О.М.Картвелишвили,
М.О.Картвелишвили

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ЦИФРОВЫХ АВТОМАТОВ

«ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

О.М.Картвелишвили, М.О.Картвелишвили

Прикладная теория цифровых автоматов

Утверждено Редакционно-
издательским советом ГТУ
в качестве учебного пособия

Тбилиси
2005

УДК 681.32

Рассмотрены основы анализа и синтеза простых и конечных автоматов имеющих память. Даны формы представления автоматов в разных базисах с помощью переключательных функций, их инимизация, с использованием метода Квайна, импликантной матрицы, диаграммы Вейча и т.д.

Дана методика построения логических схем.

Значительное внимание уделяется конечным автоматам, имеющим память, различным формам их представления, методике построения кодированных таблиц иструктурному синтезу.

Пособие предназначено для студентов и магистрантов специальности «Компьютерные системы и сети» и соответствует дисциплине «Прикладная теория цифровых автоматов».

Рецензенты: проф. Н.Ломинадзе.
Проф. К.Камкамидзе.

ISBN 99940-48-02-2

Введение

Основное назначение функциональных узлов компьютера – преобразование информации. Преобразователь информации – это устройство с конечным количеством входов, на которые подается информация, и конечным количеством выходов, с которых снимается преобразованная информация. В физических системах характер процесса преобразования информации определяется законом функционирования этой системы. В частности, преобразователь информации с прямого кода в обратный код преобразует исходную информацию в обратный код, сумматор преобразует слагаемые в сумму, схема сдвига преобразует информацию в сдвинутую относительно исходной и т.д. При рассмотрении процесса преобразования, информацию удобно кодировать последовательностью символов (букв) из некоторого конечного алфавита. Любую такую последовательность называют словом в данном алфавите. Формально процесс преобразования информации в некотором устройстве можно свести к преобразованию входного алфавита в выходной алфавит.

Таким образом, устройство преобразования информации приводит в соответствие любое слово входного алфавита любому слову выходного алфавита.

Рассмотрим некоторое устройство (рис.1) с n количеством входов и m количеством выходов. На каждый вход можно подать любой символ из конечного алфавита $X=(x_1,x_2,\dots x_n)$. Определенная последовательность символов, поданная на входы, составляет входное слово F_i в алфавите X. В результате преобразования на выходе устройства будем иметь G_j слово , составленное в выходном алфавите- $Y=(y_1,y_2,\dots y_l)$.

В силу конечности алфавита X, Y и длин входных и выходных слов (длина входного слова всегда равна n, а выходного – m) общее число входных и выходных

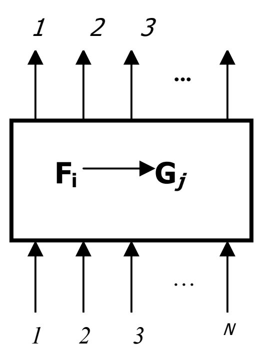


Рис.1

слов конечно. Таким образом, при появлении на выходе устройства входного слова F_i устройство выдает на выходе комбинацию выходных символов, образующих выходное слово G_j . Работа такого устройства полностью определена, если для каждого допустимого F_i слова задана таблица:

$F_1 \rightarrow G_{j1}$

$F_2 \rightarrow G_{j2}$

………………

$F_k \rightarrow G_{jk}$

Устройство, работа которого описывается вышеприведенной таблицей, является конечным автоматом без памяти или комбинационной схемой.

Кроме указанных выше устройств, которые с функциональной точки зрения представляют собой простые устройства, существуют более сложные устройства, на выходах которых информация определяется не только входной информацией, но и тем состоянием, в котором находилось это устройство. Таким преобразователем является конечный автомат с памятью. Состояние такого автомата определяется состоянием памяти. Для определения состояния автомата введем конечный алфавит $A=(a_0, a_1, ...a_q)$. Символ a_i отражает внутреннее состояние автомата. Пара F_i, a_i полностью определяет выходное слово и новое состояние автомата, в которое он перейдет после подачи на входы F_i слова.

Правило работы такого автомата можно представить с помощью таблицы:

$(F_i, a_t) \to (G_j, a_r)$, где G_j – выходное слово, a_r – новое состояние автомата.

Структура рассмотренного автомата дается на рис.2.

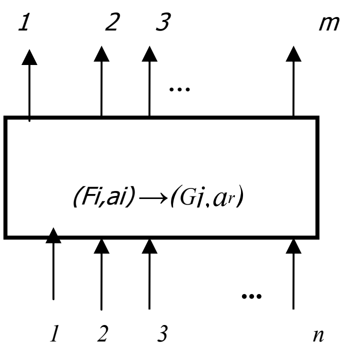


Рис .2

В настоящем курсе рассматриваются детерминированные конечные автоматы с памятью и без памяти, в которых каждому входному слову однозначно соответствует выходной сигнал.

В компьютерах входная и выходная информация кодирована двухбуквенным двоичным алфавитом. Это вызвано прежде всего тем, что в компьютерах, в основном, используются двоичная система счисления или системы счисления с другим основанием с двоичным кодированием символов. Кроме этого, в компьютере для хранения информации используются двухпозиционные элементы, для которых двоичное кодирование состояния является естественным.

Физическим аналогом двоичного алфавита в схемах компьютера могут быть высокий или низкий потенциал, наличие или отсутствие импульса и т.д. При определении функционирования схемы эти величины можно выразить любой парой символов. Обыкновенно такими символами являются 1 и 0. В соответствии с этим функционирование любой схемы компьютера определяется следующим образом: на вход схемы подается некоторая совокупность нулей и единиц, которая вызывает на выходе схемы появление определенной совокупности нулей и единиц.

Рассмотрим пример такого кодирования . Допустим, что $X=(x_1, x_2, x_3)$ алфавит содержит три символа, $Y=(y_1, y_2, y_3, y_4)$ алфавит – четыре символа. Допустим, имеем конечный автомат без памяти, который преобразует слово, состоящее из двух символов, с алфавита X в слово из одного символа алфавита Y.

Представим правило функционирования автомата с помощью следующей таблицы:

$x_1x_1 \to y_1$,	$x_2x_1 \to y_3$,	$x_3x_1 \to y_4$,
$x_1x_2 \to y_2$,	$x_2x_2 \to y_2$,	$x_3x_2 \to y_4$,
$x_1x_3 \to y_4$,	$x_2x_3 \to y_4$,	$x_3x_3 \to y_3$.

Каждому символу алфавитов X и Y приведем в соответствие десятичную цифру от 0 до 3. Вышеприведенная таблица примет вид:

$00 \to 0$,	$10 \to 2$,	$20 \to 3$,
$01 \to 1$,	$11 \to 1$,	$21 \to 3$,
$02 \to 3$,	$12 \to 3$,	$22 \to 2$.

Для двоичного представления необходимо все десятичные цифры кодировать в двоичной системе (для кодирования каждой десятичной цифры достаточно двух двоичных разрядов).

Двоично кодированная таблица имеет вид:

$00\ 00 \to 00$,	$01\ 00 \to 10$,	$10\ 00 \to 11$,
$00\ 01 \to 01$,	$01\ 01 \to 01$,	$10\ 01 \to 11$,
$00\ 10 \to 11$,	$01\ 10 \to 11$,	$10\ 10 \to 10$.

В настоящем курсе рассматриваются вопросы, связанные с анализом и синтезом конечных автоматов.

Синтез преобразователя информации заключается в определении взаимосвязи простых схем или элементов, при которых собранная схема осуществляет заданное правило преобразования.

Методы синтеза схем компьютера в современной литературе развиваются в основном на основании математической логики и теории дискретных автоматов. Для решения задачи синтеза, прежде всего, необходим выбор системы элементов, на основании которых должна быть построена схема преобразователя.

Один и тот же закон преобразования информации может быть осуществлен с помощью различных схем. Для оценки технической реализации вводятся критерии: сложность схемы, ее быстродействие и надежность. Методы синтеза определяются на основании выбранных критериев, так как в одном случае для оценки схемы преимущество может отдаваться быстродействию, в других случаях – ее сложности или надежности.

Задача анализа схем заключается в представлении их в аналитическом виде, с целью их оценки или дальнейшего преобразования.

Г Л А В А I

Переключательные функции и их основные свойства

1.1. Основные понятия

Сложные логические схемы компьютера состоят из соединенных между собой определенным образом простейших схем, которые принято называть логическими элементами. Выходной сигнал логического элемента однозначно определяется комбинацией входных сигналов $x_1,x_2,....x_n$, каждый из которых равен нулю или единице, и поэтому может быть представлен в виде некоторой функции $f(x_1,x_2,......x_n)$, которая также принимает только два значения – 0 и 1.

Технические вопросы, связанные с составлением логических схем компьютера, можно решать с помощью математического аппарата, объектом исследования которого являются функции, принимающие, так же как и их аргументы, только два значения – нуль или единица. Таким аппаратом является математическая логика.

Определение 1.1. Функция $f(x_1, x_2, ...x_n)$ называется *переключательной или булевой функцией*, если она, так же как и аргументы, может принимать значения 0 или 1.

Так как аргументы переключательных функций могут принимать только два значения, область определения перереключательных функций конечна и может быть задана таблицей зависимости значения функции от значения аргументов. На примере, в таблице 1.1, заданы две переключательные функции $f_1(x_1,x_2,x_3)$ и $f_2(x_1,x_2,x_3)$, зависящие от трех аргументов.

Таблица 1.1

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
$f_1(x_1,x_2,x_3)$	0	1	0	1	0	0	0	0
$f_2(x_1,x_2,x_3)$	0	0	0	1	0	1	1	0

Совокупность значений аргументов называется *двоичным набором аргументов или просто набором.* Функции,содержащиеся в таблице 1.1, определены на восьми наборах (или на восьми точках). Функция $f_1(x_1,x_2,x_3)$ принимает единичные значения на наборах (0,0,1) и (0,1,1), на других наборах – она равна нулю. Функция $f_2(x_1,x_2,x_3)$ равняется единице на наборах (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0) и равняется нулю на остальных наборах. (запись (0,1,1) означает: $x_1=0,x_2=1,x_3=1$).

Определение 1.2. Если функции $f_1(x_1,x_2,x_3)$ и $f_2(x_1,x_2,x_3)$ принимают на всех наборах аргументов одинаковые значения, такие функции являются равными, что записываем в виде

$$f_1(x_1,x_2,x_3)= f_2(x_1,x_2,x_3). \qquad (1.1)$$

Любая переключательная функция n аргументов определена на 2^n наборах. Действительно, каждый набор представляет собой n –разрядное двоичное слово, но каличество таких слов будет 2^n. Например, переключательные функции двух аргументов определены на четырех наборах (0,0),(0,1),(1,0),(1,1). В случае трех аргументов – на восьми наборах (табл. 1.1) и т.д. В дальнейшем каждому набору присвоим номер, который определен двоичным значением этого набора.

Например, для четырех аргументов (x_1,x_2,x_3,x_4) :

0 0 0 0 - нулевой набор,
0 0 0 1 – первый набор,
0 0 1 0 – второй набор,
- - - - - - - - - - - - - - - -
1 1 1 1 – пятнадцатый набор.

Количество различных переключательных функций n аргументов конечно и равняется 2^{2^n}. Каждая переключательная функция n аргументов определена на 2^n наборах, на которых она принимает значение 0 или 1. Поэтому каждой переключательной функции можно привести в соответствие 2^n разрядное слово, каждый разряд которого будет значение функции на одном наборе. Количество 2^n разрядных чисел будет 2^{2^n} и, следовательно, количество возможных функций будет 2^{2^n}

Если набор аргументов представить как точки n – мерного пространства, тогда множество 2^n наборов определяют вершины n мерного куба. То есть областью определения функции, зависящей от n аргументов, является множество вершин такого куба. На рис.1.1 геометрически представлена функция $f_1(x_1,x_2,x_3)$, соответствующая табл.1.1. Вершины, на которых функция принимает единичные значения , зачернены.

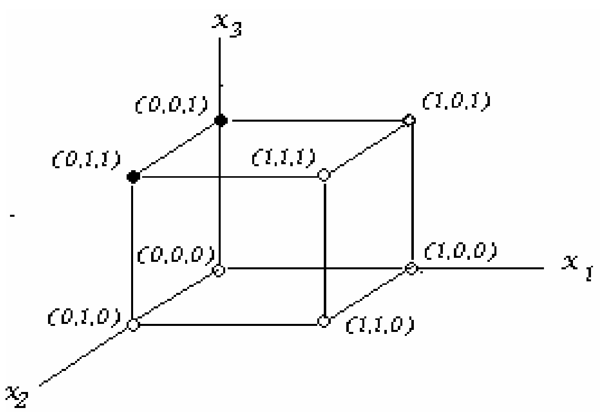


Рис. 1.1

Значения функции могут быть заданы не на всех возможных наборах аргументов. На некоторых наборах значения функции могут быть не определены. Такие функции мы будем называть *не полностью определенными или недоопределенными*. В таблице задания функции против наборов, на которых функция не определена, ставится звездочка. Пусть, например,функция $f(x_1,x_2,x_3$) задана следующей таблицей (табл. 1.2):

Таблица 1.2

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x_1,x_2,x_3)$	0	1	*	*	*	1	0	1

Если вместо звездочек подставлять нули или единицы, то вместо неопределенных функциий можно получить восемь различных полностью определенных функциий. Вообще, если функция не определена на m наборах аргументов, то путем ее произвольного доопределения можно получить 2^m различных полностью определенных функций.

Определение 1.3. Переключательная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ существенно зависит от x_i, если имеет место соотношение

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \neq f(x_1, x_2, \ldots, X_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

В противном случае функция существенно не зависит от x_i аргумента и x_i аргумент является фиктивным. Переключательная функция не изменяется, если к его аргументам припишем или отнимем фиктивный аргумент.

Задача синтеза схем компьютера сводится к математической задаче построения сложных логических функций с помощью простых логических функций, правила функционирования которых описываются функциями одного или двух аргументов. Такие функции в дальнейшем будем называть элементарными функциями.

1.2. Элементарные переключательные функции.

Как было отмечено выше, в случае одного аргумента существует $2^2 = 4$ различных функций (табл.1.3)

Таблица 1.3

x	0	1	Условные обозначения	Наименование функции
$f_0(x)$	0	0	0	Константа 0
$f_1(x)$	0	1	x	Переменная x
$f_2(x)$	1	0	$\bar{x}$	Инверсия x
$f_3(x)$	1	1	1	Константа 1

В приведенной таблице и в дальнейшем функцию будем нумеровать в соответствии с тем двоичным кодом, который составляет ее значение на всех наборах, записанных слева направо, начиная с нулевого набора:

функция f_0 (x) тождественно равняется нулю, и является константой нуль f_0 (x)=0;

функция f_3 (x) тождественно равняется единице и является константой единица f (x)=1;

функция f_1 (x) повторяет значения аргумента и тождественно равняется переменной x $f_1(x)= x$;

функция f_2 (x) принимает противоположное значение аргумента, ее называют инверсией x переменной или отрицанием x и представляют как

$\bar{f}_2(x)=\bar{x}$. Черточка над переменной – это знак преобразования, называемый знаком отрицания или знаком инверсии.

В случае двух аргументов существует шестнадцать различных переключательных функций, каждая из которых определена на четырех наборах. В табл. 1.4 представлены все указанные функции.

Среди всех функций, определенных для одинакового количества аргументов, есть функции, как существенно зависимые от всех n аргументов, так и функции, для которых часть аргументов фиктивные.

Определение 1.4. Число всех переключательных функций, существенно зависящих от n аргументов, определяется следующими рекурсивными соотношениями:

$$A_n=2^{2^n} - C_n^{n-1}A_{n-1} - C_n^{n-2}A_{n-2} - \ldots - C_n^1 A_1 - A_0 . \qquad (1.2)$$

В этом соотношении A_i есть число функций, существенно зависящих от i аргументов, а $C_n^m= n!/m!\,(n-m)!$. Правая часть соотношения есть разность между числом всех переключательных функций и суммой переключательных функций, зависящих существенно от любого числа аргументов, меньшего, чем n.

Для функций одной переменной (табл.1.3) количество функций, не зависящих от аргумента, есть $A_0 =2$, а количество функций, зависящих от одного аргумента, будет:

$$A_1= 2^2 - A_0= 4-2=2.$$

Действительно, из четырех функций одного аргумента $f_0(x)$ и $f_3(x)$ не зависят от аргумента, а $f_1(x)$, $f_2(x)$ существенно зависят от аргумента.

Рассуждая аналогично, для функций двух аргументов количество функций , зависящих от всех аргументов, будет:

$$A_2=2^{2^2} - C_2^1 A_1 - A_0 = 16- 2\cdot 2- 2=10.$$

Действительно, из функций двух аргументов (табл.1.4) $f_0(x_1,x_2)=0$ и $f_{15}(x_1 , x_2)= 1$ представляют константу ноль и единицу ($A_0=2$) и не зависят ни от одного аргумента; функции $f_3(x_1,x_2)=x_1$, $f_5(x_1,x_2)= x_2$,

$f_{10}(x_1 , x_2)=\bar{x}_2$, $f_{12}(x_1 , x_2)=\bar{x}_1$ существенно зависят от одного аргумента ($A_1=4$).

Рассмотрим остальные десять функций, существенно зависящих от обоих аргументов:

1. Функция $f_1(x_1,x_2)$ *называется логическим умножением или конъюнкцией переменных x_1 и x_2*. Для записи этой функции используются символы & или ^ :

$$f_1(x_1,x_2)=x_1 \,\&\, x_2.$$

Для записи этой функции используют также точку (такое обозначение будет применено в дальнейшем)

$$f_1(x_1,x_2) = x_1\cdot x_2.$$

Для конъюнкции справедливы следующие законы: $x_1\cdot x_2 = x_2\cdot x_1$ (закон коммутативности), $x_1\cdot(x_2\cdot x_3)=(x_1\cdot x_2)\cdot x_3$ (закон ассоциативности).

Можно убедиться в справедливости некоторых важных соотношений:

$$
\begin{aligned}
&x \cdot x = x,\\
&x \cdot 1 = x,\\
&x \cdot 0 = 0, \qquad (1.4)\\
&x \cdot \bar{x} = 0,\\
&x \cdot x \cdot \ldots \cdot x = x.
\end{aligned}
$$

2 .Функция $f_7(x_1,x_2)$ называется *логическим сложением* или *дизъюнкцией переменных* x_1 и x_2. Для ее обозначения применяются символы + или v :

$f_7(x_1,x_2)=x_1 + x_2$, или $f_7(x_1,x_2)=x_1 \vee x_2$.

В дальнейшем нами будет использована вторая запись.

Аналогично предыдущей функции для дизъюнкции справедливы следующие законы: $x_1 \vee x_2=x_2 \vee x_1$ (закон коммутативности для дизъюнкции); $x_1 \vee (x_2 \vee x_3)=(x_1 \vee x_2) \vee x_3$ (закон ассоциативности для дизъюнкции).Для функций $f_1(x_1 , x_2)$ и $f_7(x_1 , x_2)$ имеют место законы дистрибутивности:

$x_1 \cdot (x_2 \vee x_3) = x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot x_3$ (I- ый закон дистрибутивности),

$x_1 \vee (x_2 \cdot x_3) =(x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_3)$ (II-ой закон дистрибутивности).

Можно убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$
\begin{aligned}
&x \vee x = x,\\
&x \vee 1 = 1,\\
&x \vee 0 = x, \qquad (1.5)\\
&x \vee \bar{x} = 1,\\
&x \vee x \vee x \vee \ldots \vee x = x.
\end{aligned}
$$

Приведенные выше соотношения, как для дизъюнкции, так и для конъюнкции можно проверить подстановкой значения аргументов в соответствующие выражения с использованием табл. 1.4. Например, проверим $x \vee 1=1$. Когда x= 0, имеем $0 \vee 1=1$; при x=1 имеет место равенство $1 \vee 1=1$.Таким образом, равенство справедливо при любых значениях аргументов.

Проверим выражение $x \cdot 1=x$. При x=0 имеем $0 \cdot 1=0$, при x=1 имеем $1 \cdot 1= =1$. Как видно, при любых значениях аргументов левая и правая части выражения совпадают.

Аналогично можно проверить справедливость и других равенств.

3.Функция $f_9(x_1,x_2)$ носит название *функции равнозначности*. Для ее обозначения используется символ ~ :

$$f_9(x_1,x_2)=x_1 \sim x_2.$$

Для этой функции существуют законы коммутативности и ассоциативности:

$$x_1 \sim x_2 = x_2 \sim x_1,$$
$$x_1 \sim (x_2 \sim x_3) = (x_1 \sim x_2) \sim x_3.$$

Для функции справедливы следующие равенства:

$$
\begin{aligned}
&x \sim x = 1,\\
&x \sim 1 = x, \qquad (1.6)\\
&x \sim 0 = \bar{x},\\
&x \sim \bar{x} = 0.
\end{aligned}
$$

Таблица 1.4

x_1	0	0	1	1	Наименован. функц.	Обознач .функц.	Сохр. нуль	Сохр. единицу	Самодвой-ственная	Монотон -ная	Линейна я
x_2	0	1	0	1							
1					2	3	4	5	6	7	8
$f_0(x_1, x_2)$	0	0	0	0	Конст. нуль	0	*			*	*
$f_1(x_1, x_2)$	0	0	0	1	Конъюнкция	$x_1 \cdot x_2$	*	*		*	
$f_2(x_1, x_2)$	0	0	1	0	Запрет по x_2	$x_1 \triangle x_2$	*				
$f_3(x_1, x_2)$	0	0	1	1	Переменная x_1	x_1	*	*	*	*	*
$f_4(x_1, x_2)$	0	1	0	0	Запрет по x_1	$x_2 \triangle x_1$	*			*	
$f_5(x_1, x_2)$	0	1	0	1	Переменная x_2	x_2	*	*	*	*	*
$f_6(x_1, x_2)$	0	1	1	0	Слож.по мод. 2	$x_1 \oplus x_2$	*				*

Продолжение табл.1.4

1					2	3	4	5	6	7	8
$f_7(x_1, x_2)$	0	1	1	1	Дизъюнкция	$x_1 \vee x_2$	*	*		*	
$f_8(x_1, x_2)$	1	0	0	0	Операц. Пирса	$x_1 \downarrow x_2$					
$f_9(x_1, x_2)$	1	0	0	1	Равнозначность	$x_1 \sim x_2$		*			*
$f_{10}(x_1, x_2)$	1	0	1	0	Инверсия x_2	$\bar{x}_2$			*		*
$f_{11}(x_1, x_2)$	1	0	1	1	Импликация к x_1	$x_2 \to x_1$		*			
$f_{12}(x_1, x_2)$	1	1	0	0	Инверсия x_1	$\bar{x}_1$			*		*
$f_{13}(x_1, x_2)$	1	1	0	1	Импликация к x_2	$x_1 \to x_2$		*			
$f_{14}(x_1, x_2)$	1	1	1	0	Штрих Шеффера	x_1 / x_2					
$f_{15}(x_1, x_2)$	1	1	1	1	Константа единица	1		*		*	*

4.Функции $f_{11}(x_1,x_2)$ и $f_{13}(x_1,x_2)$ являются функциями одинаковой природы и называются *импликацией* от x_1 к x_2 или от x_2 к x_1. Обе обозначаются следующим образом:

$$f_{11}(x_1, x_2) = x_2 \to x_1, f_{12}(x_1, x_2) = x_1 \to x_2 .$$

Приведем для этой функции некоторые важные соотношения:

$$
\begin{aligned}
&x \to x = 1, \\
&x \to \bar{x} = \bar{x}, \\
&x \to 1 = 1, \\
&\bar{x} \to 0 = \bar{x}, \qquad (1.7) \\
&0 \to x = 1, \\
&1 \to x = x.
\end{aligned}
$$

Справедливость указанных соотношений можно проверить так, как это было сделано выше.

Для импликации не существуют законы коммутативности и ассоциативности. Действительно, $x_1 \to x_2 \neq x_2 \to x_1$.

Если в правой и левой частях равенства подставить различные значения аргументов, заметим, что на наборах (0,1) или (1,0) равенства не выполняются. На первом наборе имеем $0 \to 1 \neq 1 \to 0$. Левая часть выражения принимает единичное значение, а правая – нулевое. На втором наборе имеем $1 \to 0 \neq 0 \to 1$. При этом левая часть есть 0, а правая равна 1. Аналогичным рассуждением убедимся , что $(x_1 \to x_2) \to x_3 \neq x_1 \to (x_2 \to x_3)$.

5.Функцию $f_6(x_1, x_2)$ обычно называют *сложением по модулю 2* (реже, функцией неэквивалентности) и обозначают следующим образом:

$$f_6(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 , \text{ или}$$

$$f_6(x_1, x_2) = \overline{x_1 \sim x_2}.$$

Для этой функции имеют место законы коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности:

$$
\begin{aligned}
&x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1, \\
&x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3, \\
&x_1 \cdot (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \cdot x_2) \oplus (x_1 \cdot x_3).
\end{aligned}
$$

Справедливы следующие равенства:

$$
\begin{aligned}
&x \oplus x = 0, \text{ (для четного количества членов)} \\
&x \oplus 0 = x, \\
&x \oplus 1 = x, \qquad (1.8) \\
&x \oplus \bar{x} = 1, \\
&x \oplus x \oplus x = x \text{ (для нечетного количества членов).}
\end{aligned}
$$

6.Функцию $f(x_1,x_2)$ называют *операцией Пирса (или функцией Вебба)* и обозначают следующим образом:

$$f_8(x_1,x_2) = x_1 \downarrow x_2.$$

Для операции Пирса справедлив закон коммутативности

$$x_1 \downarrow x_2 = x_2 \downarrow x_1, \text{ и}$$

несправедлив закон ассоциативности

$$x_1 \downarrow (x_2 \downarrow x_3) \neq (x_1 \downarrow x_2) \downarrow x_3.$$

Приведем некоторые важные равенства для этой функции

$$x \downarrow x = \bar{x},$$

$$x \downarrow 0 = \bar{x},$$

$$x \downarrow 1 = 0, \qquad (1.9)$$

$$x \downarrow \bar{x} = 0.$$

7.Функцию $f_{14}(x_1,x_2)$ называют *функцией Шеффера* и обозначают следующим образом:

$$f_{14}(x_1,x_2)=x_1 / x_2.$$

Приведем некоторые равенства для указанной функции:

$$x/x=\bar{x},$$

$$x/\bar{x}=1, \qquad (1.10)$$

$$x/1=\bar{x},$$

$$x/0=1.$$

Для функции справедлив закон коммутативности:

$$x_1/x_2=x_2/x_1,$$

и несправедлив закон ассоциативности

$$x_1/(x_2/x_3)\neq(x_1/x_2)/x_3.$$

8.Функции $f_2(x_1,x_2)$ и $f_4(x_1,x_2)$ – одинаковые по своей природе и называются функцией запрета. Обозначаются следующим образом:

$$f_2(x_1,x_2)=x_1\Delta x_2 \quad \text{(запрет по } x_2\text{)},$$

$$f_4(x_1,x_2)=x_2\Delta x_1 \quad \text{(запрет по } x_1\text{)}.$$

Приведенные выше переключательные функции в сущности были введены как операторы двух переменных. Впервые переключательные функции использовал английский ученый Дж.Буль в одном из разделов математической логики- алгебре логики. Предметом исследования алгебры логики является высказывание. Под высказыванием имеется ввиду то утверждение, которое может быть истинным или ложным. Истинному значению приписывают смысл 1, ложному-0. Отдельные высказывания выражают буквами. Например, x_1, x_2..... и т.д. Если высказывание истинное, тогда говорят, что x_1 равняется 1 (x_1=1), если высказывание ложное, говорят, что x_1 равняется 0.

