Учебное пособие

ПИТЕР

С. Н. Старков



Справочник
по математическим формулам и графикам функций
для студентов

▪ 1200 ФОРМУЛ ▪ 1200 ГРАФИКОВ



С. Н. Старков

Справочник
по математическим формулам и графикам функций
для студентов

ПИТЕР®

Москва · Санкт-Петербург · Нижний Новгород · Воронеж
Ростов-на-Дону · Екатеринбург · Самара · Новосибирск
Киев · Харьков · Минск
2009

ББК 22.19я22
УДК 519.6 (03)
С77

Старков С. Н.
С77 Справочник по математическим формулам и графикам функций для студентов. — СПб.: Питер, 2009. — 235 с.: ил. — (Серия «Учебное пособие»).

ISBN 978-5-91180-830-3

Первая часть данного справочника содержит более 1200 формул элементарной и высшей математики, расположенных в 34 разделах. Во вторую часть вошло более 1200 рисунков, представляющих собой графики функций и их преобразования (элементарные и неэлементарные), а также изображения кривых на плоскости.

Издание предназначено для студентов и преподавателей высших учебных заведений технического и естественнонаучного профиля; большая часть справочника может быть полезна учащимся и преподавателям средних учебных заведений.

ББК 22.19я22
УДК 519.6 (03)

Все права защищены. Никакая часть данной книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме без письменного разрешения владельцев авторских прав.

ISBN 978-5-91180-830-3

© ООО «Питер Пресс», 2009

Содержание

Некоторые обозначения **13**

Часть 1. Формулы **15**

1. Формулы сокращенного умножения и другие тождества **17**

2. Формулы разложения многочленов на множители **18**

Разложения на множители некоторых многочленов 2-й, 3-й и 4-й степени • Схема Горнера деления многочлена на двучлен • Теорема о подборе корней многочлена с целочисленными коэффициентами • Разложение многочлена n-й степени на простейшие множители

3. Действия с дробями **20**

4. Средние величины. Пропорции. Проценты **21**

5. Модуль (абсолютная величина) **22**

6. Степени и корни. Логарифмы **27**

Степени с натуральным, целым и рациональным показателем. Арифметический корень • Свойства арифметических корней • Свойства степени с действительным показателем • Свойства логарифмов

7. Прогрессии **25**

Арифметическая прогрессия • Геометрическая прогрессия

8. Решение уравнений **36**

Рациональные уравнения • Уравнения, содержащие знак модуля • Иррациональные уравнения • Показательные уравнения • Логарифмические уравнения • Тригонометрические уравнения

9. Решение неравенств **28**

Рациональные неравенства • Неравенства, содержащие знак модуля • Иррациональные неравенства • Показательные неравенства • Логарифмические неравенства • Тригонометрические неравенства

10. Тригонометрические формулы 31

Основные тождества • Свойства четности и нечетности • Формулы сложения • Формулы кратных углов • Формулы половинных углов • Формулы преобразования суммы в произведение • Формулы преобразования произведения в сумму • Выражение функций через тангенс половинного угла • Формулы приведения • Обратные тригонометрические функции • Дополнительные тождества • Связь радианной и градусной меры угла • Таблица значений тригонометрических функций

11. Типовые способы замены переменной 36

12. Формулы геометрии 37

Треугольники • Вычисление площади треугольника • Теорема Пифагора • Теорема синусов • Теорема косинусов • Четырехугольники • Вычисление площади четырехугольника • Окружность и круг • Вычисление объемов и площадей поверхности

13. Векторы 39

Прямоугольные и полярные координаты точки на плоскости • Прямоугольные и цилиндрические координаты точки в пространстве • Прямоугольные и сферические координаты точки в пространстве • Проекция вектора на ось • Проекции вектора на оси прямоугольной системы координат *OXYZ* • Задание вектора в координатной форме • Расстояние между двумя точками • Модуль (длина) вектора • Направляющие косинусы вектора • Единичный вектор • Нулевой вектор • Вектор, противоположный вектору • Равенство векторов • Сложение и вычитание векторов • Умножение вектора на число • Орт ненулевого вектора • Признак коллинеарности двух ненулевых векторов • Линейная комбинация векторов • Линейная независимость системы ненулевых векторов • Линейная зависимость системы векторов • Связь коллинеарности и линейной зависимости двух векторов • Связь компланарности и линейной зависимости трех векторов • Разложение вектора по базису в пространстве • Разложение вектора по трем некомпланарным векторам • Разложение вектора по базису прямоугольной системы координат *OXYZ* • Преобразование координат в пространстве • Преобразование координат на плоскости при параллельном переносе и повороте осей • Вычисление скалярного произведения в координатной форме • Угол между векторами • Условие перпендикулярности двух ненулевых векторов • Вычисление векторного произведения в координатной форме • Условие коллинеарности двух векторов • Вычисление смешанного произведения в координатной форме • Условие компланарности трех векторов

14. Прямая на плоскости 46

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору • Общее уравнение прямой • Неполные уравнения прямой • Нормальное уравнение прямой • Уравнение прямой в полярных кординатах • Уравнение прямой с угловым коэффициентом • Уравнение прямой «в отрезках» • Параметрическое уравнение прямой, проходящей через заданную точку параллельно заданному вектору • Каноническое уравнение прямой, проходящей через заданную точку параллельно заданному вектору • Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки • Угол между двумя прямыми • Расстояние от точки до прямой • Расстояние от начала координат до прямой • Условие пересечения двух прямых и координаты точки пересечения • Условие совпадения двух прямых • Условие принадлежности трех заданных точек одной прямой

15. Плоскость и прямая в пространстве 50

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору • Общее уравнение плоскости • Неполные уравнения плоскости • Нормальное уравнение плоскости • Уравнение плоскости «в отрезках» • Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки, не лежащие на одной прямой • Расстояние от точки до плоскости • Угол между двумя плоскостями • Параметрическое уравнение прямой в пространстве, проходящей через заданную точку параллельно заданному вектору • Каноническое уравнение прямой в пространстве • Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две различные точки • Угол между прямой и плоскостью • Задание прямой в пространстве как линии пересечения двух непараллельных плоскостей

16. Уравнения некоторых кривых на плоскости 53

Эллипс • Окружность • Гипербола • Парабола • Архимедова спираль • Астроида • Декартов лист • Улитка Паскаля • Кардиоида • Конхоида Никомеда • Лемниската Бернулли • Локон Аньези • Циклоида • Эпициклоиды • Эпитрохоиды • Розы • Гипоциклоиды • Гипотрохоиды

17. Канонические уравнения поверхностей 2-го порядка 57

Эллипсоид • Однополостной гиперболоид • Двухполостной гиперболоид • Конус второго порядка • Эллиптический параболоид • Гиперболический параболоид • Эллиптический цилиндр • Гиперболический цилиндр • Параболический цилиндр • Пара пересекающихся плоскостей • Пара параллельных плоскостей

18. Определители 58

Определитель первого порядка • Определитель второго порядка • Определитель третьего порядка • Определитель n-го порядка • Алгебраическое дополнение • Свойства определителей • Решение системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными по формулам Крамера

19. Матрицы 61

Прямоугольные матрицы размера $m \times n$ • Равенство матриц • Нулевая матрица • Противоположная матрица • Сложение матриц одинакового размера • Умножение матрицы на число • Умножение матриц согласованного размера • Свойства единичной матрицы • Обратная матрица • Вычисление обратной матрицы методом присоединенной матрицы • Решение системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными методом обратной матрицы • Ранг матрицы • Теорема Кронекера–Капелли о совместности систем m линейных уравнений с n неизвестными

20. Пределы и непрерывность..... 65

Свойства сходящихся последовательностей • Сходимость монотонной и ограниченной последовательности • Критерий Коши сходимости последовательности • Свойства функций, имеющих предел (правила вычисления пределов) • Односторонние пределы функции • Условие существования предела функции • Пределы функции «на бесконечности» • Бесконечные пределы • Замечательные пределы • Бесконечно малые и бесконечно большие функции • Таблица эквивалентных бесконечно малых • Точки разрыва • Свойства функций, непрерывных на отрезке

21. Производная и дифференциал..... 70

Конечные и бесконечные производные • Односторонние производные • Условие существования производной функции • Существование производной и непрерывность • Производные основных элементарных функций (таблица производных) • Производные гиперболических функций • Правила дифференцирования • Производная сложной функции • Производная обратной функции • Производная функции, заданной параметрически • Производная функции, заданной неявно • Производная показательно-степенной функции • Производные высших порядков • Формулы Тейлора и Маклорена • Теорема Ферма. Необходимое условие экстремума функции • Теорема Ролля • Теорема Лагранжа • Теорема Коши • Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей • Уравнение касательной к графику функции • Уравнение нормали к графику функции • Прибли-

женные вычисления с помощью дифференциала • Дифференциалы высших порядков • Выражение производных через дифференциалы

22. Неопределенный интеграл 77

Первообразная • Неопределенный интеграл • Свойства неопределенного интеграла • Таблица интегралов • Метод интегрирования с помощью замены переменной • Метод интегрирования по частям • Интегрирование рациональных дробей • Интегрирование простейших рациональных дробей • Интегралы от некоторых рациональных дробей • Интегралы от некоторых иррациональных функций • Интегралы от некоторых показательных и логарифмических функций • Интегралы от некоторых тригонометрических функций

23. Определенный интеграл 85

Связь определенного и неопределенного интеграла • Формула Ньютона–Лейбница • Свойства определенного интеграла • Оценки значения определенного интеграла • Метод интегрирования с помощью замены переменной • Метод интегрирования по частям • Вычисление площадей, длин дуг и объемов с помощью определенного интеграла

24. Несобственные интегралы 88

Несобственные интегралы 1-го рода • Несобственные интегралы 2-го рода • Гамма-функция • Значения некоторых несобственных интегралов

25. Частные производные и дифференциалы функций нескольких переменных 91

Частная производная функции • Производная функции по направлению • Частные производные высшего порядка • Полная производная сложной функции • Частные производные сложной функции • Частные дифференциалы • Полный дифференциал • Дифференциалы n-го порядка • Формула Тейлора • Необходимые условия экстремума функции • Достаточные условия экстремума функции • Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

26. Кратные интегралы 94

Вычисление двойного интеграла через повторные • Свойства двойного интеграла • Вычисление двойного интеграла в полярных кординатах • Вычисление площадей и объемов с помощью двойного интеграла • Вычисление тройного интеграла через повторные • Свойства тройного интеграла • Вычисление тройного интеграла в цилиндрических и сферических кординатах • Вычисление объемов с помощью тройного интеграла

27. Криволинейные и поверхностные интегралы 96

Вычисление криволинейных интегралов 1-го рода • Вычисление криволинейных интегралов 2-го рода • Формула Грина • Вычисление поверхностных интегралов 1-го рода • Вычисление поверхностных интегралов 2-го рода • Формула Стокса • Формула Гаусса–Остроградского

28. Дифференциальные операции векторного анализа..... 98

Оператор Гамильтона • Градиент функции • Производная функции по направлению • Дивергенция вектор-функции • Ротор вектор-функции • Оператор Лапласа. Дифференциальные операции 2-го порядка

29. Числовые и степенные ряды 99

Сходящиеся и расходящиеся числовые ряды • Свойства сходящихся числовых рядов • Необходимое условие сходимости числового ряда • Достаточное условие расходимости числового ряда • Знакопостоянные числовые ряды. Достаточные признаки сходимости и расходимости • Знакопеременные и знакочередующиеся числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость • Сложение и умножение степенных рядов • Дифференцирование и интегрирование степенных рядов • Разложения функций в степенные ряды • Значения сумм некоторых числовых рядов

30. Тригонометрические ряды Фурье 105

31. Элементы теории обыкновенных дифференциальных уравнений 106

Дифференциальное уравнение с разделенными переменными • Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными • Дифференциальное уравнение, однородное относительно аргумента и функции • Линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка • Уравнение Бернулли • Уравнение в полных дифференциалах • Линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами • Линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

