (ТЕОРЕМЫ)

No			Теорема
1.	$x_1 + x_2 = x_2 + x_1$	$x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$	Коммутативность
2.	$(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$	$(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)$	Ассоциативность
3.	$x_1 x_2 + x_1 x_3 = x_1 \cdot (x_2 + x_3)$	$(x_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_3) = x_1 + (x_2 \cdot x_3)$	Дистрибутивность
4.	$x_1 + x_1 x_2 = x_1$	$x_1 \cdot (x_1 + x_2) = x_1$	Поглощение
	Доказательство: $x_1 + x_1 x_2 = x_1 \cdot 1 + x_1 x_2 = x_1(1 + x_2) = x_1 \cdot 1 = x_1$		
5.	$x_1 x_2 + x_1 \overline{x_2} = x_1$	$(x_1 + x_2) \cdot (x_1 + \overline{x_2}) = x_1$	Склеивание
	Доказательство: $x_1 x_2 + x_1 \overline{x_2} = x_1 \cdot (x_2 + \overline{x_2}) = x_1 \cdot 1 = x_1$		
6.	$\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$	$\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$	Де Моргана

Доказательство свойства дистрибутивности

$$(x_1 + x_2)\cdot(x_1 + x_3) = x_1 + (x_2 \cdot x_3)$$

$$(x_1 + x_2)\cdot(x_1 + x_3) = x_1x_1 + x_1x_3 + x_1x_2 + x_2x_3 =$$
$$= x_1 + x_1x_3 + x_1x_2 + x_2x_3 = x_1(1 + x_3 + x_2) + x_2x_3 = x_1 + (x_2x_3)$$

Примеры

$$x_1x_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_3$$

$$x_1x_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_3 = x_1x_3 + x_1\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 =$$
$$x_1(x_3 + \bar{x}_3) + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 = x_1 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 = x_1(1 + \bar{x}_2\bar{x}_3x_4) = x_1$$

Примеры

$$x_1x_2x_3 + x_3\left(\overline{\overline{x_1\bar{x}_2} \cdot \overline{\bar{x}_1x_3}}\right)$$

$$x_1x_2x_3 + x_3\left(\overline{\overline{x_1\bar{x}_2} \cdot \overline{\bar{x}_1x_3}}\right) = x_1x_2x_3 + x_3(x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1x_3) =$$

$$= x_1x_2x_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1x_3x_3 = x_1x_2x_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1x_3 =$$

$$= x_1x_3(x_2 + \bar{x}_2) + \bar{x}_1x_3 = x_1x_3 + \bar{x}_1x_3 = x_3(x_1 + \bar{x}_1) = x_3$$

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ И ЛОГИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Для логической функции y=f (x1, x2,...xn) характерно то, что и функция и переменные могут принимать только два значения (0 или 1). Логическая функция ***n*** переменных, определена в m=***2ⁿ*** точках. В каждой точке функция может принимать значение 0 или 1. Количество таких функций ***N= 2^m.***

Для функции 1-ой переменной:

n = 1

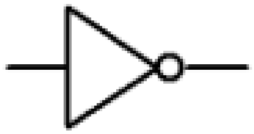
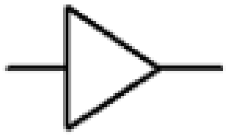
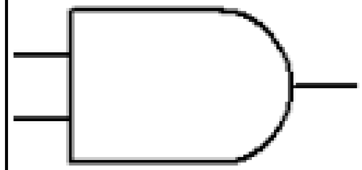
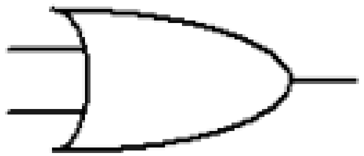
m = 2

N = 4.