Из одного или нескольких высказываний, которые считаем простыми высказываниями, можем получить сложные высказывания. Для объединения простых высказываний используют логические связи. Логические связи соответствуют переключательным функциям, аргументами которых являются простые высказывания.

Переключательным функциям придают определенные смысловые значения. Рассмотрим некоторые из них.

Логическая связь ″ НЕ ″ (отрицание), она означает отрицание некоторого высказывания x. Ей соответствует переключательная функция –инверсия.

Логическая связь ″ И ″, ей соответствует переключательная функция конъюнкция. Объединяет два высказывания x_1 и x_2.

Логическая связь ″ ЕСЛИ-ТО ″, она объединяет два высказывания ЕСЛИ x_1, ТО x_2 и является смысловой интерпретацией функции - импликация.

Логическая связь ″ ИЛИ ″. Объединяет два высказывания – x_1 ИЛИ x_2 и соответствует функции – дизъюнкция.

Логическая связь равнозначность объединяет два высказывания: x_1 эквивалентно x_2 и соответствует переключательной функции равнозначности.

С использованием рассмотренных логических связей можно составить новые переключательные функции, если применим действия:

1) перестановку аргументов в функции,

2) подстановку в функциях вместо аргументов некоторых функций.

Функция, которая получена от функций $f_1,f_2......f_k$ приведенными выше действиями, называется *суперпозицией функций* $f_1, f_2 ....f_k$.

Например, если имеем переключательные функции

$f_{11}(x_1,x_2)=x_2\to x_1$, $f_7(x_1,x_2)=x_1 \vee x_2$, $f_{12}(x_1,x_2)=\bar{x}_1$,$f_9(x_1,x_3)=x_1\sim x_3$, то при подстановке в функцию $f_{11}(x_1,x_2)$ вместо аргумента x_2 функции f_7 , а вместо аргумента x_1 функции f_9 получим новую функцию

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1 \vee x_2) \to (x_1\sim x_3).$$

Перестановкой в функции f_{11} аргументов и подстановкой полученной функции в функцию f_{12} вместо аргумента x_1, также получим новую функцию

$$(x_1,x_2)=\overline{x_1\to x_2} \quad \text{и т.д.}$$

Используя таблицы определения элементарных функций, можно определить на всех наборах значения функции, полученной суперпозицией элементарных функций.

Например, определить значение заданной функции на наборах аргументов с использованием таблицы 1.5:

$$f(x_1,x_2 ,x_3)= \{ [(\bar{x}_1 \sim x_3)\vee(x_1\downarrow x_2)]\cdot(x_1\oplus x_2)\}\to x_3.$$

Таблица 1.5

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
$\bar{x}_1$	1	1	1	1	0	0	0	0
$\bar{x}_1 \sim x_3$	0	1	0	1	1	0	1	0
$x_1 \downarrow x_2$	1	1	0	0	0	0	0	0
[]	1	1	0	1	1	0	1	0
$x_1 \oplus x_2$	0	0	1	1	1	1	0	0
{}	0	0	0	1	1	0	0	0
$f(x_1,x_2,x_3)$	1	1	1	1	0	1	1	1

1.3. Выражение одних переключательных функций через другие

Один и тот же закон функционирования можно выразить различными связями аргументов,которые принимают одинаковые значения на всех наборах. В предыдущем параграфе представлены важные соотношения различных связей аргументов, которые в дальнейшем мы используем. Справедливость указанных равенств легко установить показом совпадений их левых и правых частей на всех наборах аргументов, что дается для каждого равенства в таблицах 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10.

$$x_1 \rightarrow x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2 \quad (1.11)$$

Таблица 1.6

x_1	0	0	1	1
x_2	0	1	0	1
$x_1 \rightarrow x_2$	1	1	0	1
$\bar{x}_1 \vee x_2$	1	1	0	1

$$x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1 \sim x_2} \quad (1.12)$$

Таблица 1.7

x_1	0	0	1	1
x_2	0	1	0	1
$x_1 \oplus x_2$	0	1	1	0
$\overline{x_1 \sim x_2}$	0	1	1	0

$$x_1 \sim x_2 = (x_1 \vee \bar{x}_2) \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2). \qquad (1.13)$$

$$\bar{\bar{x}} = x \qquad (1.14)$$

Таблица 1.8

x_1	0	0	1	1
x_2	0	1	0	1
$x_1 \sim x_2$	1	0	0	1
$\bar{x}_1 \vee x_2$	1	1	0	1
$x_1 \vee \bar{x}_2$	1	0	1	1
$(\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2)$	1	0	0	1

$$x_1 \oplus x_2 = \overline{(\bar{x}_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2)}. \qquad (1.15)$$

Справедливость равенства (1.15) вытекает из равенств (1.12) и (1.13).

$$\overline{x_1 \cdot x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2. \qquad (1.16)$$

Таблица 1.9

x_1	0	0	1	1
x_2	0	1	0	1
$x_1 \cdot x_2$	0	0	0	1
$\overline{x_1 \cdot x_2}$	1	1	1	0
$\bar{x}_1$	1	1	0	0
$\bar{x}_2$	1	0	1	0
$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$	1	1	1	0

$$\overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2. \qquad (1.17)$$

Таблица 1.10

x_1	0	0	1	1
x_2	0	1	0	1
$x_1 \vee x_2$	0	1	1	1
$\overline{x_1 \vee x_2}$	1	0	0	0
$\bar{x}_1$	1	1	0	0
$\bar{x}_2$	1	0	1	0
$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$	1	0	0	0

Формулы (1.16) и (1.17) называются формулами де Моргана. Как обобщение рассмотренных формул получаем следующие формулы де Моргана:

$$\overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \ldots \vee x_n} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \ldots \cdot \bar{x}_n\,, \qquad (1.18)$$

$$\overline{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots x_x} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \ldots \vee \bar{x}_n. \qquad (1.19)$$

Аналогичным рассуждением можно показать справедливость следующих равенств:

$$x_1 \vee x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 \cdot x_2, \qquad (1.20)$$

$$x_1 \vee x_2 = \bar{x}_1 \rightarrow x_2, \qquad (1.21)$$

$$x_1\cdot x_2=\overline{x_1\to \bar{x}_2}, \qquad (1.22)$$

$$x_1/x_2=\overline{x_1\cdot x_2}=\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2, \qquad (1.23)$$

$$x_1\downarrow x_2=\overline{x_1 \vee x_2}=\bar{x}_1\cdot \bar{x}_2. \qquad (1.24)$$

С использованием соотношений (1.16) , (1.17), (1.23) можно выполнить следующие преобразования:

$$(x_1/x_2)/(x_1/x_3)=\overline{x_1\cdot x_2} / \overline{x_1\cdot x_3} = \overline{\overline{x_1\cdot x_2}} \vee \overline{\overline{x_1\cdot x_3}} = x_1\cdot x_2 \vee x_1\cdot x_3=$$

$$=x_1\cdot(x_2\vee x_3)=x_1\cdot\overline{\overline{(x_2\vee x_3)}}=x_1\cdot\overline{(\bar{x}_2\cdot \bar{x}_3)}=x_1\cdot(\bar{x}_2/\bar{x}_3)=\overline{\overline{x_1\cdot(\bar{x}_2/\bar{x}_3)}}=\overline{x_1/(\bar{x}_2/\bar{x}_3)}.$$

С использованием соотношений (1.16), (1.17), (1.24) выполним следующие преобразования:

$$(x_1/x_2)/(x_1/x_3)=\overline{x_1\cdot x_2} / \overline{x_1\cdot x_3}=\overline{\overline{x_1\cdot x_2}} \vee \overline{\overline{x_1\cdot x_3}} =x_1\cdot x_2 \vee x_1\cdot x_3=x_1\cdot(x_2\vee x_3)=$$

$$=\overline{\overline{x_1\cdot(x_2\vee x_3)}}=\overline{\bar{x}_1 \vee \overline{(x_2 \vee x_3)}}= \bar{x}_1\downarrow(x_2 \downarrow x_3).$$

На основании тех же формул можно получить следующие равенства:

$$(x_1 \downarrow x_2)\downarrow(x_1 \downarrow x_3)=\overline{x_1\downarrow (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)}=\bar{x}_1/(x_2 \vee x_3), \qquad (1.25)$$

$$(x_1 / x_2) \downarrow (x_1 / x_3)=x_1 / (\bar{x}_2 \downarrow \bar{x}_3)=\bar{x}_1 \downarrow(x_2 / x_3), \qquad (1.26)$$

$$(x_1 \downarrow x_2)/(x_1 \downarrow x_3)=\overline{x_1 \downarrow(\bar{x}_2/\bar{x}_3)}=\bar{x}_1/(x_2 \downarrow x_3), \qquad (1.27)$$

$$(x_1 /x_2)\downarrow(x_3/x_4)=\bar{x}_1\downarrow\overline{\bar{x}_2\downarrow\overline{\bar{x}_3\downarrow \bar{x}_4}}, \qquad (1.28)$$

$$(x_1 \downarrow x_2)/(x_3 \downarrow x_4)=\bar{x}_1/\overline{\bar{x}_2/\overline{\bar{x}_3/\bar{x}_4}}. \qquad (1.29)$$

Формулы де Моргана связывают функцию Шеффера с функцией операция Пирса,аналогично равенствам для функций конъюнкции и дизъюнкции (1.16) и (1.17):

$$\overline{x_1/x_2}= \bar{x}_1\downarrow \bar{x}_2, \qquad (1.30)$$

$$\overline{x_1 \downarrow x_2}=\bar{x}_1/\bar{x}_2. \qquad (1.31)$$

1.4. Основные классы переключательных функций

Существуют пять основных классов переключательных функций:

1. Функции, сохраняющие нуль.
2. Функции, сохраняющие единицу.
3. Линейные функции.
4. Самодвойственные функции.
5. Монотонные функции.

Любая функция, которая получена суперпозицией функций указанных выше классов, принадлежит тому же классу.

Определение1.5. Функциями, сохраняющие нуль, называются функции, которые на нулевом наборе принимают нулевые значения:

$$F(0,0,\dots 0)=0. \qquad (1.32)$$

При суперпозиции функций, сохраняющих нуль, получаются только функции, сохраняющие нуль.При фиксированном n числе аргументов, функции этого класса составляют половину всех функций, т.е. 2^{2^n-1} функций. Например,для функций двух аргументов из шестнадцати, восемь сохраняют нуль.В четвертом столбце таблицы 1.4 звездочками отмечены функции, сохраняющие нуль.

Определение 1.6. Переключательными функциями, сохраняющими единицу,называются функции, которые на единичном наборе принимают единичные значения:

$$f(1,1,\dots 1)=1. \qquad (1.33)$$

Суперпозицией функций,сохраняющих единицу, получаются только функции, сохраняющие единицу.При n аргументах число функций, сохраняющих единицу, составляет половину всех функций, т.е. 2^{2^n-1} функций. Для функций двух аргументов восемь функций являются сохраняющими единицу.

Определение 1.7. Функция называется линейной, если она представлена в виде следующего полинома:

$$f(x_1,x_2,\dots x_n)=a_0\oplus a_1x_1\oplus a_2x_2\oplus\dots\oplus a_nx_n, \qquad (1.34)$$

где коэффициенты $a_0,a_1,a_2,\dots a_n$ могут принимать значения 0 или 1. Можно показать, что две функции, представленные в виде (1.34), у которых хотя бы одна пара одноименных коэффициентов $a_0,a_1,a_2,\dots a_n$ отличается друг от друга, являются также различными. В результате для n аргументов найдутся различные линейные функции. Каждому набору коэффициентов можно привести в соответствие n+1 разрядное двоичное слово. Количество n+1 разрядных наборов и , следовательно линейных функций будет 2^{n+1} . Например, среди функций одного аргумента должно быть четыре линейных функции. Так как в случае одного аргумента существуют четыре функции, все они являются линейными. Для нахождения линейных функций двух переменных необходимо функции, содержащиеся в таблице 1.4, представить в виде вышеприведенного полинома

$$f(x_1,x_2)=a_0\oplus a_1x_1\oplus a_2x_2.$$

Для различных наборов коэффициентов будем иметь различные переключательные функции:

при наборе (0,0,0) имеем функцию $f_0(x_1,x_2)=0$ – константа нуль;

при наборе (0,0,1) – $f_5(x_1,x_2)=x_2$ – переменная x_2;
при наборе (0,1,0) – $f_3(x_1,x_2)=x_1$ - переменная x_1;

при наборе (0,1,1) - $f_6(x_1,x_2)=x_1\oplus x_2$ – сложение по модулю 2;
при наборе (1,0,0) - $f_{15}(x_1,x_2)=1$ – константа 1;

при наборе (1,0,1) - $f_{10}(x_1,x_2)=1\oplus x_2=\overline{x}_2$ –инверсия x_2;

при наборе (1,1,0) - $f_{12}(x_1,x_2)=1\oplus x_1=\overline{x}_1$ – инверсия x_1;

при наборе (1,1,1) - $f_9(x_1,x_2)=1\oplus x_1\oplus x_2=x_1\sim x_2$ – равнозначность.
В восьмом столбце таблицы 1.4 крестиками обозначены линейные функции.

Введем понятие сравнимости наборов. Если два набора отличаются только одним аргументом, такие наборы являются сравнимыми.

Определение 1.8. Если значение одного аргумента набора больше того же аргумента второго набора, говорят,что первый набор больше второго набора.

Определение 1.9. Функция называется монотонной, если при увеличении наборов ее значение не уменьшается. (Несравнимые наборы не принимаются во внимание.)

В седьмом столбце таблицы 1.4 крестиками отмечены монотонные функции. Если примем во внимание, что наборы (0,1) и (1,0),(0,0) и (1,1) несравнимы, монотонными функциями являются $f_0(x_1,x_2)$, $f_1(x_1,x_2)$, $f_3(x_1,x_2)$ и т.д. Суперпозицией монотонных функций получаем только монотонные функции.

Определение 1.10. Функция называется самодвойственной, если на противоположных наборах принимает противоположные значения,т.е. имеет место равенство

$$f(x_1,x_2,\ldots x_n)=\overline{f}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots\overline{x}_n). \qquad (1.35)$$

Число таких функций для фиксированных n аргументов есть 2^{2^n-1}. Например,для функции двух аргументов имеем две пары противоположных наборов (0,0) и (1,1), (0,1) и (1,0), следовательно, самодвойственные функции имеют противоположные значения на указанных наборах.Эти функции отмечены крестиками в шестом столбце таблицы 1.4.

Суперпозицией самодвойственных функций получаем только самодвойственные функции.

1.5. Функционально полные системы

Определение 1.11. Множество переключательных функций $\{f_0,f_1,\ldots f_m\}$ называется *функционально полным*, если любую функцию F можно представить с помощью функций $f_1,f_2,\ldots f_m$.

Определение 1.12. Для того чтобы система функций $(f_1,f_2,\ldots f_m)$ была полной, необходимо и достаточно, чтобы она включала хотя бы по одной функции, не принадлежащей выше– перечисленным классам,т.е.

1) не сохраняющая нуль;
2) не сохраняющая единицу:
3) нелинейная;
4) немонотонная;
5) несамодвойственная.

n

Так как количество всех функций n аргументов есть 2^{2}, тривиальная функционально полная система содержит

2^{2^n} функций. В связи с тем, что некоторые из переключательных функций удовлетворяют нескольким, перечисленным выше требованиям функциональной полноты, количество функций, входящих в функционально полную систему, может быть меньше пяти.

Определение 1.13. Из любой функционально полной системы можно выделить полную подсистему, которая не содержит более четырех функций.

Например, в функционально полную систему переключательных функций двух аргументов должны войти такие функции, которые не имеют отметки в столбцах 4-8 таблицы 1.4.

Из функций, вошедших в указанную таблицу, можно составить различные функционально полные системы.

1.Только переключательная функция $f_{14}(x_1,x_2)=x_1/x_2$ составляет функционально полную систему, так как удовлетворяет всем условиям функциональной полноты. Поэтому любую переключательную функцию можно представить через функцию f_{14}.

Например, в соответствии с формулами (1.15) , (1.24), имеем

$x_1\cdot x_2=\overline{x_1/x_2}$, $\bar{x}_1=x_1/x_1$, следовательно $x_1\cdot x_2=(x_1/x_2)/(x_1/x_2)$, $x_1 \vee x_2=\overline{\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2}=$

$=\overline{(x_1/x_1)\cdot(x_2/x_2)}=(x_1/x_1)/(x_2/x_2)$.

2.Функция $f_8(x_1,x_2)=x_1\downarrow x_2$, как и предыдущая функция, удовлетворяет всем требованиям функциональной полноты и, следовательно , через нее можно представить любые переключательные функции.
Например, запишем с помощью операции Пирса переключательную

функцию $f(x_1,x_2,x_3)=x_1\vee\bar{x}_2\cdot x_3$. Если используем соотношения

(1.15), (1.16), будем иметь $\bar{x}_1=x_1\downarrow x_1$, $x_1\vee x_2=\overline{x_1\downarrow x_2}=(x_1\downarrow x_2)\downarrow(x_1\downarrow x_2)$,

$x_1\cdot x_2=\overline{\bar{x}_1\vee\bar{x}_2}=\bar{x}_1\downarrow\bar{x}_2=(x_1\downarrow x_1)\downarrow(x_2\downarrow x_2)$. Подставляя полученные значения в заданную функцию, будем иметь:

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1\vee\overline{(\bar{x}_2\vee x_3)}=x_1\vee(\bar{x}_2\downarrow x_3)=\overline{x_1\downarrow(\bar{x}_2\downarrow x_3)}=\overline{x_1\downarrow[(x_2\downarrow x_2)\downarrow x_3]}=$$

$$=\{x_1\downarrow[(x_2\downarrow x_2)\downarrow x_3]\}\downarrow\{x_1\downarrow[(x_2\downarrow x_2)\downarrow x_3]\}.$$

3. Функции $f_{13}(x_1,x_2)=x_1\to x_2$ и $f_0(x_1,x_2)=0$ или $f_{11}(x_1,x_2)=x_2\to x_1$ и $f_0(x_1,x_2)=0$ составляют функционально полную систему.

Например, $x_1\cdot x_2=\overline{x_1\to\bar{x}_2}$, $\bar{x}=x\to 0$. При подстановке второго выражения в первое получим

$$x_1\cdot x_2=[x_1\to(x_2\to 0)]\to 0.$$

4. Функции $f_6(x_1x_2)=x_1\oplus x_2$, $f_1(x_1,x_2)=x_1\cdot x_2$ и $f_{15}(x_1,x_2)=1$ также составляют функционально полную систему. Представление заданной функции указанной функционально полной системой называется представлением функции в полиномиальной форме Жегалкина.

Например, представим в полиномиальной форме функцию $f(x_1,x_2,x_3)=(x_2\sim x_3)V(x_1\downarrow x_2)$. Если используем соотношения (1.8),(1.12),(1.20),(1.24), можем выполнить следующие преобразования:

$$(x_1,x_2,x_3)=\overline{(x_2\oplus x_3)}V\overline{(x_1Vx_2)}=(x_2\oplus x_3\oplus 1)V(\overline{x_1\oplus x_2\oplus x_1\cdot x_2})= (x_2\oplus x_3\oplus 1)\ V$$

$$V(x_1\oplus x_2\oplus x_1\cdot x_2\oplus 1)=(x_2\oplus x_3\oplus 1)\oplus(x_1\oplus x_2\oplus x_1\cdot x_2\oplus 1)\oplus(x_2\oplus x_3\oplus 1)\cdot(x_1\oplus x_2\oplus$$

$$x_1\cdot x_2\oplus 1)=x_2\oplus x_3\oplus 1\oplus x_1\oplus x_2\oplus x_1\cdot x_2\oplus 1\oplus x_1\cdot x_2\oplus x_1\cdot x_3\oplus x_1\oplus x_2\oplus x_2\cdot x_3\oplus x_2\oplus$$

$$\oplus x_1\cdot x_2\oplus x_1\cdot x_2\cdot x_3\oplus x_1\cdot x_2\oplus x_2\oplus x_3\oplus 1=x_2\oplus x_1\cdot x_3\oplus x_2\cdot x_3\oplus x_1\cdot x_2\cdot x_3\oplus 1.$$

5.Функционально полную систему составляют: $f_1(x_1,x_2)$, $f_7(x_1,x_2)$, и $f_{10}(x_2)$- конъюнкция, дизъюнкция и инверсия; $f_1(x_1,x_2)$ и $f_{10}(x_2)$- конъюнкция и инверсия; $f_7(x_1,x_2)$ и $f_{10}(x_2)$- дизъюнкция и инверсия.

Определение 1.14. Функционально полная система $\{f_1,f_2,\dots.f_m\}$ называется *базисом.*

Определение 1.15. *Минимальным базисом* называется такой базис, при исключении из которого хотя бы одной функции, он перестанет быть функционально полным.

Для вышеприведенных функций двух аргументов минимальный базис составляет: $\{-,\&\},\{-,V\},\{/\},\{\downarrow\},\{\oplus,\&,1\},\{\rightarrow,0\}$. Базис $\{-,\&,V\}$ и базис, составленный из всех переключательных функций, не являются минимальными.

1.6. Формы представления переключательных функций

Аппарат математической логики мы рассматриваем с целью его использования в задачах синтеза схем ЭВМ. Выбор полной системы переключательных функций с технической точки зрения эквивалентен выбору таких логических элементов, из которых можно постройть любую логическую схему. Поэтому выбор функционально полной системы, очевидно, должен основываться на определенных соображениях. Множество логических элементов называется функционально полной системой, если с помощью элементов, входящих в указанное множество, возможно построить любую логическую схему ЭВМ. Задача синтеза логической схемы эквивалентна такой математической задаче, при которой посредством элементарных переключательных функций полной системы представляется заданная функция.

В этом параграфе рассматриваются вопросы такого представления. Любая переключательная функция может быть представлена неоднозначно функциями, которые составляют функционально полную систему. Поэтому желательно найти такую форму представления функции, которой соответствует самая простая электронная схема.

При решении такой задачи удобно представить функцию в некоторой начальной или канонической форме и затем выполнить ее минимизацию. В большинстве случаев переключательная функция задана таблично. Если функция задана аналитически, тогда , как было сказано выше (табл.1.1.), легко можно перейти на табличное представление этой функции.

Рассмотрим переключательную функцию n аргументов, которая принимает единичное значение только на одном наборе, а на остальных 2^n-1 наборах – нулевые значения. Такую функцию называют *характеристической функцией единицы или конституентой единицы*. Из определения видно, что среди функций n аргументов количество конституент единицы равно количеству наборов, т.е. 2^n.

Например, из таблицы 1.4. видно, что среди функций двух аргументов есть четыре конституенты единицы: f_1, f_2, f_4, f_8 . В дальнейшем конституенты единицы будем обозначать буквой K_i , где i- номер набора, на котором конституента принимает единичное значение. Указанные конституенты принадлежат различным базисам. Однако можно построить конституенты, принадлежащие одному базису, например, базису {-,&}. В приведенной ниже таблице 1.11 даны конституенты единицы в базисе {-,&}.

Таблица 1.11

x_1	0	0	1	1
x_2	0	1	0	1
	$K_0=\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2$	$K_1=\bar{x}_1\cdot x_2$	$K_2=x_1\cdot\bar{x}_2$	$K_3=x_1\cdot x_2$

В этой таблице каждая функция K_i принимает единичное значение только на одном наборе:

K_0 – на нулевом наборе (0,0,0), на других наборах функция равна нулю;

K_1 – на первом наборе (0,1);

K_2 - на втором наборе (1,0);

K_3 - на третьем наборе (1.1)

На основании вышесказанного сформулируем правило построения конституенты единицы: для получения конституенты единицы m-го набора n аргументов необходимо написать n разрядный двоичный код, значение которого равно m, и составить конъюнкцию n переменных. Переменным, в соответствующей позиции которых в двоичном коде содержится нуль, присвоим знак инверсии.

Например, составим конституенту единицы для девятого набора шести аргументов. Такой набор запишется шестиразрядным двоичным числом 001001. Составим конъюнкцию переменных. Первая, вторая, четвертая, пятая переменные снабжаются знаками инверсии:

$$K_9=\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3\cdot\bar{x}_4\cdot\bar{x}_5\cdot x_6.$$

Теорема 1.1. Любую переключательную функцию (кроме константы нуль) можно записать как дизъюнкцию конституент единиц тех наборов, на которых функция принимает единичное значение

$$f(x_1,x_2,\ldots x_n)=K_{i1}VK_{i2}V\ldots\ldots VK_{ij}= \bigvee_{i_j\in T_1} K_{ij}, \qquad (1.36)$$

где T_1– множество наборов, на которых функция f принимает единичное значение.

Справедливость этой теоремы вытекает из следующего рассуждения. Выберем из таблицы определения функции некоторый набор, на котором функция принимает единичное значение, тогда в правой части соотношения (1.36) по условию теоремы найдется конституента единицы, соответствующая этому набору, которая принимает единичное значение. Так как xV1=1, правая часть соотношения (1.36) принимает единичное значение.

Рассмотрим набор, на котором заданная функция принимает нулевое значение. Тогда по условию теоремы соответствующая этому набору конституента единицы будет отсутствовать в правой части соотношения

(1.36). А для конституент, содержащихся в правой части соотношения, номер набора не совпадает, поэтому на рассмотренном наборе они принимают нулевые значения . Так как 0V0=0, то правая часть соотношения (1.36) равна нулю. Таким образом, при любом наборе левая часть соотношения равна правой части и, следовательно, теорема доказана.