32. Комплексные числа 111

Степени числа i • Алгебраическая форма комплексного числа • Равенство комплексных чисел • Комплексно сопряженное число • Модуль комплексного числа • Аргумент комплексного числа • Множество значений аргумента • Действия над комплексными числами в алгебраической форме • Свойства действий над комплексными числами • Тригонометрическая форма комплексного числа • Действия над комплексными числами в тригонометрической форме • Показательная форма комплексного числа

• Действия над комплексными числами в показательной форме • Расстояние между точками • Уравнение прямой • Уравнение окружности • Разложение многочлена на линейные множители • Основная теорема алгебры

33. Элементы теории функций комплексной переменной 116

Основные функции комплексной переменной • Гиперболические функции • Производная функции комплексной переменной • Вычисление интегралов • Формула Ньютона–Лейбница • Теорема Коши • Интегральная формула Коши • Ряды Тейлора • Ряды Лорана • Особые точки • Классификация изолированных особых точек • Вычеты. Основная теорема о вычетах

34. Элементы теории вероятностей 120

Число сочетаний без повторений из n элементов по k • Число размещений без повторений из n элементов по k • Число перестановок без повторений из n элементов по n • Число размещений с повторениями из n элементов по k • Формула Стирлинга • Свойства операций сложения и умножения событий • Правило сложения вероятностей • Условная вероятность. Независимые события • Правило умножения вероятностей • Формула полной вероятности • Формула Байеса. Пересчет вероятностей гипотез • Повторение испытаний с двумя исходами. Формула Бернулли • Функция распределения случайной величины • Ряд распределения дискретной случайной величины • Плотность распределения непрерывной случайной величины • Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины с n значениями • Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины • Среднее квадратическое отклонение • Биномиальное распределение • Распределение Пуассона • Равномерное распределение • Нормальное распределение • Неравенство Чебышева

Часть 2. Графики функций 127

35. Графики основных элементарных функций 128

36. Основные типы преобразований графиков 130

37. Преобразования графиков линейных функций 132

38. Преобразование графиков квадратичных функций 142

39. Преобразования графиков многочленов 3-й и 4-й степени 152

40. Преобразования графиков дробно-рациональных функций 162

41. Преобразования графиков функций, содержащих рациональные степени и корни 182

42. Преобразования графиков показательных и логарифмических функций 192

43. Преобразования графиков тригонометрических функций..... 202

44. Графики различных комбинаций элементарных функций 214

45. Изображения неявно заданных зависимостей, содержащих знак модуля 217

46. Изображения зависимостей, заданных параметрически..... 222

47. Изображения зависимостей, заданных в полярных координатах 226

48. Изображения некоторых кривых на плоскости..... 227

49. Изображения поверхностей 2-го порядка..... 228

Литература 229

Алфавитный указатель основных формул..... 231

Некоторые обозначения

- $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел
- $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел
- $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел
- $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел
- $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел
- $\varnothing$ — пустое множество
- $x \in \mathbb{R}$ — x принадлежит множеству $\mathbb{R}$
- $x \notin \mathbb{R}$ — x не принадлежит множеству $\mathbb{R}$
- $A \cup B$ — объединение множеств A и B
- $A \cap B$ — пересечение множеств A и B
- $a = b$ — a равно b
- $a \neq b$ — a не равно b
- $a > b$; $a \geq b$ — a больше b; a больше или равно b
- $a < b$; $a \leq b$ — a меньше b; a меньше или равно b
- $a \equiv b$ — a тождественно равно b
- $a \approx b$ — a приближенно равно b
- $(a;b)$ — интервал (открытый промежуток), $a < x < b$
- $[a;b)$; $(a;b]$ — полуинтервалы, $a \leq x < b$, $a < x \leq b$
- $[a;b]$ — отрезок (замкнутый промежуток), $a \leq x \leq b$
- $(a;+\infty)$; $[a;+\infty)$; $(-\infty;b)$; $(-\infty;b]$ — числовые лучи, $a < x < +\infty$; $a \leq x < +\infty$; $-\infty < x < b$; $-\infty < x \leq b$
- $(-\infty;+\infty)$ — числовая прямая, $-\infty < x < +\infty$
- $U(x_0)$ — окрестность точки x_0, то есть любой интервал $(a;b)$, такой, что $x_0 \in (a;b)$
- $\dot{U}(x_0)$ — проколотая окрестность точки x_0, то есть любой интервал $(a;b)$, такой, что $x_0 \in (a;b)$; $x \neq x_0$

- $\forall x$ — любое значение x; для любого значения x
- $\exists c$ — существует значение c
- $A \Rightarrow B$ — из A следует B (если выполнено A, то выполнено B; A — достаточное условие для B, B — необходимое условие для A)
- $A \Leftrightarrow B$ — из A следует B и одновременно из B следует A (A — необходимое и достаточное условие для B; A и B равносильны)
- $f_1 = g_1 \Leftrightarrow f_2 = g_2$ — уравнения равносильны (эквивалентны)
- $f_1 > g_1 \Leftrightarrow f_2 > g_2$ — неравенства равносильны (эквивалентны)
- $\begin{cases} f_1 = g_1 \\ f_2 = g_2 \end{cases}; \begin{cases} f_1 > g_1 \\ f_2 > g_2 \end{cases}$ — система уравнений; неравенств
- $\begin{bmatrix} f_1 = g_1 \\ f_2 = g_2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} f_1 > g_1 \\ f_2 > g_2 \end{bmatrix}$ — совокупность уравнений; неравенств
- $\vec{r}(x; y)$; $\vec{r}(x; y; z)$ — радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ точки $M(x; y)$ на плоскости; точки $M(x; y; z)$ в пространстве
- $\det \mathbf{A}$ — детерминант (определитель) матрицы $\mathbf{A}$

Часть 1. Формулы

1. Формулы сокращенного умножения и другие тождества ($n \in \mathbb{N}$)

(1.1) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ — разность квадратов

(1.2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ — квадрат разности

(1.3) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ — квадрат суммы

(1.4) $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

(1.5) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$

(1.6) $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$ — разность кубов

(1.7) $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$ — сумма кубов

(1.8) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ — куб разности

(1.9) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ — куб суммы

(1.10) $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

(1.11) $a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)\left(a^2 + b^2\right)$

(1.12) $a^4 - b^4 = (a-b)\left(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3\right)$

(1.13) $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

(1.14) $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

(1.15) $a^4 + b^4 = (a+b)^4 - 4(a+b)^2 ab + 2a^2b^2$

(1.16) $a^4 + b^4 = \left(a^2 - \sqrt{2}ab + b^2\right)\left(a^2 + \sqrt{2}ab + b^2\right)$

(1.17) $a^4 + a^2b^2 + b^4 = \left(a^2 - ab + b^2\right)\left(a^2 + ab + b^2\right)$

(1.18) $a^5 - b^5 = (a-b)\left(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4\right)$

(1.19) $a^5 + b^5 = (a+b)\left(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4\right)$

(1.20) $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$

(1.21) $a^{2n} - b^{2n} = (a+b)\left(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + \ldots + ab^{2n-2} - b^{2n-1}\right)$

(1.22) $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)\left(a^{2n} - a^{2n-1}b + \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n}\right)$

(1.23) Формула бинома Ньютона: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k =$

$$= a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}a^{n-k}b^k + \ldots + b^n$$

2. Формулы разложения многочленов на множители

❑ **Разложения на множители некоторых многочленов 2-й, 3-й и 4-й степени**

(2.1) $x^2 \pm 2ax + a^2 = (x \pm a)^2$

(2.2) $x^2 - (a+b)x + ab = (x-a)(x-b)$

(2.3) $x^3 \pm 3ax^2 + 3a^2x \pm a^3 = (x \pm a)^3$

(2.4) $x^3 \pm a^3 = (x \pm a)(x^2 \mp ax + a^2)$

(2.5) $x^3 + (a+p)x^2 + (ap+q)x + aq = (x+a)\left(x^2 + px + q\right)$;
$p^2 - 4q < 0$

(2.6) $x^3 - (a+2b)x^2 + \left(2ab + b^2\right)x - ab^2 = (x-a)(x-b)^2$

(2.7) $x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc = (x-a)(x-b)(x-c)$

(2.8) $x^3 + x - a^3 - a = (x-a)\left(x^2 + ax + a^2 + 1\right)$

(2.9) $x^3 + x^2 + x - a^3 - a^2 - a = (x-a)[x^2 + (a+1)x + a^2 + a + 1]$

(2.10) $x^4 - a^4 = (x-a)(x+a)\left(x^2 + a^2\right)$

(2.11) $x^4 - \left(a^2 + b^2\right)x^2 + a^2b^2 = (x-a)(x+a)(x-b)(x+b)$

(2.12) $x^4 + \left(a^2 + b^2\right)x^2 + a^2b^2 = \left(x^2 + a^2\right)\left(x^2 + b^2\right)$

(2.13) $x^4 + a^2x^2 + a^4 = \left(x^2 - ax + a^2\right)\left(x^2 + ax + a^2\right)$

(2.14) $x^4 + a^4 = \left(x^2 - \sqrt{2}ax + a^2\right)\left(x^2 + \sqrt{2}ax + a^2\right)$

(2.15) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = \left(x^2 + x + 1\right)^2$

❑ **Схема Горнера деления многочлена на двучлен**

(2.16) $\frac{P_n(x)}{x-c} = Q_{n-1}(x) + \frac{R}{x-c}$ — деление с остатком;

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$;

$Q_{n-1}(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + ... + b_{n-2}x + b_{n-1}$;

$b_0 = a_0; b_1 = a_1 + cb_0; b_2 = a_2 + cb_1; ...; b_{n-1} = a_{n-1} + cb_{n-2}$;

$R = a_n + cb_{n-1}; P_n(x) = (x-c)Q_{n-1}(x) + R; R = P_n(c)$

(теорема Безу)

(2.17) $P_n(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{P_n(x)}{x-c} = Q_{n-1}(x)$ — деление без остатка;

$P_n(x) = (x-c)Q_{n-1}(x)$

❑ **Теорема о подборе корней многочлена с целочисленными коэффициентами**

(2.18) Если многочлен

$P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$; $a_k \in \mathbb{Z}\ \forall k$ имеет целые корни, то они находятся среди делителей свободного члена a_n

❑ **Разложение многочлена n-й степени на простейшие множители**

(2.19) Случай n различных действительных корней:

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n =$

$= a_0(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$

(2.20) Случай l действительных корней кратности k_l:

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n =$

$= a_0(x - x_1)^{k_1} ... (x - x_l)^{k_l}\left(x^2 + p_1x + q_1\right)^{m_1} ... \left(x^2 + p_sx + q_s\right)^{m_s}$;

$p_i^2 - 4q_i < 0\ \forall i$

3. Действия с дробями

(3.1) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$; $b, d \neq 0$ — сложение и вычитание

(3.2) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$; $b \neq 0$

(3.3) $\frac{a}{b \cdot e} \pm \frac{c}{d \cdot e} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d \cdot e}$; $b, d, e \neq 0$

(3.4) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$; $b, d \neq 0$ — умножение

(3.5) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$; $b, c, d \neq 0$ — деление

(3.6) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$; $b, c, d \neq 0$

(3.7) $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$; $b, c \neq 0$ — сокращение

(3.8) $\frac{a}{b} \cdot c = c \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b}$; $b \neq 0$ — умножение дроби на число и числа на дробь

(3.9) $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$; $b \neq 0$

(3.10) $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$; $b, c \neq 0$ — деление дроби на число

(3.11) $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$; $b, c \neq 0$

(3.12) $c : \frac{a}{b} = \frac{c \cdot b}{a}$; $a, b \neq 0$ — деление числа на дробь

