Понятие информации

Одним из основных понятий в современной науке является *информация,* которая представляет собой определенную совокупность сведений об окружающей природе и жизни общества. При отсутствии информации знания человека о реальных объектах неполны, так как в совокупности знаний имеется некоторая неизвестность, точнее говоря неопределенность. Процесс получения информации есть не что иное, как процесс уничтожения, снятия этой неопределенности, что обусловлено выделением из множества возможных в данной ситуации событий (явлений) конкретного события (явления), фактически имевшего место. Если считать, что выделение конкретного явления из множества возможных явлений есть не что иное, как процесс принятия решения, то информацию можно определить как некоторую категорию, позволяющую различать наличие или отсутствие сведений, на основе которых принимается решение.

Для того чтобы охарактеризовать меру уменьшения неопределенности, используется, понятие *количества информации.* Примером неопределенной ситуации может быть опыт с несколькими возможными исходами. Неопределенность ситуации заключается в том, что до проведения опыта его исход неизвестен. Информация, относящаяся к данному опыту, уменьшает эту неопределенность. Если все исходы равновероятны, то неопределенность ситуации зависит только от их числа, причем неопределенность тем больше, чем больше число исходов. Американский инженер Р. Хартли в 1928 г. предложил в качестве меры неопределенности H ситуации с N равновероятными исходами, определяющей количество информации, величину

$$H = \log_2 N.$$

Количество информации, содержащееся в некотором стандартном сообщении, называется *единицей информации.* Чаще всего за единицу информации принимается количество информации, посредством которого выделяется одно из двух альтернативных и равновероятных состояний. Эта единица информации может - принимать два равновероятных значения (например, 0 и 1) и называется *двоичной единицей,* или *битом* (bit—binary digit, т. е. двоичная цифра). Если объект может находиться в различных состояниях, количество информации может быть при 16 состояниях $H = \log_2 16 = 4$ бит, а при 64 состояниях $H = \log_2 64 = 8$ бит.

В зависимости от подхода к изучаемому явлению информация может быть представлена в одной из двух форм: или непрерывной, или дискретной. При непрерывном подходе физические величины, характеризующие то или иное явление, имеют близкие друг другу значения, которые тем не менее являются различными, причем количество этих значений велико. Такие величины называются *непрерывными,* а информация, которую содержат в себе эти величины, *непрерывной информацией.*

При дискретном подходе явления реального мира рассматриваются с иной точки зрения. Физические величины представляются в виде множества вполне определенных различимых (дискретных) значений, причем различия носят скачкообразный характер. Такие величины называются *дискретными.* Они могут быть описаны как переменные векторные поля, компоненты которых, а также пространственные и временные координаты принимают дискретные ряды значений. Информация, представленная с помощью дискретных величин, называется *дискретной информацией.* В вычислительных системах на основе микропроцессоров, как и в любых цифровых устройствах, используется дискретная форма представления информации.

1. ЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЦИФРОВЫХ АВТОМАТОВ

Тема 1. Алгебра логики

В вычислительных системах (ВС) существует два вида преобразования информации: преобразования, определяемые правилами выполнения арифметических операций, и логические преобразования (логические операции).

В 1938 г. американский ученый К. Шеннон применил формальные математические методы для решения задач, связанных с логическими преобразованиями информации, которые были описаны еще в XIX в. Дж. Булем в теории исчисления высказываний. Разработанный математический аппарат является разделом математической логики и называется *алгеброй логики,* или *булевой алгеброй.* Основным понятием алгебры логики является высказывание. Под *высказыванием* понимается всякое предложение, которое либо истинно, либо ложно, и притом только одно из двух. В алгебре логики принято отождествлять истинность высказывания с символом 1, а ложность — с символом 0 и рассматривать эти символы как двоичные *логические (булевы) переменные, т.* е. такие переменные, которые могут принимать только одно из двух возможных значений.

Высказывания могут быть простыми и сложными. Высказывание называется *простым,* если его значение истинности не зависит от значений истинности других высказываний (например, Вена - столица Австрии, снег черен). Высказывание, значение истинности которого зависит от значения истинности других высказываний, называется *сложным.* Любое сложное высказывание можно считать *логической (булевой) функцией* некоторых двоичных аргументов — простых высказываний, входящих в его состав.