Представление функции в виде (1.36) называется представлением функции в *совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ)* .

Представление функции в СДНФ удобно в следующей последовательности:

1. Из таблицы задания функции выписать те наборы, на которых функция принимает единичное значение.

2. Для выбранных наборов, в соответствии с вышеприведенным правилом , составим конституенты единиц.

3.Полученные конституенты единиц объединим дизъюнкцией.

Для примера, найдем СДНФ функции $f(x_1,x_2,x_3)$, заданной в таблице 1.12.

Таблица 1.12

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x_1,x_2,x_3)$	0	0	0	1	1	0	1	0

Выберем из таблицы наборы, на которых функция принимает единичные значения. Такими являются: третий (0,1,1), четвертый (1,0,0) и шестой (1,1,0) наборы. Составим конституенты единиц, соответствующие каждому из них: $\bar{x}_1\cdot x_2\cdot x_3$, $x_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3$, $x_1\cdot x_2\cdot\bar{x}_3$. Дизъюнкция указанных конституент дает СДНФ функции:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\cdot x_2\cdot x_3 V x_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3 V x_1\cdot x_2\cdot\bar{x}_3.$$

С помощью СДНФ любую функцию можем представить в базисе {-,&,V}.

Например, представим функцию $f_{14}(x_1,x_2)=x_1/x_2$ в СДНФ. По таблице (1.4) функция принимает единичные значения на нулевом, первом и втором наборах, которым соответствуют конституенты единиц:

$$K_0=\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2,\ K_1=\bar{x}_1\cdot x_2,\ K_2=x_1\cdot\bar{x}_2.$$

СДНФ функции имеет следующий вид:

$$f_{14}(x_1,x_2)=K_0VK_1VK_2=\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2V\bar{x}_1\cdot x_2Vx_1\cdot\bar{x}_2.$$

Представим функцию $f_8(x_1,x_2)=x_1{\downarrow}x_2$ в СДНФ. По таблице 1.4 функция принимает единичное значение только на нулевом наборе, которому соответствует конституента единицы $K_0=\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2$ и следовательно, СДНФ функции будет

$$f_8(x_1,x_2)=\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2.$$

Представим функцию $f_{13}(x_1,x_2)=x_1\longrightarrow x_2$ в СДНФ. Функция принимает единичные значения на нулевом, первом, третьем наборах и, следовательно, СДНФ этой функции имеет вид

$$F_8(x_1,x_2)=K_0VK_1VK_3=\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2V\bar{x}_1\cdot x_2Vx_1\cdot x_2.$$

В тереме 1.1 мы воспользовались дизъюнкцией конституент единиц. Однако, для объединения конституент единиц можно использовать и другую функцию. Для выполнения соотношения, подобного (1.36), необходимо, чтобы при обращении любой из конституент в единицу правая часть выражения обращалась в единицу, а при обращении всех конституент в нуль, правая часть выражения становилась равной нулю. Если обозначить неизвестную операцию знаком ∇,то сформулированные нами условия можно записать в виде следующей таблицы:

K_i	0	0	1	1
K_j	0	1	0	1
$K_i\nabla K_j$	0	1	1	?

Знак вопроса в последнем столбце таблицы соответствует такой комбинации значений конституент,которая никогда не может встречаться (на одном наборе одновременно несколько конституент не могут принимать единичное значение). Поэтому искомая функция ∇ может быть определена двумя способами. Если в ее таблицу вместо вопросительного знака дописать единицу, то полученная операция, объединяющая конституенты, представляет дизъюнкцию и, следовательно, имеем СДНФ. Если вопросительный знак в таблице заменить нулем, то получим операцию сложения по модулю два.

Следствие. Любая таблично заданная переключательная функция может быть представлена в следующей аналитической форме:

$$f\ (x_1,x_2,.....x_n)=K_{i1}\oplus K_{i2}\oplus........\oplus K_{ik}=\underset{i_j\in T_1}{\oplus} K_{ij}. \qquad (1.37)$$

Форма представления функции в виде (1.37) называется *совершенной полиномиальной нормальной формой (СПНФ).*

Представление функции в СДНФ или в СПНФ называется представлением функции по единицам.

Если заданная переключательная функция принимает единичные значения на большинстве наборов, тогда ее представление в СДНФ или в СПНФ не выгодно, так как выражение сравнительно сложно. В этом случае используются другие формы предсталения функции.

Введем переключательную функцию, которая принимает нулевое значение только на одном наборе аргументов и равна единице на остальных 2^n-1 наборах.Такая функция называется *характеристической функцией нуля или конституентой нуля.* Так как количество различных наборов n аргументов есть 2^n , то количество конституент нуля будет 2^n. Среди функций двух аргументов имеем четыре конституенты нуля (см.табл.1.4): $f_7(x_1,x_2)$, $f_{11}(x_1,x_2)$, $f_{13}(x_1,x_2)$, $f_{14}(x_1,x_2)$.

Конституенту нуля обозначим индексированным символом M_i , индекс которого соответствует номеру набора, на котором функция принимает нулевое значение. Указанные выше конституенты принадлежат различным базисам. Однако, можно построить конституенты нуля для всех наборов из одного базиса, например, в базисе {V,-}. Построим конституенты нуля в этом базисе для двух аргументов. Конституенты нулей обозначим символами M_0, M_1, M_2, M_3:

Таблица 1.13

x_1	0	0	1	1
x_2	0	1	0	1
	$M_0=x_1 \vee x_2$	$M_1=x_1 \vee \bar{x}_2$	$M_2=\bar{x}_1 \vee x_2$	$M_3=\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$

В соответствии с определением M_0 конституента принимает нулевое значение на нулевом наборе (0,0), на других наборах- единичные. Это можно легко проверить подстановкой в функцию M_0 различных наборов аргументов. Конституента M_1 принимает нулевое значение на первом наборе и т.д.

Сформулируем правило построения конституенты нуля для m-го набора n аргументов: необходимо записать n разрядный двоичный код, равный m , и составить дизъюнкцию n переменных. Переменным, которым в двоичном коде соответствует единичный символ, присвоим знак инверсии.

Например, запишем конституенту нуля для одиннадцатого набора шести переменных (0,0,1,0,1,1). В соответствии с вышеприведенным правилом составим дизъюнкцию x_i аргументов, в которой аргументы x_3, x_5, x_6 имеют знак инверсии:

$$M_{11}=x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5 \vee \bar{x}_6.$$

Теорема 1.2. Любая таблично заданная переключательная функция может быть представлена в виде конъюнкции конституент нулей тех наборов, на которых функция принимает нулевые значения:

$$f(x_1,x_2,\ldots\ldots x_n)=M_{i1}\cdot M_{i2}\cdot\ldots\ldots M_{ik}=\bigwedge_{i_j\in T_0} M_{ij}. \qquad (1.38)$$

где T_0 есть множество наборов, на котором заданная функция f обращается в нуль.

Докажем теорему. Выберем набор аргументов, на котором заданная функция принимает нулевое значение. По условию теоремы, в соответствии с (1.38), правая часть должна содержать конституенту нуля, соответствующую выбранному набору, и которая на этом наборе принимает нулевое значение. Если учтем свойство конъюнкции $x\cdot 0=0$, тогда правая часть соотношентя (1.38) принимает нулевое значение. Следовательно, на этом наборе равенство имеет место.

Возмем набор, на котором функция принимает единичное значение. По условию теоремы в правой части соотношения (1.38) не содержится конституента нуля, соответствующая выбранному набору. Для тех конституент, которые входят в правую часть соотношения, номер взятого набора не совпадает, поэтому они на этом наборе получают единичные значения. Если учесть свойство конъюнкции $1\cdot 1=1$, то правая часть получает единичное значение. Таким образом на выбранном наборе равенство соблюдается.

Функция, заданная в виде (1.38), называется представлением функции *в совершенной конъюнктивной нормальной форме (СКНФ)*.

В соответствии с приведенным выше рассуждением, получение совершенной конъюнктивной нормальной формы функции возможно в следующей последовательности:

1.Из таблицы должны быть выбраны наборы , на которых функция принимает нулевые значения.

2.Для набором в соответствии с вышерассмотренным правилом, составим конституенты нулей.

3.Полученные конституенты объединим конъюнкцией.

Для примера представим в СКНФ переключательную функцию трех аргументов таблицей 1.14.

Таблица 1.14.

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x_1,x_2,x_3)$	0	1	1	0	1	0	1	1

Заданная функция принимает нулевое значение на трех наборах- нулевом (0,0,0), третьем (0,1,1) и пятом (1,0,1). Составим соответствующие конституенты нулей:

$$M_0=x_1\vee x_2\vee x_3,\ M_3=x_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3,\ M_5=\bar{x}_1\vee x_2\vee\bar{x}_3.$$

СКНФ заданной функции будет иметь вид

$$f(x_1,x_2,x_3)=M_0\cdot M_3\cdot M_5=(x_1\vee x_2\vee x_3)\cdot(x_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)\cdot(\bar{x}_1\vee x_2\vee\bar{x}_3).$$

Аналогично СДНФ, совершенную конъюнктивную нормальную форму также можем использовать для представления функции в базисе {-,&,V}.

Например, представим $f_{13}(x_1,x_2)=x_1\rightarrow x_2$ функцию в СКНФ. По таблице 1.4 функция принимает нулевое значение только на втором наборе ,

которому соответствует конституента нуля $M_2=x_1\vee\bar{x}_2$.

СКНФ функции имеет вид $f(x_1,x_2)=\bar{x}_1\vee x_2$.

В соотношении (1.38) вместо конъюнкции можем подставить равнозначность. При этом остаются в силе утверждения теоремы 1.2. Таким образом, функция может быть также представлена конституентами нуля, объединенными операцией равнозначности:

$$f(x_1,x_2,.....x_n)=M_{i1}\sim M_{i2}\sim\cdots\sim M_{ij}, \qquad (1.39)$$

где $i_1,i_2,....i_j$ – номера наборов, на которых функция принимает нулевые значения.

Если вместо конъюнкции в выражении (1.36) подставим равнозначность, получим представление функции в виде (1.37).

Для вышерассмотренного примера будем иметь:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee x_2\vee x_3)\sim(x_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)\sim(\bar{x}_1\vee x_2\vee\bar{x}_3).$$

Г Л А В А 2

Минимизация переключательных функций

2.1. Основные определения

Рассмотренные выше СДНФ и СКНФ предназначены для представления переключательных функций в исходной форме с использованием основных функционально полных систем. Однако эти формы часто являются довольно сложными. Во многих случаях их удается упростить, так как они содержат такие члены, которые можно исключить при представлении функций в другой форме.

Например, задана функция $f(x_1,x_2)=x_1 \cdot \bar{x}_2 \vee x_1 \cdot x_2$ в СДНФ. Представим ее в следующем виде: $f(x_1,x_2)=x_1 \cdot (x_2 \vee \bar{x}_2)$. Если примем во внимание, что $x \vee \bar{x}=1$ и $x \cdot 1=x$, тогда заданную функцию можно представить в другой форме: $f(x_1,x_2)=x_1$. Приведенный пример показывает, насколько важно иметь методы представления функции в рациональной форме. В связи с этим последующий этап синтеза логических схем заключается в упрощении представления функций. Этот этап синтеза называется этапом минимизации.

В порядке уточнения постановки вопроса вводим некоторые определения. Допустим, имеем множество n переменных $\{x_1,x_2,\ldots\ldots x_n\}$. Из указанных переменных и их инверсии можем составить различные конъюнкции. Например:

$x_1 \cdot x_2$, $x_3 \cdot \bar{x}_4$, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$, и т.д.

Определение 2.1. Конъюнкция переменных, в которую они входят со знаком инверсии или без него, называется *элементарной конъюнкцией.* Одна переменная, например x_1, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ также является элементарной конъюнкцией. Так как $x \cdot x=x$, то включение в конъюнкцию одинаковых переменных не имеет смысла.

Определение 2.2. *Рангом* элементарной конъюнкции называется количество букв, которые составляют эту конъюнкцию.

Определение 2.3. Дизъюнкция элементарных конъюнкций называется *дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)*.

Кроме ДНФ существуют также другие формы дизъюнкции. Например, выражения $\overline{x_1 \cdot x_2} \vee \bar{x}_1$, $x_2 \vee \overline{x_2 \cdot x_3}$ не являются ДНФ, так как $\overline{x_1 \cdot x_2}$ и $\overline{x_2 \cdot x_3}$ не являются элементарными конъюнкциями.

Определение 2.4. ДНФ функции $f(x_1,x_2,\ldots\ldots x_n)$, которая содержит только элементарные конъюнкции n ранга, является СДНФ.

Из определения следует, что в СДНФ входят такие элементарные конъюнкции, которые в случае заданной функции имеют максимально возможный ранг. Поэтому, с точки зрения ранга СДНФ является самой сложной.

Определение 2.5. *Длиной ДНФ* называется количество элементарных конъюнкций, которые составляют ДНФ.

ДНФ, которая имеет минимальную длину среди всех ДНФ функций, называется *кратчайшей ДНФ (КДНФ).*

Определение 2.6. Кратчайшая ДНФ, которая содержит минимальное количество букв среди эквивалентных КДНФ, называется минимальной ДНФ (МДНФ).

Аналогичные определения введем и для конъюнктивных форм.

Определение 2.7. Дизъюнкция переменных, входящих в нее с инверсией или без знака инверсии, называется *элементарной дизъюнкцией.*

Например, при четырех переменных x_1, x_2, x_3, x_4 можно построить дизъюнкции:

x_4, $x_1 V x_3$, $\bar{x}_1 V x_2 V x_3$, $x_1 V x_2 V \bar{x}_3$ и т.д.

Определение 2.8. *Рангом элементарной дизъюнкции* называется количество букв, которые составляют эту дизъюнкцию.

Определение 2.9. Конъюнкция элементарных дизъюнкций называется *конъюнктивной нормальной формой (КНФ).*

Определение 2.10. КНФ функции $f(x_1,x_2,\ldots x_n)$, которая составлена из элементарных дизъюнкций n ранга, является совершенной конъюнктивной нормальной формой. Так же как и СДНФ, СКНФ, с точки зрения ранга, представляет самую сложную форму функции.

Определение 2.11. *Длиной КНФ* называется количество элементарных дизъюнкций, которые составляют эту КНФ.

Определение 2.12. КНФ, которая имеет кратчайшую длину среди других КНФ, называется *кратчайшей конъюнктивной нормальной формой (ККНФ).*

Определение 2.13. КНФ переключательной функции является минимальной , если содержит минимальное количество букв среди всех КНФ.

Минимальные формы переключательных функций могут быть найдены аналитическим или табличным методами.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию задачи минимизации. Ниже используем геометрическое представление функции в дизъюнктивной форме.

Рассматриваем класс аналитических функций, которые представлены в следующем виде: $f = \underset{1}{V} \gamma$, где γ - элементарные конъюнкции.

Вернемся к геометрическому представлению области определения функции. Для ясности рассмотрим функцию трех переменных, хотя приведенное ниже рассуждение также справедливо для общего случая.

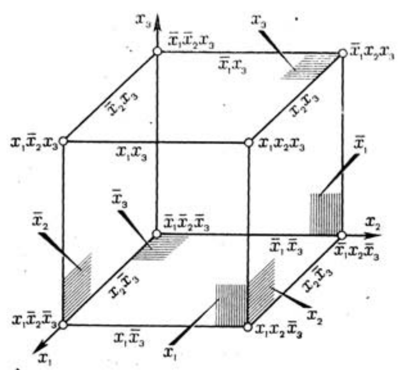


Рис. 2-1.

На рис. 2.1 приведена область определения функций трех аргументов. Элементам куба приведем в соответствие элементарные конъюнкции различных рангов: вершинам куба- конъюнкции третьего ранга, ребрам – второго ранга, граням – первого ранга. При представлении функции в СДНФ задаются те наборы, на которых функция принимает единичные значения. Допустим, имеем функцию, представленную в СДНФ:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\cdot x_2\cdot x_3 V x_1\cdot \bar{x}_2\cdot x_3 V x_1\cdot x_2\cdot \bar{x}_3 V x_1\cdot x_2\cdot x_3.$$

Такое представление означает, что функция принимает единичное значение на наборах 3,5,6,7, что компактно можно записать

$$f(x_1,x_2,x_3)=3\ V\ 5\ V\ 6\ V\ 7=V\ (3,5,6,7).$$

Если зачерним вершины куба, соответствующие наборам, на которых функция принимает единичные значения, получим геометрическое представление функции. Для вышеприведенного примера, функция представлена на рис. 2.2.

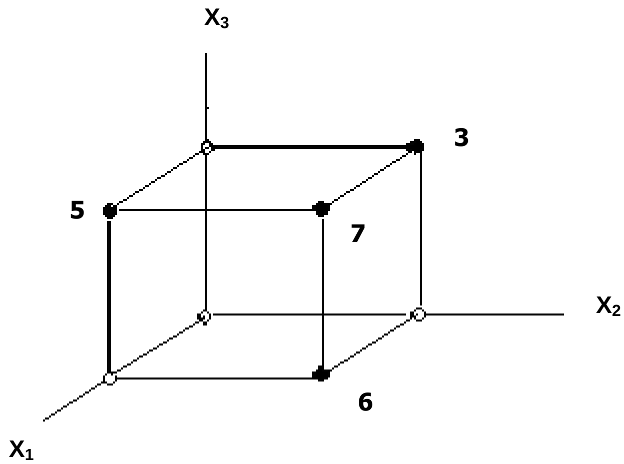


Рис.2.2.

Если две конъюнкции высокого ранга отличаются друг от друга только одной переменной, можем их заменить конъюнкцией меньшего ранга, которая содержит общие члены исходных конъюнкций. Например, конъюнкции третьего ранга $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ и $x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3$ можно заменить конъюнкцией $x_1 \cdot x_2$ более низкого ранга. Соединение конъюнкций можем представить операцией $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 = x_1 \cdot x_2$, которая называется склеиванием. Склеиванием конъюнкции второго ранга получим конъюнкцию первого ранга. Например, $x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 = x_1$.

Склеиванием четырех конъюнкций третьего ранга получим конъюнкцию первого ранга:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 = x_1 \cdot x_2 (x_3 \vee \bar{x}_3) \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot (x_3 \vee \bar{x}_3) = x_1 \cdot x_2 \vee$$

$$\vee x_1 \cdot \bar{x}_2 = x_1 \cdot (x_2 \vee \bar{x}_2) = x_1.$$

С точки зрения геометрической интерпретации представления функции, каждая пара конъюнкции третьего ранга, соответствующая соседним вершинам куба, заменяется конъюнкцией низкого ранга, которая соответствует ребру куба, соединяющему указанные вершины. Два противоположных ребра куба заменяются конъюнкцией, соответствующей грани куба, соединяющей указанные ребра.

Определение 2.14. *Интервалом ранга конъюнкции* называется подмножество вершин куба, склеиванием которых получена указанная конъюнкция.

Например, из рис.2.1. конъюнкции x_1 соответствует множество вершин

$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$, $x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$, $x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3$, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$.

Допустим, на некотором наборе функция f получает значение a_1, а функция φ – значение a_2. Тогда говорят, что функция f на заданном наборе покрывает значением a_1, значение a_2 функции φ.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма строится так, что каждое единичное значение функции покрывается единичным значением только одной конституенты единицы. Поэтому количество конституент в СДНФ равно количеству тех наборов, на которых функция принимает единичное значение. Например, при представлении функции в СДНФ –

$$f(x_1,x_2)=\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \vee x_1 \cdot x_2,$$

каждая конституента покрывает единичное значение функции своим единичным значением только на одном наборе (0,0), (1,0) или (1,1), соответственно. Легко можно убедиться, что интервал покрывает единичным значением единичные значения функции на нескольких наборах теми конституентами, которые соответствуют элементарной конъюнкции низкого ранга.

Например, конъюнкции $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$, $x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3$ единичными значениями покрывают единичные значения функции соответственно на наборах (1,1,1) и (1,1,0). А $x_1 \cdot x_2$ конъюнкция, которая получается путем склеивания выше–указанных конъюнкций, единичным значением покрывает функцию на обоих наборах. Поэтому в форме представления функций в некотором случае более выгодна, с точки зрения простоты, замена нескольких членов их соединяющей элементарной конъюнкцией.

Вершины, соответствующие наборам, на которых функция принимает единичные значения, составляют множество T_1 . Определение ДНФ заданной функции эквивалентно определению таких интервалов, которые совместно покрывают множество T_1.

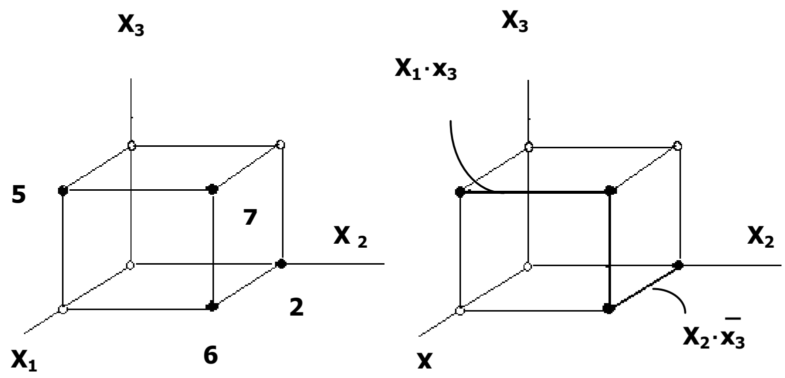
Например, СДНФ функции $f(x_1,x_2,x_3)$ имеет вид:

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3.$$

Вместо показанной формы можно представить ДНФ, которая более проста, если соответствующие конституенты заменим соединяющими элементарными конъюнкциями

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1 \cdot x_3 \vee \bar{x}_2 \cdot x_3.$$

На рис.2.3. а) показано представление функции в СДНФ, а на рис.2.3. б) – представление той же функции в ДНФ.



а) б)

Рис.2.3.

Рассмотрим задачу минимизации, как задачу получения минимальной дизъюнктивной формы функции. Если обозначить ранги всех интервалов, которые покрывают заданную функцию, $r_1, r_2, \ldots r_m$, тогда

$$R=\sum_{1}^{m} r_i \qquad (2.2)$$

характеризует суммарный ранг ДНФ. Минимизация заключается в нахождении таких интервалов, которые покрывают T_1 множество и суммарный ранг R которых будет минимальным.

Определение 2.15. Если некоторая функция φ (в частном случае, элементарная конъюнкция) равняется нулю на тех наборах, на которых принимает нулевое значение f функция, тогда говорят, что *φ функция входит в f функцию*. Таким образом, φ функция входит в f функцию, если она нулями покрывает все нулевые значения f функции. При этом единичные значения f функции могут быть покрыты как нулями, так и единичными значениями φ функции. Вхождение одной функции в другую записывается как $\varphi \subset f$.

Например,в функцию $f_6(x_1,x_2)=\bar{x}_1\cdot x_2 \vee x_1\cdot \bar{x}_2$ (табл.1.4) входят функции, которые получают нулевые значения на наборах (0,0) и (1,1), т.е.

$f_4(x_1,x_2)=x_1\cdot \bar{x}_2$, $f_2(x_1,x_2)= \bar{x}_1\cdot x_2$, $f_0(x_1,x_2)=0$, поэтому можем записать

$\bar{x}_1\cdot x_2 \subset f_6(x_1,x_2)$; $x_1\cdot \bar{x}_2 \subset f_6(x_1,x_2)$; $0 \subset f_6(x_1,x_2)$.

Константа нуля, очевидно, входит в любую переключательную функцию, а в константу единицы входят все переключательные функции.

Функция, входящая в f функцию, называется импликантой последней.

Определение 2.16. *Простой импликантой f функции* называется такая элементарная конъюнкция, которая сама входит в эту функцию, и никакая из ее собственных частей не входит в эту функцию.

Собственной частью является конъюнкция, которая получается из заданной элементарной конъюнкции путем исключения одной или нескольких переменных.

Например, конъюнкция $x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$ имеет собственные части: $x_1 \cdot \bar{x}_2$, $x_1 \cdot x_3$, $\bar{x}_2 \cdot x_3$, x_1, $\bar{x}_2$, x_3.

Допустим, удовлетворяются условия:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4 \subset f(x_1,x_2,x_3,x_4);$$

$$x_2 \cdot \bar{x}_4 \subset f(x_1,x_2,x_3,x_4);$$

$$x_2 \not\subset f(x_1,x_2,x_3,x_4);$$

$$\bar{x}_4 \not\subset f(x_1,x_2,x_3,x_4).$$

Тогда конъюнкция $x_2 \cdot \bar{x}_4$ есть простая импликанта $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ функции (символ $\not\subset$ означает, условие вхождения не удовлетворяется). Простые импликанты являются самыми короткими элементарными конъюнкциями, входящими в функцию f.

Если некоторая элементарная конъюнкция входит в функцию, то новая конъюнкция, полученная путем добавления переменной к исходной конъюнкции, также будет входить в эту функцию, так как она становится нулем вместе с исходной функцией.

Для получения простых импликант переключательных функций выпишем все элементарные конъюнкции, входящие в эту функцию, и выберем из них те элементарные конъюнкции, собственные части которых не входят в функцию.

Рассмотрим функцию трех переменных (табл.2.1.).

Таблица 2.1.

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x_1,x_2,x_3)$	0	0	0	1	1	1	0	0

В эту переключательную функцию входят четыре элементарные конъюнкции: $\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3$, $x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$, $x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$ и $x_1 \cdot \bar{x}_2$. Подстановкой значений аргументов можем убедиться, что представленные конъюнкции принимают нулевые значения на тех же наборах, на которых и сама функция. Из них простыми импликантами являются только две – $\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ и $x_1 \cdot \bar{x}_2$.

Конъюнкции $x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$ и $x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$ не являются простыми импликантами, так как их собственные части входят в функцию.

Теорема 2.1. Любая переключательная функция равна дизъюнкции всех своих простых импликант.

Рассмотрим наборы, на которых функция равняется нулю. Так как, по определению, все простые импликанты входят в функцию и становятся нулями на тех же наборах, что и функция , будет нулем и их дизъюнкция.

Рассмотрим наборы, на которых функция получает единичные значения. Для каждого из этих наборов в дизъюнкции окажется хотя бы одна простая импликанта, которая принимает единичное значение. Действительно, простые импликанты выбираются среди тех элементарных конъюнкций , которые входят в функцию. В число таких конъюнкций входят также конституенты единиц. А любая простая импликанта является собственной частью этих конституент (или является конституентой).