(3.13) $\frac{c}{\frac{a}{b}} = \frac{c \cdot b}{a}$; $a, b \neq 0$

(3.14) $\dfrac{\dfrac{1}{a}}{\dfrac{b}{a}} = \dfrac{b}{a}; \quad a, b \neq 0$

4. Средние величины. Пропорции. Проценты

❑ Средние величины

(4.1) Среднее арифметическое n чисел: $m_a = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$

(4.2) Среднее геометрическое n чисел: $m_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n}$

(4.3) Среднее гармоническое n чисел: $m_h = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} + ... + \dfrac{1}{a_n}}$

(4.4) Неравенство для средних величин: если $a_i > 0 \ \forall i$, то

$m_a \geq m_g \geq m_h$

❑ Пропорции

(4.5) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ — основное свойство пропорции

(4.6) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} \Leftrightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{d}{c} \Leftrightarrow \dfrac{c}{a} = \dfrac{d}{b}$

Нахождение неизвестных членов пропорции:

(4.7) $\dfrac{x}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow x = \dfrac{bc}{d};$

(4.8) $\dfrac{a}{x} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow x = \dfrac{ad}{c};$

(4.9) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{x}{d} \Leftrightarrow x = \dfrac{ad}{b};$

(4.10) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{bc}{a}$

Производные пропорции:

(4.11) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$

(4.12) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c}$

(4.13) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

(4.14) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$

❑ **Проценты**

(4.15) $\frac{a}{100}=0,01a$ – 1 % от числа a

(4.16) $\frac{a}{100}\cdot x=0,01ax$ – x % от числа a

(4.17) $\frac{a}{b}=\frac{x}{100}\Leftrightarrow x=\frac{100a}{b}$ – a составляет x % от b

5. Модуль (абсолютная величина)

(5.1) $|a|=\begin{cases}a, \text{ если } a\geq 0\\ -a, \text{ если } a<0\end{cases}$ — определение модуля числа

(5.2) $|f(x)|=\begin{cases}f(x), \text{ если } f(x)\geq 0\\ -f(x), \text{ если } f(x)<0\end{cases}$

(5.3) $|a|\geq 0$

(5.4) $|a|=0\Leftrightarrow a=0$

(5.5) $|a|\geq a$

(5.6) $|a|\geq -a$

(5.7) $|-a|=|a|$

(5.8) $|a+b|\leq|a|+|b|$ (модуль суммы не больше суммы модулей)

(5.9) $|a+b|=|a|+|b|\Leftrightarrow a\cdot b\geq 0$

(5.10) $|a-b|\geq|a|-|b|$ (модуль разности не меньше разности модулей)

(5.11) $|a^2|=|a|^2=a^2$

(5.12) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$

(5.13) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|};\ b\neq 0$

(5.14) $\left|\frac{1}{b}\right|=\frac{1}{|b|};\ b\neq 0$

(5.15) $|a|=|b|\Leftrightarrow a=\pm b\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\a=-b\end{array}\right.$

(5.16) $|a|+|b|=0\Leftrightarrow a=b=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=0\\b=0\end{array}\right.$

6. Степени и корни. Логарифмы $(n,k\in\mathbb{N};\ a,b,c,x,y\in\mathbb{R})$

❑ **Степени с натуральным, целым и рациональным показателем. Арифметический корень**

(6.1) $a^n=a\cdot a\cdot\ldots\cdot a$ (n множителей, $n>1$)

(6.2) $a^1=a$

(6.3) $a^0=1;\ a\neq 0$

(6.4) $a^{-n}=\frac{1}{a^n};\ a\neq 0$

(6.5) $a^{-1}=\frac{1}{a};\ a\neq 0$

(6.6) $\sqrt[n]{a}=b\Leftrightarrow b^n=a;\ b\geq 0$ — арифметический корень

(6.7) $\sqrt[n]{0}=0$

(6.8) $a^{k/n}=\sqrt[n]{a^k};\ a>0;\ k\in\mathbb{Z}$ — степень с рациональным показателем

(6.9) $a^{1/n}=\sqrt[n]{a}$

(6.10) $\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|$

(6.11) $\sqrt{a^2} = |a|$

(6.12) $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a};\ a \geq 0$

(6.13) $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$

(6.14) $\sqrt[3]{a^3} = a$

❑ **Свойства арифметических корней** $(a, b \geq 0; c > 0)$

(6.15) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

(6.16) $\sqrt[n]{\frac{a}{c}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{c}}$

(6.17) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$

(6.18) $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}$

(6.19) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k}$

❑ **Свойства степени с действительным показателем**

$(a, b > 0)$

(6.20) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

(6.21) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

(6.22) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$

(6.23) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

(6.24) $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$

❑ **Свойства логарифмов** $(a, b > 0;\ a, b \neq 1;\ x, y > 0)$

(6.25) $a^{\log_a x} = x$ — основное логарифмическое тождество

(6.26) $\log_a a = 1$

(6.27) $\log_a 1 = 0$

(6.28) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

(6.29) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

(6.30) $\log_{a^\beta}\left(x^\alpha\right) = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\log_a x; \beta \neq 0$

(6.31) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

(6.32) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

(6.33) $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}; \quad a, b, c > 0; \ b \neq 1$

(6.34) $\log_{10} x \equiv \lg x; \ \log_e x \equiv \ln x; \ e \approx 2,71828$

7. Прогрессии

❑ **Арифметическая прогрессия** $(n \in \mathbb{N})$

(7.1) $a_{n+1} = a_n + d$

(7.2) $a_n = a_1 + (n-1)d$

(7.3) $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}; n \geq 2$

(7.4) $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$

(7.5) $S_n = \frac{\left[2a_1 + (n-1)d\right]n}{2}$

(7.6) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(7.7) $(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(7.8) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$

(7.9) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$

❑ **Геометрическая прогрессия** $(n \in \mathbb{N}; b_1 \neq 0; q \neq 0)$

(7.10) $b_{n+1} = b_n \cdot q$

(7.11) $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

(7.12) $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}; n \geq 2$

(7.13) $S_n = b_1 + b_2 + ... + b_n = \frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}; q \neq 1$

(7.14) $S_n = nb_1; q = 1$

(7.15) $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}; |q| < 1$

8. Решение уравнений

❑ Рациональные уравнения

(8.1) $ax + b = 0,\ a \neq 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$

(8.2) $ax + b = 0,\ a = 0, b = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

(8.3) $ax + b = 0,\ a = 0, b \neq 0 \Leftrightarrow \varnothing$

(8.4) $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0, D = b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

(8.5) $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0, D = b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$

(8.6) $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0, D = b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow \varnothing$

❑ Уравнения, содержащие знак модуля

(8.7) $|x| = a,\ a > 0 \Leftrightarrow x_1 = a, x_2 = -a$

(8.8) $|x| = a,\ a = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(8.9) $|x| = a,\ a < 0 \Leftrightarrow \varnothing$

(8.10) $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \end{cases}$

❑ Иррациональные уравнения

(8.11) $\sqrt{x} = a, a \geq 0 \Leftrightarrow x = a^2$

(8.12) $\sqrt{x} = a, a < 0 \Leftrightarrow \varnothing$

(8.13) $\sqrt[3]{x} = a \Leftrightarrow x = a^3$

(8.14) $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$

❑ Показательные уравнения

(8.15) $a^x = b, a > 0, a \neq 1, b > 0 \Leftrightarrow x = \log_a b$

(8.16) $a^x = b, a > 0, a \neq 1, b \leq 0 \Leftrightarrow \varnothing$

(8.17) $a^{f(x)} = b^{g(x)}; a, b > 0, \ a, b \neq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)\log_c a = g(x)\log_c b, c > 0, c \neq 1$

❑ Логарифмические уравнения

(8.18) $\log_a x = b, a > 0, a \neq 1 \Leftrightarrow x = a^b$

(8.19) $\log_a f(x) = \log_a g(x), a > 0, a \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

❑ Тригонометрические уравнения

(8.20) $\sin x = a, |a| \leq 1 \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

(8.21) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

(8.22) $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

(8.23) $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$]

(8.24) $\sin x = a, |a| > 1 \Leftrightarrow \varnothing$

(8.25) $\cos x = a, |a| \leq 1 \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

(8.26) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

(8.27) $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

(8.28) $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

(8.29) $\cos x = a, |a| > 1 \Leftrightarrow \varnothing$

(8.30) $\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

(8.31) $\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

(8.32) $\operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

(8.33) $\operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

(8.34) $\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

(8.35) $\operatorname{ctg} x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

(8.36) $\operatorname{ctg} x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

(8.37) $\operatorname{ctg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

9. Решение неравенств

(9.1) $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > 0 \\ f(x) = 0 \end{array}\right.$

(9.2) $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) < 0 \\ f(x) = 0 \end{array}\right.$

❑ Рациональные неравенства

(9.3) $ax + b > 0,\ a > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$

(9.4) $ax + b > 0,\ a < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$

(9.5) $ax + b < 0,\ a > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$

(9.6) $ax + b < 0,\ a < 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$

(9.7) $a(x - x_1)(x - x_2) > 0,\ \ a > 0,\ x_1 < x_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < x_1 \\ x > x_2 \end{array}\right.$

(9.8) $a(x - x_1)(x - x_2) < 0,\ \ a > 0,\ x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$

(9.9) $a(x - x_1)^2 > 0,\ \ a > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < x_1 \\ x > x_1 \end{array}\right.$

(9.10) $a(x-x_1)^2<0,\ a>0 \Leftrightarrow \varnothing$

(9.11) $ax^2+bx+c>0, a>0, D=b^2-4ac<0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$

(9.12) $ax^2+bx+c<0, a>0, D=b^2-4ac<0 \Leftrightarrow \varnothing$

❑ Неравенства, содержащие знак модуля

(9.13) $|x|<a, a>0 \Leftrightarrow -a<x<a$

(9.14) $|x|<a, a\le 0 \Leftrightarrow \varnothing$

(9.15) $|x|>a, a\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-a \\ x>a \end{array}\right.$

(9.16) $|x|>a, a<0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$

(9.17) $|f(x)|<g(x) \Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x)<g(x) \\ f(x)>-g(x) \end{array}\right.$

(9.18) $|f(x)|>g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)>g(x) \\ f(x)<-g(x) \end{array}\right.$

❑ Иррациональные неравенства

(9.19) $\sqrt{x}>a,\ a\ge 0 \Leftrightarrow x>a^2$

(9.20) $\sqrt{x}>a,\ a<0 \Leftrightarrow x\ge 0$

(9.21) $\sqrt{x}<a,\ a>0 \Leftrightarrow 0\le x<a^2$

(9.22) $\sqrt{x}<a,\ a\le 0 \Leftrightarrow \varnothing$

(9.23) $\sqrt[3]{x}>a \Leftrightarrow x>a^3$

(9.24) $\sqrt[3]{x}<a \Leftrightarrow x<a^3$

(9.25) $\sqrt{f(x)}<g(x) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x)\ge 0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<g^2(x) \end{array}\right.$

(9.26) $\sqrt{f(x)}>g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} g(x)\ge 0 \\ f(x)>g^2(x) \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} g(x)<0 \\ f(x)\ge 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$

❑ Показательные неравенства

(9.27) $a^x > b,\ 0 < a < 1,\ b > 0 \Leftrightarrow x < \log_a b$

(9.28) $a^x > b,\ 0 < a < 1,\ b \le 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