Основные соотношения булевой алгебры

Для логических функций дизъюнкция, конъюнкция и отрицание справедливы следующие утверждения:

И	ИЛИ	НЕТ
$0 \cdot 0 = 0$	$0 + 0 = 0$	$\overline{0} = 1$
$0 \cdot 1 = 0$	$0 + 1 = 1$	$\overline{1} = 0$
$1 \cdot 0 = 0$	$1 + 0 = 1$	
$1 \cdot 1 = 1$	$1 + 1 = 1$	

Ахиомы:

1. $x+0=x$ $\quad x\cdot 1=x$ *Нейтральные элементы*
2. $x+1=1$ $\quad x\cdot 0=0$ *Нулевые элементы*
3. $x+x=x$ $\quad x\cdot x=x$ *Идемпотентность*
4. $\overline{\overline{x}}=x$ *Инволюция*
5. $x+\overline{x}=1$ $\quad x\cdot\overline{x}=0$ *Дополняемость*

Доказательство методом совершенной индукции:

[x=0] 0+0=0

[x=1] 1+0=1

Таблица 1.1

No			Теорема
1.	$x_1 + x_2 = x_2 + x_1$	$x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$	Коммутативность
2.	$(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$	$(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)$	Ассоциативность
3.	$x_1x_2 + x_1x_3 = x_1 \cdot (x_2 + x_3)$	$(x_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_3) = x_1 + (x_2 \cdot x_3)$	Дистрибутивность
4.	$x_1 + x_1x_2 = x_1$	$x_1 \cdot (x_1 + x_2) = x_1$	Поглощение
	Доказательство: $x_1 + x_1x_2 = x_1 \cdot 1 + x_1x_2 = x_1(1 + x_2) = x_1 \cdot 1 = x_1$		
5.	$x_1x_2 + x_1\overline{x_2} = x_1$	$(x_1 + x_2) \cdot (x_1 + \overline{x_2}) = x_1$	Склеивание
	Доказательство: $x_1x_2 + x_1\overline{x_2} = x_1 \cdot (x_2 + \overline{x_2}) = x_1 \cdot 1 = x_1$		
6.	$\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$	$\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$	Де Моргана

Логические операции и логические элементы

Пусть дана логическая функция y=f (x1, x2,…xn) для нее характерно то, что и функция и переменные могут принимать только два значения (0 или 1). Логическая функция ***n*** переменных, определена в m=***2ⁿ*** точках. В каждой точке функция может принимать значение 0 или 1. Количество таких функций ***N= 2^m.***

Для функции 1-ой переменной:

n = 1

m = 2

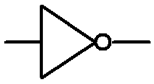
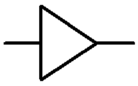
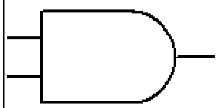
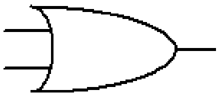
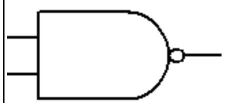
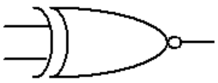
N = 4.

Четыре формы функции 1-ой переменной:

f_i \ x	0	1	Представление	Название
f_0	0	0	0	Константа 0
f_1	0	1	X	Переменная x
f_2	1	0	$\overline{X}$	Отрицание переменной x
f_3	1	1	1	Константа 1

Таким образом можно реализовать все функции при помощи элементарных функций. Им соответствуют логические элементы, при помощи которых можно реализовать любые логические схемы.

Таблица элементарных логических функций:

Название	Функция	Символ	Таблица истинности
Инвертор NOT	$f=\overline{x}$		x | f 0 | 1 1 | 0
Буффер	$f=x$		x | f 0 | 0 1 | 1
Лог. элемент И AND	$f=x_1 \cdot x_2$		x_1 x_2 | f 0 0 | 0 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 1
Лог. элемент ИЛИ OR	$f=x_1+x_2$		x_1 x_2 | f 0 0 | 0 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 1
Лог. элемент И-НЕ NAND Shaffer	$f=\overline{x_1 \cdot x_2}$		x_1 x_2 f 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0
Лог. элемент ИЛИ-НЕ NOR Pirs	$f=\overline{x_1+x_2}$		x_1 x_2 f 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0
Исключающее ИЛИ XOR	$f=x_1 \oplus x_2$		x_1 x_2 | f 0 0 | 0 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 0
Исключающее ИЛИ-НЕ XNOR	$f=\overline{x_1 \oplus x_2}$		x_1 x_2 | f 0 0 | 1 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 1

Формы представления логических функций

Существуют 3 способа представления логических функций:

(1.7)

1) графический (таблица истинности, диаграмма Карно, логическая схема, временная диаграмма);

2) цифровой логическая функция представляется при помощи десятичных эквивалентов входных наборов для которых значения ф-ции равно 1 или 0.

$$F(x,y,z) = \sum (3,5,6,7)$$

$$F(x,y,z) = \prod (0,1,2,4)$$

3) аналитический (СДНФ, СКНФ, элементарные формы, неэлементарные формы).