Если какая– нибудь конституента не входит в число простых импликант , это значит, что она заменена более короткой элементарной конъюнкцией – простой импликантой. Очевидно, простая импликанта должна принимать единичные значения на тех наборах, на которых принимают единичные значения конституенты единицы, порождающие указанную импликанту. Поэтому среди всех простых импликант обязательно окажется такая, которая принимает единичное значение вместе с функцией.

Таким образом, дизъюнкция простых импликант покрывает значения нулей и единиц функций.

Определение 2.17. Дизъюнкция простых импликант, которая покрывает множество T_1, называется сокращенной формой.

На рис.2.4. показано покрытие множества T_1 ДНФ функции, рассмотренной выше (рис.2.3. а). Сокращенная форма имеет следующий вид:

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1 \cdot x_3 \vee x_2 \cdot \bar{x}_3 \vee x_1 \cdot x_2.$$

Необходимо отметить, что сокращенная ДНФ в общем случае не является минимальной формой. В этом можем убедиться на осноловании сравнения примеров приведенных на рис.2.3 б) и рис.2.4. На рис.2.3. б) представлено покрытие минимальной ДНФ, а на рис.2.4 представленная форма является сокращенной ДНФ.

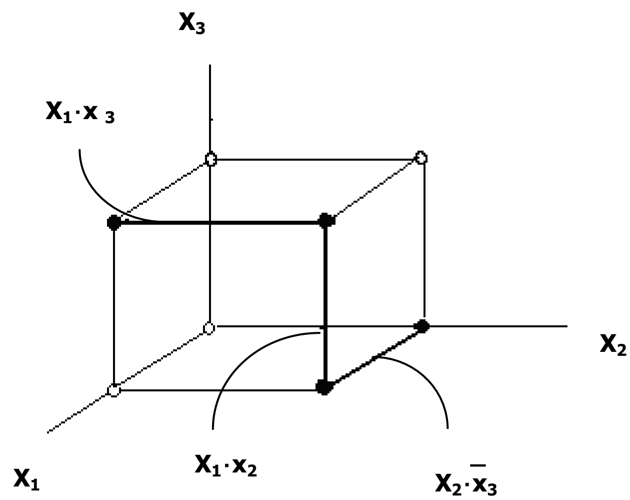


Рис.2.4.

Последующим этапом упрощения переключательной функции является получение тупиковой, а затем минимальной формы. В некотором случае сокращенные формы содержат лишние импликанты, при исключении которых из ДНФ покрытие все же обеспечивается .

Определение 2.18. Дизъюнкция простых импликант, из которых нельзя исключить простую импликанту, называется *тупиковой дизъюнктивной нормальной формой функции.*

Переключательные функции могут иметь несколько тупиковых форм. Тупиковая форма, которая содержит минимальное количество букв, называется *минимальной*.

2.2. Методы получения сокращенной дизъюнктивной нормальной формы

Существуют различные способы получения сокращенных дизъюнктивных нормальных форм. С точки зрения практического использования, наиболее целесообразным является метод Квайна. Этот метод основывается на преобразовании СДНФ в сокращенную форму путем неполного склеивания и поглощения.

Операция склеивания была показана выше формулой (2.1). Сущность операции поглощения определяется следующим соотношением:

$$x_1 \vee x_1 \cdot x_2 = x_1. \qquad (2.3)'$$

Говорят, что x_1 конъюнкция поглощает элементарную конъюнкцию высокого ранга $x_1 \cdot x_2$. Справедливость этого выражения вытекает из следующего преобразования:

$$x_1 \vee x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot (1 \vee x_2) = x_1 \cdot 1 = x_1.$$

При методе Квайна используется неполное склеивание, которое предусматривает в выражении после склеивания, наряду с короткими элементарными конъюнкциями, наличие элементарных конъюнкций высокого ранга, участвующих в склеивании:

$$x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 = x_1 \vee x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2. \qquad (2.4)$$

Теорема 2.2. (Теорема Квайна). Если в СДНФ переключательной функции выполним неполное склеивание и поглощение, получим сокращенную дизъюнктивную нормальную форму переключательной функции или дизъюнкцию простых импликант.

Для доказательства теоремы сперва покажем, что в результате склеивания получим все простые импликанты заданной функции. Так как выполняем неполное склеивание, в полученной форме следует оставлять все импликанты, которые участвовали в склеивании. Это необходимо, так как при склеивании членов дизъюнктивной формы один и тот же член может склеиваться с несколькими, поэтому преждевременное удаление этих импликант нецелесообразно. Полученная таким образом дизъюнктивная форма содержит, кроме простых импликант, другие элементарные конъюнкции различных рангов (в том числе конституент единиц). Если в дальнейшем выполним операцию поглощения, тогда в дизъюнктивной форме останутся только простые импликанты. Покажем справедливость такого утверждения.

Допустим, после выполнения склеивания между членами дизъюнкции, полученная форма представления функции содержит некоторый q член, который не является простой импликантой. Этот член должен входить в заданную функцию, в противном случае, полученное выражение не обеспечивает равенство. Но, по нашему допущению, q не является простой импликантой, т.е. в него входит какая-то собственная часть p, которая представляет простую импликанту. Поэтому q поглощается простой импликантой p.

Таким образом, теорема Квайна доказана. Как вытекает из теоремы Квайна, преобразование должно начаться с представления функции в СДНФ. Если функция не задана в СДНФ, ее следует предварительно привести к СДНФ с использованием операции разворачивания, которая является противоположной склеиванию. Эта операция выполняется логическим умножением некоторого члена на выражение $\bar{x} \vee x$, которое не меняет значение этого члена. С использованием указанной операции, любую функцию можем представить дизъюнкцией конституент единиц.

Например, допустим, в выражении содержится импликанта $x_1 \vee \bar{x}_2$. Эту импликанту можно развернуть в конституенты при помощи показанной выше операции:

$$x_1\cdot\bar{x}_2=x_1\cdot\bar{x}_2\cdot(x_3\vee\bar{x}_3)=x_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3\vee x_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3= x_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3\cdot(x_4\vee\bar{x}_4)\vee x_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3\cdot(x_4\vee\bar{x}_4)=$$

$$=x_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3\cdot x_4\vee x_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3\cdot\bar{x}_4\vee x_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3\cdot x_4\vee x_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3\cdot\bar{x}_4.$$

Получение сокращенной дизъюнктивной нормальной формы практически удобно в следующей последовательности.

Выполним операции неполного склеивания и поглощения в СДНФ функции $f(x_1,x_2,\ldots x_n)$. Полученная форма будет содержать элементарные конъюнкции n и n-1 рангов. На следующем этапе выполним неполное склеивание членов n-1 ранга и поглощение. В результате получим новую форму, которая содержит элементарные конъюнкции n, n-1, n-2 рангов. На следующем этапе попытаемся склеить члены n-2 ранга, затем выполним поглощение и т.д. Указанная процедура выполняется пока это возможно. В результате получим форму представления функции, содержащую простые импликанты разных рангов, которые не поглотились после склеивания на различных шагах. Это и есть сокращенная дизъюнктивная нормальная форма.

Рассмотрим пример. Найдем сокращенную дизъюнктивную нормальную форму функции $f(x_1,x_2,x_3)= \bar{x}_1\cdot x_3\vee\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3\vee x_1\cdot x_2\cdot\bar{x}_3$.

Представим заданную функцию в СДНФ. Для этого первый член дизъюнкции умножим на $\bar{x}_2\vee x_2$, а второй- на $\bar{x}_1\vee x_1$.

$$f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\cdot x_3\cdot(x_2\vee\bar{x}_2)\vee\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3\cdot(x_1\vee\bar{x}_1)\vee x_1\cdot x_2\cdot\bar{x}_3= \overset{1}{\bar{x}_1\cdot x_2\cdot x_3}\vee \overset{2}{\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3}\vee\overset{3}{x_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3}\vee$$

$$\vee\overset{4}{\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3}\vee\overset{5}{x_1\cdot x_2\cdot\bar{x}_3}.$$

Выполним склеивание первого члена с остальными, второго с остальными и т.д. Результат склеивания запишем в следующем виде:

1^* - 2^* $\bar{x}_1\cdot x_3$ (по x_2);

$2 – 4^*$ $\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2$ (по x_3);

3^* - 4 $\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3$ (по x_1);

$3 – 5^*$ $x_1\cdot\bar{x}_3$ (по x_2);

В начале каждой строки отмечены номера тех членов, склеиванием которых получены элементарные конъюнкции этой строки. В скобках содержится буква, по которой было выполнено склеивание. Звездочкой отмечены те члены, которые поглощаются.

В рассмотренном примере поглощаются все конституенты единиц, содержащиеся в СДНФ. Полученная ДНФ имеет вид:

$$f(x_1,x_2,x_3)= \bar{x}_1\cdot x_3\vee\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\vee\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3\vee x_1\cdot\bar{x}_3.$$

В полученном выражении дальнейшее склеивание невозможно, поэтому оно является сокращенной ДНФ.

Пример. Найти сокращенную дизъюнктивную нормальную форму функции

$$\mathbf{f}(x_1,x_2,x_3,x_4)=\bar{x}_1\cdot x_2\cdot \bar{x}_3 V \, x_1\cdot \bar{x}_3\cdot \bar{x}_4 V \, x_1\cdot \bar{x}_2\cdot \bar{x}_3\cdot x_4 V \, \bar{x}_1\cdot \bar{x}_2\cdot \bar{x}_3\cdot \bar{x}_4.$$

Для развертывания элементарных конъюнкций до конституенты единицы, перый член умножим на $(x_4 V \bar{x}_4)$, второй – на $(x_2 V \bar{x}_2)$. Получим

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)= \overset{1}{\bar{x}_1\cdot x_2\cdot \bar{x}_3\cdot x_4} V \, \overset{2}{\bar{x}_1\cdot x_2\cdot \bar{x}_3\cdot \bar{x}_4} V \, \overset{3}{x_1\cdot x_2\cdot \bar{x}_3\cdot \bar{x}_4} V \, \overset{4}{x_1\cdot \bar{x}_2\cdot \bar{x}_3\cdot \bar{x}_4} V \, \overset{5}{x_1\cdot \bar{x}_2\cdot \bar{x}_3\cdot x_4} V \, \overset{6}{\bar{x}_1\cdot \bar{x}_2\cdot \bar{x}_3\cdot \bar{x}_4}.$$

Выполним операцию склеивания:

$$1^* - 2^* \; \bar{x}_1\cdot x_2\cdot \bar{x}_3 \text{ (по } x_4);$$

$$2 - 3^* \; x_2\cdot \bar{x}_3\cdot \bar{x}_4 \text{ (по } x_1);$$

$$2 - 6^* \; \bar{x}_1\cdot \bar{x}_3\cdot \bar{x}_4 \text{ (по } x_2);$$

$$3 - 4^* \; x_1\cdot \bar{x}_3\cdot \bar{x}_4 \text{ (по } x_2);$$

$$4 - 5^* \; x_1\cdot \bar{x}_2\cdot \bar{x}_3 \text{ (по } x_4);$$

$$4 - 6 \; \bar{x}_2\cdot \bar{x}_3\cdot \bar{x}_4 \text{ (по } x_1).$$

После операции склеивания получим:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)= \overset{1}{\bar{x}_1\cdot x_2\cdot \bar{x}_3} V \, \overset{2}{x_2\cdot \bar{x}_3\cdot \bar{x}_4} V \, \overset{3}{\bar{x}_1\cdot \bar{x}_3\cdot \bar{x}_4} V \, \overset{4}{x_1\cdot \bar{x}_3\cdot \bar{x}_4} V \, \overset{5}{x_1\cdot \bar{x}_2\cdot \bar{x}_3} V \, \overset{6}{\bar{x}_2\cdot \bar{x}_3\cdot \bar{x}_4}.$$

Снова выполним склеивание в полученной форме:

$$2^* - 6^* \; \bar{x}_3\cdot \bar{x}_4 \text{ (по } x_2);$$

$$3^* - 4^* \; \bar{x}_3\cdot \bar{x}_4 \text{ (по } x_1).$$

Второй, тетий, четвертый и шестой члены поглощаются, а первый и пятый члены остаются в дизъюнкции, так как они не склеиваются и не поглощаются. Таким образом, получим сокращенную ДНФ:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)= \bar{x}_3\cdot \bar{x}_4 V \, \bar{x}_1\cdot x_2\cdot \bar{x}_3 V \, x_1\cdot \bar{x}_2\cdot \bar{x}_3.$$

Из сокращенной формы в некотором случае возможно исключить простые импликанты, если при этом значение формы представления функции не меняется. Как было сказано выше, получаем тупиковые формы, среди которых находятся минимальные формы.

2.3. Способы получения тупиковых и минимальных форм

Следующим этап упрощения переключательных функций заключается в нахождении тупиковых и минимальных форм. Как было отмечено выше, в некотором случае сокращенные формы содержат импликанты, исключение которых не меняет значение дизъюнктивной формы.

Рассмотрим функцию, которая задана в СДНФ:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3 \vee x_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3 \vee x_1\cdot x_2\cdot x_3.$$

С использованием операции склеивания и поглощения получаем сокращенную нормальную форму

$$f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2\cdot x_3 \vee x_1\cdot x_3.$$

Легко можем убедиться, что в полученной форме импликанту $\bar{x}_2\cdot x_3$ можем исключить. Действительно, умножением члена $\bar{x}_2\cdot x_3$ на $x_1 \vee \bar{x}_1$ и применением поглощения, получим

$$f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2 \vee x_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3 \vee \bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3 \vee x_1\cdot x_3=\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2 \vee x_1\cdot x_3.$$

Иначе говоря, оставшиеся члены покрывают единицей единичные значения функции на тех же наборах, на каторых покрывал бы единицей исключенный член.

Определение 2.19. Дизъюнкция простых импликант, из которых невозможно исключить ни один член, называется *тупиковой формой.*

Тупиковая форма, которая содержит наименьшее количество букв, является *минимальной формой.*

Для получения минимальной дизъюктивной формы необходимо найти все тупиковые формы функции и среди них выбрать минимальную.

Существуют разные способы получения тупиковых форм. Среди них, с практической точки зрения, сравнительно удобным является графический, с использованием импликантных матриц.

Получение минимальной формы с помощью импликантных матриц.

При представлении функции в СДНФ, указанный способ осуществляется в несколько этапов.

Рассмотрим конкретный пример. Задана переключательная функция в СДНФ:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)= \bar{x}_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4 \vee \bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3\cdot x_4 \vee x_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3\cdot x_4 \vee x_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3\cdot x_4 \vee x_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3\cdot\bar{x}_4$$
$$\vee\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3\cdot\bar{x}_4.$$

Минимизация этой функции выполняется в следующей последовательности:

1.Получение простых импликант. Для этого определяется сокращенная форма функции, с использованием метода Квайна. Сокращенная форма может содержать простые импликанты различных рангов. В результате выполнения этого этапа получим сокращенную форму заданной функции:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\bar{x}_1\cdot x_3\cdot x_4 \vee \bar{x}_2\cdot x_3\cdot x_4 \vee x_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_4 \vee x_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\cdot\bar{x}_3\cdot\bar{x}_4.$$

В полученной форме простыми импликантами являются элементарные конъюнкции третьего ранга.

2. Составление импликантных матриц. Импликантная матрица представляет собой таблицу, каждый столбец которой соответствует конституенте, входящей в СДНФ, а каждая строка простой импликанте, входящей в сокращенную форму. Те ячейки таблицы, которые находятся на пересечении строки некоторой простой импликанты и столбцов конституент единиц, склеиванием которых получены указанные импликанты, отмечаются звездочками. Для приведенного выше примера импликантная матрица будет иметь следующий вид (табл.2.2.).

Таблица 2.2

N пп	Простые импли–канты	Конституенты единиц					
		$\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4$	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4$	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4$	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4$	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4$
		1	2	3	4	5	6
1	$\bar{x}_1 \cdot x_3 \cdot x_4$	*	*				
2	$\bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4$		*	*			
3	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_4$			*	*		
4	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$				*	*	
5	$\bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4$.					*	*

Для получения минимальной дизъюнктивной формы необходимо найти минимальное количество простых импликант , которые совместно покрывают звездочками все столбцы импликантной матрицы.

Удобно получение такого покрытия в следующей последовательности.

а) Поиск существенных импликант. Если в некотором столбце содержится только одна звездочка, тогда простая импликанта соответствующей строки является существенной. Очевидно, такая импликанта обязательно должна войти в искомую ДНФ, так как без этой импликанты покрытие импликантной матрицы невозможно. В приведенном примере минимальная форма должна содержать простые импликанты $\bar{x}_1 \cdot x_3 \cdot x_4$ и $\bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4$, так как только они покрывают первый и шестой столбцы. При выполнении следующего этапа существенные импликанты и все те столбцы, которые они покрывают, следует исключить из импликантной матрицы. В рассмотренном примере такими столбцами являются 1,2,5 и 6.

Б) Поиск лишних строк. Если на предыдущем этапе после исключения столбцов в таблице оказались такие строки, которые не содержат ни одной звездочки, тогда соответствующую этой строке простую импликанту следует исключить из таблицы, так как она не покрывает ни один столбец.

В) Поиск лишних импликант. Если на предыдущем этапе после исключения столбцов в таблице оказались такие строки, которые содержат звездочки в одинаковых столбцах, тогда из соответствующих импликант достаточно оставить одну.

Г) В результате анализа таблицы выбирается такое подмножество простых импликант, которые покрывают оставшиеся после вычеркивания столбцы в таблице. К тому же, в случае нескольких возможных вариантов, преимущество отдается минимальному количеству букв.

В приведенном примере надо покрыть 3 и 4 столбцы. Для этого можем выбрать подмножество импликант $\bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ и $x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_4$ или $\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$ и $\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_4$ или $\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_4$. На основании вышесказанного, минимальную форму дает включение импликанты $\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_4$.

В результате получим тупиковую форму, которая является минимальной:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)= \bar{x}_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \vee \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4.$$

Если для покрытия столбцов 3 и 4 выберем импликанты $\bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ и $x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_4$, тогда получим другую тупиковую форму

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)= \bar{x}_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_4 \vee \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4,$$

которая не является минимальной формой.

Недостатком получения сокращенной формы по методу Квайна является необходимость проверки всех элементарных конъюнкций одинакового ранга на склеивание, что при большем их количестве намного усложняет получение сокращенной формы. Поэтому в подобном случае использование указанного способа практически неудобно.

Усовершенствованный вариант известен, как метод Квайна-Мак Класски. Идея Мак-Класски заключается в следующем. Если элементарные конъюнкции представим соответствующими им двоичными кодами, тогда указанные конъюнкции можем разделить на группы. В i- ую группу войдут все те конъюнкции, двоичный код которых содержит i единиц. Тогда сравнение нужно провести между кодами групп, которые на единицу отличаются друг от друга, так как склеивание может иметь место только между ними.

При таком условии количество сравнений может существенно уменьшится.

Для примера рассмотрим заданную в СДНФ функцию, которая принимает единичные значения на наборах 0,1,2,3,4,6,7,8,9,11,15.

Запишем номера соответствующих конституент единиц по группам, с учетом количества единиц:

нулевая группа 0000^*;

первая группа $0001^*, 0010^*, 0100^*, 1000^*$;

вторая группа $0011^*, 0110^*, 1001^*$;

третья группа $0111^*, 1011^*$;

четвертая группа 1111^*.

Проведем склеивание между группами. Символом "-" отметим позицию той буквы, по которой осуществилось склеивание. Если выполним операцию склеивания, получим импликанты третьего ранга (символом "*" отмечены те импликанты, которые поглощаются). После выполнения склеивания получим резельтат:

нулевая группа $000\text{-}^*, 00\text{-}0^*, 0\text{-}00^*, \text{-}000^*$;

первая группа $00\text{-}1^*, \text{-}001^*, 001\text{-}^*, 0\text{-}10^*, 01\text{-}0^*, 100\text{-}^*$;

вторая группа $0\text{-}11^*, \text{-}011^*, 10\text{-}1^*$;

третья группа $\text{-}111^*, 1\text{-}11^*$.

Аналогично на следующем шаге получим импликанты второго ранга:

нулевая группа 00--, -00-, 0—0;
первая группа -0-1, 0-1-;
вторая группа --11.

Для дальнейшей минимизации составим импликантную матрицу (табл.2.3)

Таблица 2.2

N пп	Простые импликанты	Конституенты единиц										
		0000	0001	0010	0011	0100	0110	0111	1000	1001	1011	1111
1	00--	*	*	*	*							
2	-00-	*	*						*	*		
3	0--0	*		*		*	*					
4	-0-1		*		*					*	*	
5	0-1-			*	*		*	*				
6	--11				*			*			*	*

Последующий этап минимизации совпадает с ранее описанным методом использования импликантной матрицы.

Для приведенного примера получим минимальную форму:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3 V \bar{x}_1\cdot\bar{x}_4 V x_3\cdot x_4.$$

Минимизация переключательных функций с использованиеем диаграмм Вейча

С точки зрения упрощения процесса склеивания более выгодным способом является минимизация с использованием диаграмм Вейча. Диаграмма Вейча представляет собой сетку, сторона каждой ячейки которой соответствует некоторому аргументу. Поэтому можем считать, каждая ячейка представляет набор аргументов. На рис.2.5. а) приведена диаграмма Вейча для двух аргументов. На этой диаграмме верхняя ячейка слева соответствует набору (1.1) аргументов x_1,x_2, нижняя ячейка слева – набору (0.1) и т.д.

	x_2	$\bar{x}_2$
x_1	1.1	1.0
$\bar{x}_1$	0.1	0.0

а)

	x_2	$\bar{x}_2$
x_1	$x_1\cdot x_2$	$x_1\cdot\bar{x}_2$
$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1\cdot x_2$	$\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2$

б)

	x_2	$\bar{x}_2$
x_1	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \vee x_2$
$\bar{x}_1$	$x_1 \vee \bar{x}_2$	$x_1 \vee x_2$

в)

Рис.2.5.

Если в каждой ячейке запишем конституенту, которая на соответствующем наборе принимает единичное (рис.2.5.б) или нулевое (рис.2.5.в) значение,тогда диаграмму можем использовать для представления конституент единиц или нулей, соответственно.

Для представления в СДНФ функции с помощью диаграммы Вейча, единицы следует записать в ячейках, на которых функция принимает единичные значения, нули – в ячейках тех наборов, на которых функция принимает нулевые значения, т.е. соответствующие конституентам, не вошедшим в СДНФ.

Для примера, с помощью диаграмм Вейча представим некоторые функции, содержащиеся в таблице 1.4:

$f_3(x_1,x_2)=x_1$ (Рис.2.6.а), $f_5(x_1,x_2)=x_2$ (Рис.2.6.б), $f_{12}(\bar{x}_1,x_2)=x_1$ (Рис.2.6.в) ,

$f_{10}(x_1,x_2)=\bar{x}_2$ (Рис.2.6.г).

	x_2	$\bar{x}_2$
x_1	1	1
$\bar{x}_1$	0	0

а)

	x_2	$\bar{x}_2$
x_1	1	0
$\bar{x}_1$	1	0

б)

	x_2	$\bar{x}_2$
x_1	0	0
$\bar{x}_1$	1	1

в)

	x_2	$\bar{x}_2$
x_1	0	1
$\bar{x}_1$	0	1

г)

Рис.2.6

Как видно из приведенных диаграмм, пара единиц, расположенных в соседних ячейках, представляются одной буквой, так как конституенты единиц, содержащиеся в соответствующих ячейках, склеиваются между собой. Это обстоятельство может быть использовано при получении минимальной формы.

Например, рассмотрим представление на диаграмме Вейча функции $f_{13}(x_1,x_2)=x_1\to x_2$. СДНФ этой функции имеет вид:

$$f_{13}(x_1,x_2)=\bar{x}_1\cdot x_2 \vee \bar{x}_1\cdot \bar{x}_2 \vee x_1\cdot x_2.$$

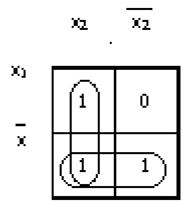


Рис.2.7

Пара единиц, расположенных в нижних ячейках, соответствует конституентам единиц $\bar{x}_1\cdot x_2$ и $\bar{x}_1\cdot \bar{x}_2$, которые склеиваются по переменной x_2, в результате чего они заменяются переменной $\bar{x}_1$. А расположенные в левом столбце единицы соответствуют конституентам единиц $\bar{x}_1\cdot x_2$ и $x_1\cdot x_2$, которые склеиваются по переменной x_1. В результате получим переменную x_2 (рис.2.7). Минимальная форма будет иметь вид

$$f_{13}(x_1,x_2)=\bar{x}_1 \vee x_2.$$

Для трех переменных диаграмма Вейча показана на рис.2.6. а) и б).

	x_2		$\bar{x}_2$	
x_1	$x_1\cdot x_2\cdot \bar{x}_3$	$x_1\cdot x_2\cdot x_3$	$x_1\cdot \bar{x}_2\cdot x_3$	$x_1\cdot \bar{x}_2\cdot \bar{x}_3$
$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1\cdot x_2\cdot \bar{x}_3$	$\bar{x}_1\cdot x_2\cdot x_3$	$\bar{x}_1\cdot \bar{x}_2\cdot x_3$	$\bar{x}_1\cdot \bar{x}_2\cdot \bar{x}_3$
	$\bar{x}_3$	x_3		$\bar{x}_3$

а)

	x_2		$\bar{x}_2$	
x_1	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$	$\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$	$\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3$
$\bar{x}_1$	$x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$	$x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$	$x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$	$x_1 \vee x_2 \vee x_3$
	$\bar{x}_3$	x_3		$\bar{x}_3$

б)

Рис.2.8.

Диаграмму Вейча можно представить, как цилиндр, если стороны крайних столбцов соединить. Две расположенные рядом единицы в диаграмме Вейча указывают на склеиваемость соответствующих конституент единиц (рис.2.9. а,б,в,г).

	x_2		$\bar{x}_2$	
x_1	1	1	0	0
$\bar{x}_1$	0	0	0	0
	$\bar{x}_3$	x_3		$\bar{x}_3$

а) Функция $f(x_1,x_2,x_3)=x_1 \cdot x_2$.

	x_2		$\bar{x}_2$	
x_1	0	0	0	0
$\bar{x}_1$	0	1	1	0
	$\bar{x}_3$	x_3		$\bar{x}_3$

б) Функция $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\cdot x_3$.

	x_2		$\bar{x}_2$	
x_1	0	0	1	0
$\bar{x}_1$	0	0	1	0
	$\bar{x}_3$	x_3		$\bar{x}_3$

в) Функция $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_2\cdot x_3$.

	x_2		$\bar{x}_2$	
x_1	0	0	0	0
$\bar{x}_1$	1	0	0	1
	$\bar{x}_3$	x_3		$\bar{x}_3$

г) Функция $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\cdot\bar{x}_3$

Рис.2.9.