(9.29) $a^x > b,\ a > 1,\ b > 0 \Leftrightarrow x > \log_a b$

(9.30) $a^x > b,\ a > 1,\ b \le 0 \Leftrightarrow x \in R$

(9.31) $a^x < b,\ 0 < a < 1,\ b > 0 \Leftrightarrow x > \log_a b$

(9.32) $a^x < b,\ 0 < a < 1,\ b \le 0 \Leftrightarrow \varnothing$

(9.33) $a^x < b,\ a > 1,\ b > 0 \Leftrightarrow x < \log_a b$

(9.34) $a^x < b,\ a > 1,\ b \le 0 \Leftrightarrow \varnothing$

❑ Логарифмические неравенства

(9.35) $\log_a x > b,\ 0 < a < 1 \Leftrightarrow 0 < x < a^b$

(9.36) $\log_a x > b,\ a > 1 \Leftrightarrow x > a^b$

(9.37) $\log_a x < b,\ 0 < a < 1 \Leftrightarrow x > a^b$

(9.38) $\log_a x < b,\ a > 1 \Leftrightarrow 0 < x < a^b$

(9.39) $\log_a f(x) > \log_a g(x),\ 0 < a < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$

(9.40) $\log_a f(x) > \log_a g(x),\ a > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$

❑ Тригонометрические неравенства ($n \in \mathbb{Z}$)

(9.41) $\sin x < a,\ |a| < 1 \Leftrightarrow -\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < \arcsin a + 2\pi n$

(9.42) $\sin x < a,\ a \le -1 \Leftrightarrow \varnothing$

(9.43) $\sin x < 1 \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

(9.44) $\sin x < a,\ a > 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

(9.45) $\sin x > a,\ |a| < 1 \Leftrightarrow \arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n$

(9.46) $\sin x > -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

(9.47) $\sin x > a,\ a < -1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

(9.48) $\sin x > a,\ a \geq 1 \Leftrightarrow \varnothing$

(9.49) $\cos x < a,\ |a| < 1 \Leftrightarrow \arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n$

(9.50) $\cos x < a,\ a \leq -1 \Leftrightarrow \varnothing$

(9.51) $\cos x < 1 \Leftrightarrow x \neq 2\pi n$

(9.52) $\cos x < a,\ a > 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

(9.53) $\cos x > a,\ |a| < 1 \Leftrightarrow -\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n$

(9.54) $\cos x > -1 \Leftrightarrow x \neq \pi + 2\pi n$

(9.55) $\cos x > a,\ a < -1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

(9.56) $\cos x > a,\ a \geq 1 \Leftrightarrow \varnothing$

(9.57) $\operatorname{tg} x < a \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \operatorname{arctg} a + \pi n$

(9.58) $\operatorname{tg} x > a \Leftrightarrow \operatorname{arctg} a + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$

(9.59) $\operatorname{ctg} x < a \Leftrightarrow \operatorname{arcctg} a + \pi n < x < \pi + \pi n$

(9.60) $\operatorname{ctg} x > a \Leftrightarrow \pi n < x < \operatorname{arcctg} a + \pi n$

10. Тригонометрические формулы

При использовании формул, содержащих тангенсы и котангенсы, необходимо учитывать вид областей определения левой и правой частей формулы

❑ Основные тождества

(10.1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ — основное тригонометрическое тождество

(10.2) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

(10.3) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

(10.4) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$

(10.5) $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\sin^2 \alpha}$

❑ Свойства четности и нечетности

(10.6) $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$

(10.7) $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

(10.8) $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$

(10.9) $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$

❑ Формулы сложения

(10.10) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$

(10.11) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$

(10.12) $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$

❑ Формулы кратных углов

(10.13) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

(10.14) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

(10.15) $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$

(10.16) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

(10.17) $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

(10.18) $\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$

❑ Формулы половинных углов

(10.19) $2 \sin^2 \left(\dfrac{\alpha}{2} \right) = 1 - \cos \alpha$ — формула понижения степени

(10.20) $2 \cos^2 \left(\dfrac{\alpha}{2} \right) = 1 + \cos \alpha$ — формула понижения степени

$$(10.21)\ \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

❑ **Формулы преобразования суммы в произведение**

$$(10.22)\ \sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$

$$(10.23)\ \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$(10.24)\ \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$(10.25)\ \operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

❑ **Формулы преобразования произведения в сумму**

$$(10.26)\ \sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

$$(10.27)\ \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$$

$$(10.28)\ \sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$$

❑ **Выражение функций через тангенс половинного угла**

$$(10.29)\ \sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$(10.30)\ \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$(10.31)\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

❑ Формулы приведения

(10.32) $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos\alpha$

(10.33) $\sin(\pi \pm \alpha) = \mp\sin\alpha$

(10.34) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = -\cos\alpha$

(10.35) $\sin(2\pi \pm \alpha) = \pm\sin\alpha$

(10.36) $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\sin\alpha$

(10.37) $\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos\alpha$

(10.38) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm\sin\alpha$

(10.39) $\cos(2\pi \pm \alpha) = \cos\alpha$

(10.40) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\operatorname{c\,tg}\alpha$

(10.41) $\operatorname{tg}(\pi \pm \alpha) = \pm\operatorname{tg}\alpha$

(10.42) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\operatorname{c\,tg}\alpha$

(10.43) $\operatorname{tg}(2\pi \pm \alpha) = \pm\operatorname{tg}\alpha$

❑ Обратные тригонометрические функции

(10.44) $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin a \le \frac{\pi}{2},\ \sin(\arcsin a) = a,\ |a| \le 1$

(10.45) $\arcsin(\sin x) = x,\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

(10.46) $0 \le \arccos a \le \pi,\ \cos(\arccos a) = a,\ |a| \le 1$

(10.47) $\arccos(\cos x) = x,\ 0 \le x \le \pi$

(10.48) $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} a < \frac{\pi}{2},\ \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$

(10.49) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

(10.50) $0 < \operatorname{arcctg} a < \pi,\ \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a$

(10.51) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x,\ 0 < x < \pi$

(10.52) $\arcsin a + \arcsin(-a) = 0,\ |a| \le 1$

(10.53) $\arccos a + \arccos(-a) = \pi,\ |a| \le 1$

(10.54) $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg}(-a) = 0$

(10.55) $\operatorname{arcctg} a + \operatorname{arcctg}(-a) = \pi$

(10.56) $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2},\ |a| \le 1$

(10.57) $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}$

❑ Дополнительные тождества

(10.58) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

(10.59) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)$

(10.60) $\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

(10.61) $\sin\alpha \pm \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{4}\right)$

(10.62) $(\sin\alpha \pm \cos\alpha)^2 = 1 \pm \sin 2\alpha$

(10.63) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2$

(10.64) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2\sin 2\alpha$

(10.65) $\sin^3\alpha \pm \cos^3\alpha = (\sin\alpha \pm \cos\alpha)(1 \mp \sin\alpha\cos\alpha)$

(10.66) $(\sin\alpha \pm \cos\alpha)^3 = (\sin\alpha \pm \cos\alpha)(1 \pm \sin 2\alpha)$

(10.67) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$

(10.68) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

❑ Связь радианной и градусной меры угла

(10.69) $360^\circ = 2\pi$ радиана $\approx 6,2832$ радиана

(10.70) $1^\circ = \frac{2\pi}{360}$ радиана $\approx 0,0175$ радиана

(10.71) 1 радиан $= \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57,2958^\circ$

❑ **Таблица значений тригонометрических функций** (10.72)

α°	α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
0°	0	0	1	0	–
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	–	0
180°	π	0	-1	0	–
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	–	0
360°	2π	0	1	0	–

11. Типовые способы замены переменной

(11.1) $x + p = y \Rightarrow x^2 + 2px + p^2 = (x + p)^2 = y^2$

(11.2) $x + p = y \Rightarrow x^2 + 2px + q = y^2 + q - p^2$

(11.3) $x + \frac{b}{2a} = y;\ a \neq 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c =$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = a\left(y^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

(11.4) $\sqrt[6]{x} = y;\ x \geq 0 \Rightarrow x = y^6,\ \sqrt{x} = y^3,\ \sqrt[3]{x} = y^2$

(11.5) $x + \frac{1}{x} = y;\ x \neq 0 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2;\ x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y$

(11.6) $x + y = u, xy = v \Rightarrow x^2 + y^2 = u^2 - 2v;\ x^3 + y^3 = u^3 - 3uv$

(11.7) $x + y + z = u,\ xy + yz + zx = v,\ xyz = w \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = u^2 - 2v,\ x^3 + y^3 + z^3 = u^3 - 3uv + 3w$

(11.8) $\sin x = t \Rightarrow \sin^2 x = t^2,\ \cos^2 x = 1 - t^2$

(11.9) $\operatorname{tg} x = t; \cos x \neq 0 \Rightarrow \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2},\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$

(11.10) $\cos 2x = t \Rightarrow \sin^2 x = \dfrac{1-t}{2},\ \cos^2 x = \dfrac{1+t}{2}$

(11.11) $\sin x \pm \cos x = t \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \pm\dfrac{t^2-1}{2}$

(11.12) $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t; \cos\dfrac{x}{2} \neq 0 \Rightarrow \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}; \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

12. Формулы геометрии

- **Треугольники** (a, b, c — стороны; α, β, γ — углы, противолежащие сторонам a; b; c; h — высота, проведенная к основанию a; R — радиус описанной окружности r — радиус вписанной окружности)

(12.1) Сумма внутренних углов треугольника: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

(12.2) Соотношение между сторонами (неравенство треугольника):
$a + b > c;\ b + c > a;\ c + a > b$

(12.3) Периметр и полупериметр: $P = a + b + c;\ p = \dfrac{a+b+c}{2}$

- **Вычисление площади треугольника**

(12.4) $S = \dfrac{1}{2}ah = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$

(12.5) $S = \dfrac{abc}{4R} = p \cdot r$

(12.6) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ — формула Герона

(12.7) Площадь равностороннего треугольника со стороной a: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

(12.8) Площадь прямоугольного треугольника с катетами a, b: $S = \dfrac{1}{2}ab$

❑ **Теорема Пифагора**

(12.9) В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов: $c^2 = a^2 + b^2$

❑ **Теорема синусов**

(12.10) Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

❑ **Теорема косинусов**

(12.11) Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

❑ **Четырехугольники** (d_1, d_2 — диагонали; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — углы φ — угол между диагоналями; h — высота, проведенная к основанию a; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности).

(12.12) Сумма внутренних углов выпуклого четырехугольника: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

❑ **Вычисление площади четырехугольника**

(12.13) Площадь выпуклого четырехугольника: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$

(12.14) Площадь параллелограмма (a и b — стороны; α — угол между стронами): $S = ah = ab\sin\alpha$

(12.15) Площадь ромба (a — сторона; α — угол между стронами):

$$S = ah = a^2 \sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

(12.16) Площадь прямоугольника со сторонами a и b: $S = ab$

(12.17) Площадь квадрата со стороной a: $S = a^2$

(12.18) Площадь трапеции с основаниями a и b: $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$

❑ **Окружность и круг** (R — радиус окружности, круга)

(12.19) Длина окружности: $L = 2\pi R$

(12.20) Длина дуги окружности с центральным углом α° (в градусах) или β (в радианах): $L = \pi R \cdot \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} = R \cdot \beta$

(12.21) Площадь круга: $S = \pi R^2$

(12.22) Площадь сектора круга с центральным углом α° (в градусах) или β (в радианах): $S = \pi R^2 \cdot \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2} R^2 \beta$

❑ **Вычисление объемов и площадей поверхности** ($S_{\text{осн.}}$ — площадь основания, H — высота):

(12.23) Объем призмы: $V = S_{\text{осн.}} H$

(12.24) Объем кругового цилиндра (R — радиус основания): $V = S_{\text{осн.}} H = \pi R^2 H$

(12.25) Площадь боковой поверхности кругового цилиндра (R — радиус основания): $S_{\text{бок.}} = 2\pi RH$

(12.26) Объем кругового конуса (R — радиус основания): $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} H = \frac{1}{3} \pi R^2 H$

(12.27) Площадь боковой поверхности кругового конуса (L — образующая конуса): $S_{\text{бок.}} = \pi RL$

(12.28) Объем пирамиды: $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} H$

(12.29) Объем шара радиуса R: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