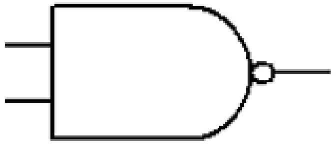
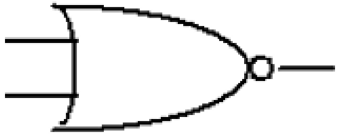
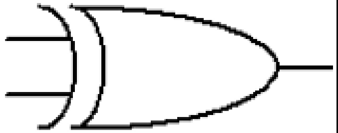
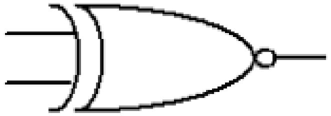
Четыре формы функции 1-ой переменной:

f_i \ x	0	1	Представление	Название
f_0	0	0	0	Константа 0
f_1	0	1	X	Переменная x
f_2	1	0	$\overline{X}$	Отрицание переменной x
f_3	1	1	1	Константа 1

ЛОГИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ЛОГИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Название	Функция	Символ	Таблица истинности
Инвертор NOT	$f = \bar{x}$		x f 0 1 1 0
Буффер	$f = x$		x f 0 0 1 1
Лог. элемент И AND	$f = x_1 \cdot x_2$		x_1 x_2 f 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1
Лог. элемент ИЛИ OR	$f = x_1 + x_2$		x_1 x_2 f 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1

ЛОГИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ЛОГИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Лог. элемент И-НЕ NAND Shaffer	$f = \overline{x_1 \cdot x_2}$		x_1 x_2 f 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0
Лог. элемент ИЛИ-НЕ NOR Pirs	$f = \overline{x_1 + x_2}$		x_1 x_2 f 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0
Исключающее ИЛИ XOR	$f = x_1 \oplus x_2$		x_1 x_2 f 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0
Исключающее ИЛИ-НЕ XNOR	$f = \overline{x_1 \oplus x_2}$		x_1 x_2 f 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1

ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

- графический (таблица истинности, диаграмма Карно, логическая схема, временная диаграмма);
- 2) цифровой логическая функция представляется при помощи десятичных эквивалентов входных наборов для которых значения ф-ции равно 1 или 0.

$$F(x,y,z) = \sum (3,5,6,7)$$

$$F(x,y,z) = \prod (0,1,2,4)$$

- аналитический (СДНФ, СКНФ, элементарные формы, неэлементарные формы).

ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ

- таблица истинности
- диаграмма Карно
- логическая схема
- временная диаграмма

ТАБЛИЦА ИСТИННОСТИ

Ex. $F(x,y,z) = \sum (2,3,6,7)$

	x1	x2	x3	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

$F(x,y,z) = \sum (3,6,7)+*(1,2,4)$

	x1	x2	x3	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	*
2	0	1	0	*
3	0	1	1	1
4	1	0	0	*
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

ДИАГРАММА КАРНО

	x1	
x2	0	1
0	00	10
1	01	11

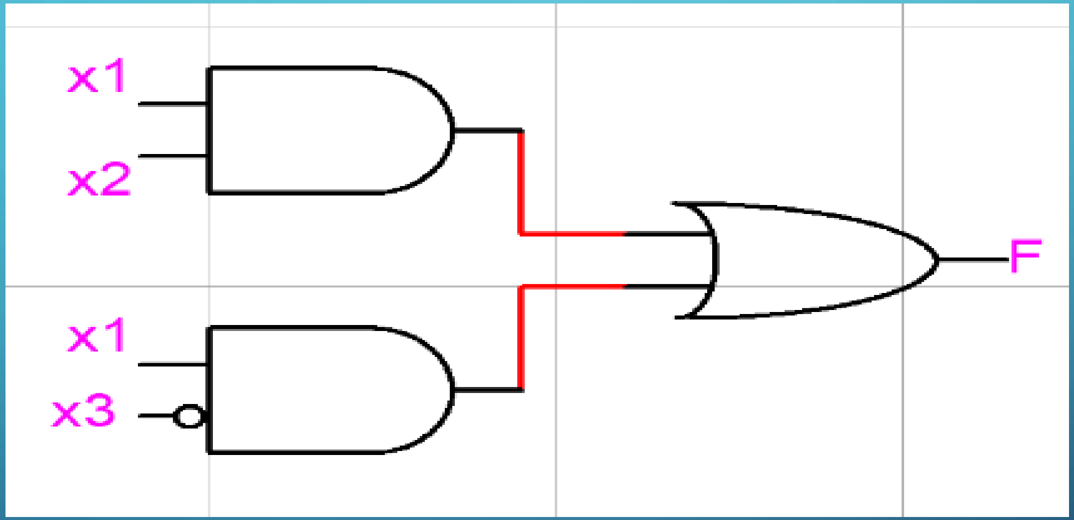
	x1x2			
x3	00	01	11	10
0	000	010	110	100
1	001	011	111	101

	x1x2			
x3x4	00	01	11	10
00	0000	0100	1100	1000
01	0001	0101	1101	1001
11	0011	0111	1111	1011
10	0010	0110	1110	1010