Четыре единицы, расположенные рядом, указывают на склеиваемость соответствующих конституент единиц по двум буквам (рис.2.10.а,б,в) .

	x_2		$\bar{x}_2$	
x_1	0	1	1	0
$\bar{x}_1$	0	1	1	0
	$\bar{x}_3$	x_3		$\bar{x}_3$

а) Функция $f(x_1,x_2,x_3)=x_3$.

	x_2	x_2	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_2$
x_1	0	0	0	0
$\bar{x}_1$	1	1	1	1
	$\bar{x}_3$	x_3	x_3	$\bar{x}_3$

б) Функция $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1$.

	x_2	x_2	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_2$
x_1	1	0	0	1
$\bar{x}_1$	1	0	0	1
	$\bar{x}_3$	x_3	x_3	$\bar{x}_3$

в) Функция $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_3$.

Рис.2.10.

С использованием диаграммы Вейча установление минимальной формы заключается в нахождении самых коротких простых импликант.

Рассмотрим функцию, заданную в СДНФ,

$$f(x_1,x_2,x_3)= x_1,x_2,\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1,x_2,\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1,x_2,x_3 \vee x_1,\bar{x}_2,x_3 \vee x_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,$$

которой соответствует диаграмма Вейча, представленная на рис.2.11.

	x_2	x_2	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_2$
x_1	1	0	1	1
$\bar{x}_1$	1	1	0	1
	$\bar{x}_3$	x_3	x_3	$\bar{x}_3$

Рис.2.11

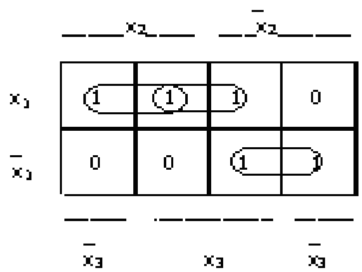
Четыре единицы в первом и четвертом столбцах покрываются простой импликантой $\bar{x}_3$. А остальные две единицы можем объединить с единицами в левой нижней и в правой верхней ячейках (склеиваются по букве x_3). Полученная форма является минимальной:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_3 V \bar{x}_1\cdot x_2 V x_1\cdot \bar{x}_2.$$

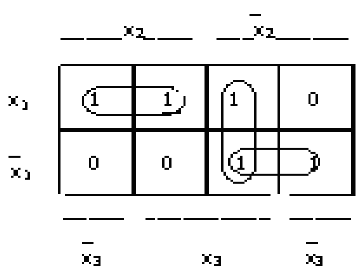
Рассмотрим пример. Функция задана в СДНФ

$$f(x_1,x_2,x_3)= x_1,x_2,\bar{x}_3 V\ x_1,x_2,x_3 V\ x_1,\bar{x}_2,x_3 V\ \bar{x}_1,\bar{x}_2,x_3 V\ \bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3.$$

Заданная функция представляется в следующем виде:



а)



б)

Рис.2.12

Как показано на рис.2.12, различные варианты объединения единиц дают две минимальные формы функции:

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1\cdot x_2 V x_1\cdot x_3 V \bar{x}_1\cdot \bar{x}_2,$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1\cdot x_2 V \bar{x}_2\cdot x_3 V \bar{x}_1\cdot \bar{x}_2.$$

В случае функции четырех переменных диаграмма Вейча имеет вид:

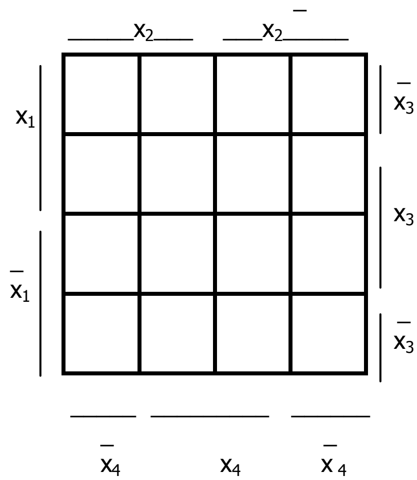


Рис.2.13

На этой диаграмме восьми единицам соответствует одна буква (склеивание выполняется по трем буквам). Четырем единицам, расположенным рядом, соответствует конъюнкция двух переменных (склеиваются по двум переменным). Двум рядом стоящим единицам соответствует конъюнкция трех переменных (склеивание выполняется по одной букве).

Например, найдем минимальную форму функции, заданной в СДНФ:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)= x_1\cdot x_2\cdot \bar{x}_3\cdot \bar{x}_4 \vee x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\cdot x_2\cdot \bar{x}_3\cdot x_4 \vee \bar{x}_1\cdot \bar{x}_2\cdot x_3\cdot x_4 \vee$$
$$x_1\cdot \bar{x}_2\cdot x_3\cdot \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\cdot \bar{x}_2\cdot x_3\cdot \bar{x}_4.$$

Соответствующая этой функции диаграмма предлагается на рис.2.14.

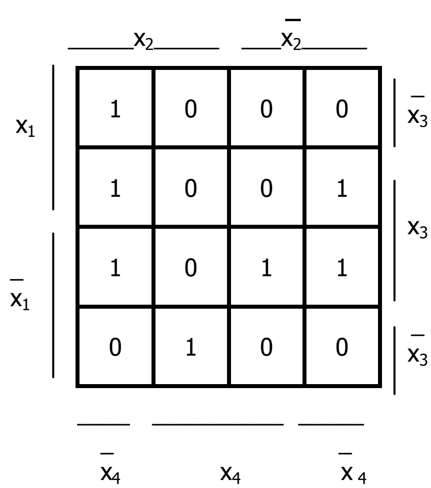


Рис.2.14

По приведенной диаграмме более рациональное покрытие дает минимальную форму

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)= x_3\cdot\overline{x}_4 V x_1\cdot x_2\cdot\overline{x}_4 V\overline{x}_1\cdot\overline{x}_2\cdot x_3 V\ \overline{x}_1\cdot x_2\cdot\overline{x}_3\cdot x_4.$$

В случае функции пяти переменных диаграмма принимает следующий вид:

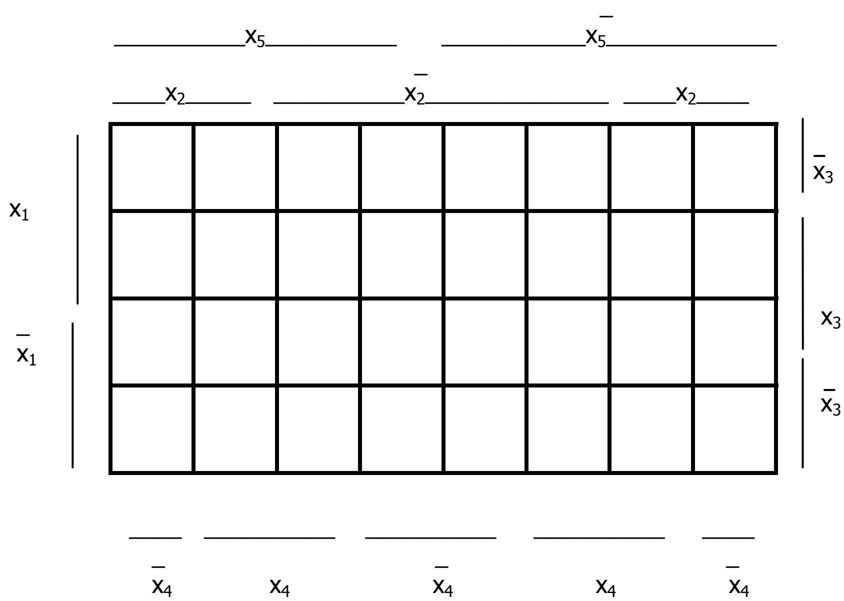


Рис.2.15.

В этом случае склеиваемость по переменной x_5 определяется одинаковым расположением ячеек в таблице x_5 и $\overline{x}_5$.

Практически можно построить диаграмму Вейча для большого количества аргументов, но с увеличением количества переменных работа с диаграммой усложняется, так как определение соседства ячеек в этом случае становится затруднительным.

2.4.Способы получения минимальных конъюнктивных форм

Во многих случаях удобнее выполнять минимизацию в конъюнктивных формах. Существует несколько способов получения минимальных конъюнктивных форм. Рассмотрим несколько из них.

Получение минимальной конъюнктивной формы с использованием импликантных матриц

Аналогично вышерассмотренным минимальным дизъюнктивным формам, необходимо ввести для конъюнктивных форм понятия вхождения одной функции в другую, простой импликанты, сокращенной формы и т.д. Так как перечисленные понятия аналогичны вышерассмотренным понятиям для дизъюнктивной формы, ограничимся показом получения минимальной конъюнктивной формы.

1. Необходимо представить функцию в СКНФ. Если функция представлена в конъюнктивной форме, отличной от СКНФ, ее легко можно развернуть до СКНФ с использованием операции разворачивания:

$$x_1 V(x_2 \cdot \bar{x}_2)=(x_1 V x_2)\cdot(x_1 V \bar{x}_2);$$

$$(x_1 V x_2)V(x_3 \cdot \bar{x}_3)=(x_1 V x_2 V x_3)\cdot(x_1 V x_2 V \bar{x}_3) \quad \text{и т.д.}$$

С последовательным выполнением показанной выше операции любую элементарную дизъюнкцию, входящую в форму представления функции, можно привести к конституентам нуля. После объединения одинаковых членов получим СКНФ.

2. Выполняется неполное склеивание и поглощение между членами конъюнктивной формы, пока это возможно (по аналогии с методом Квайна для дизъюнктивной формы).

Операции неполного склеивания и поглощения для конъюнкции определяются следующими соотношениями:

Неполное склеивание – $(x_1 V x_2)\cdot(x_1 V \bar{x}_2)=x_1\cdot(x_1 V x_2)\cdot(x_1 V \bar{x}_2)$ (2.5)

Поглощение - $x_1\cdot(x_1 V x_2)=x_1$.

После выполнения указанных операций получим сокращенную конъюнктивную нормальную форму.

2. Получение из сокращенной формы минимальной формы возможно с использованием одного из методов минимизации, в частности, с использованием импликантной матрицы. Составление импликантной матрицы для конъюнктивных форм, аналогично рассмотренному правилу для дизъюнктивной формы. Импликантная матрица для конъюнктивных форм – это таблица, столбцы которой соответствуют конституентам нулей, входящих в СКНФ, а строки соответствуют элементарным дизъюнкциям, входящих в сокращенной форме. Те ячейки таблицы, которые находятся на пересечении столбцов, соответствующих конституентам нуля и строк, соответствующих элементарной дизъюнкции, полученной в результате склеивания указанных конституент нулей, отмечены звездочками. Минимальная форма записывается как конъюнкция минимального количества членов, которые звездочками совместно покрывают все столбцы матрицы. Последовательность поиска таких членов полностью совпадает с последовательностью минимизации для дизъюнктивной формы.

Например. Найдем минимальную конъюнктивную форму переключательной функции, которая задана в следующем виде:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1 V \bar{x}_3)\cdot(\bar{x}_1 V \bar{x}_2 V x_3)\cdot(x_2 V x_3)\cdot(\bar{x}_1 V \bar{x}_2 V \bar{x}_3).$$

1. Функция не представлена в СКНФ,поэтому восстановим ее до СКНФ с использованием операции развертывания:

$$x_1 V \bar{x}_3=(x_1 V \bar{x}_3)V(x_2\cdot \bar{x}_2)=(x_1 V x_2 V \bar{x}_3)\cdot(x_1 V \bar{x}_2 V \bar{x}_3);$$

$$x_2 V x_3=(x_2 V x_3)V(x_1\cdot \bar{x}_1)=(x_1 V x_2 V x_3)\cdot(\bar{x}_1 V x_2 V x_3).$$

Подставляя полученные значения, будем иметь СКНФ функции:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\overset{1}{(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)}\cdot\overset{2}{(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)}\cdot\overset{3}{(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)}\cdot\overset{4}{(x_1 \vee x_2 \vee x_3)}\cdot\overset{5}{(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)}\cdot\overset{6}{(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)}.$$

2.Выполним операцию склеивания. Результат склеивания приводится в виде таблицы, аналогично склеиванию в дизъюнктивных формах:

$1^* - 2^*$ $x_1 \vee \bar{x}_3$ (по x_2);

$1 - 4^*$ $x_1 \vee x_2$ (по x_3);

$2 - 6^*$ $\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$ (по x_1);

$3^* - 5^*$ $\bar{x}_1 \vee x_3$ (по x_2);

$3 - 6$ $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$ (по x_3);

$4 - 5$ $x_2 \vee x_3$ (по x_1).

Так как дальнейшее склеивание невозможно, получаем сокращенную форму функции:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1 \vee \bar{x}_3)\cdot(x_1 \vee x_2)\cdot(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)\cdot(\bar{x}_1 \vee x_3)\cdot(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)\cdot(x_2 \vee x_3).$$

3.Построим импликантную матрицу (табл.2.4):

Таблица 2.4

Простые импликанты	Конституенты нулей					
	$x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$	$x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$	$x_1 \vee x_2 \vee x_3$	$\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3$	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$
	1	2	3	4	5	6
$x_1 \vee \bar{x}_3$	*	*				
$x_1 \vee x_2$	*			*		
$\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$		*				*
$\bar{x}_1 \vee x_3$			*		*	
$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$			*			*
$x_2 \vee x_3$				*	*	

После анализа импликантной матрицы получим две минимальные формы функции:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1 \vee \bar{x}_3)\cdot(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)\cdot(x_2 \vee x_3);$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1 \vee x_2)\cdot(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)\cdot(\bar{x}_1 \vee x_3).$$

Возможно использовать другой метод минимизации конъюнктивной формы, который основывается на преобразовании дизъюнктивной формы функции. Рассмотрим указанный метод.

1. Составим дизъюнкцию тех конституент единиц, которые не входят в СДНФ функции. В это множество войдут конституенты единиц тех наборов, на которых функция принимает нулевые значения. Ниже будет показано, что полученная форма представляет инверсию СДНФ заданной функции.

2. Из полученной формы найдем минимальную дизъюнктивную форму по вышеприведенным правилам.

3. Путем инверсии полученной минимальной формы и, проводя преобразования по формулам де Моргана в конъюнктивную форму, будем иметь также минимальную форму.

Для обоснования рассмотренного выше правила, достаточно доказать следующие два положения:

1 Дизъюнкция всех конституент единиц, не входящих в функцию $f(x_1,x_2,..x_n)$, представляет отрицание заданной функции $\bar{f}(x_1,x_2,..x_n)$.

2. Преобразование минимальной дизъюнктивной формы функции $\bar{f}(x_1,x_2,..x_n)$ с использованием формул де Моргана, дает минимальную конъюнктивную форму функции $f(x_1,x_2,..x_n)$.

Прежде всего надо отметить, что дизъюнкция конституент единиц всех наборов аргументов дает единицу.

Например, для двух аргументов

$$\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1\cdot x_2 \vee x_1\cdot\bar{x}_2 \vee x_1\cdot x_2=1,$$

так как в этом случае имеем четыре набора и, каждая конституента принимает единичное значение на одном наборе. В общем случае для наборов n аргументов имеем:

$$K_0 \vee K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_{2^n-1}=1. \qquad (2.7)$$

Рассмотрим некоторую функцию, заданную в СДНФ

$$f(x_1,x_2,\ldots x_n)=K_{j1} \vee K_{j2} \vee \ldots \vee K_{jm}, \qquad (2.8)$$

где m – количество тех наборов, на которых функция принимает единичные значения. Отметим конституенты единиц, не вошедшие в СДНФ функции $K_{i1},K_{i2},..K_{ip}$, где $p=2^n-m$ - количество наборов, на которых функция равняется нулю. Тогда согласно равенству (2.7), имеем

$$K_{i1} \vee K_{i2} \vee \ldots \vee K_{ip} \vee K_{j1} \vee K_{j2} \vee \ldots \vee K_{jm}=1.$$

С учетом соотношения (2.8) можем записать

$$\bar{f}(x_1,x_2,..x_n) \vee f(x_1,x_2,..x_n) =1. \quad (2.9)$$

Если примем во внимание, что $x \vee \bar{x}=1$, тогда равенство (2.9) запишется в следующем виде:

$$f(x_1,x_2,..x_n) \vee \bar{f}(x_1,x_2,..x_n)=1,$$

откуда следует

$$\bar{f}(x_1,x_2,..x_n)= K_{i1} \vee K_{i2} \vee \ldots \vee K_{ip},$$

что и требовалось доказать.

Легко заметить, что преобразование по формулам де Моргана не меняет количество букв в представлении функции. Поэтому, если преобразуем минимальную форму функции $\bar{f}(x_1,x_2,..x_n)$ в конъюнктивную форму с использованием формул де Моргана, она будет минимальной для функции $f(x_1,x_2,..x_n)$. Если допустим, что эта форма не является минимальной, тогда должна существовать конъюнктивная форма, которая должна содержать меньшее количество букв. Эта форма, очевидно,получается преобразованием по де Моргану из такой дизъюнктивной формы, которая также имеет меньшее количество букв, чем выбранная минимальная форма.Это противоречит условию. Поэтому допущение, что полученная форма не минимальна, не верно.

Например, найти минимальную конъюнктивную форму для заданной в таблице 2.5 функции.

Таблица 2.5.

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x_1,x_2,x_3)$	1	1	0	0	0	1	0	1

1.Согласно вышеприведенному правилу, составим дизъюнктивную форму, в которую войдут конституенты единицы, соответствующие наборам 2,3,4,6, так как на этих наборах функция получает нулевые значения:

$$\bar{f}(x_1,x_2,..x_n)=\bar{x}_1\cdot x_2\cdot \bar{x}_3 V\ \bar{x}_1\cdot x_2\cdot x_3 V\ x_1\cdot \bar{x}_2\cdot \bar{x}_3 V\ x_1\cdot x_2\cdot \bar{x}_3.$$

2.После неполного склеивания и поглощения получаем сокращенную ДНФ

$\bar{f}(x_1,x_2,..x_n)$ функции:

$$\bar{f}(x_1,x_2,..x_n)=\bar{x}_1\cdot x_2 V x_2\cdot \bar{x}_3 V x_1\cdot \bar{x}_3.$$

3. Составим импликантную матрицу и выполним минимизацию (табл 2.6.)

Таблица 2.6.

Простые импликант ы	Конституенты единиц			
	$\bar{x}_1\cdot x_2\cdot \bar{x}_3$	$\bar{x}_1\cdot x_2\cdot x_3$	$x_1\cdot \bar{x}_2\cdot \bar{x}_3$	$x_1\cdot x_2\cdot \bar{x}_3$
$\bar{x}_1\cdot x_2$	*	*		
$x_2\cdot \bar{x}_3$	*			*
$x_1\cdot \bar{x}_3$			*	*

Минимальная дизъюнктивная форма функции $\bar{f}(x_1,x_2,..x_n)$ имеет вид

$$\bar{f}(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\cdot x_2 V x_1\cdot \bar{x}_3.$$

Инвертируем обе части равенства, и выполним преобразование по формулам де Моргана. В результате получим минимальную конъюнктивную форму:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\overline{\bar{x}_1\cdot x_2 V x_1\cdot \bar{x}_3}=(x_1 V \bar{x}_2)\cdot(\bar{x}_1 V x_3).$$

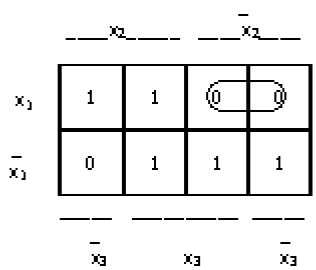
Минимизация конъюнктивной нормальной формы с использованием диаграммы Вейча

Для минимизации конъюнктивной формы можно использовать также диаграмму Вейча. В этом случае нули заносятся в те ячейки диаграммы, конституенты нулей которых содержатся в СКНФ функции. В остальные ячейки заносятся единицы. Нахождение минимальной конъюнктивной формы заключается в определении таких импликант минимального ранга, которые совместно нулями покрывают все нули диаграммы. Расположение нулей также указывает на склеивание соответствующих конституент нулей, аналогично дизъюнктивной форме.

Например. Задана функция в СКНФ

$$f(x_1,x_2,x_3)=(\bar{x}_1 V x_2 V \bar{x}_3)\cdot(\bar{x}_1 V \bar{x}_2 V x_3)\cdot(\bar{x}_1 V x_2 V x_3).$$

Составим диаграмму Вейча:



На основании этой диаграммы получим минимальную конъюнктивную форму:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1 V \bar{x}_2)\cdot(\bar{x}_1 V x_2 V \bar{x}_3).$$

Г Л А В А 3

Анализ и синтез комбинационных схем

3.1.Логические сети

Целью настоящего курса является изучение математической теории анализа и синтеза физических устройств, предназначенных для преобразования дискретной информации.

При математическом описании тех или иных физических объектов, как правило, отвлекаются от целого ряда второстепенных факторов и процессов, действующих в этих физических объектах. Такая абстракция необходима для создания математической модели целого класса родственных между собой физических процессов.

Мы будем изучать не сами устройства, а некоторым образом адекватные им математические схемы. Эта адекватность выражается в том, что работа обеих схем (физических, реально действующих, и математической, абстрактной) описывается с помощью одних и тех же математических соотношений.

Такую адекватную математическую схему мы будем называть логической сетью.

Дадим более четкое определение понятия логической сети. Пусть имеем конечное множество А:

$$A=\{1,2,3,\ldots\ldots m\}.$$

И пусть нам задано множество В, элементами которого является упарядоченные пары элементов множества А

$$B=\{(i,j)\},$$

где i,j –любые из элементов множества А, $i \neq j$.

Пусть, наконец, нам задано некоторое множество F, элементами которого являются логические функции

$$F=\{f_1,f_2,\ldots.f_r\}.$$

Установим однозначное отображение множества А на F,т.е. сопоставим каждому элементу множества А один из элементов множества F.

Определение 3.1. Совокупность множества А и В совместно с однозначным отображением множества А на множестве F называется *логической сетью.*

Геометрической интерпретацией логической сети служит некоторая схема логической сети, которая строится следующим образом.

На плоскости в произвольном порядке располагаются элементы множества А (для их обозначения будем использовать кружок). Эти элементы называются вершинами графа (рис.3.1). Символ соответствующего данному кружку элементта i (т.е. номеру) пишется рядом с этим кружком.

Внутри кружка вписывается элемент множества F, сопоставленный при отображении А на F элементу, соответствующему данному кружку. Наконец, все кружки соединяются между собой ориентированными стрелками согласно элементам множества В. Элементу (i,j) соответствует стрелка, идущая от кружка, сопоставленного элементу i,к кружку, сопоставленному элементу j. Эти стрелки носят название дуги графа.

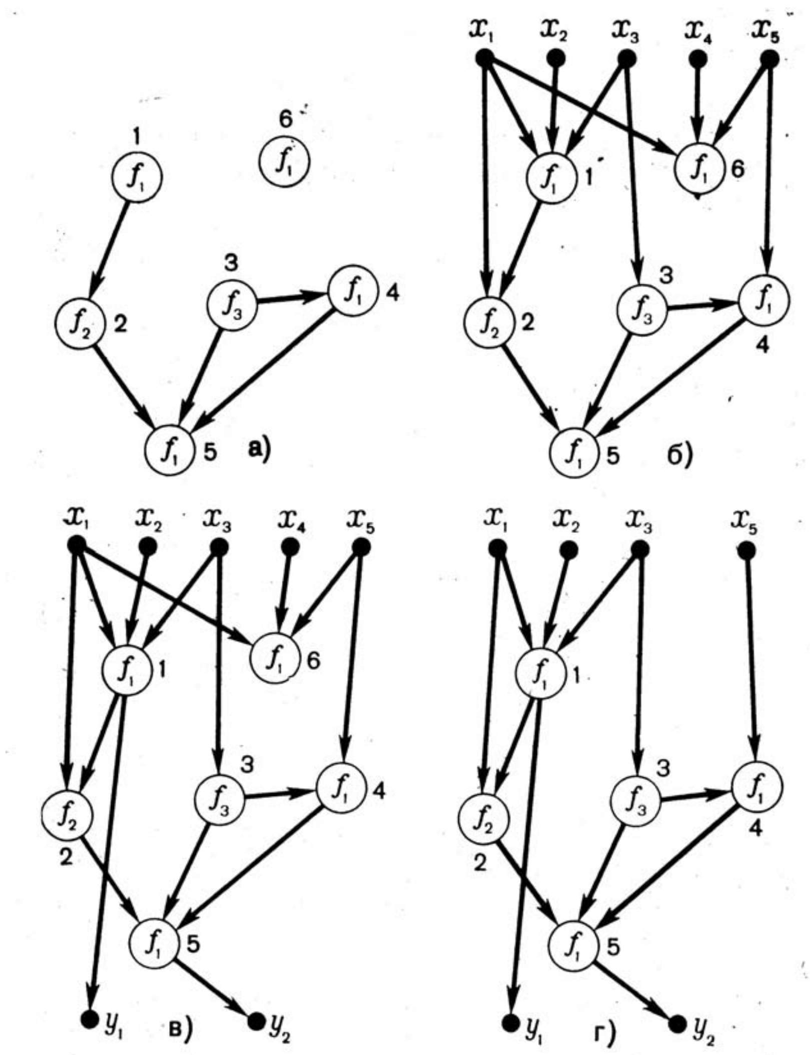


Рис.3.1

Рассмотрим пример. Заданы множества A={1,2,3,4,5,6}; B={(1,2),(3,4),(4,5),(2,5),(3,5)}; F={f_1,f_2,f_3} и отображение A на F, заданное как:

$$f_1 \leftarrow 1,4,5,6;$$

$$f_2 \leftarrow 2;$$

$$f_3 \leftarrow 3.$$

Соответствующая схема заданной логической сети показана на рис.3.1, а.

Рассмотрим множества аргументов X={x_1,x_2,…x_n}.Произведем отображение некоторых подмножеств множества X на элементы множества A

$$X^* \longrightarrow a_i,$$

где X^* - некоторое подмножество множества X.

При геометрической интерпретации элементы множества X будем изображать жирными точками и называть входами логической сети. Задание отображения подмножества X на элементе a_i эквивалентно заданию множества C следующего вида:

$$C=\{(X^*,i)\}.$$

Геометрической интерпретацией множества C являются дуги, приведенные из соответствующих входов схемы к вершинам графа, сопоставленным нужным элементам множества A.

Например, для логической сети рис.3.3, б заданы:

$$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\};$$

$$C=\{(x_1,x_2,x_3\,;1)\,,(x_3\,;3),(x_5\,;4),(x_1,x_4,x_5\,;6)\}.$$

Соответствующая схема логической сети приведена на рис.3.1, б.