(12.30) Площадь поверхности сферы радиуса R: $S = 4\pi R^2$

13. Векторы

Основные понятия и линейные операции

❑ **Прямоугольные и полярные координаты точки на плоскости**

(13.1) $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$; $0 \le r < +\infty$; $0 \le \varphi < 2\pi$ или $-\pi < \varphi \le \pi$

(13.2) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

(13.3) $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{r} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{r} \end{cases}$

❑ **Прямоугольные и цилиндрические координаты точки в пространстве**

$$(13.4)\ \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi; \\ z = z \end{cases}\ 0 \le r < +\infty;\ 0 \le \varphi < 2\pi;\ -\infty < z < +\infty$$

❑ **Прямоугольные и сферические координаты точки в пространстве**

$$(13.5)\ \begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta; \\ z = r\cos\theta \end{cases}\ 0 \le r < +\infty;\ 0 \le \varphi < 2\pi;\ 0 \le \theta \le \pi \quad \text{(а)}$$

$$(13.6)\ \begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\cos\theta; \\ z = r\sin\theta \end{cases}\ 0 \le r < +\infty;\ 0 \le \varphi < 2\pi;\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \quad \text{(б)}$$

❑ **Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке A и концом в точке B на ось u**

(13.7) $Пр_u \overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos\varphi$; $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ — длина вектора; φ — угол между направлением оси и вектором, $0 \le \varphi \le \pi$

❑ **Проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на оси прямоугольной системы координат $OXYZ$**

(13.8) $A(x_1; y_1; z_1)$; $B(x_2; y_2; z_2)$;

$$Пр_{OX}\overrightarrow{AB} = x_2 - x_1;\ Пр_{OY}\overrightarrow{AB} = y_2 - y_1;\ Пр_{OZ}\overrightarrow{AB} = z_2 - z_1$$

❑ **Задание вектора в координатной форме**

(13.9) $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$

❑ **Расстояние между двумя точками**

(13.10) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

❑ **Модуль (длина) вектора $\vec{a} = \{x; y; z\}$**

(13.11) $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $|\vec{a}| \ge 0$

❑ **Направляющие косинусы вектора** $\vec{a} = \{x; y; z\}$

(13.12) $\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}$; $\cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|}$; $\cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}$

(13.13) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

❑ **Единичный вектор** $\vec{e}$

(13.14) $|\vec{e}| = 1$

❑ **Нулевой вектор** $\vec{0}$

(13.15) $\vec{0} = \{0; 0; 0\}$; $|\vec{0}| = 0$; направление не определено

❑ **Вектор, противоположный вектору** $\vec{a} = \{x; y; z\}$

(13.16) $-\vec{a} = \{-x; -y; -z\}$; $|-\vec{a}| = |\vec{a}|$

❑ **Равенство векторов** $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ **и** $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$

(13.17) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$

❑ **Сложение и вычитание векторов** $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ **и** $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$

(13.18) $\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$

(13.19) $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right) = \{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$

(13.20) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (коммутативность сложения)

(13.21) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ (ассоциативность сложения)

❑ **Умножение вектора на число**

(13.22) $\alpha\vec{a} = \vec{a}\alpha = \{\alpha x; \alpha y; \alpha z\}$

(13.23) $|\alpha\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$

(13.24) $\alpha\left(\beta\vec{a}\right) = (\alpha\beta)\vec{a}$ (ассоциативность числовых сомножителей)

(13.25) $\alpha\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ (дистрибутивность числового сомножителя относительно суммы векторов)

(13.26) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ (дистрибутивность векторного сомножителя относительно суммы чисел)

❑ **Орт ненулевого вектора**

(13.27) $\overrightarrow{a^0} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left\{\dfrac{x}{|\vec{a}|}; \dfrac{y}{|\vec{a}|}; \dfrac{z}{|\vec{a}|}\right\} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}; |\vec{a}| \neq 0$

(13.28) $\left|\overrightarrow{a^0}\right| = 1; \quad \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \overrightarrow{a^0}$

❑ **Признак коллинеарности двух ненулевых векторов**

(13.29) $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda\vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$; нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору

❑ **Линейная комбинация векторов**

(13.30) $\vec{b} = \lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + ... + \lambda_n\overrightarrow{a_n}$

❑ **Линейная независимость системы ненулевых векторов**

(13.31) Векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ называются линейно независимыми, если их линейная комбинация равна нулю только при условии равенства нулю всех коэффициентов:

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + ... + \lambda_n\overrightarrow{a_n} = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$$

❑ **Линейная зависимость системы векторов**

(13.32) Векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ называются линейно зависимыми, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$, хотя бы одно из которых не равно нулю, и выполняется равенство

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + ... + \lambda_n\overrightarrow{a_n} = \vec{0}$$

❑ **Связь коллинеарности и линейной зависимости двух векторов**

(13.33) $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow$ $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы

❑ **Связь компланарности и линейной зависимости трех векторов**

(13.34) $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ компланарны $\Leftrightarrow \vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ линейно зависимы

❑ **Разложение вектора по базису в пространстве**

(13.35) Базис $\left(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}\right)$ — упорядоченная совокупность трех линейно независимых векторов. Любой вектор можно представить в виде $\vec{a} = \lambda_1\overrightarrow{e_1} + \lambda_2\overrightarrow{e_2} + \lambda_3\overrightarrow{e_3}$; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ называются координатами вектора в базисе

❑ **Разложение вектора по трем некомпланарным векторам**

(13.36) $\vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} d_x = \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x \\ d_y = \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y \\ d_z = \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z + \lambda_3 c_z \end{cases} \Rightarrow \lambda_1; \lambda_2; \lambda_3$

❑ **Разложение вектора по базису прямоугольной системы координат** $OXYZ$

(13.37) Базис $\left(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$ — упорядоченная совокупность трех попарно перпендикулярных единичных векторов. Любой вектор можно представить в виде $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

❑ **Преобразование координат в пространстве**

(13.38) Если $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ в системе координат $OXYZ$,

$\vec{r} = x_1\vec{i_1} + y_1\vec{j_1} + z_1\vec{k_1}$ в системе координат $O_1X_1Y_1Z_1$,

$$\overrightarrow{OO_1} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}, \begin{cases} \vec{i_1} = \alpha_{11}\vec{i} + \alpha_{12}\vec{j} + \alpha_{13}\vec{k} \\ \vec{j_1} = \alpha_{21}\vec{i} + \alpha_{22}\vec{j} + \alpha_{23}\vec{k} \\ \vec{k_1} = \alpha_{31}\vec{i} + \alpha_{32}\vec{j} + \alpha_{33}\vec{k} \end{cases},$$

то $\begin{cases} x = x_0 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}y_1 + \alpha_{31}z_1 \\ y = y_0 + \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}y_1 + \alpha_{32}z_1 \\ z = z_0 + \alpha_{13}x_1 + \alpha_{23}y_1 + \alpha_{33}z_1 \end{cases}$

❑ **Преобразование координат на плоскости при параллельном переносе и повороте осей**

(13.39) Если $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ в системе координат OXY, $\vec{r} = x_1\vec{i_1} + y_1\vec{j_1}$ в системе координат $O_1X_1Y_1$, $\overrightarrow{OO_1} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$,

$$\begin{cases} \vec{i_1} = \cos\varphi \cdot \vec{i} + \sin\varphi \cdot \vec{j} \\ \vec{j_1} = -\sin\varphi \cdot \vec{i} + \cos\varphi \cdot \vec{j} \end{cases}, \text{ то } \begin{cases} x = x_0 + x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi \\ y = y_0 + x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi \end{cases}$$

Скалярное произведение двух векторов

(13.40) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$; φ — угол между векторами

(13.41) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot Пр_a\vec{b} = |\vec{b}| \cdot Пр_b\vec{a}$

(13.42) $Пр_a\vec{b} = |\vec{b}| \cos\varphi$; $Пр_b\vec{a} = |\vec{a}| \cos\varphi$

(13.43) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (коммутативность)

(13.44) $\left(\alpha\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\alpha\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$ (ассоциативность скалярного произведения относительно числового множителя)

(13.45) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ (дистрибутивность скалярного произведения относительно суммы векторов)

(13.46) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|=|\vec{a}|^2\geq 0$ (скалярный квадрат)

(13.47) $\vec{a}\cdot\vec{0}=\vec{0}\cdot\vec{b}=0$

(13.48) $\vec{a}\cdot\vec{e}=|\vec{a}|\cos\varphi=Пр_e\vec{a};\ |\vec{e}|=1$

❑ Вычисление скалярного произведения в координатной форме

(13.49) $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

❑ Угол между векторами

(13.50) $$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

❑ Условие перпендикулярности двух ненулевых векторов

(13.51) $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$; нулевой вектор считается перпендикулярным любому вектору

(13.52) Таблица скалярного умножения базисных векторов прямоугольной декартовой системы координат:

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=1;\quad \vec{i}\cdot\vec{j}=0;\quad \vec{i}\cdot\vec{k}=0$$
$$\vec{j}\cdot\vec{i}=0;\quad \vec{j}\cdot\vec{j}=1;\quad \vec{j}\cdot\vec{k}=0$$
$$\vec{k}\cdot\vec{i}=0;\quad \vec{k}\cdot\vec{j}=0;\quad \vec{k}\cdot\vec{k}=1$$

Векторное произведение двух векторов

(13.53) Вектор $\vec{c}$ называется векторным произведением двух векторов, $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, если: $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$; $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$; $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ образуют правую тройку.

(13.54) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ (антикоммутативность)

(13.55) $\left(\overline{\alpha a}\right)\times\vec{b}=\alpha\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ (ассоциативность векторного произведения относительно числового множителя)

(13.56) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ (дистрибутивность векторного произведения относительно суммы векторов)

(13.57) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

(13.58) $\vec{a}\times\vec{0}=\vec{0}\times\vec{a}=\vec{0}$

❑ Вычисление векторного произведения в координатной форме

(13.59) $$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=$$

$$=\left(y_1z_2-y_2z_1\right)\vec{i}+\left(x_2z_1-x_1z_2\right)\vec{j}+\left(x_1y_2-x_2y_1\right)\vec{k}$$

(13.60) Таблица векторного умножения базисных векторов прямоугольной декартовой системы координат:

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0};\quad \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k};\quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$$
$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k};\quad \vec{j}\times\vec{j}=\vec{0};\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$$
$$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j};\quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i};\quad \vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$$

❑ Условие коллинеарности двух векторов

(13.61) $$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=0$$

(13.62) Вычисление площади параллелограмма, построенного на двух векторах: $S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$

Смешанное произведение трех векторов

(13.63) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$

(13.64) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}$

❑ **Вычисление смешанного произведения в координатной форме**

(13.65) $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} =$

$= x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 - z_1y_2x_3 - y_1x_2z_3 - x_1z_2y_3$

(13.66) Смешанное произведение трех базисных векторов прямоугольной декартовой системы координат: $\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k} = 1$

❑ **Условие компланарности трех векторов**

(13.67) $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ компланарны $\Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$

(13.68) Вычисление объема параллелепипеда, построенного на трех векторах: $V = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$

14. Прямая на плоскости

❑ **Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно заданному вектору**

(14.1) $(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0$ — векторная форма, $\vec{n} = \{A; B\} \neq \vec{0}$

(14.2) $\vec{r} \cdot \vec{n} + C = 0$

(14.3) $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ — координатная форма

❑ **Общее уравнение прямой**

(14.4) $Ax + By + C = 0;\ A^2 + B^2 \neq 0$

❑ **Неполные уравнения прямой**

(14.5) $A = 0, B \neq 0 \Rightarrow By + C = 0$ — уравнение прямой, параллельной оси OX

(14.6) $y = 0$ — уравнение прямой, совпадающей с осью OX

(14.7) $B = 0; A \neq 0 \Rightarrow Ax + C = 0$ — уравнение прямой, параллельной оси OY

(14.8) $x = 0$ — уравнение прямой, совпадающей с осью OY

(14.9) $C = 0 \Rightarrow Ax + By = 0$ — уравнение прямой, проходящей через начало координат

