Формы представления логических функций

Существуют 3 способа представления логических функций:

1) графический (таблица истинности, диаграмма Карно, логическая схема, временная диаграмма);

2) цифровой: логическая функция представляется при помощи десятичных эквивалентов входных наборов для которых значения ф-ции равно 1 или 0.

$$F(x,y,z) = \sum (3,5,6,7)$$

$$F(x,y,z) = \prod (0,1,2,4)$$

3) аналитический (СДНФ, СКНФ, элементарные формы, неэлементарные формы).

Таблица истинности - в таблице отмечено соответствие между значениями истинности входных переменных и значениями истинности функции в каждой точке области определения.

Для функции с $\boldsymbol{n}$ входными переменными существуют 2^n возможных комбинаций.

Бывают ситуации, когда для определенных комбинаций входных переменных значение функции не определенно. Эти функции называются не полностью определенными. В таблице, где значение функции не определенно, ставим «*».

Если логическая функция не полностью определена для $\boldsymbol{m}$ комбинаций входных переменных, $\boldsymbol{2^m}$ новых функций могут быть определены путем произвольного выбора не полностью определенных значений.

Таблица истинности

$$F(x,y,z) = \sum (2,3,6,7)$$

	x1	x2	x3	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

$$F(x,y,z) = \sum (3,6,7)+*(1,2,4)$$

	x1	x2	x3	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	*
2	0	1	0	*
3	0	1	1	1
4	1	0	0	*
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Диаграмма Карно

Диаграмма Карно для булевой функции $\boldsymbol{n}$ переменных изображается в виде квадрата или прямоугольника, разделенного на $\boldsymbol{2^n}$ ячеек. Каждая ячейка соответствует одной входной комбинации переменных.

Диаграмма Карно организована таким образом, что две соседние ячейки в строке или столбце соответствуют двум каноническим терминам, которые отличаются только одной переменной, которая появляется в одном термине в прямой форме, а в другом в обратной форме. Соседними являются также ячейки на противоположных концах строки, соответственно столбце.

Примеры: диаграмма Карно для функции 2, 3, 4 переменных:

x2 \ x1	0	1
0	00	10
1	01	11

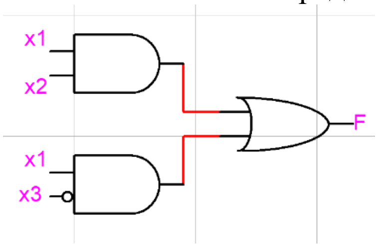
x3 \ x1x2	00	01	11	10
0	000	010	110	100
1	001	011	111	101

x3x4 \ x1x2	00	01	11	10
00	0000	0100	1100	1000
01	0001	0101	1101	1001
11	0011	0111	1111	1011
10	0010	0110	1110	1010

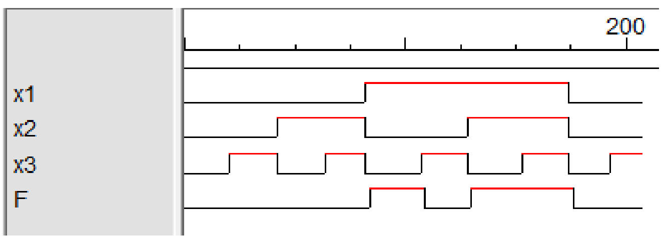
Код Грэя

Двоичный код	Код Грэя
0000	0000
0001	0001
0010	0011
0011	0010
0100	0110
0101	0111
0110	0101
0111	0100
1000	1100
1001	1101
1010	1111
1011	1110
1100	1010
1101	1011
1110	1001
1111	1000

Логическая схема - представление с помощью символов логических элементов.



Временная диаграмма - используется для анализа изменения логической функции во времени. Она также удобна для изучения статистических и динамических рисков в работе системы. Риск – ложный сигнал, воздействующий на входе схемы, который может привести к сбою.



Аналитические способы.

Канонические формы – Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ), Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ).

СДНФ – дизъюнкция минтермов для которых значения функции равно 1.

Минтерм – терм (набор) связывающий все переменные прямой или обратной форме знаком конъюнкции по правилу:

$$x_i = \begin{cases} x_i\,, & при \quad x_i = 1 \\ \bar{x}_i, & при \quad x_i = 0 \end{cases}$$

Пример $\boldsymbol{x}_1\bar{\boldsymbol{x}}_2\boldsymbol{x}_3$

СКНФ – конъюнкция макстермов для которых значения функции равно 0.