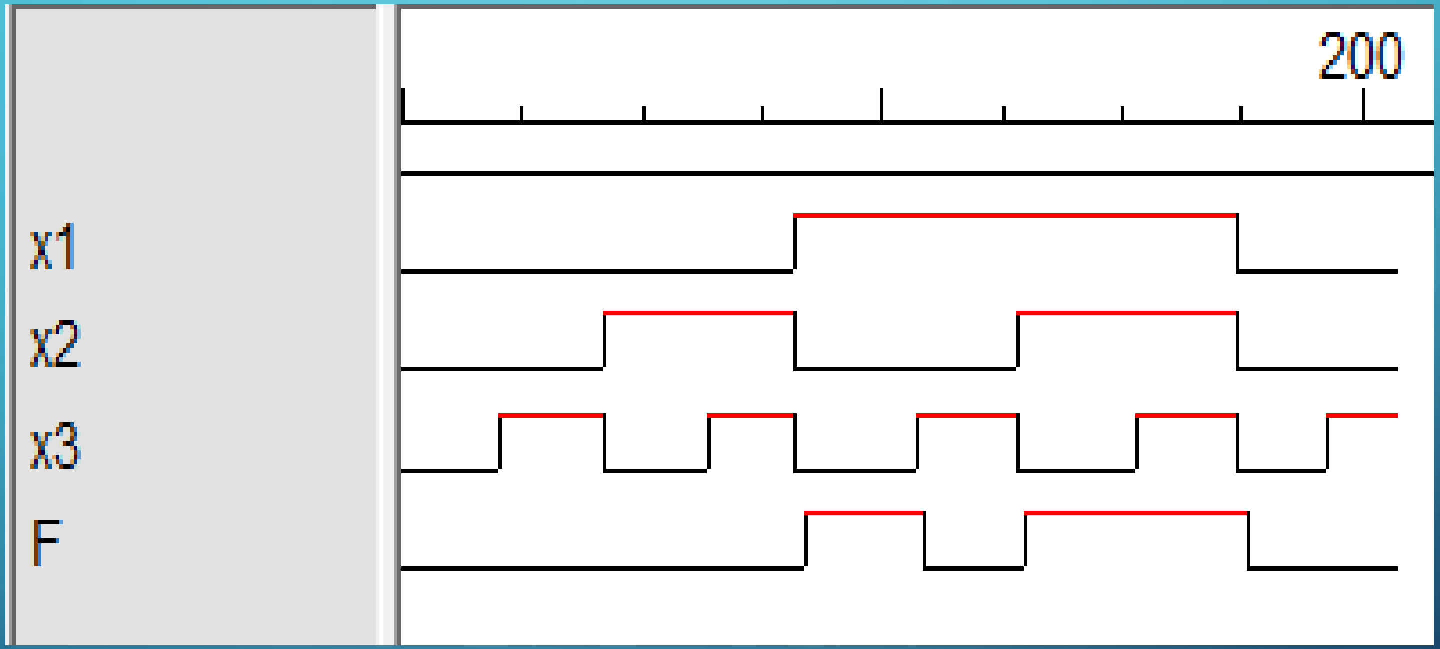
КОД ГРЭЯ

1 var.		2 var.		3 var.		
0		0	0	0	0	0
1		0	1	0	0	1
		1	1	0	1	1
		1	0	0	1	0
				1	1	0
				1	1	1
				1	0	1
				1	0	0

ЛОГИЧЕСКАЯ СХЕМА



ВРЕМЕННАЯ ДИАГРАММА



АНАЛИТИЧЕСКИЕ СПОСОБЫ

- ***Совершенная форма***
- ***Элементарная форма***
- ***Неэлементарная форма***