Таблица истинности - в таблице отмечено соответствие между значениями истинности входных переменных и значениями истинности функции в каждой точке области определения.

Для функции с ***n*** входными переменными существуют 2^n возможных комбинаций.

Бывают ситуации, когда для определенных комбинаций входных переменных значение функции не определенно. Эти функции называются не полностью определенными. В таблице, где значение функции не определенно, ставим «*».

Если логическая функция не полностью определена для ***m*** комбинаций входных переменных, 2^m новых функций могут быть определены путем произвольного выбора не полностью определенных значений.

Таблица истинности

$$F(x,y,z) = \sum (2,3,6,7)$$

	x1	x2	x3	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

$$F(x,y,z) = \sum (3,6,7)+*(1,2,4)$$

	x1	x2	x3	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	*
2	0	1	0	*
3	0	1	1	1
4	1	0	0	*
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Диаграмма Карно

Диаграмма Карно для булевой функции ***n*** переменных изображается в виде квадрата или прямоугольника, разделенного на 2^n ячеек. Каждая ячейка соответствует одной входной комбинации переменных.

Диаграмма Карно организована таким образом, что две соседние ячейки в строке или столбце соответствуют двум каноническим терминам, которые отличаются только одной переменной, которая появляется в одном термине в прямой форме, а в другом в обратной форме. Соседними являются также ячейки на противоположных концах строки, соответственно столбце.

Примеры: диаграмма Карно для функции 2, 3, 4 переменных:

x2 \ x1	0	1
0	00	10
1	01	11

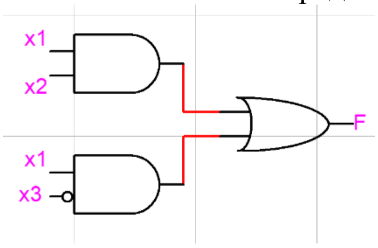
x3 \ x1x2	00	01	11	10
0	000	010	110	100
1	001	011	111	101

x3x4 \ x1x2	00	01	11	10
00	0000	0100	1100	1000
01	0001	0101	1101	1001
11	0011	0111	1111	1011
10	0010	0110	1110	1010

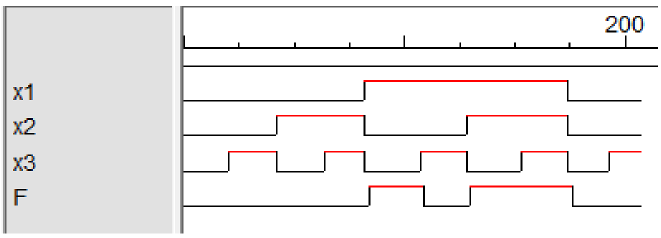
Код Грэя

Двоичный код	Код Грэя
0000	0000
0001	0001
0010	0011
0011	0010
0100	0110
0101	0111
0110	0101
0111	0100
1000	1100
1001	1101
1010	1111
1011	1110
1100	1010
1101	1011
1110	1001
1111	1000

Логическая схема - представление с помощью символов логических элементов.



Временная диаграмма - используется для анализа изменения логической функции во времени. Она также удобна для изучения статистических и динамических рисков в работе системы. Риск – ложный сигнал, воздействующий на входе схемы, который может привести к сбою.



Аналитические способы.

Канонические формы – Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ), Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ).

СДНФ – дизъюнкция минтермов для которых значения функции равно 1.

Минтерм – терм (набор) связывающий все переменные прямой или обратной форме знаком конъюнкции по правилу:

$$x_i = \begin{cases} x_i\,, & при \quad x_i = 1 \\ \bar{x}_i, & при \quad x_i = 0 \end{cases}$$

Пример $\boldsymbol{x}_1 \bar{\boldsymbol{x}}_2 \boldsymbol{x}_3$

СКНФ – конъюнкция макстермов для которых значения функции равно 0.