❑ Нормальное уравнение прямой

(14.10) $\vec{r} \cdot \overrightarrow{n^0} - p = 0$ — векторная форма

(14.11) $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ — координатная форма

❑ Уравнение прямой в полярных кординатах

(14.12) $r = \dfrac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}$

❑ Уравнение прямой с угловым коэффициентом

(14.13) $y - y_0 = k(x - x_0);\ \ k = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0};\ \ x_1 \neq x_0$

(14.14) $y = kx + b;\ \ k = \dfrac{y_1 - b}{x_1};\ \ x_1 \neq 0;$

$k = \operatorname{tg}\varphi$ — тангенс угла между осью OX и прямой;

$M_0(x_0; y_0);\ \ M_1(x_1; y_1)$ — точки, принадлежащие прямой

❑ Уравнение прямой «в отрезках»

(14.15) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1;\ \ a; b \neq 0$

❑ Параметрическое уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$ параллельно заданному вектору $\vec{s} = \{s_1; s_2\} \neq \vec{0}$

(14.16) $\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \vec{s} \cdot t;\ \ -\infty < t < +\infty$ — векторная форма

(14.17) $\begin{cases} x = x_0 + s_1 t \\ y = y_0 + s_2 t \end{cases};\ \ -\infty < t < +\infty$ — координатная форма;

$s_1 = 0 \Rightarrow x = x_0$ (уравнение прямой, параллельной оси OY);

$s_2 = 0 \Rightarrow y = y_0$ (уравнение прямой, параллельной оси OX)

❑ **Каноническое уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0;y_0)$ параллельно заданному вектору $\vec{s}=\{s_1;s_2\}\neq\vec{0}$**

(14.18) $\dfrac{x-x_0}{s_1}=\dfrac{y-y_0}{s_2}$ $(s_1=0\Rightarrow x=x_0;\quad s_2=0\Rightarrow y=y_0)$

❑ **Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$**

(14.19) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$

(14.20) $y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x+\dfrac{y_1x_2-y_2x_1}{x_2-x_1}$

(14.21) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & x_1 & x_2\\ y & y_1 & y_2\end{vmatrix}=0$

❑ **Угол между двумя прямыми**

(14.22) $L_1:\vec{r}\cdot\overrightarrow{n_1}+C_1=0;\ L_2:\vec{r}\cdot\overrightarrow{n_2}+C_2=0\Rightarrow\cos\varphi=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}$

(14.23) $L_1\parallel L_2\Leftrightarrow\overrightarrow{n_1}\parallel\overrightarrow{n_2}\Leftrightarrow A_1B_2-A_2B_1=0$ — условие параллельности

(14.24) $L_1\perp L_2\Leftrightarrow\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$ — условие перпендикулярности

(14.25) $L_1:\vec{r}=\overrightarrow{r_1}+\overrightarrow{s_1}\cdot t;\quad L_2:\vec{r}=\overrightarrow{r_2}+\overrightarrow{s_2}\cdot t\Rightarrow\cos\varphi=\dfrac{\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_2}}{|\overrightarrow{s_1}|\cdot|\overrightarrow{s_2}|}$

(14.26) $L_1\parallel L_2\Leftrightarrow\overrightarrow{s_1}\parallel\overrightarrow{s_2}$ — условие параллельности

(14.27) $L_1\perp L_2\Leftrightarrow\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_2}=0$ — условие перпендикулярности

(14.28) $L_1:y=k_1x+b_1;\quad L_2:y=k_2x+b_2\Rightarrow\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$

(14.29) $L_1\parallel L_2\Leftrightarrow k_1=k_2$ — условие параллельности

(14.30) $L_1\perp L_2\Leftrightarrow k_2=-\dfrac{1}{k_1}$ — условие перпендикулярности

❑ **Расстояние от точки $M_1(x_1; y_1)$ до прямой**

(14.31) $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

(14.32) $d = |x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p|$

❑ **Расстояние от начала координат до прямой**

(14.33) $d = \dfrac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

(14.34) $d = |-p|$

❑ **Условие пересечения двух прямых и координаты точки пересечения**

(14.35) $L_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0;\ L_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Если $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то прямые пересекаются в одной точке

с координатами $x = \dfrac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\Delta}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\Delta}$

❑ **Условие совпадения двух прямых**

(14.36) $L_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0;\ L_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$, то уравнения определяют одну и ту же прямую.

❑ **Условие принадлежности трех заданных точек**

$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$ **одной прямой** L

(14.37) $A, B, C \in L \Leftrightarrow \dfrac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \dfrac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}$

(14.38) $A, B, C \in L \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0$

15. Плоскость и прямая в пространстве

Плоскость в пространстве

- **Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно заданному вектору**

(15.1) $\left(\vec{r} - \vec{r_0}\right) \cdot \vec{n} = 0$ — векторная форма, $\vec{n} = \{A; B; C\} \neq \vec{0}$

(15.2) $\vec{r} \cdot \vec{n} + D = 0$

(15.3) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ — координатная форма

- **Общее уравнение плоскости**

(15.4) $Ax + By + Cz + D = 0; \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

- **Неполные уравнения плоскости**

(15.5) $A = 0 \Rightarrow By + Cz + D = 0$ — уравнение плоскости, параллельной оси OX

(15.6) $B = 0 \Rightarrow Ax + Cz + D = 0$ — уравнение плоскости, параллельной оси OY

(15.7) $C = 0 \Rightarrow Ax + By + D = 0$ — уравнение плоскости, параллельной оси OZ

(15.8) $A = B = 0 \Rightarrow Cz + D = 0$ — уравнение плоскости, параллельной плоскости OXY

(15.9) $z = 0$ — уравнение плоскости, совпадающей с плоскостью OXY

(15.10) $B = C = 0 \Rightarrow Ax + D = 0$ — уравнение плоскости, параллельной плоскости OYZ

(15.11) $x = 0$ — уравнение плоскости, совпадающей с плоскостью OYZ

(15.12) $A = C = 0 \Rightarrow By + D = 0$ — уравнение плоскости, параллельной плоскости OXZ

(15.13) $y = 0$ — уравнение плоскости, совпадающей с плоскостью OXZ

(15.14) $D = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz = 0$ — уравнение плоскости, проходящей через начало координат

❑ **Нормальное уравнение плоскости**

(15.15) $\vec{r} \cdot \overrightarrow{n^0} - p = 0$ — векторная форма

(15.16) $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ — координатная форма

❑ **Уравнение плоскости «в отрезках»**

(15.17) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1; \quad a, b, c \neq 0$

❑ **Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, не лежащие на одной прямой**

(15.18) $$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

❑ **Расстояние от точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до плоскости**

(15.19) $P: Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

(15.20) $d = |x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p|$

❑ **Угол между двумя плоскостями**

(15.21) $P_i: \vec{r} \cdot \overrightarrow{n_i} + D_i = 0 \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}$

(15.22) $P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ — условие параллельности

(15.23) $P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ — условие перпендикулярности

Прямая в пространстве

❑ **Параметрическое уравнение прямой в пространстве, проходящей через заданную точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ параллельно заданному вектору $\vec{s}=\{s_1;s_2;s_3\}\neq\vec{0}$**

(15.24) $\vec{r}=\overrightarrow{r_0}+\vec{s}\cdot t$ — векторная форма; $-\infty<t<+\infty$

(15.25) $\begin{cases}x=x_0+s_1t\\y=y_0+s_2t\\z=z_0+s_3t\end{cases}$ — координатная форма; $-\infty<t<+\infty$

❑ **Каноническое уравнение прямой в пространстве**

(15.26) $\dfrac{x-x_0}{s_1}=\dfrac{y-y_0}{s_2}=\dfrac{z-z_0}{s_3}$;

$(s_1=0\Rightarrow x=x_0;\ s_2=0\Rightarrow y=y_0;\ s_3=0\Rightarrow z=z_0)$

❑ **Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две различные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$**

(15.27) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$

❑ **Угол между прямой L и плоскостью P**

(15.28) $L:\vec{r}=\overrightarrow{r_0}+\vec{s}\cdot t;\ P:\vec{r}\cdot\vec{n}+D=0\Rightarrow\sin\varphi=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{s}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{s}|}$

(15.29) $L\parallel P\Leftrightarrow\vec{s}\perp\vec{n}\Leftrightarrow\vec{n}\cdot\vec{s}=0$ — условие параллельности прямой и плоскости

(15.30) $L\perp P\Leftrightarrow\vec{s}\parallel\vec{n}\Leftrightarrow\vec{s}\times\vec{n}=0$ — условие перпендикулярности прямой и плоскости

❑ **Задание прямой в пространстве как линии пересечения двух непараллельных плоскостей**

(15.31) $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases};\ \overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}\neq\vec{0}$

16. Уравнения некоторых кривых на плоскости

Уравнения кривых 2-го порядка

- **Эллипс** (см. ч. 2, рис. 1189):

(16.1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ — каноническое уравнение эллипса

(16.2) $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$ — эксцентриситет эллипса

(16.3) $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}; 0\le t<2\pi$ — уравнение эллипса в параметрической форме

(16.4) $r=\frac{p}{1-e\cos\varphi}$ — уравнение эллипса в полярных координатах

- **Окружность** (R — радиус окружности):

(16.5) $x^2+y^2=R^2$ — уравнение окружности с центром в начале координат (см. ч. 2, рис. 1105)

(16.6) $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ — уравнение окружности с центром в точке $(x_0;y_0)$ (см. ч. 2, рис. 1111)

(16.7) $y=y_0\pm\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}$ — уравнения верхней (+) и нижней (–) полуокружности центром в точке $(x_0;y_0)$

(16.8) $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=0$ — вырожденная окружность (точка $(x_0;y_0)$)

(16.9) $e=0$ — эксцентриситет окружности

(16.10) $\begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t \end{cases}; 0\le t<2\pi$ — уравнение окружности с центром в начале координат в параметрической форме

(16.11) $\begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R\sin t \end{cases}; 0 \le t < 2\pi$ — уравнение окружности с центром в точке $(x_0; y_0)$ в параметрической форме

(16.12) $r = R$ — уравнение окружности с центром в начале кординат в полярных координатах

(16.13) $r = 2R\sin\varphi$ — уравнение окружности с центром в в точке $(0; R)$ в полярных координатах

(16.14) $r = 2R\cos\varphi$ — уравнение окружности с центром в в точке $(R; 0)$ в полярных координатах

❑ **Гипербола** (см. ч. 2, рис. 1191):

(16.15) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ — каноническое уравнение гиперболы

(16.16) $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ — эксцентриситет гиперболы

(16.17) $r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}$ — уравнение одной ветви гиперболы в полярных координатах

(16.18) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ — две пересекающиеся прямые (см. ч. 2, рис. 1081)

❑ **Парабола** (см. ч. 2, рис. 1192):

(16.19) $y^2 = 2px$ — каноническое уравнение параболы

(16.20) $r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}$ — уравнение параболы в полярных координатах

Уравнения некоторых замечательных кривых

❑ **Архимедова спираль** (см. ч. 2, рис. 1193)

(16.21) $r = a\varphi$

❑ **Астроида** (см. ч. 2, рис. 1194)

(16.22) $x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}$

$$(16.23)\quad \begin{cases} x = R\cos^3\dfrac{t}{4} \\ y = R\sin^3\dfrac{t}{4} \end{cases}$$

❑ **Декартов лист** (см. ч. 2, рис. 1195)

$$(16.24)\quad x^3 + y^3 = 3axy$$

$$(16.25)\quad \begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$$

$$(16.26)\quad r = \frac{a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}$$