СОВЕРШЕННАЯ ФОРМЫ

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ)	Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ)
Минтерм – терм (набор) связывающий все переменные прямой или обратной форме знаком конъюнкции по правилу: $x_i = \begin{cases} x_i, & при \quad x_i = 1 \\ \overline{x}_i, & при \quad x_i = 0 \end{cases}$ $\boldsymbol{x_1 \overline{x}_2 x_3}$	Махтерм – терм (набор) связывающий все переменные прямой или обратной форме знаком дизъюнкции по правилу: $x_i = \begin{cases} x_i, & при \quad x_i = 0 \\ \overline{x}_i, & при \quad x_i = 1 \end{cases}$ $\boldsymbol{\overline{x}_1} + \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{\overline{x}_3}$
СДНФ – дизъюнкция минтермов для которых значения функции равно 1.	СКНФ – конъюнкция макстермов для которых значения функции равно 0.
$F = \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 + \overline{x}_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 \overline{x}_3 + x_1 x_2 x_3$	$F = (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_1 + x_2 + \overline{x}_3) \cdot (\overline{x}_1 + x_2 + x_3) \cdot (\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3)$

	x1	x2	x3	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Элементарная и неэлементарная формы

1. Элементарные

Минимальная дизъюнктивная форма (МДФ)

$$F=\overline{x}_1x_2\overline{x}_3+\overline{x}_1x_2x_3+x_1x_2\overline{x}_3+x_1x_2x_3=\overline{x}_1x_2(\overline{x}_3+x_3)+x_1x_2(\overline{x}_3+x_3)=\overline{x}_1x_2+x_1x_2=x_2$$

Минимальная конъюнктивная форма (МКФ)

$$F=(x_1+x_2+x_3)\cdot(x_1+x_2+\overline{x}_3)\cdot(\overline{x}_1+x_2+x_3)\cdot(\overline{x}_1+x_2+\overline{x}_3)=(x_1+x_2)\cdot(\overline{x}_1+x_2)=x_2$$

2. Неэлементарная

$$F=x_1x_2x_3+x_1\bar{x}_2\bar{x}_3=x_1\cdot\left(x_2x_3+\bar{x}_2\bar{x}_3\right)$$

	x1	x2	x3	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Реализация логических схем

Реализация логической функции означает ее синтез с помощью логических схем.

Стоимость реализации равна количеству входов в логические элементы, которые выполняют заданную функцию.

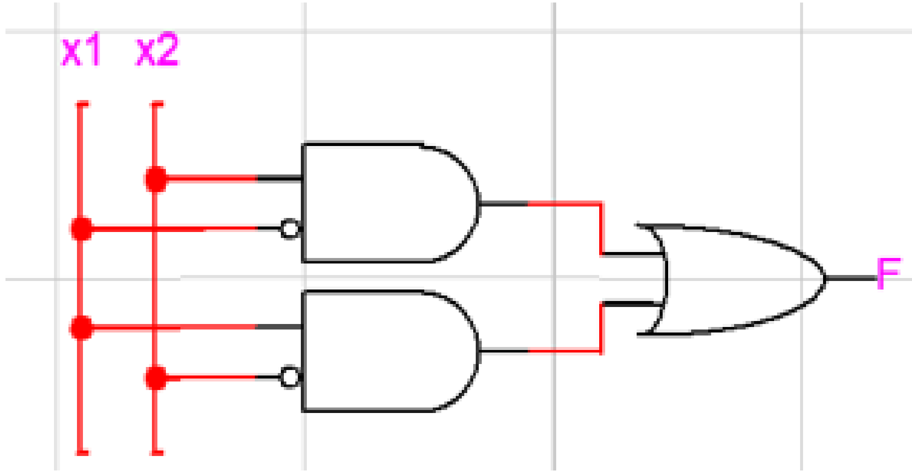
Обозначается ***C*** и измеряется в условных единицах λ

Уровень (время задержки) логической схемы - это максимальное количество элементов, через которые проходит сигнал от входа к выходу.