Махтерм – терм (набор) связывающий все переменные прямой или обратной форме знаком дизъюнкции по правилу:

$$x_i = \begin{cases} x_i\,, & при \quad x_i = 0 \\ \bar{x}_i, & при \quad x_i = 1 \end{cases}$$

Пример $\bar{\boldsymbol{x}}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \bar{\boldsymbol{x}}_3$

Пример СДНФ $F = \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} + \overline{x_1} x_2 x_3 + x_1 x_2 \overline{x_3} + x_1 x_2 x_3$

Пример СКНФ $F = (x_1 + \overline{x_2} + x_3) \cdot (x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3})$

В канонических формах присутствуют все термы. ***Элементарные*** получают из канонических путем склеивания.

Пример: **Минимальная дизъюнктивная форма (МДФ)**

$$F = \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} + \overline{x_1} x_2 x_3 + x_1 x_2 \overline{x_3} + x_1 x_2 x_3 = \overline{x_1} x_2 (\overline{x_3} + x_3) + x_1 x_2 (\overline{x_3} + x_3) = \overline{x_1} x_2 + x_1 x_2$$

Минимальная конъюнктивная форма (МКФ)

$$F = (x_1 + \overline{x_2} + x_3) \cdot (x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}) = (x_1 + \overline{x_2}) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2})$$

Неэлементарная форма содержит группы переменных общих для нескольких термов. Используется для сокращения количества входов в логические элементы.

$$F = x_1 x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 = x_1 \cdot \left(x_2 x_3 + \bar{x}_2 \bar{x}_3 \right)$$

Реализация логических схем

Реализация логической функции означает ее синтез с помощью логических схем.

Стоимость реализации равна количеству входов в логические элементы, которые выполняют заданную функцию.

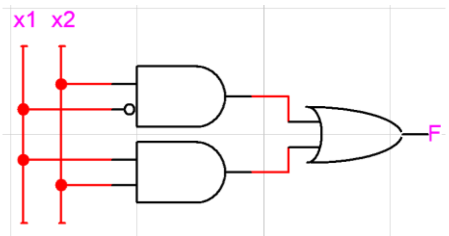
Обозначается ***C*** и измеряется в условных единицах λ

Уровень (время задержки) логической схемы - это максимальное количество элементов, через которые проходит сигнал от входа к выходу.

Обозначается $\boldsymbol{T_d}$ и измеряется в условных единицах τ

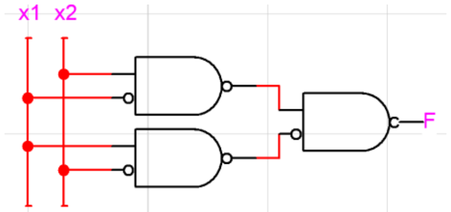
Примеры

$F_{МДФ} = \overline{x_1} x_2 + x_1 x_2$



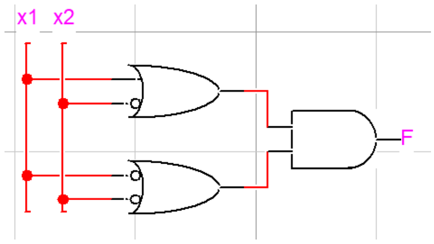
$\boldsymbol{C}$=6 λ
$\boldsymbol{T_d}$=2 τ

$$F_{МДФ} = \overline{\overline{\bar{x}_1 x_2 + x_1 x_2}} = \overline{\overline{\bar{x}_1 x_2} \cdot \overline{x_1 x_2}}$$



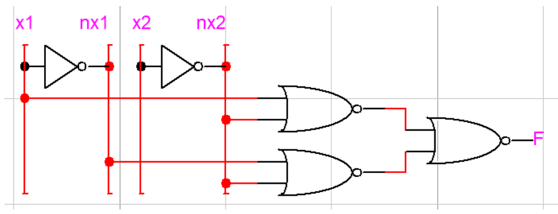
$\boldsymbol{C}$=6 λ
$\boldsymbol{T_d}$=2 τ

$$F_{МКФ} = (x_1+\bar{x}_2)\cdot(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$$



$\boldsymbol{C}$=6 λ
$\boldsymbol{T_d}$=2 τ

$$F_{МКФ} = \overline{\overline{(x_1+\bar{x}_2)\cdot(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)}} = \overline{\overline{(x_1+\bar{x}_2)} + \overline{(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)}}$$



$\boldsymbol{C}$=8 λ
$\boldsymbol{T_d}$=3 τ