Потребуем, чтобы для всех элементов множества B(I,j) i<j. Подобную логическую сеть назовем упорядоченной или логической сетью без обратной связи.

Рассмотрим, наконец, множество выходов

$$Y=\{y_1,y_2,\ldots y_k\}.$$

Произведем взаимно однозначное отображение некоторого подмножества A^* множества A на множестве Y. Геометрической интерпретацией этого отображения будут дуги, направленные от элементов множества A к соответствующим элементам множества Y. Элементы множества Y, как и элементы множества X, будем обозначать жирными точками.

Допустим, для логической сети рис.3.1, б определено множество $Y=\{y_1y_2\}$ и взаимно однозначное отображение

$$1\leftarrow y_1;$$

$$5\leftarrow y_2.$$

Соответствующая схема логической сети приведена на рис.3.1, в.

После отображения некоторых вершин графа на множество Y в графе могут остаться вершины, из которых не выходит ни одна дуга. Такие вершины называются тупиковыми. Исключим их, а также ребра, идущие к ним. Оставшуюся после этого схему логической сети будем называть логическим многополюсником. Если множество X содержит n элементов, а множество Y содержит K элементов, то такой многополюсник будем называть логическим (N,K) полюсником. Для регулярной логической схемы, данной на рис.3.1, в вершина 6 является тупиковой. После ее удаления остается логический (5,2)-полюсник .

Теперь ограничим отображение множества A на F следующим образом. Потребуем, чтобы функция f_i, сопоставляемая вершине с номером i, зависела от стольких аргументов, сколько дуг входит в данную вершину.

Логическая сеть, для которой выполнено это требование, назовем *правильной.*

Определение 3.2. Упорядоченная и правильная логическая сеть называется *регулярной логической сетью (РЛС).*

Ограничимся рассмотрением только регулярных сетей.

3.2. Анализ логических схем

Рассмотрим решение задачи получения логической функции (или системы функций), отражающей структуру логической сети. Для логического (n,k)-полюсника эти функции имеют вид:

$$y_1=f_1(x_1,x_2,\ldots x_n);$$

$$y_2=f_2(x_1,x_2,\ldots x_n); \qquad (3.1)$$

. . . .

$$y_k=f_k\ (x_1,x_2,\ldots x_n).$$

Система (3.1) называется системой собственных функций (n,k)-полюсника. Таким образом, задача анализа данной схемы логической сети сводится к написанию системы собственных функций для этой сети. На рис.3.2 показана схема логического (n,k)-полюсника, которая имеет следующий вид:

$$y_1=\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3\,;$$

$$y_2=x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4.$$

Анализ схемы дает однозначное написание ее собственных функций, которое отражает структуру схемы. Особенно наглядна связь между написанием собственных функций и структурой схемы, если пользоваться скобочной формой записи.

Для схемы, изображенной на рис.3.2, скобочная запись " от входа к выходам" выглядит следующим образом:

$$(\bar{x}_1) \vee [(\bar{x}_2) \& (\bar{x}_3)]=y_1;$$

$$x_2 \vee x_3 \vee (\bar{x}_4)=y_2.$$

Разные сети могут совпадать, с точки зрения их логического описания. Например, на рис.3.3 показана схема логического (n,k)-полюсника, система собственных функций которого имеет вид:

$$y_1=\overline{x_1 \cdot (x_1 \cdot x_2 \vee x_2 \vee x_3)};$$

$$y_2=x_1 \cdot x_2 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4.$$

Проведем преобразование этой системы функций:

$$y_1=\overline{x_1 \cdot (x_1 \cdot x_2 \vee x_2 \vee x_3)}=\bar{x}_1 \vee \overline{(x_2 \vee x_3)}=\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3;$$

$$y_2=x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4.$$

Совпадение преобразованных собственных функций сетей из рис.3.2 и рис.3.3 показывает,что, с точки зрения логического описания, они идентичны.

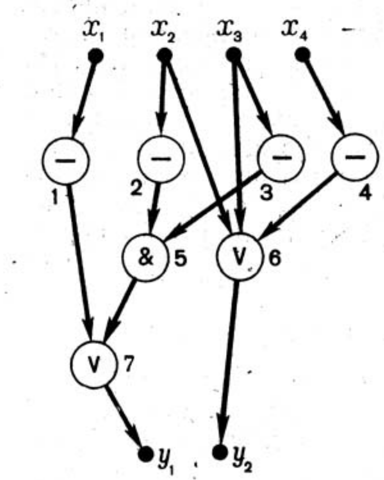


Рис. 3-2.

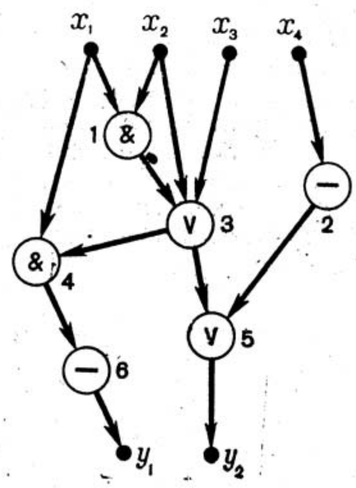


Рис. 3-3.

Определение 3.3. Две схемы логической сети, у которых собственные функции равны, называются эквивалентными. Схемы (4-2) полюсников из рис 3.2 и рис.3.3 эквивалентны между собой.

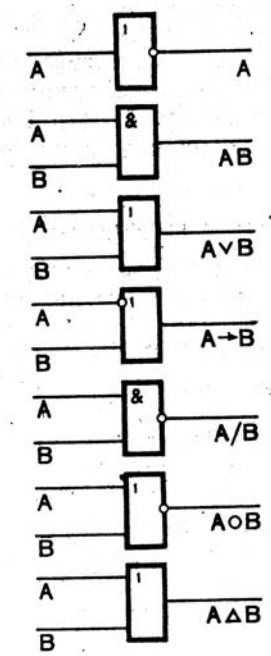


Рис. 3-4.

В дальнейшем удобно несколько изменить правила геометрической интерпретации логических сетей. Во – первых, вместо обозначения вершин графа с помощью кружков будем использовать стандартные обозначения для наиболее часто встречающихся логических функций (рис.3.4), при этом будем предполагать, что все логические элементы, кроме элемента, моделирующего функцию отрицания, имеют два входа. Кроме того, в дальнейшем не будем указывать множество вершин, сопоставляемых множествам X и Y. Эти вершины просто будут подразумеваться. Соответствующие стрелки, идущие от вершин множества X к вершинам множества A и от вершины множества A к вершинам множества Y, будут обрываться, а в местах обрыва будут указываться вершина X или Y, которые связываются этой дугой. Наконец, не будем ставить номер вершины.

В соответствии с указанными изменениями на рис.3.5 изображена схема логической сети, представленной на рис.3.3.

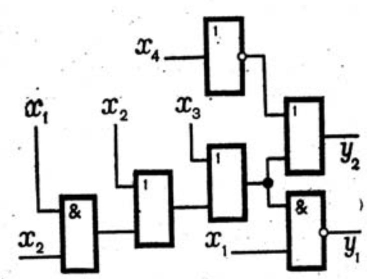


Рис. 3-5.

Анализ различных схем, с точки зрения логики их работы, производится в два этапа. Сначала из имеющейся принципиальной схемы удаляются все несущественные вспомогательные элементы, которые не влияют на логику работы схемы, а служат для обеспечения устойчивости ее работы, исправления форм сигналов и т.д. После этого получаем схему, состоящую лишь из элементов, выполняющих логические функции, и связей между ними. Такая схема эквивалентна заданию некоторой схемы логической сети.

3.3. Синтез логической схемы

Задача синтеза обратна задаче анализа. Синтез состоит в построении реальной логической схемы, исходя из описания ее работы. Под описанием работы схемы подразумевается формулирование основных технических требований, по тем или иным причинам предъявляемых к синтезируемому устройству.Синтез состоит из трех этапов. Сначала по заданному описанию составляются некоторые матаматические соотношения, адекватно отображающие данное описание.

На втором этапе полученные математические зависимости реализуются на некоторой функциональной схеме.

Наконец, на третьем этапе полученная функциональная схема преобразуется в некоторую принципиальную схему.

Из этих трех этапов нас будет, в основном, интересовать лишь второй этап, так как тртий этап полностью определяется конструктивными требованиями, предъявляемыми к синтезируемому устройству,а первый этап зависит от опыта и интуиции инженера или математика.

3.4. Синтез логической схемы с одним выходом

Рассмотрим задачу (n,1)-полюсника, т.е. схем, имеющих n входов и один выход. Известно, что математическое описание интересующих нас схем может быть получено с помощью переключательных функций. Таким образом, будем считать, что при решении задачи синтеза вначале имеется некоторая функция

$$y=f(x_1,x_2,\ldots.x_n),$$

и задача состоит в получении схемы логической сети, отрабатывающей на выходе y функцию f. Если при этом не огаваривается способ реализации этой схемы, то под схемой логической сети будем понимать схему, реализованную на элементах НЕ, И, ИЛИ.

При дальнейшем изложении часто будем употреблять термин "функциональная схема" вместо термина "схема логической сети", подчеркивая этим, что синтезируемые логические сети описываются с помощью заданных функций в том смысле, что множество X отображено на множестве Y с помощью данной системы собственных функций.

При синтезе функциональных схем правило установления связи между элементами определяется последовательностью выполнения операции в заданной форме переключательной функции. Например, конъюнкция, дизъюнкция и отрицание выполняются в такой же последовательности, как обычные арифметические операции, если формально конъюнкцию заменим умножением, а дизъюнкцию-сложением. Знак общей инверсии над некоторыми выражениями эквивалентно помещению этого выражения в скобки.

В представлении переключательной функции последовательность выполнения операции можем разбить на этапы. В каждый этап войдут операции, не зависящие друг от друга.

Количество этапов, необходимых для выполнения операции, будем называть степенью представления переключательной функции. Степень представления переключательной функции определяет количество элементов, включенных в схему последовательно.

Рассмотрим правило построения схемы заданной переключательной функции.

Например, построим схему, работа которой описывается функцией:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=[(x_1 V x_2)\rightarrow(x_3 V \overline{x_4})]\ \sim x_2.$$

Запишем эту функцию с помощью инверсии, конъюнкции и дизъюнкции, если импликацию и эквивалентность изобразим в соответствии с формулами (1.11), (1.13):

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=[\overline{(x_1 V x_2)} V (x_3 V \overline{x_4})]\sim x_2=$$

$$=\overline{[\overline{(x_1 V x_2)} V \overline{x_3} V x_4]} V x_2\}\&\{[\overline{(x_1 V x_2)} V \overline{x_3} V \overline{x_4}] V x_2]\}.$$

В полученном выражении операции следует выполнить в следующей последовательности:

I этап. Получить дизъюнкцию $x_1 \vee x_2$ и инверсию x_2 и x_4.

II этап. Получить выражение $\overline{x_1 \vee x_2}$.

III этап. Получить выражение $(\overline{x_1 \vee x_2}) \vee x_3$.

IV этап. Получить выражение $(\overline{x_1 \vee x_2}) \vee x_3 \vee \overline{x}_4$.

V этап. Сформировать выражение $\overline{(\overline{x_1 \vee x_2}) \vee x_3 \vee \overline{x}_4}$.

VI этап. Сформировать выражение $\{\overline{[\,]} \vee x_2\}$ и $\{[\,] \vee \overline{x}_2\}$.

VII этап. Сформировать выражение { }&{ }.

На рис.3.6 дается реализация f функции в базисе НЕ, И, ИЛИ (с использованием обозначений элементов рис.3.4)

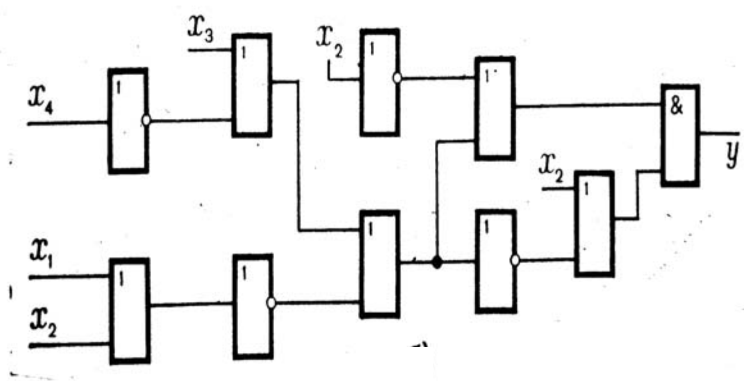


Рис.3.6.

В силу понятия эквивалентности схем, существуют различные схемы, имеющие одну и ту же собственную функцию. Это свидетельствует о том, что задача синтеза, в отличие от задачи анализа, всегда имеет бесчисленное множество решений. Другими словами , можно построить бесконечно много различных функциональных схем, обладающих заданной собственной функцией. Среди этих схем будут схемы разной сложности, требующие разного количества оборудования. Нас, естественно, будут интересовать лишь те схемы, которые отрабатывают требуемую функцию при минимально возможном количестве элементов. В общем виде эта задача не решена и представляет большие трудности. Однако целый ряд частных результатов, относящихся к этой проблеме, позволяет решать некоторые практически важные задачи в этом направлении.

Наиболее существенные результаты получены для случая базисных элементов, состоявших из инверсии, конъюнкции и дизъюнкции. Для такого базиса можно рассматривать задачу оптимального синтеза, как задачу о синтезе функциональной схемы, соответствующей минимальной аналитической записи этой функции. Как было сказано ранее, решение этой задачи сводится к нахождению СДНФ, СКНФ или минимального выражения для данной функции.

После этого осуществляется синтез функциональной схемы по найденной записи собственной функции.

Для иллюстрации сказанного обратимся к рассмотренной нами на рис.3.6 функции и таблице, определяющей ее (таб.3.1).

Таблица 3.1

x_1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
x_2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_3	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
x_4	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1

Запишем f функцию в СДНФ:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overset{1}{\bar{x}_1\cdot x_2\cdot \bar{x}_3\cdot \bar{x}_4}\,V\,\overset{2}{\bar{x}_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot \bar{x}_4}\,V\,\overset{3}{\bar{x}_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4}\,V\,\overset{4}{x_1\cdot \bar{x}_2\cdot \bar{x}_3\cdot x_4}\,V\,\overset{5}{x_1\cdot x_2\cdot \bar{x}_3\cdot \bar{x}_4}\,V$$

$$V\,\overset{6}{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot \bar{x}_4}\,V\,\overset{7}{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4}.$$

Применим к этой функции метод минимизации Квайна- Мак Класски. Исходные конституенты единиц имеют номера 4,6,7,9,12,14 и 15.

Запишем эти конституенты по группам:

Первая группа 0100*.

Вторая группа 0110*,1001, 1100*.

Третья группа 0111*,1110*.

Четвертая группа 1111*.

Сравнивая соседние группы на склеивание, получаем элементарные конъюнкции третьего ранга по группам:

Первая группа 01-0*,-100*.

Вторая группа 011*-,-110*,11-0*.

Третья группа -111*,111*-.

После дальнейшего склеивания получим элементарные конъюнкции второго ранга:

Первая группа -1-0.

Вторая группа -11-.

Следовательно, сокращенная ДНФ для минимизируемой функции имеет вид

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1\cdot \bar{x}_2\cdot \bar{x}_3\cdot x_4 V x_2\cdot \bar{x}_4 V x_2\cdot x_3.$$

Составим импликантную матрицу (табл.3.2)

Таблица 3.2

N п/п	Конституенты	0100	0110	0111	1001	1100	1110	1111
	Импликанты	1	2	3	4	5	6	7
1	1001				*			
2	-1-0	*	*			*	*	
3	-11-		*	*			*	*

Из этой таблицы вытекает, что сокращенная ДНФ функции совпадает с ее минимальной ДНФ. После вынесения за скобки некоторых аргументов получим:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)= \bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3\cdot x_4 \vee x_2\cdot(\bar{x}_3 \vee x_4).$$

Функциональная схема, соответствующая этой записи функции, приведена на рис.3.7.

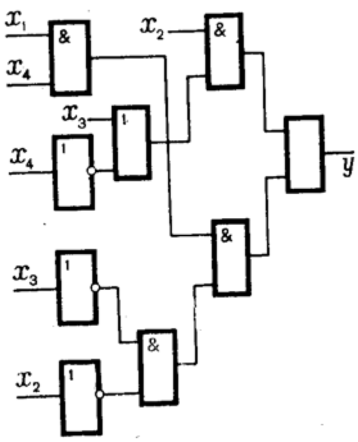


Рис.3.7

При сравнении полученной схемы со схемой на рис.3.6 можно заметить, что для схемы на рис.3.6 требуется четыре элемента НЕ, один элемент И, пять элементов ИЛИ. Для схемы на рис.3.7 требуется три элемента НЕ, четыре элемента И и два элемента ИЛИ. Если считать, что элементы типа И и ИЛИ одинаковые по сложности, а элемент НЕ в 2 раза проще их, то схема на рис.3.7 проще схемы на Рис.3.6.

3.5.Синтез логических схем со многими выходами

Рассмотрим следующую задачу. Имеется система К собственных функций:

$$\begin{aligned} &y_1=f_1(x_1,x_2,\ldots x_n);\\ &y_2=f_2(x_1,x_2,\ldots x_n); \qquad (3.2)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &y_k=f_k(x_1,x_2,\ldots x_n). \end{aligned}$$

Требуется построить схему, в которой работа i-го выхода определялась бы функцией f_i.

На первый взгляд, задача синтеза (n,k)-полюсника практически ничем не отличается от задачи синтеза (n,1)-полюсника, которая рассматривалась в предыдущем параграфе. Это действительно так, если рассматривать задачу синтеза схемы для собственных функций (3.2) как задачу синтеза для каждой f_i раздельно. Каждая такая функция определяет некоторый (n,1)-полюсник, а схема для всей системы (3.2) будет совокупность К таких (n,1)-полюсников. Если задачу синтеза для системы с собственными функциями (3.2) рассмотрим раздельно для каждой функции, тогда схема во многих случаях не будет оптимальной, так как возможно повторение тех элементов, которые участвуют в формировании различных выходов.

Например, рассмотрим функциональную схему, которая описывается следующей системой собственных функций:

$$y_1=f_1(x_2,x_3)=x_2\cdot x_3;$$

$$y_2=f_2(x_1,x_2,x_3)=x_1 \vee x_2\cdot\bar{x}_3;$$

$$y_3=f_3(x_1,x_2,x_3)=x_1\cdot x_2\cdot x_3;$$

$$y_4=f_4(x_1,x_2)=x_1 \vee x_2.$$

Если выполнить синтез вышеуказанным образом, т.е. строить для каждой из f_i свою функциональную схему, то мы получим совокупность четырех (3,1)-полюсников, показанную на рис.3.8.

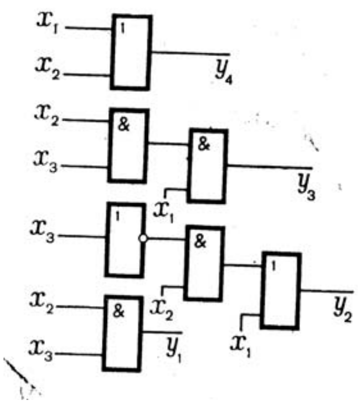


Рис.3.8

Легко видеть, что такой синтез будет не оптимальным, так как, например, элемент, реализующий конъюнкцию $x_2 \cdot x_3$, оказывается дублированным. Очевидно, более разумным является использование этого элемента для синтеза выходов y_1 и y_3 один раз. Полученная схема является неоптимальной и по другим причинам. Выполним следующие преобразования:

$$y_1 \cdot y_2 = x_2 \cdot x_3 \cdot (x_1 \vee x_2 \cdot \bar{x}_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = y_3;$$

$$y_1 \vee y_2 = x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \vee x_2 \cdot \bar{x}_3 = x_1 \vee x_2 = y_4.$$

Они показывают, что можно существенно упростить функциональную схему, если учесть взаимную связь функций f_i.

Идея минимизации схемы со многими выходами сводится к получению таких выражений, при которых оптимально используются общие члены нескольких функций.

Допустим, заданы функции, входящие в систему ДНФ. Из членов, содержащихся в дизъюнкции, составим подмножество таким образом, что из любых одинаковых членов в подмножество войдут только по одному. Назовем такое подмножество *полным подмножеством членов заданной системы*.

Например,для системы функций

$$f_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 \cdot \bar{x}_3 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \cdot x_3;$$

$$f_2(x_1,x_2,x_3) = x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \cdot x_3;$$

$$f_3(x_1,x_2,x_3) = x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$$

полную подсистему составляет: $x_1 \cdot \bar{x}_3$; $x_1 \cdot \bar{x}_2$; $\bar{x}_1 \cdot x_3$; $x_1 \cdot x_2$; $\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$.

При изменении формы представления функции, меняется также полная подсистема членов. Например, если функцию $f_3(x_1,x_2,x_3)$ представим в СДНФ ($x_1 \cdot x_2$ член заменим соответствующими конституентами единиц $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$, $x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3$), тогда из приведенного полного подмножества искючается член $x_1 \cdot x_2$ и добавятся члены $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$, $x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3$. Количество букв, входящих в полную подсистему, можем использовать в качестве критерия оценки сложности заданной системы функций.

Определение 3.4. Систему функций, представленных дизъюнктивной нормальной формой, называем минимальной, если полное подмножество этой системы содержит минимальное количество букв. При этом заметим, что форма представления отдельных функций может не быть минимальной. Например. Допустим, работа схемы с тремя выходами описывается следующей таблицей (табл.3.3.):

Таблица 3.3

x_1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
x_2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_3	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
x_4	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f_1(x_1,x_2,x_3,x_4)$	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$f_2(x_1,x_2,x_3,x_4)$	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
$f_3(x_1,x_2,x_3,x_4)$	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1

Представим конституенты единиц входящих в СДНФ переключательных функций в табл.3.4. Каждой конституенте приписываем признаки, которые указывают о вхождении конституенты в функцию.

Например, конституента $\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3\cdot\bar{x}_4$ имеет признак f_2 f_3, так как она входит в функцию $f_2(x_1,x_2,x_3,x_4)$ и $f_3(x_1,x_2,x_3,x_4)$ и не входит в функцию $f_1(x_1,x_2,x_3,x_4)$.

На первом этапе синтеза найдем все простые импликанты системы функций. В этом случае понятие импликанты отличается от ранее принятого определения.

Таблица 3.4.

	N п/п	Конституенты	Признаки		
*	1	$\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3\cdot x_4$	-	f_2	f_2
*	2	$\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3\cdot\bar{x}_4$	-	-	f_2
*	3	$\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3\cdot x_4$	-	f_2	f_2
*	4	$\bar{x}_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\bar{x}_4$	f_1	f_2	f_2
*	5	$\bar{x}_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4$	f_1	f_2	f_2
	6	$x_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3\cdot\bar{x}_4$	f_1	f_2	f_2
*	7	$x_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3\cdot x_4$	f_1	f_2	-
*	8	$x_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3\cdot\bar{x}_4$	f_1	f_2	-
*	9	$x_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3\cdot x_4$	f_1	f_2	-
*	10	$x_1\cdot x_2\cdot\bar{x}_3\cdot\bar{x}_4$	f_1	-	f_2
*	11	$x_1\cdot x_2\cdot\bar{x}_3\cdot x_4$	f_1	-	f_2
*	12	$x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\bar{x}_4$	f_1	-	f_2
*	13	$x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4$	f_1	-	f_2

Определение 3.5. Простой импликантой системы переключательных функций $f_1, f_2, \ldots f_n$ называют элементарную конъюнкцию, которая входит в функции и никакая из ее собственных частей не входит в эти функции.

Каждой простой импликанте присвоим признак, определяющий совокупность тех функций, в которые она входит.

Например, импликанта, которая имеет в признаке один f_i, является простой импликантой функции $f_i(x_1,x_2,x_3,x_4)$.

Для получения простых импликант выполним склеивание по методу Квайна. Полученной элементарной конъюнкци припишем общие признаки склеиваемых конъюнкций. Например, в табл.3.4 при склеивании первого и третьего членов получим элементарную конъюнкцию $\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_4$, которой припишем общий для исходных членов признак f_2 f_3. Первый и седьмой члены имеют в признаке одну общую отметку f_2, которая присваивается полученной после склеивания этих членов элементарной конъюнкции $\bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4$. Если у склеиваемых членов нет общих признаков, то полученной элементарной конъюнкции признак не приписывается.

Результат склеивания конституент единиц из табл.3.4 представлен в табл.3.5. В начале каждой строки этой таблицы указываются номера тех членов дизъюнктивной формы, которые принимают участие в склеивании.

После первого этапа склеивания выполняем поглощение. Необходимо отметить, что поглощение может быть выполнено между такими членами, которые имеют одинаковые признаки. Например, $\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$ элементарная конъюнкция из табл.3.5 поглощает второй член табл.3.4 $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$, который имеет такой же признак f_3 и не поглощает третий член табл.3.4 $\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4$, так как имеет признак f_2 f_3.

В таблице 3.4 все поглощенные члены отмечены звездочками. Шестой член той же таблицы не поглощается ни одной элементарной конъюнкцией, поэтому она представляет простую импликанту функций $f_1(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $f_2(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $f_3(x_1,x_2,x_3,x_4)$. Далее следует перейти к следующему этапу склеивания в табл.3.5, предварительно исключив все элементарные конъюнкции, которые не имеют признаков, так как они не входят ни в одну функцию. Такой конъюнкцией в табл.3.5 является пятый член, которому приписывается отметка " Исключается".

Результаты второго этапа склеивания сведены в таблицу 3.6.

После исключения четвертого, шестого, седьмого и восьмого членов, которые не содержат признаков, проведем операцию поглощения элементарных конъюнкций, записанных в табл.3.5, и отметим звездочками поглощаемые члены. Не отмеченные члены будут простыми импликантами совокупности функций.

После второго и последующих этапов склеивания могут появиться одинаковые произведения с одними и теми же признаками (см. табл.3.6). Оъединяя такие члены, составим табл.3.8.

Результаты третьего этапа склеивания сведены в табл.3.8 которая после исключения первого и объединения трех остальных членов будет содержать единственную однобуквенную импликанту x_1 функции f_1. Поглощаемые этой импликантой члены отмечены звездочками в табл.3.7.

Итак, в результате выполнения операций склеивания и поглощения определены все простые импликанты заданной совокупности переключательных функций. Ими являются элементарные конъюнкции, не отмеченные звездочками в табл.3.4, 3.5, 3.7, 3.8.