Махтерм – терм (набор) связывающий все переменные прямой или обратной форме знаком дизъюнкции по правилу:

$$x_i = \begin{cases} x_i\,, & при \quad x_i = 0 \\ \bar{x}_i, & при \quad x_i = 1 \end{cases}$$

Пример $\bar{\boldsymbol{x}}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \bar{\boldsymbol{x}}_3$

Пример СДНФ $F = \overline{x_1}x_2\overline{x_3} + \overline{x_1}x_2x_3 + x_1x_2\overline{x_3} + x_1x_2x_3$

Пример СКНФ $F = (x_1 + x_2 + x_3)\cdot(x_1 + x_2 + \overline{x_3})\cdot(\overline{x_1} + x_2 + x_3)\cdot(\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3})$

В канонических формах присутствуют все термы. ***Элементарные*** получают из канонических путем склеивания.

Пример: **Минимальная дизъюнктивная форма (МДФ)**

$$F = \overline{x_1}x_2\overline{x_3} + \overline{x_1}x_2x_3 + x_1x_2\overline{x_3} + x_1x_2x_3 = \overline{x_1}x_2(\overline{x_3} + x_3) + x_1x_2(\overline{x_3} + x_3) = \overline{x_1}x_2 + x_1x_2 = x_2$$

Минимальная конъюнктивная форма (МКФ)

$$F = (x_1 + x_2 + x_3)\cdot(x_1 + x_2 + \overline{x_3})\cdot(\overline{x_1} + x_2 + x_3)\cdot(\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3}) = (x_1 + x_2)\cdot(\overline{x_1} + x_2) = x_2$$

Неэлементарная форма содержит группы переменных общих для нескольких термов. Используется для сокращения количества входов в логические элементы.

$$F = x_1x_2x_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 = x_1\cdot\left(x_2x_3 + \bar{x}_2\bar{x}_3\right)$$

Реализация логических схем

Реализация логической функции означает ее синтез с помощью логических схем.

Стоимость реализации равна количеству входов в логические элементы, которые выполняют заданную функцию.

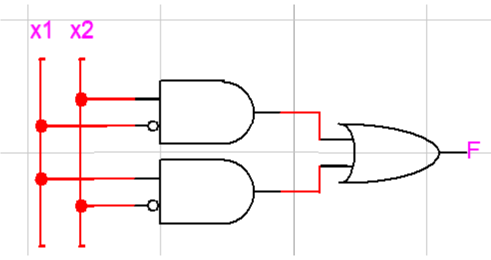
Обозначается ***C*** и измеряется в условных единицах λ

Уровень (время задержки) логической схемы - это максимальное количество элементов, через которые проходит сигнал от входа к выходу.

Обозначается $\boldsymbol{T_d}$ и измеряется в условных единицах τ

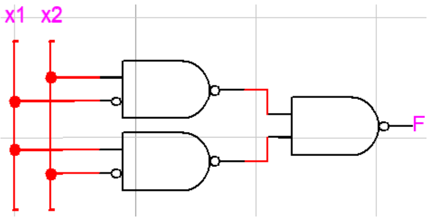
Примеры

$F_{FDM} = \overline{x_1}x_2 + x_1\bar{x}_2$



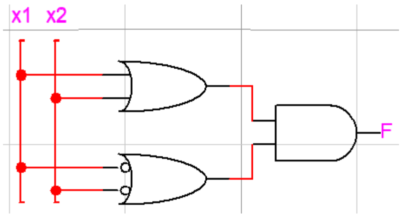
C=6 λ
T_d=2 τ

$$F_{FDM} = \overline{\overline{\bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2}} = \overline{\overline{\bar{x}_1 x_2} \cdot \overline{x_1 \bar{x}_2}}$$



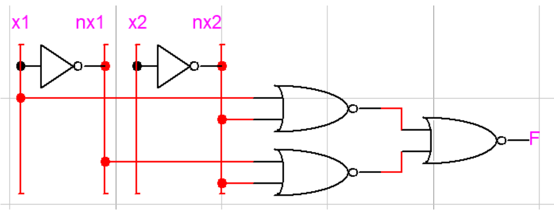
C=6 λ
T_d=2 τ

$$F_{FCM} = (x_1+x_2) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$$



C=6 λ
T_d=2 τ

$$F_{FCM} = \overline{\overline{(x_1+x_2) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)}} = \overline{\overline{(x_1+x_2)} + \overline{(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)}}$$



C=8 λ
T_d=3 τ