❑ **Улитка Паскаля** (см. ч. 2, рис. 1196)

$$(16.27)\quad \left(x^2 + y^2 - 2ax\right)^2 = l^2\left(x^2 + y^2\right)$$

$$(16.28)\quad \begin{cases} x = a\cos^2 t + l\cos t \\ y = a\sin t\cos t + l\sin t \end{cases}$$

$$(16.29)\quad r = 2a\cos\varphi \pm l$$

❑ **Кардиоида** (см. ч. 2, рис. 1197)

$$(16.30)\quad \left(x^2 + y^2 - 2ax\right)^2 = 4a^2\left(x^2 + y^2\right)$$

$$(16.31)\quad \begin{cases} x = 2a\cos t - a\cos 2t \\ y = 2a\sin t - a\sin 2t \end{cases}$$

$$(16.32)\quad r = 2a\left(1 - \cos\varphi\right)$$

❑ **Конхоида Никомеда** (см. ч. 2, рис. 1198)

$$(16.33)\quad \left(x^2 + y^2\right)\left(y - a\right)^2 = l^2y^2$$

$$(16.34)\quad r = \frac{a}{\sin\varphi} \pm l$$

❑ **Лемниската Бернулли** (см. ч. 2, рис. 1199)

$$(16.35)\quad r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$$

❑ **Локон Аньези** (см. ч. 2, рис. 188)

$$(16.36)\quad y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$$

❑ **Циклоида** (см. ч. 2, рис. 1200)

$$(16.37)\quad \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

❑ **Эпициклоиды** (см. ч. 2, рис. 1129–1140)

$$(16.38)\quad \begin{cases} x = (R + r)\cos\dfrac{r}{R}t - r\cos\left(t + \dfrac{r}{R}t\right) \\ y = (R + r)\sin\dfrac{r}{R}t - r\sin\left(t + \dfrac{r}{R}t\right) \end{cases}$$

❑ **Эпитрохоиды** (см. ч. 2, рис. 1141–1152)

$$(16.39)\quad \begin{cases} x = (R + r)\cos\dfrac{r}{R}t - h\cos\left(t + \dfrac{r}{R}t\right) \\ y = (R + r)\sin\dfrac{r}{R}t - h\sin\left(t + \dfrac{r}{R}t\right) \end{cases}$$

❑ **Розы** (см. ч. 2, рис. 1177–1188)

$$(16.40)\quad \begin{cases} x = (R + r)\cos\dfrac{r}{R}t - h\cos\left(t + \dfrac{r}{R}t\right) \\ y = (R + r)\sin\dfrac{r}{R}t - h\sin\left(t + \dfrac{r}{R}t\right) \end{cases}; h = R + r$$

$$(16.41)\quad r = a\sin k\varphi$$

❑ **Гипоциклоиды** (см. ч. 2, рис. 1153–1164)

$$(16.42)\quad \begin{cases} x = (R - r)\cos\dfrac{r}{R}t + r\cos\left(t - \dfrac{r}{R}t\right) \\ y = (R - r)\sin\dfrac{r}{R}t - r\sin\left(t - \dfrac{r}{R}t\right) \end{cases}$$

❑ **Гипотрохоиды** (см. ч. 2, рис. 1165–1176)

$$(16.43)\quad \begin{cases} x = (R-r)\cos\dfrac{r}{R}t + h\cos\left(t - \dfrac{r}{R}t\right) \\ y = (R-r)\sin\dfrac{r}{R}t - h\sin\left(t - \dfrac{r}{R}t\right) \end{cases}$$

17. Канонические уравнения поверхностей 2-го порядка

❑ **Эллипсоид**

(17.1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (см. ч. 2, рис. 1201)

(17.2) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ — сфера (см. ч. 2, рис. 1202)

❑ **Однополостной гиперболоид**

(17.3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (см. ч. 2, рис. 1203)

❑ **Двухполостной гиперболоид**

(17.4) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ (см. ч. 2, рис. 1204)

❑ **Конус второго порядка**

(17.5) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ (см. ч. 2, рис. 1205)

❑ **Эллиптический параболоид**

(17.6) $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ (см. ч. 2, рис. 1206)

❑ **Гиперболический параболоид**

(17.7) $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ (см. ч. 2, рис. 1207)

❑ **Эллиптический цилиндр**

(17.8) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (см. ч. 2, рис. 1208)

❑ **Гиперболический цилиндр**

(17.9) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (см. ч. 2, рис. 1209)

❑ **Параболический цилиндр**

(17.10) $y^2=2px$ (см. ч. 2, рис. 1210)

❑ **Пара пересекающихся плоскостей**

(17.11) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (см. ч. 2, рис. 1211)

❑ **Пара параллельных плоскостей**

(17.12) $\frac{x^2}{a^2}=1$ (см. ч. 2, рис. 1212)

18. Определители

$\mathbf{A}$ — квадратная матрица размера $n\times n$

❑ **Определитель первого порядка**

(18.1) $\Delta=|\mathbf{A}|=\det\mathbf{A}=\det(a_{11})=a_{11}$

❑ **Определитель второго порядка**

(18.2) $\Delta=|\mathbf{A}|=\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$

❑ **Определитель третьего порядка**

(18.3) $\Delta=|\mathbf{A}|=\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

$$- a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$

❑ **Определитель n-го порядка**

(18.4) Разложение по первой строке:

$$\Delta = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}$$

(18.5) Разложение по i-й строке; $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\Delta = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

(18.6) Определитель треугольной матрицы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

❑ **Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij}**

(18.7) $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$; $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$;

M_{ij} — минор элемента a_{ij} — определитель $n-1$ прорядка, получаемый из исходного вычеркиванием i-й строки и j-го столбца

❑ **Свойства определителей**

(18.8) Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы, $|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$

(18.9) Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя равны нулю, то $\Delta = 0$

(18.10) Если определитель имеет две одинаковые строки (столбца), то $\Delta = 0$

(18.11) Если элементы какой-либо строки (столбца) определителя пропорциональны элементам другой строки (столбца) , то $\Delta = 0$

(18.12) Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

(18.13) Если в определителе переставить какие-либо две строки (столбца), то величина определителя поменяет знак: $\Delta_1 = -\Delta$

(18.14) Если к какой-либо строке (столбцу) определителя прибавить другую строку (столбец), умноженную на одно и то же число, то величина определителя не изменится: $\Delta_1 = \Delta$

❑ **Решение системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными по формулам Крамера**

(18.15) Матричная запись системы линейных уравнений:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B};\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};\ \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix};\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix};$$

$$\Delta = \det \mathbf{A};\quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};\dots;\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

(18.16) Если $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$; $\Delta = \det \mathbf{A} \neq 0$, то система имеет, и притом единственное, решение $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \dots \\ \frac{\Delta_n}{\Delta} \end{pmatrix}$ (формулы Крамера)

(18.17) Если система однородная, то есть $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$, и $\Delta = \det \mathbf{A} \neq 0$, то

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

19. Матрицы

❑ **Прямоугольные матрицы размера** $m \times n$

(19.1) $\mathbf{A}_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$; a_{ij} — элемент i-й строки и j-го столбца

(19.2) Матрица-строка: $\mathbf{A}_{1 \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$

(19.3) Матрица-столбец: $\mathbf{A}_{m \times 1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

(19.4) Транспонированная матрица:

$$\mathbf{A}^T{}_{m\times n} = \mathbf{B}_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(19.5) Квадратная матрица: $\mathbf{A}_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$

(19.6) Треугольная матрица: $\mathbf{A}_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$

(19.7) Единичная матрица: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$

❑ Равенство матриц

(19.8) $\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij};\quad i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n$

❑ Нулевая матрица

(19.9) $\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{0}_{m\times n} \Leftrightarrow a_{ij} = 0;\quad i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n$

❑ Противоположная матрица

(19.10) $\mathbf{B}_{m\times n} = -\mathbf{A}_{m\times n} \Leftrightarrow b_{ij} = -a_{ij};\quad i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n$

❑ Сложение матриц одинакового размера

(19.11) $\mathbf{C}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij};\ i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n$

(19.12) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (коммутативность сложения)

(19.13) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ (ассоциативность сложения)

❑ Умножение матрицы на число

(19.14) $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{A} = \mathbf{A}\alpha \Leftrightarrow c_{ij} = \alpha a_{ij};\ i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n$

(19.15) $\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$ (ассоциативность умножения на число)

(19.16) $\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения матриц)

(19.17) $(\alpha+\beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$ (дистрибутивность умножения числа на матрицу относительно сложения чисел)

❑ Умножение матриц согласованного размера

(19.18) $\mathbf{C}_{m\times l} = \mathbf{A}_{m\times n}\cdot\mathbf{B}_{n\times l} \Leftrightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj} =$

$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj};\ i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,l$

(19.19) $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$ (дистрибутивность умножения)

(19.20) $(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA}+\mathbf{CA}$ (дистрибутивность умножения)

(19.21) $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ (ассоциативность умножения)

(19.22) $\mathbf{BA} \neq \mathbf{AB}$ (некоммутативность умножения в общем случае)

❑ Свойства единичной матрицы

(19.23) $\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{E}_n = \mathbf{E}_n\mathbf{A}_{n\times n} = \mathbf{A}_{n\times n}$

(19.24) $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{E}_n = \mathbf{A}_{m\times n}$

(19.25) $\mathbf{E}_n\mathbf{A}_{n\times m} = \mathbf{A}_{n\times m}$

❑ Обратная матрица

(19.26) $\mathbf{A}^{-1}$ называется обратной к $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{n\times n}$, если $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{E}$

❑ Вычисление обратной матрицы методом присоединенной матрицы

(19.27) $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{\mathbf{A}^{\vee}}{\Delta};\ \mathbf{A}^{\vee} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix};\ \Delta = \det\mathbf{A} \neq 0;$

$\mathbf{A}^{\vee}$ — присоединенная матрица; A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij}; $i = 1,2,...,n;\ j = 1,2,...,n$

❑ **Решение системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными методом обратной матрицы**

(19.28) $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$; $\det \mathbf{A} \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$;

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

❑ **Ранг матрицы**

(19.29) Минором матрицы $\mathbf{A}_{m\times n}$ порядка k называется определитель квадратной матрицы, содержащей элементы, стоящие на пересечении произвольных k строк и k столбцов матрицы. Рангом $rang(\mathbf{A})$ матрицы $\mathbf{A}_{m\times n}$ называется число, равное наибольшему порядку отличных от нуля миноров матрицы.