Таблица 3.5

	N пп	1	2	3
	1	1-3	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_4$	$f_2 f_3$
*	2	1-7	$\bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4$	f_2
*	3	2-3	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$	f_3
*	4	2-4	$\bar{x}_1 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4$	f_3
Исключ.	5	2-8	$\bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4$	-
	6	3-5	$\bar{x}_1 \cdot x_3 \cdot x_4$	$f_2 f_3$
*	7	3-9	$\bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4$	f_2
	8	4-5	$\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	$f_1 f_2 f_3$
*	9	4-12	$x_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4$	$f_1 f_3$
*	10	5-13	$x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$	$f_1 f_3$
*	11	6-7	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$	$f_1 f_2$
*	12	6-8	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_4$	$f_1 f_2$
	13	6-10	$x_1 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4$	$f_1 f_3$
*	14	7-9	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_4$	$f_1 f_2$
*	15	7-11	$x_1 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4$	f_1
*	16	8-9	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$	$f_1 f_2$
*	17	8-12	$x_1 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4$	f_1
*	18	9-13	$x_1 \cdot x_3 \cdot x_4$	f_1
*	19	10-11	$x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3$	$f_1 f_3$
*	20	10-12	$x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_4$	$f_1 f_3$
*	21	11-13	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_4$	$f_1 f_3$
*	22	12-13	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	$f_1 f_3$

Таблица.3.6

	пп пп	1	2	3
	1	1-14	$\bar{x}_2 \cdot x_4$	f_2
	2	2-7	$\bar{x}_2 \cdot x_4$	f_2
	3	3-8	$\bar{x}_1 \cdot x_3$	f_3
Исключ.	4	3-16	$\bar{x}_2 \cdot x_3$	–
	5	4-6	$\bar{x}_1 \cdot x_3$	f_3
Исключ.	6	4-17	$x_3 \cdot \bar{x}_4$	–
Исключ.	7	6-18	$x_3 \cdot x_4$	–
Исключ.	8	7-10	$x_3 \cdot x_4$	–
	9	8-22	$x_2 \cdot x_3$	$f_1\,f_3$
	10	9-10	$x_2 \cdot x_3$	$f_1\,f_3$
	11	11-16	$x_1 \cdot \bar{x}_2$	$f_1\,f_2$
	12	11-19	$x_1 \cdot \bar{x}_3$	f_1
	13	12-14	$x_1 \cdot \bar{x}_2$	$f_1\,f_2$
	14	12-20	$x_1 \cdot \bar{x}_4$	f_1
	15	13-15	$x_1 \cdot \bar{x}_3$	f_1
	16	13-17	$x_1 \cdot \bar{x}_4$	f_1
	17	14-21	$x_1 \cdot x_4$	f_1
	18	15-18	$x_1 \cdot x_4$	f_1
	19	16-22	$x_1 \cdot x_3$	f_1
	20	17-18	$x_1 \cdot x_3$	f_1
	21	19-22	$x_1 \cdot x_2$	$f_1\,f_3$

Таблица 3.7

	пп пп	1	2
	1	$\bar{x}_2 \cdot x_4$	f_2
	2	$\bar{x}_1 \cdot x_3$	f_3
	3	$x_2 \cdot x_3$	$f_1\, f_3$
	4	$x_1 \cdot \bar{x}_2$	$f_1\, f_2$
*	5	$x_1 \cdot \bar{x}_4$	f_1
*	6	$x_1 \cdot \bar{x}_3$	f_1
*	7	$x_1 \cdot x_4$	f_1
*	8	$x_1 \cdot x_3$	f_1
	9	$x_1 \cdot x_2$	$f_1\, f_3$

Таблица 3.8

Исключ 1	1	2-8	x_1	-
	2	4-9	x_1	f_1
	3	5-7	x_1	f_1
	4	6-8	x_1	f_1

Для того, чтобы определить импликанты, которые должны входить в минимальную совокупность переключательных функций, составим импликантную матрицу (табл.3.9). В горизонтальных входах матрицы

Таблица 3.9

Конституенты \ Импликанты	$\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3\cdot x_4$		$\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3\cdot\bar{x}_4$	$\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3\cdot x_4$		$\bar{x}_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\bar{x}_4$			$\bar{x}_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4$			$x_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3\cdot\bar{x}_4$			$x_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3\cdot x_4$		$x_3\cdot\bar{x}_1\cdot x_2\cdot\bar{x}_4$		$x_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3\cdot x_4$		$x_1\cdot x_2\cdot\bar{x}_3\cdot\bar{x}_4$		$x_1\cdot x_2\cdot\bar{x}_3\cdot x_4$		$x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\bar{x}_4$		$x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4$	
	f_2	f_3	f_3	f_2	f_3	f_1	f_2	f_3	f_1	f_2	f_3	f_1	f_2	f_3	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_3	f_1	f_3	f_1	f_3	f_1	f_3
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$x_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3\cdot\bar{x}_4\ f_1 f_2 f_4$												*	*	*														
$\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_4\ f_2 f_3$	*	*		*	*																							
$\bar{x}_1\cdot x_3\cdot x_4\ f_2 f_3$				*	*					*	*																	
$\bar{x}_1\cdot x_2\cdot x_3 f_1 f_2 f_3$						*	*	*	*	*	*																	
$x_1\cdot\bar{x}_3\cdot\bar{x}_4\ f_1 f_3$												*		*							*	*						
$\bar{x}_2\cdot x_4\ f_2$	*			*											*				*									
$\bar{x}_1\cdot x_3\ f_3$			*		*			*			*																	
$x_2\cdot x_3\ f_1 f_3$						*		*	*		*															*	*	*
$x_1\cdot\bar{x}_2\ f_1 f_2$												*	*		*	*	*	*	*	*								
$x_1\cdot x_2\ f_1 f_3$																					*	*	*	*	*	*	*	*
$x_1\ f_1$												*			*		*		*		*		*		*		*	

78

записываются все простые импликанты со своим признаком, а в вертикальные- все конституенты единицы. Для каждого признака конституенты отводится отдельная колонка. Каждая клетка импликантной матрицы соответствует конституенте с признаком и простой импликанте. Если конституента поглощается импликантой и признак конституенты содержится в признаке импликанты, то соответствующая клетка отмечается звездочкой. Например, на пересечении строки с импликантой $\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4\ f_1 f_2$ и столбца с конституентой $x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4$, звездочками отмечается только двенадцатая и четырнадцатая колонки содержащие признаки $f_1 f_2$.

Заданные переключательные функции могут быть построены из любой совокупности импликант, совместно перекрывающих все колонки импликантной матрицы. Задача состоит в выборе подмножества импликант с минимальным числом букв. Для выбора такого подмножества заметим, что если какая-нибудь колонка с признаком f_i и конституентой K_j имеет единственную звездочку, то соответствующая данной звездочке импликанта должна обязательно входить в функцию f_i , только она поглощает конституенту K_j . В табл.3.9 колонки с номером 2,3,7,18,24 покрываются импликантами, отмеченными звездочками. Импликанты $\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_4\ f_2 f_3$, $\bar{x}_1 \cdot x_3\ f_3$ и $x_1 \cdot x_2\ f_1 f_3$ обязательно должны входить в функцию f_3, так как колонки 2,3 и 24 содержат признак f_3 и покрываются только этими импликантами. Аналогично импликанты $\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3\ f_1 f_2 f_3$ и $x_1 \cdot x_2\ f_1 f_2$ войдут в функцию f_2.

Выбор минимального покрытия осуществляется по методике, рассмотренной ранее.

Набор простых импликант, покрывающих совместно все колонки импликантной матрицы, будет полным подмножеством дизъюнктивных членов заданной совокупности переключательной функций. С помощью импликант этого подмножества, нетрудно записать каждую переключательную функцию в дизъюнктивной нормальной форме. Для этого достаточно составить дизъюнкцию тех отмеченных импликант,которые совместно покрывают все колонки, содержащие признак данной функции. Выбирая для каждой функции минимально возможное количество импликант,получаем искомую совокупность переключательных функций:

$$x_1 \cdot x_2\ f_1 f_3;\ \bar{x}_1 \cdot x_2 f_1 f_2;\ \bar{x}_1 \cdot x_3 f_3;\ \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 f_1 f_2;\ \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_4\ f_2;\ \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_4\ f_3;\ \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4\ f_3.$$

Используя полученные импликанты, можем составить дизъюнктивную форму для каждой функции. В результате, для заданной совокупности функции будем иметь:

$$f_1(x_1,x_2,x_3,x_4)= \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot x_2,$$

$$f_2(x_1,x_2,x_3,x_4)= \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_4 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2, \qquad (3.3)$$

$$f_3(x_1,x_2,x_3,x_4)= \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_4 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 \vee \bar{x}_1 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2.$$

Полное подмножество данной совокупности включает пятнадцать букв. В общем случае из членов полного множества можно составить несколько дизъюнктивных форм переключательных фенкций. Например, совокупность переключательных функций, заданных табл 3.9, можно также представить в следующем виде:

$$f_1(x_1,x_2,x_3,x_4)= \bar{x}_1\cdot x_2\cdot x_3 \vee \bar{x}_1\cdot \bar{x}_3\cdot x_4 \vee \bar{x}_1\cdot x_2 \vee x_1\cdot x_2,$$

$$f_2((x_1,x_2,x_3,x_4)= \bar{x}_1\cdot \bar{x}_2\cdot x_4 \vee \bar{x}_1\cdot x_2 \vee \bar{x}_1\cdot x_2, \qquad (3.4)$$

$$f_3((x_1,x_2,x_3,x_4)= \bar{x}_1\cdot \bar{x}_2\cdot x_4 \vee \bar{x}_1\cdot \bar{x}_3\cdot x_4 \vee \bar{x}_1\cdot x_2\cdot x_3 \vee \bar{x}_1\cdot x_3 \vee x_1\cdot x_2.$$

Полное подмножество членов совокупности (3.3) и (3.4) совпадают. Однако, совокупность (3.4) не является минимальной совокупностью,так как она содержит больше количество членов, чем совокупность функций (3.3).

Отметим, что если упростить хотя бы одну переключательную функцию, входящую в минимальную совокупность, то количество букв в полном подмножестве членов увеличится. Например, если упростить функцию $f_1(x_1,x_2,x_3,x_4)$, склеив члены $\bar{x}_1\cdot x_2$ и $x_1\cdot x_2$, то количество букв в полном подмножестве увеличится за счет появления нового члена x_1.

На рис.3.10 приведена структурная схема, реализующая минимальную совокупность переключательных функций (3.3).

Описанный алгоритм может быть использован для получения минимальной совокупности переключательных функций, представленных в конъюнктивных нормальных формах.

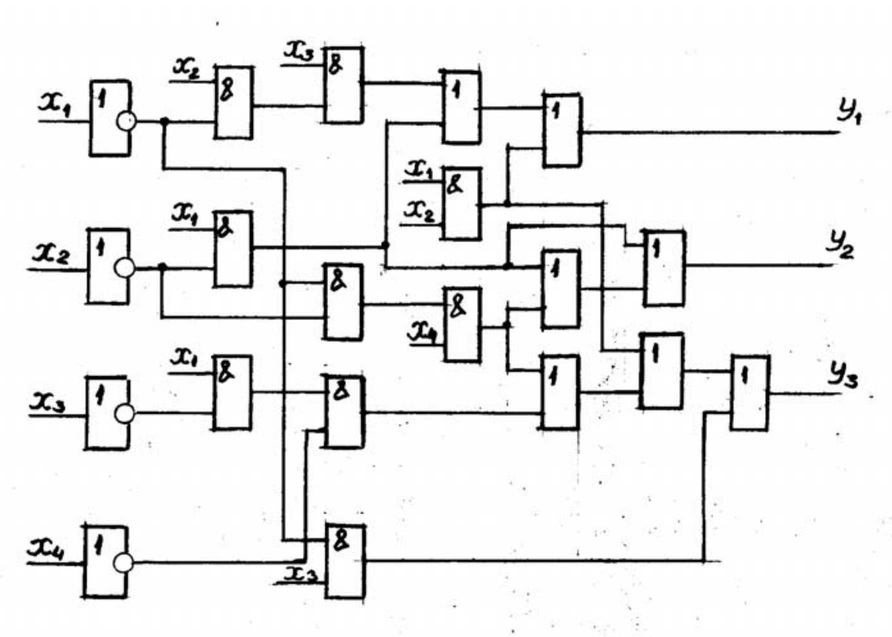


Рис. 3.10

3.6. Синтез схем не полностью определенных собственных функций

На практике не полностью определенные функции встречаются весьма часто. Из некоторых технических или физических соображений тот или иной набор значений аргументов не может появиться на входе синтезируемого устройства. Такие наборы значений аргументов будем называть запрещенными. На запрещенных наборах синтезируемая функция не определена.

Например, пусть задана не полностью определенная функция следующей таблицей (табл.3.10).

Таблица 3.10.

x_1	0	0	1	1
x_2	0	1	0	1
$f(x_1,x_2)$	0	1	*	1

Эта таблица на самом деле определяет не одну, а две полностью определенные функции.

При переходе к аналитической записи не полностью определенные функции необходимо доопределить, в противном случае переход от табличного задания функции к ее аналитической записи в виде СДНФ или СКНФ невозможен. Это доопределение произвольно и зависит от тех целей, которые ставятся при доопределении. Если в дальнейшем предполагается производить минимизацию функции, то доопределение выгодно производить таким образом, чтобы минимальная форма функции для данного доопределения получалась проще, чем минимальная ДНФ, получаемая при других возможных доопределениях.

Рассмотрим некоторые задачи синтеза не полностью определенных функций.

Задана не полностью определенная функция $f(x_1,x_2,x_3)$, представленная таблицей 3.11.

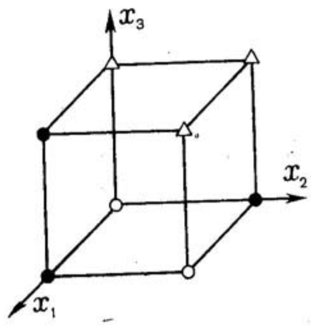
Таблица 3.11

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x_1,x_2,x_3)$	0	*	1	*	1	1	0	*

На рис.3.11 показано множество T_1 для заданной функции. Вершины куба, соответствующие запрещенным комбинациям, отмечены треугольниками.

Если на всех запрещенных комбинациях доопределить данную функцию нулями,то, как видно на рис.3.12 минимальная ДНФ для функции $f(x_1,x_2,x_3)$ будет иметь следующий вид:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\cdot x_2 \vee x_1\cdot \bar{x}_2\cdot \bar{x}_3.$$



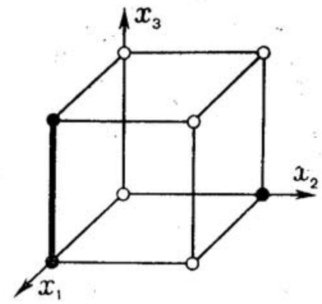


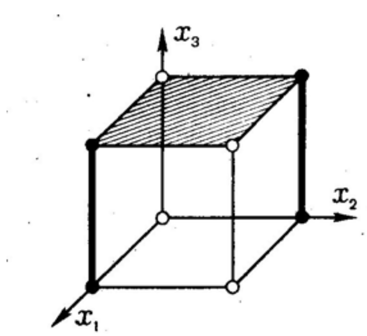
Рис .3.11. Рис.3. 12

Если же доопределить единицами, то минимальная ДНФ примет вид:

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_3 V \bar{x}_1 \cdot x_2 V \bar{x}_1 \cdot x_2.$$

Соответствующее покрытие показано на рис.3.13. Легко увидеть, что другие возможные доопределения дадут результат не лучший, чем доопределение единицей на наборе (1,0,1) и нулями на остальном. Это доопределение показано на рис.3.14. При этом имеем

$$f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1 \cdot x_2 V x_1 \cdot \bar{x}_2.$$



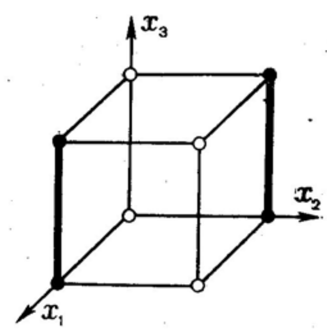


Рис. 3.13 Рис. 3.14

Если функция $f(x_1,x_2,..x_n)$ не определена на q наборах значений аргументов, то существует 2^q полностью определенных функций, значения которых совпадают со значениями исходной функции на тех наборах, на которых она определена. Эти функции, которые мы будем называть доопределенными относительно $f(x_1,x_2,..x_n)$, отличаются друг от друга, по крайней мере, на один из q наборов, на которых $f(x_1,x_2,..x_n)$ не определена.

Минимальным доопределением функции $f(x_1,x_2,..x_n)$ называем такую доопределенную относительно f функцию, минимальная ДНФ которой содержит наименьшее количество букв по сравнению с любой минимальной ДНФ, соответствующей другой доопределенной функции.

Определим две доопределенные функции: функцию $\varphi_1(x_1,x_2,..x_n)$, которая на всех наборах q , на которых f не определена, принимает значения 1, и $\varphi_0(x_1,x_2,..x_n)$, принимающая значения 0, на всех q наборах, на которых f не определена.

Имеет место следующая теорема: минимальная ДНФ не полностью определенной функции $f(x_1,x_2,..x_n)$ получается как дизъюнкция наиболее коротких (по числу букв) импликант $\varphi_0(x_1,x_2,..x_n)$, которые в совокупности покрывают все импликанты в СДНФ для $\varphi_1(x_1,x_2,..x_{n,})$, причем среди выбранных импликант нет лишних.

Для доказательства теоремы рассмотрим произвольную доопределенную относительно f функцию $\varphi_1(x_1,x_2,..x_{n,})$. Запишем ее в СДНФ. Все конъюнкции из СДНФ войдут в СДНФ функции $\varphi_0(x_1,x_2,..x_n)$. Отсюда следует, что любая импликанта φ_i будет содержаться среди простых импликант φ_1, либо поглощаться какой-либо простой импликантой φ_1 . Таким образом, самыми короткими импликантами, покрывающими единицы φ_0, являются простые импликанты φ_1 . Среди всех доопределенных относительно f функций φ_0 имеет минимальное число простых импликант, так как ее множество T_1 содержит наименьшее число наборов значений аргументов.

Если взять дизъюнкцию этих покрывающих импликант, то мы получим некоторую доопределенную функцию, дающую минимальное представление.

Например, минимальное доопределение для функции f из рис.3.11.

СДНФ φ_0 имеет вид

$$\varphi_0(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\cdot x_2\cdot \bar{x}_3 \vee x_1\cdot \bar{x}_2\cdot \bar{x}_3 \vee x_1\cdot \bar{x}_2\cdot x_3.$$

СДНФ φ_1 имеет вид

$$\varphi_1(x_1,x_2,x_3)= \bar{x}_1\cdot \bar{x}_2\cdot x_3 \vee \bar{x}_1\cdot x_2\cdot \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\cdot x_2\cdot x_3 \vee x_1\cdot \bar{x}_2\cdot \bar{x}_3 \vee x_1\cdot \bar{x}_2\cdot x_3 \vee x_1\cdot x_2\cdot x_3.$$

Получим для φ_1 сокращенную ДНФ, используя для этого метод Квайна-МакКласски.Тогда

$$\varphi_1(x_1,x_2,x_3)=x_1\cdot \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1\cdot x_2 \vee x_3.$$

Построим импликантную матрицу аналогично полностью определенных функций с той разницей, что строкам таблицы мы соотнесем найденные простые импликанты φ_1 , а столбцам матрицы- конъюнкции, входящие в СДНФ φ_0. Для нашего примера матрица имеет вид (табл.3.12).

Таблица 3.13

φ_1	φ_0		
	$\bar{x}_1\cdot x_2\cdot \bar{x}_3$	$x_1\cdot \bar{x}_2\cdot \bar{x}_3$	$x_1\cdot \bar{x}_2\cdot x_3$
$x_1\cdot \bar{x}_2$		*	*
$\bar{x}_1\cdot x_2$	*		
x_3			*

Звездочка в клетке матрицы означает, что соответствующая простая импликанта φ_1 покрывает конъюнкцию из СДНФ φ_0. Выбирая минимальное покрытие, получим минимальное доопределение для f в следующем виде:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \vee x_1 \cdot x_2.$$

Этот результат совпадает с результатом рис.3.14, найденного методом перебора всех возможных доопределений.

Г Л А В А 4

Анализ и синтез конечных автоматов с памятью

4.1.Основные определения

В отличие от комбинационных схем, рассмотренных выше, конечные автоматы с памятью в процессе преобразования информации изменяют состояние. Они могут переключаться в новое состояние из некоторого множества состояний.

Автомат функционирует в дискретные моменты времени, которые обычно обозначают натуральными числами $t=0,1,2,\ldots n$. В каждый момент дискретного времени на вход автомата поступает один сигнал (буква), фиксируется определенное состояние автомата и с выхода снимается один сигнал.

Для задания автомата определяется три конечных множества (алфавита):

- множество возможных входных сигналов $X=(x_1,x_2,\ldots x_n)$;

- множество возможных выходных сигналов $Y=(y_1,y_2,\ldots y_k)$;

-множество возможных внутренних состояний автомата $A=(a_0,a_1,\ldots a_m)$;

На этих множествах задают две функции:

- функция переходов f, определяющая состояние автомата a(t+1) в момент дискркретного времени t+1 в зависимости от состояния автомата a(t) и значения входного сигнала x(t) в момент времени t

$$a(t+1)=f[a(t),x(t)] \qquad (4.1);$$

- функция выходов, определяющая зависимость выходного сигнала автомата y(t) от состояния автомата и входного сигнала x(t) в момент времени t

$$y(t)=\varphi[a(t),x(t)] \qquad (4.2).$$

Кроме того, на множестве состояний автомата фиксируют одно из внутренних состояний a_0 в качестве начального состояния.

При записи функций переходов и выходов переменную t часто будем опускать, применяя форму записи f(a,x) и φ(a,x).

Автоматы, задаваемые функциями (4.1) и (4.2), называются автоматами Мили. Отличительная особенность автоматов Мили состоит в том, что их выходные сигналы зависят как от состояния автомата, так и от значения входного сигнала.

На практике встречаются автоматы , выходные сигналы которых в момент времени t однозначно определяются состоянием автомата в тот же момент времени и не зависят от значения входного сигнала. Такие автоматы называют автоматами Мура.

Функции переходов и выходов автомата Мура, заданного на множестве входных сигналов $X=(x_1,x_2,\ldots x_n)$, множестве внутренних состояний $B=(b_1,b_2,\ldots b_m)$, и множестве выходных сигналов $Y=(y_1,y_2,\ldots y_k)$, можно записать в виде

$$b(t+1)=f[b(t),x(t)], \qquad (4.3)$$

$$y(t)=\varphi[b(t)]. \qquad (4.4)$$

Существует различные способы задания автомата. Используется задание автомата таблично, с помощью графа и матричное задание.

При табличном задании автомата его представляют таблицей переходов, определяемой функцией (4.1), и таблицей выходов, определяемой функцией (4.2). Общий вид таблиц переходов и выходов для автомата Мили представлен на табл.4.1 и 4.2. Вертикальные входы этих таблиц заполняются символами a_i , соответствущими внутренним состояниям автомата, а горизонтальные – символам входных сигналов x_j .

В клетку таблицы переходов находящуюся на пересечении столбца с буквой a_i и строки с буквой x_j, записывается состояние автомата, в которое он переходит из состояния a_i при подаче на вход сигнала x_j. В аналогичную клетку таблицы выходов записывается выходной сигнал y_k, который формируется автоматом при таком же переходе.

Таблица 4.1

Ссостояние / Входные сигналы	a_0	. . . .	a_m
x_1	$f(a_0,x_1)$	. . . .	$f(a_m,x_1)$
.	.	. . . .	.
.	.	. . . .	.
x_F	$f(a_0,x_F)$	. . . .	$f(a_m,x_F)$

Таблица 4.2

Ссостояние / Входные сигналы	a_0	. . . .	a_m
x_1	$\varphi(a_0,x_1)$	. . . .	$\varphi(a_m,x_1)$
.	.	. . . .	.
.	.	. . . .	.
x_F	$\varphi(a_0,x_F)$	. . . .	$\varphi(a_m,x_F)$

Например, представим таблицы переходов и выходов автомата Мили (табл.4.3 и табл.4.4), которые характеризуются четырьмя состояниями $A=(a_0,a_1,a_2,a_3)$, двумя входными сигналами $X=(x_1,x_2)$ и тремя выходными сигналами $Y=(y_1,y_2,y_3)$.

Таблица 4.3.

Состояние / Входные сигналы	a_0	a_1	a_2	a_3
x_1	a_1	a_2	a_3	a_3
x_2	a_0	a_0	a_0	a_0

Таблица 4.4

Состояние / Входные сигналы	a_0	a_1	a_2	a_3
x_1	y_2	y_2	y_1	y_2
x_2	y_2	y_2	y_2	y_3

Автомат, у которого функции f и φ определены не на всех парах a_m и x_i, называются частичными автоматами. В клетках, соответствующих неопределенным состояниям или выходным сигналам, запишем звездочку. Пример частичного автомата представлен в таблицах 4.5 и 4.6.

Таблица 4.5.