Обозначается T_d и измеряется в условных единицах τ

РЕАЛИЗАЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ

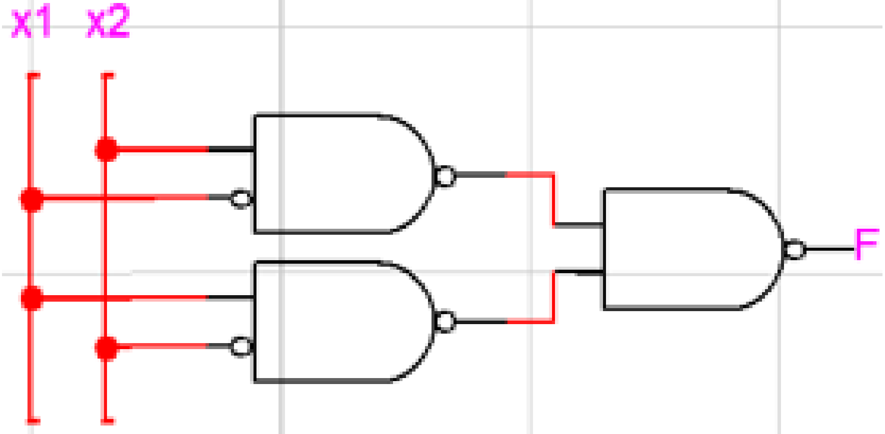
Ex: $F_{FDM} = \overline{x_1}x_2 + x_1\overline{x_2}$



C=6 λ

T_d=2 τ

Ex: $F_{FDM} = \overline{\overline{\overline{x_1}x_2 + x_1\overline{x_2}}} = \overline{\overline{\overline{x_1}x_2} \cdot \overline{x_1\overline{x_2}}}$

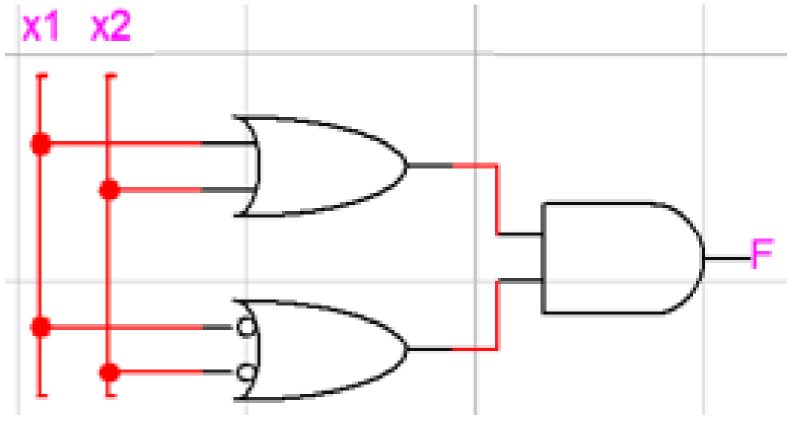


C=6 λ

T_d=2 τ

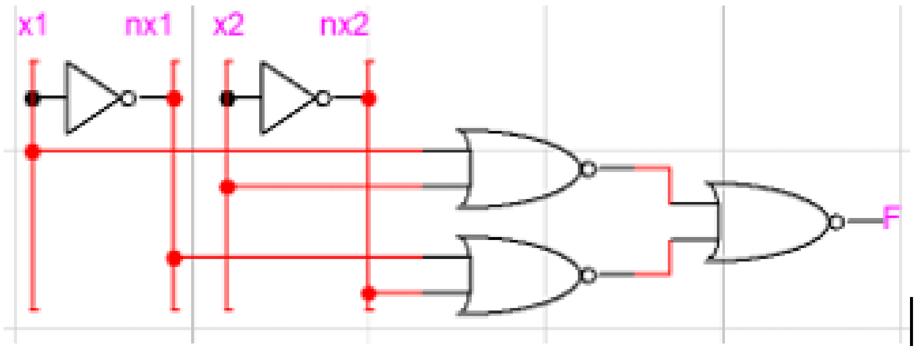
РЕАЛИЗАЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ

Ex. $F_{FCM} = (x_1 + x_2) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2})$



C=6 λ
T_d=2 τ

$F_{FCM} = \overline{\overline{(x_1 + x_2) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2})}} = \overline{\overline{(x_1 + x_2)} + \overline{(\overline{x_1} + \overline{x_2})}}$



C=8 λ
T_d=3 τ