Состояние / Входные сигналы	a_0	a_1	a_2	a_3
x_1	a_1	a_2	a_3	*
x_2	a_2	*	a_1	a_1

Таблица 4.6

Состояние / Входные сигналы	a_0	a_1	a_2	a_3
x_1	y_2	y_2	y_1	*
x_2	y_2	*	y_2	y_3

Так как в автомате Мура выходной сигнал зависит от состояния автомата, он определен только одной таблицей переходов (табл.4.7)

Таблица 4.7

Выходные сигналы	$\varphi(a_0)$	. . . .	$\varphi(a_m)$
Состояние / Входные сигналы	a_0	. . . .	a_m
x_1	$f(a_0,x_1)$	. . . .	$f(a_m,x_1)$
.	.	. . . .	.
.	.	. . . .	.
x_F	$f(a_0,x_F)$	. . . .	$f(a_m,x_F)$

Например, представим таблицу переходов автомата Мура определенного множеством состояний $B=(b_0,b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)$, множеством входов $X=(x_1,x_2)$, множеством выходов $Y=(y_1y_2,y_3)$ (табл.4.8)

Таблица 4.8

Выходные сигналы	y_2	y_2	y_2	y_1	y_2	y_3
Состояние / входные сигналы	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
x_1	b_1	b_2	b_3	b_4	b_4	b_1
x_2	b_0	b_0	b_0	b_5	b_5	b_0

По таблицам переходов и выходов можно найти выходную реакцию на любое входное слово. Приведем произвольную последовательность входных сигналов и соответствующие ей последовательности состояний и выходных сигналов автомата заданного табл.4.3 и 4.4:

$$\begin{array}{llllllll}
x_2\,x_1\,x_1\,x_2\,x_1\,x_1 & x_1 & x_1\,x_1 & x_2 & x_1\,x_2\,x_2\,x_1\,x_1 & x_1 & x_2 & \\
a_0\,a_0\,a_1\,a_2\,a_0\,a_1 & a_2 & a_3\,a_3 & a_3 & a_0\,a_1\,a_0\,a_0\,a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \\
\quad y_2\,y_2\,y_2\,y_2\,y_2 & \underline{\mathbf{y_2}} & y_1\,y_2 & \underline{\mathbf{y_2}} & y_3\,y_2\,y_2\,y_2\,y_2 & \underline{\mathbf{y_2}} & \underline{\mathbf{y_1}} & \underline{\mathbf{y_3}}
\end{array} \qquad (4.5)$$

Большую наглядность обеспечивает задание конечных автоматов с помощью графов. Граф автомата состоит из узлов (вершин), соединяемых ветвями (ребрами). Узлы графа отожествляются с внутренними состояниями автомата. Каждая ветвь отмечается входным сигналом, вызывающим в автомате соответствующий в данной ветви переход, и выходным сигналом, который возникает при этом переходе. На Рис 4.1 приведен граф автомата , заданного табл.4.3 и 4.4.

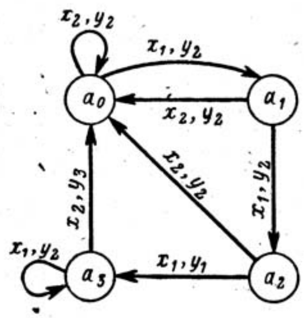


Рис. 4.1.

Граф автомата Мура, заданного табл.4.8, приведен на рис. 4.2. На графах автомата Мура значения выходных сигналов записываются около узлов.

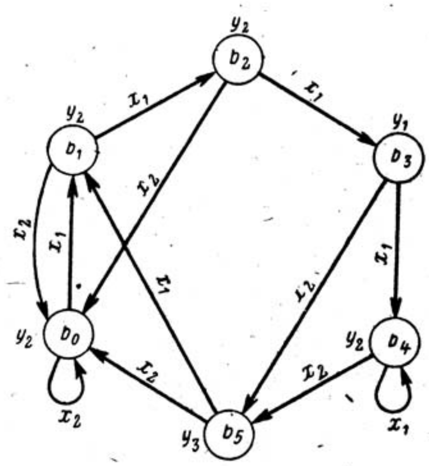


Рис. 4.2.

Рассмотрим матричный способ представления автомата. Матрица представления автомата есть квадратичная матрица $C=||c_{ms}||$, каждая строка которой соответствует старому состоянию автомата, а столбец-новому состоянию, в которое он переходит при воздействии некоторого входного сигнала. Элемент $c_{ms}=x_f/y_s$, который содержится на пересечении m строки и s столбца, в случае автомата Мили соответствует входному сигналу x_f, который переводит автомат из состояния a_m в состояние a_s и вызывает сигнал y_s. Для рассмотренного примера табл. 4.3 и 4.4 матрица C имеет вид:

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{matrix} & \\
C = & \left\| \begin{matrix} x_2/y_2 & x_1/y_2 & – & – \\ x_2/y_2 & – & x_1/y_2 & – \\ x_2/y_2 & – & – & x_1/y_1 \\ x_2/y_3 & – & – & x_1/y_2 \end{matrix} \right\| & \begin{matrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix}
\end{array}$$

Для автомата Мура в матрице переходов c_{ms} элементом является входной сигнал, который существует при переходе (a_m, a_s). А в матрице выходов элементами являются выходные сигналы

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{matrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{matrix} & \\
C = & \left\| \begin{matrix} x_2 & x_1 & – & – & – & – \\ x_2 & – & x_1 & – & – & – \\ x_2 & – & – & x_1 & – & – \\ – & – & – & – & x_1 & x_2 \\ – & – & – & – & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 & – & – & – & – \end{matrix} \right\| & \begin{matrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{matrix}
\end{array}$$

Матрица выхода записывается таким образом:

$$Y = \left\| \begin{matrix} y_2 \\ y_2 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_1 \\ y_3 \end{matrix} \right\| \begin{matrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{matrix}$$

Два автомата, у которых совпадают как входные, так и выходные алфавиты, называются эквивалентными, если для любого входного слова выходное слово одного автомата совпадает с выходным словом другого автомата. При этом перед подачей входного слова оба автомата должны находиться в начальных состояниях.

Для любого автомата Мура существует эквивалентный автомат Мили и наоборот.

Задача синтеза конечных автоматов заключается в построении сложного автомата из более простых автоматов, называемых элементарными автоматами.

Для решения задачи синтеза необходимо, прежде всего, выбрать стандартный язык, в терминах которого описывается работа автомата. Существует три способа задания автомата:

1. задание автомата на языке регулярных событий;
2. задание автомата функциями (таблицами) переходов и выходов;
3. задание автомата кодированными таблицами.

Следует заметить, что синтез автомата выполняется в два этапа: в начале – этап абстрактного синтеза автомата, а затем- структурный синтез.

На этапе абстрактного синтеза автомата автомат задается на языке регулярных событий, что является исходной информацией этого этапа. Результатом абстрактного синтеза является построение таблиц переходов и выходов. В дальнейшем при структурном синтезе автомата из указанных таблиц следует переход к кодированным таблицам, на основании которых строится функциональная схема заданного автомата.

В настоящей главе рассматривается структурный синтез автомата.

4.2. Структурный синтез конечного автомата

Для синтеза конечного автомата необходимо прежде всего выбрать систему элементов, из которых должны строиться заданные автоматы. В большинстве схем компьютера в качестве элементов памяти применяются элементарные автоматы, имеющие следующие особенности.

1. Элементарные автоматы являются автоматами Мура и имеют два внутренних состояния.
2. Двум внутренним состояниям элементарного автомата соответствуют два различных выходных сигнала, которые по существу и позволяют физически различать состояния элементарных автоматов. Поэтому в дальнейшем будем обозначать внутренние состояния и выходные сигналы элементарных автоматов одинаковыми буквами Q и кодировать их цифрами 0,1.
3. Элементарные автоматы имеют в общем случае несколько физических входов, на каждый из которых могут подаваться сигналы, закодированные 0 и 1. Рассмотрим основную идею структурного синтеза автоматов, заданных кодированными таблицами переходов и выходов. Кодированные таблицы строятся на основе таблиц переходов и выходов автомата, которые являются исходной информацией для структурного синтеза.

Составим кодированные таблицы переходов и выходов для автомата, заданного табл.4.3 и 4.4 Для построения этого автомата, имеющего четыре внутренних состояния, достаточно двух элементарных автоматов Q_1 и Q_2.

Закодируем состояния автомата a_i(i=0,1,2,3) состояниями элементарных автоматов Q_1 и Q_2 в соответствии с табл.4.9. Для N состояний автомата разрядность кода определяется как $n \geq lg_2N$.

Таблица 4.9

Состояние элементарного автомата / Состояние заданного автомата	Q_1	Q_2
a_0	0	0
a_1	0	1
a_2	1	0
a_3	1	1

Автомат, построенный из элементарных автоматов может формировать только двоичные сигналы. Поэтому каждый выходной сигнал у заданного автомата следует закодировать совокупностью двоичных выходных сигналов.

Для автомата, заданного табл.4.3 и 4.4, вариант кодирования выходных сигналов y_1, y_2, y_3 двоичными переменными z_1 и z_2 приведен в табл.4.10

Таблица 4.10

Выходные сигналы элементарных автоматов / Выходные сигналы заданного автомата	z_1	z_2
y_1	0	1
y_2	0	0
y_3	1	0

Выходы, с которых снимаются двоичные сигналы z_1 и z_2, будем называть физическими выходами автомата.

Входные сигналы автомата $x_1, x_2, \dots x_m$ также должны кодироваться совокупностью двоичных сигналов, действующих на физических входах автомата. Для M количества входных сигналов должен быть выбран $n \geq lg_2M$ разрядный код. Для рассмотренного автомата входные сигналы x_1 и x_2 закодируем цифрами 0 и 1, соответственно. В данном случае способ кодирования состояний входных и выходных сигналов автомата выбран произвольно. Существуют способы определения рационального кодирования.

Пользуясь таблицами кодирования (табл.4.9 и 4.10), нетрудно перейти к кодированным таблицам переходов (табл.4.11) и выходов (табл.4.12) заданного автомата.

Кодированная таблица переходов (табл.4.11) определяет зависимость состояний элементарных автоматов $Q_1(t+1)$ и $Q_2(t+1)$ в момент времени $t+1$ от значения входного сигнала и внутренних состояний элементарных автоматов в предидущий момент времени.

В кодированной таблице выходов 4.12 выходные сигналы z_1 и z_2 определены в зависимости от значения входного сигнала в момент времени t и внутренних состояний элементарных автоматов в предыдущий момент времени.

Таблица 4.11

x(t)	Q_1(t)	Q_2(t)	Q_1(t+1)	Q_2(t+1)
0	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0

Таблица 4.12

x(t)	Q_1(t)	Q_2(t)	z_1(t)	z_2(t)
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	0

Пусть элементарные автоматы Q_1 и Q_2 являются автоматами Мура с одним входом q_s, функционирование которых определяется табл.4.13.

Кодированные значения выходных сигналов элементарного автомата (0 или 1) в момент времени t совпадают с кодом его внутренних состояний. Поэтому отмечать таблицу переходов состояний элементарных автоматов значениями выходных сигналов не требуется.

Таблица 4.13

Входной сигнал	Состоянин в момент времени t	Состояние в момент времени t+1
q_s	Q(t)	Q(t+1)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Основная задача, решаемая в процессе структурного синтеза, заключается в определении таких значений сигналов q_{1s} и q_{2s} для каждого элементарного автомата, которые обеспечивают выполнение условий функционирования автомата, заданного табл.4.11 и 4.12 Искомые значения q_{1s} и q_{2s} можно получить непосредственно из табл. 4.13 и 4.11. Для этого в тех случаях, когда элементарный автомат должен переходить из состояния Q(t)=0 в состояние Q(t+1)=0 (см.строки 1,5 и 6 табл.4.11 для автомата Q_1 и строки 5,7 для автомата Q_2), на его вход в момент времени t следует подать q_s(t)=0 (см.строку 1 табл.4.13). Для перевода элементарного автомата из состояния Q(t)=0 в состояние Q(t+1)=1 (см. строку 2 табл.4.11 для автомата Q_1 и строку 1 для автомата Q_2) на его вход должен подаваться сигнал q_s(t)=1 (см.строку 3 табл.4.13). Определяя подобным образом необходимые значения входных сигналов для каждой строки табл.4.11, получим табл.4.14.

Таблица 4.14

пп пп	x(t)	$Q_1(t)$	$Q_2(t)$	$Q_1(t+1)$	$Q_2(t+1)$	$q_{1s}(t)$	$q_{2s}(t)$
	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	1	0	1
2	0	0	1	1	0	1	1
3	0	1	0	1	1	0	1
4	0	1	1	1	1	0	0
5	1	0	0	0	0	0	0
6	1	0	1	0	0	0	1
7	1	1	0	0	0	1	0
8	1	1	1	0	0	1	1

С помощью этой таблицы можно определить способ формирования входных сигналов q_{1s} и q_{2s} элементарных автоматов. Каждый из указанных сигналов зависит от состояния элементарных автоматов в момент времени t и входных сигналов заданного автомата, действующих в тот же момент времени.

Зависимость входного сигнала элементарного автомата q(t) от внутренного состояния всех элементарных автоматов и от значения входных сигналов заданного автомата x(t) называют функцией возбуждения элементарного автомата

$$q(t)=F[Q_1(t),Q_2(t),\dots Q_n,x_1(t),x_2(t),\dots x_m(t)].$$

Функции возбуждения элементарных автоматов являются перепереключательными функциями.

Для элементарных автоматов Q_1 и Q_2 функции возбуждения определяются табл.4.14. При этом следует считать, что аргументами этих функций являются x(t), $Q_1(t)$, $Q_2(t)$.

СДНФ функций возбуждения имеют вид:

$$q_{1s} = \bar{x}\cdot\bar{Q}_1\cdot Q_2 \vee x\cdot Q_1\cdot\bar{Q}_2 \vee x\cdot Q_1\cdot Q_2\,,$$

$$q_{2s}= \bar{x}\cdot\bar{Q}_1\cdot\bar{Q}_2 \vee \bar{x}\cdot\bar{Q}_1\cdot Q_2 \vee \bar{x}\cdot Q_1\cdot\bar{Q}_2 \vee x\cdot\bar{Q}_1\cdot Q_2 \vee x\cdot Q_1\cdot Q_2\,,$$

а минималные дизъюнктивные нормальные формы –

$$q_{1s} = x\cdot Q_1 \vee \bar{x}\cdot\bar{Q}_1\cdot Q_2,$$

$$q_{2s}= \bar{x}\cdot\bar{Q}_1 \vee \bar{x}\cdot\bar{Q}_2 \vee \bar{Q}_1\cdot Q_2 \vee x\cdot Q_2.$$

Функции выходов $z_i(t)$ заданного автомата определяются по кодированной таблице и записывается в форме

$$z_i(t)=\varphi[Q_1(t), Q_2(t),\dots Q_n,x_1(t),x_2(t),\dots x_m(t)].$$

Эти функции также как и функции возбуждения являются переключательными функциями. Функции выходов заданные табл.4.12 могут быть записаны в виде

$$z_1=x\cdot Q_1\cdot Q_2,$$

$$z_2= \bar{x}\cdot Q_1\cdot\bar{Q}_2.$$

Как было сказано, для синтеза автоматов используются элементарные автоматы. Существуют различные типы элементарных автоматов. Рассмотрим конкретные типы элементарных автоматов.

Элементарные автоматы с одним входом. Этот тип элементарного автомата был показан выше (табл.4.13). Элементарный автомат, заданный табл.4.13, изменяет свое состояние только при подаче на вход сигнала $q_s(t)$, равного единице. Он является триггером со счетным входом. Функция переходов триггера со счетным входом имеет вид:

$$Q(t+1)=(\bar{q}_s \cdot Q \vee q_s \cdot \bar{Q})^t \qquad (4.10)$$

В этом выражении индекс t , расположенный над скобкой , указывает что значения всех переменных, содержащихся в скобках, относятся к моменту времени t.

Элементарный автомат с двумя входами. Элементарные автоматы с двумя входами q_0 и q_1 , функционируют следующим образом: если на вход q_0 действует сигнал, равный единице (нулю), а на входе q_1– равный нулю (единице), автомат переходит в нуль (единицу) независимо от его состояния в предыдущий момент времени. Закон функционирования таких атоматов определяется табл. 4.15.

Вход q_0 называют нулевым, а вход q_1 – единичным входом.

Таблица 4.15

$q_0(t)$	$q_1(t)$	$Q(t)$	$Q(t+1)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	–
1	1	1	–

Если на вход автомата подается комбинация входных сигналов q_0=0, q_1=0, означающая отсутствие сигналов, то автомат не может изменить состояние. В этом случае в первой и второй строках табл. 4.15 код состояния Q(t+1) должен совпасть с кодом состояния Q(t). Следует также учитывать, что под воздействием комбинаций входных сигналов q_0=1, q_1=1 работа автомата крайне неустойчива. Состояние, в которое переходит автомат при подаче на его входы таких комбинаций сигналов, в значительной степени случайно. Такую комбинацию входных сигналов называют запрещенными. При наличии запрещенных комбинаций соответствующие клетки таблицы переходов автомата отмечаются черточками.

Элементарный автомат, определяемый табл.4.15, называется триггером с раздельными входами.

Чтобы представить функцию переходов триггера с раздельными входами в аналитической форме, составими по табл.4.15 диаграмму Вейча (рис.4.3)

	q_1		$\bar{q}_1$	
q_0			0	0
$\bar{q}_0$	1	1	1	0
	$\bar{Q}$	Q	Q	$\bar{Q}$

Рис.4.3.

Пустые клетки этой диаграммы соответствуют запрещенным входным комбинациям. Так как эти комбинации на входах триггера никогда не подаются, то пустые клетки диаграммы Вейча можно заполнить произвольно. В данном случае функция переходов имеет наиболее простое выражение при записи в каждую пустую клетку единицы:

$$Q(t+1)=(q_1 \vee \bar{q}_0 \cdot Q)^t. \qquad (4.11)$$

Отметим, что триггер с раздельными входами может быть переведен из состояния $Q(t)=0$ в состояние $Q(t+1)=0$ двумя различными комбинациями входных сигналов: $q_0=0, q_1=0$ и $q_0=1$, $q_1=0$. Переход из состояния $Q(t)=1$ в состояние $Q(t+1)=1$ также может быть вызван двумя комбинациями входных сигналов: $q_0=0$, $q_1=0$ и $q_0=0$, $q_1=1$. Автоматы, которые могут переходить из одного состояния в другое или в то же самое состояние под влиянием нескольких комбинаций входных сигналов, называют автоматами с избыточной системой переходов. Избыточность системы можно использовать в процессе синтеза для упрощения схемы заданного автомата.

Элементарные автоматы с тремя входами.

На практике также используются триггеры, имеющие два раздельных входа установки в нуль и единицу q_0, q_1 и счетный вход q_s. Закон функционирования таких триггеров определяется табл.4.16.

Если на счетный вход q_s подать сигнал, равный единице, то триггер изменит свое состояние. Сигнал, равный единице, действующий на входе q_0, переводит триггер в состояние 0, а при подаче такого же сигнала на вход q_1, триггер переходит в состояние 1. Любая комбинация, когда хотя бы два входных сигнала равны единице, запрещена.

Таблица 4.16.

$q_s(t)$	$q_0(t)$	$q_1(t)$	$Q(t)$	$Q(t+1)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	–
0	1	1	1	–
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	–
1	0	1	1	–
1	1	0	0	–
1	1	0	1	–
1	1	1	0	–
1	1	1	1	–

Построим по табл.4.16 диаграмму Вейча функции переходов автомата (рис.4.4. а).

	q_0	q_0	$\bar{q}_0$	$\bar{q}_0$	
q_s			0	1	$\bar{q}_1$
q_s					q_1
$\bar{q}_s$			1	1	q_1
$\bar{q}_s$	0	0	1	0	$\bar{q}_1$
	$\bar{Q}$	Q	Q	$\bar{Q}$	

а)

	q_0	q_0	$\bar{q}_0$	$\bar{q}_0$	
q_s	1	0	0	1	$\bar{q}_1$
q_s	1	1	1	1	q_1
$\bar{q}_s$	1	1	1	1	q_1
$\bar{q}_s$	0	0	1	0	$\bar{q}_1$
	$\bar{Q}$	Q	Q	$\bar{Q}$	

б)

Рис.4.4.

Выбрав соответствующим образом значения переключательной функции на запрещенных наборах, получим функцию переходов триггера с тремя входами (рис.4.4. б)

$$Q(t+1)=(q_1 \vee q_s \cdot \bar{Q} \vee \bar{q}_s \cdot \bar{q}_0 \cdot Q)^t. \qquad (4.12)$$

Структурный синтез конечных автоматов заключается в выборе типов элементарных автоматов, которые составляют запоминающий элемент, и определение функций возбуждения $q_i(t)$ и функций выходов $z_i(t)$.

Рассмотрим структурный синтез конечного автомата на конкретном примере.

Проведем синтез трехразрядного счетчика, который при подаче на его вход сигнала x=0 ведет счет в возрастающей последовательности двоичных чисел, а при подаче сигнала x=1 – увеличивает содержимое на два. Выходные сигналы счетчика должны представлять собой двоичный код чисел, совпадающих с кодом состояний элементарных автоматов. Кодированная таблица переходов такого счетчика представлена на табл.4.17.

Прежде всего необходимо выбрать типы элементарных автоматов, входящих в состав счетчика. В этом примере такой выбор проведем произвольно. Будем считать, что элементарный автомат Q_1 является триггером с раздельными входами, а элементарные автоматы Q_2 и Q_3 – триггеры со счетными входами. Для составления функций возбуждения для каждого триггера воспользуемся таблицами переходов элементарных автоматов. Так как при переходе элементарного автомата из состояния 0 в состояние 0 или из состояния 1 в состояние 1 сигналы возбуждения q_0 и q_1 соответственно произвольные, поэтому в подобном случае указанные сигналы следует отметить буквой ‘b’.

Таблица 4.17

пп пп	$x(t)$	$Q_1(t)$	$Q_2(t)$	$Q_3(t)$	$Q_1(t+1)$	$Q_2(t+1)$	$Q_3(t+1)$	q_{01}	q_{11}	q_{s2}	q_{s3}
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	0	0	0	0	0	1	b_1	0	0	1
2	0	0	0	1	0	1	0	b_2	0	1	1
3	0	0	1	0	0	1	1	b_3	0	0	1
4	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
5	0	1	0	0	1	0	1	0	b_4	0	1
6	0	1	0	1	1	1	0	0	b_5	1	1
7	0	1	1	0	1	1	1	0	b_6	0	1
8	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1
9	1	0	0	0	0	0	1	b_7	0	1	0
10	1	0	0	1	0	1	0	b_8	0	1	0
11	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0
12	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0
13	1	1	0	0	1	0	1	0	b_9	1	0
14	1	1	0	1	1	1	0	0	b_{10}	1	0
15	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0
16	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0

Представим функции возбуждения триггеров в минимальных ДНФ. Для этого составим диаграмму Вейча для каждой функции возбуждения (рис.4.5)

	Q_1		$\overline{Q}_1$		
x	0	0	b_8	b_7	$\overline{Q}_2$
x	1	1	0	0	Q_2
$\overline{x}$	0	1	0	b_3	Q_2
$\overline{x}$	0	0	b_2	b_1	$\overline{Q}_2$
	$\overline{Q}_3$	Q_3	Q_3	$\overline{Q}_3$	

а) для q_{01}.

	Q_1		$\overline{Q}_1$		
x	b_9	b_{10}	0	0	$\overline{Q}_2$
x	0	0	1	1	Q_2
$\overline{x}$	b_6	0	1	0	Q_2
$\overline{x}$	b_4	b_5	0	0	$\overline{Q}_2$
	$\overline{Q}_3$	Q_3	Q_3	$\overline{Q}_3$	

б) для q_{11}

	Q_1		$\overline{Q}_1$		
x	1	1	1	1	$\overline{Q}_2$
x	1	1	1	1	Q_2
$\overline{x}$	0	1	1	0	Q_2
$\overline{x}$	0	1	1	0	$\overline{Q}_2$
	$\overline{Q}_3$	Q_3	Q_3	$\overline{Q}_3$	

в)для q_{s2}

	Q_1		$\overline{Q}_1$		
x	0	0	0	0	$\overline{Q}_2$
x	0	0	0	0	Q_2
$\overline{x}$	1	1	1	1	Q_2
$\overline{x}$	1	1	1	1	$\overline{Q}_2$
	$\overline{Q}_3$	Q_3	Q_3	$\overline{Q}_3$	

г) для q_{s3}

Рис.4.5.

Полагая в таблицах а) и б) все неопределенные коэффициенты b_i равными нулю и выполнив склеивание во всех таблицах, получим минимальную ДНФ функций возбуждения для всех элементарных автоматов:

а) $q_{01}= x\cdot Q_1\cdot Q_2 V Q_1\cdot Q_2\cdot Q_3 = Q_1\cdot Q_2\cdot(xVQ_3)$;

б) $q_{11}= x\cdot \overline{Q}_1\cdot Q_2 V \overline{Q}_1\cdot Q_2\cdot Q_3 = \overline{Q}_1\cdot Q_2\cdot(xVQ_3)$; (4.13)

в) $q_{s2}= xVQ_3$;

г) $q_{s3}=\overline{x}$.

В данном примере выходные сигналы счетчика должны по условию совпадать с кодом внутренних состояний триггеров. Поэтому функции кодированых выходов автомата тривиальны:

$z_1=Q_1$, $z_2=Q_2$, $z_3=Q_3$. (4.14)

Структурная схема счетчика, построенная по выражениям (4.13) и (4.14), приведена на рис.4.6. В этой схеме триггер Q_3 изменяет свое состояние под влиянием сигнала x=0, а триггеры Q_1 и Q_2 –под влиянием сигнала x=1.

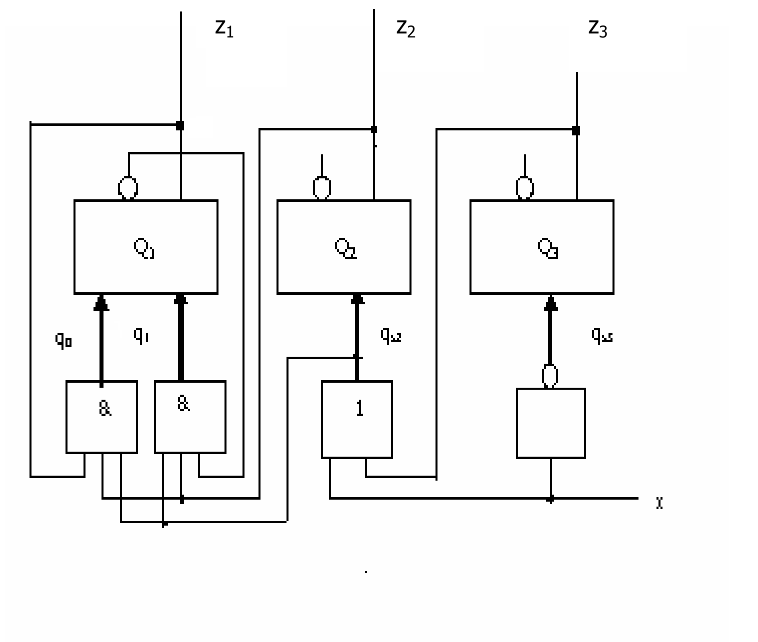


Рис.4.6.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. ო.ქართველიშვილი. ციფრული ავტომატების ლოგიკის სააუძვლები. სპი-ს გამომცემლობა.1990.
2.Савельев А.Я Прикладная теория цифровых автоматов. М. Высшая школа, 1987.
3.Вавилов Е.Н. Портной Г.П. Синтез схем электронных цифровых машин.М. Советское радио, 1963.
4.Поспелов Д.А. Логические методы анализа и синтеза схем.М.Энергия, 1974.
5.Fridman Artur D. Menon PremaChandran R. Theori & design of switching circuits. Universiti of Southern California 1975

О Г Л А В Л Е Н И Е