(19.30) $0 \le rang(\mathbf{A}) \le \min\{m, n\}$, где $\min\{m, n\}$ — наименьшее из чисел m и n

(19.31) $rang(\mathbf{A}) = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = 0 \ \forall i, j$

❑ **Теорема Кронекера–Капелли о совместности систем m линейных уравнений с n неизвестными**

(19.32) $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ имеет решения $\Leftrightarrow rang(\mathbf{A}) = rang(\mathbf{A} \mid \mathbf{B}) = r$;

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \ \mathbf{A} \mid \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

(19.33) Если $r = n$, то решение единственно, если $r < n$, то решений бесконечно много

(19.34) Если система однородная, то есть $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$, то: она совместна и имеет по крайней мере одно нулевое решение $\mathbf{X} = \mathbf{0}$; при $r = n$ она имеет единственное нулевое решение $\mathbf{X} = \mathbf{0}$

20. Пределы и непрерывность

Предел числовой последовательности

(20.1) Число a называется пределом (конечным пределом) последовательности $\{x_n\} = x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,

если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon): \quad \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

(20.2) Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, то есть если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N: \; \forall n > N \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon$

(20.3) Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, если $\forall E > 0 \quad \exists N: \quad \forall n > N \Rightarrow |x_n| > E$

(20.4) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если $\forall E > 0 \quad \exists N: \quad \forall n > N \Rightarrow x_n > E$

(20.5) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если $\forall E > 0 \quad \exists N: \quad \forall n > N \Rightarrow x_n < -E$

(20.6) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n; \; \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

(20.7) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0; \; \alpha_n \neq 0 \; \forall n \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\alpha_n} \right) = \infty$

❑ Свойства сходящихся последовательностей

(20.8) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ (предел суммы и разности)

(20.9) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ (предел произведения)

(20.10) $\lim\limits_{n\to\infty} (cx_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$; c — постоянная

(20.11) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_n}{y_n} \right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}; \; y_n \neq 0 \; \forall n; \; \lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$ (предел дроби)

(20.12) Предельный переход в неравенстве:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a; \;\; x_n \le z_n \le y_n \;\; \forall n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = a$$

❑ Сходимость монотонной и ограниченной последовательности

(20.13) Если последовательность $\{x_n\}$ не убывает ($x_n \le x_{n+1} \; \forall n$) и ограничена сверху ($\exists M: x_n \le M \; \forall n$), то она сходится, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \le M$

(20.14) Если последовательность $\{x_n\}$ не возрастает ($x_n \geq x_{n+1}\ \forall n$) и ограничена снизу ($\exists m : x_n \geq m\ \forall n$), то она сходится, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \geq m$

❑ **Критерий Коши сходимости последовательности**

(20.15) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall m > N, \forall n > N \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon\right)$

Предел функции

(20.16) Число a называется пределом (конечным пределом) функции $f(x)$ в точке x_0, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, если $f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ или $\dot{U}(x_0)$ и если

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

(20.17) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow f(x) = a + \alpha(x),\ \lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$

❑ **Свойства функций, имеющих предел (правила вычисления пределов)**

(20.18) $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ (предел суммы и разности)

(20.19) $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x)g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ (предел произведения)

(20.20) $\lim\limits_{x\to x_0} \left(cf(x)\right) = c \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$; c — постоянная

(20.21) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$; $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$ (предел дроби)

❑ **Односторонние пределы функции**

(20.22) Число a называется пределом функции в точке x_0 слева, $\lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) \equiv f(x_0 - 0) = a$, если

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

(20.23) Число a называется пределом функции в точке x_0 справа, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \equiv f(x_0+0) = a$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x,\, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

❑ Условие существования предела функции

(20.24) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = a$

❑ Пределы функции «на бесконечности»

(20.25) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists D > 0 : \forall x, |x| > D \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

(20.26) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists D > 0 : \forall x, x < -D \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

(20.27) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists D > 0 : \forall x, x > D \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

❑ Бесконечные пределы

(20.28) Предел функции называется бесконечным, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, если $\forall E > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > E$

(20.29) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, если

$$\forall E > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > E$$

(20.30) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, если

$$\forall E > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -E$$

❑ Замечательные пределы

(20.31) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ — первый замечательный предел

(20.32) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$; $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ — второй замечательный предел; $e \approx 2{,}71828$

(20.33) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

(20.34) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a (1 + x)}{x} = \log_a e$

(20.35) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

(20.36) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$

(20.37) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

(20.38) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$

(20.39) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\dfrac{1}{2}$

❑ Бесконечно малые и бесконечно большие функции

(20.40) Если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x\to x_0$

(20.41) Если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$), то $f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to x_0$

(20.42) $\alpha(x)$ – бесконечно малая и $\alpha(x)\neq 0$ при $x\neq x_0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая

(20.43) Если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми при $x\to x_0$, $\alpha(x)\sim\beta(x)$

❑ Таблица эквивалентных бесконечно малых при $x\to 0$

(20.44) $x+x^2\sim x$

(20.45) $x+\sqrt{x}\sim\sqrt{x}$

(20.46) $x+\sqrt{x}+x^2\sim\sqrt{x}$

(20.47) $(1+x)^n-1\sim nx$

(20.48) $(1+x)^2-1\sim 2x$

(20.49) $(1+x)^3 - 1 \sim 3x$

(20.50) $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$

(20.51) $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$

(20.52) $a^x - 1 \sim x \ln a$

(20.53) $e^{\alpha x} - 1 \sim \alpha x$

(20.54) $e^x - 1 \sim x$

(20.55) $\log_a(1+x) \sim x \log_a e$

(20.56) $\ln(1+x) \sim x$

(20.57) $\sin \alpha x \sim \alpha x$

(20.58) $\sin x \sim x$

(20.59) $\sin^n x \sim x^n$

(20.60) $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$

(20.61) $\arcsin x \sim x$

(20.62) $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

(20.63) $\operatorname{tg} x \sim x$

(20.64) $\operatorname{tg} x - x \sim \frac{x^3}{3}$

(20.65) $\operatorname{tg} x - \sin x \sim \frac{x^3}{2}$

Непрерывность функции и точки разрыва

(20.66) Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если: $f(x)$ определена в точке x_0, $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

(20.67) Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 слева (справа), если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \right)$

(20.68) Критерий непрерывности. Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$

❑ Точки разрыва

Если в точке x_0 не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности, то x_0 называется точкой разрыва.

(20.69) x_0 — точка разрыва 1-го рода, если

$$\exists \lim_{x\to x_0-0} f(x); \exists \lim_{x\to x_0+0} f(x); \lim_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

(разрыв называется скачком) или если

$\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, но $f(x_0) \neq \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ или $f(x)$ не определена в x_0 (разрыв называется устранимым)

(20.70) x_0 — точка разрыва 2-го рода, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$; $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ бесконечен или не существует.

❑ Свойства функций, непрерывных на отрезке

Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке отрезка $[a;b]$, то:

(20.71) $f(x)$ ограничена на этом отрезке, то есть

$$\exists M > 0 : |f(x)| \leq M \ \forall x \in [a;b]$$

(20.72) $f(x)$ достигает минимального и максимального значения на отрезке, то есть $\exists \alpha, \beta \in [a;b] : f(\alpha) = \min\limits_{[a;b]} f(x); f(\beta) = \max\limits_{[a;b]} f(x)$ (теорема Вейерштрасса);

(20.73) при условии $f(a) \cdot f(b) < 0 \quad \exists c \in (a;b) : f(c) = 0$

21. Производная и дифференциал

Производная функции

(21.1) Если функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, то производной функции в точке x_0 называют предел $y'_x(x_0) = f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Если предел конечен, то говорят, что в точке x_0 функция имеет производную (конечную производную)

❑ Бесконечные производные

(21.2) Если $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ бесконечен (равен $\infty; +\infty; -\infty$), то говорят, что в точке x_0 функция имеет бесконечную производную

❑ Односторонние производные

(21.3) $f'_-(x_0) \equiv f'(x_0-0) = \lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ — левая производная

(21.4) $f'_+(x_0) \equiv f'(x_0+0) = \lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ — правая производная

❑ Условие существования производной функции

(21.5) $f'(x_0) = A \Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = A$

❑ Существование производной и непрерывность

(21.6) Если существует конечная производная $f'(x_0)$, то $f(x)$ в точке x_0 непрерывна

❑ Производные основных элементарных функций (таблица производных)

(21.7) $c' = 0$, c — постоянная

(21.8) $x' = 1$

(21.9) $\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(21.10) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(21.11) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

(21.12) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$

(21.13) $\left(e^x\right)' = e^x$

(21.14) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

(21.15) $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$

(21.16) $\left(\sin x\right)' = \cos x$

(21.17) $\left(\cos x\right)' = -\sin x$

(21.18) $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

(21.19) $\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

(21.20) $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(21.21) $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(21.22) $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

(21.23) $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

❑ Производные гиперболических функций

(21.24) $\left(\operatorname{sh} x\right)' = \operatorname{ch} x; \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

(21.25) $\left(\operatorname{ch} x\right)' = \operatorname{sh} x; \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2};$

(21.26) $\left(\operatorname{th} x\right)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$

(21.27) $\left(\operatorname{cth} x\right)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}; \operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$

❑ **Правила дифференцирования** ($u = u(x), v = v(x)$)

(21.28) $(cu)' = cu'$, c — постоянная

(21.29) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

(21.30) $(uv)' = u'v + uv'$

(21.31) $\left(f^2(x)\right)' = 2f(x)f'(x)$

(21.32) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $v \neq 0$

(21.33) $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$, $f(x) \neq 0$

(21.34) $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$

❑ **Производная сложной функции** $h(x) = f\left(g(x)\right)$

(21.35) $h'(x) = \left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'_g(g) \cdot g'_x(x)$; $h'_x = f'_g \cdot g'_x$

❑ **Производная обратной функции**

(21.36) Если $y = f(x); x = f^{-1}(y)$, то $\left(f^{-1}(y)\right)'_y = \frac{1}{f'(x)}$; $x'_y = \frac{1}{y'_x}$

❑ **Производная функции, заданной параметрически**

(21.37) Если $x = x(t), y = y(t), a < t < b$, то $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$

❑ **Производная функции, заданной неявно**

(21.38) Если функция $y(x)$, $a < x < b$, задана в виде $F(x, y) = 0$, то $y'_x(x)$ находят из уравнения $F'_x\left(x, y(x)\right) = 0$

❑ **Производная показательно-степенной функции** ($u(x) > 0$)

(21.39) $\left(u(x)^{v(x)}\right)' = \left(e^{v(x)\ln u(x)}\right)' =$

$$= u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + \frac{v(x)u'(x)}{u(x)}\right) = u^v \ln u \cdot v' + vu^{v-1} \cdot u'$$

(21.40) $\left(u^v\right)' = \left(u^v\right)'\Big|_{u=\text{const}} + \left(u^v\right)'\Big|_{v=\text{const}}$ (правило для запоминания)

(21.41) $\left(x^x\right)' = x^x\left(1+\ln x\right)$

❑ Производные высших порядков

(21.42) $y'(x)$ — производная 1-го порядка (первая производная); $y'' = \left(y'\right)'$, $y''' = \left(y''\right)'$, ..., $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$ (вторая, третья,..., «энная» производная, $n \in \mathbb{N}$); $y^{(0)}(x) \equiv y(x)$

(21.43) $\left(cu \pm v\right)^{(n)} = cu^{(n)} \pm v^{(n)}$; c — постоянная

(21.44) $\left(uv\right)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$; $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ (формула Лейбница)

(21.45) $\left(uv\right)'' = \left(u'v + uv'\right)' = u''v + 2u'v' + uv''$

(21.46) $y''_x = \left(\dfrac{y'_t}{x'_t}\right)'_x = \dfrac{y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{\left(x'_t\right)^3}$; $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a < t < b$

(21.47) $\left(x^\alpha\right)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

(21.48) $\left(x^m\right)^{(n)} = 0$; $m \in \mathbb{N}$; $n > m$

(21.49) $\left(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n\right)^{(n)} = n!a_0$

(21.50) $\left(a^x\right)^{(n)} = \left(\ln a\right)^n a^x$

(21.51) $\left(e^{\alpha x}\right)^{(n)} = \alpha^n e^x$; $\alpha \in \mathbb{R}$

(21.52) $\left(e^x\right)^{(n)} = e^x$

(21.53) $\left(\ln x\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

(21.54) $\left(\sin x\right)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$

(21.55) $\left(\cos x\right)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$

❑ Формулы Тейлора и Маклорена

(21.56) $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$ — формула Тейлора;

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1};\ 0<\theta<1$$

(21.57) $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n(x)$ — формула Маклорена;

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1};\ 0<\theta<1$$

❑ Теорема Ферма. Необходимое условие экстремума функции

(21.58) Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке $x=c$ и принимает в этой точке максимальное или минимальное значение, то $f'(c)=0$

❑ Теорема Ролля

(21.59) Если функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$ и $f(a)=f(b)$, то $\exists c\in(a;b):\ f'(c)=0$

❑ Теорема Лагранжа

(21.60) Если функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$, то $\exists c\in(a;b):\ f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

❑ Теорема Коши

(21.61) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a;b]$, дифференцируемы на $(a;b)$ и $g'(x)\neq 0$, то

$$\exists c\in(a;b):\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

❑ Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей

(21.62) Если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности $\dot{U}(x_0)$, $g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0$ в этой

окрестности и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и выполнено равенство $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Аналогичное правило применяется при $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$

❑ **Уравнение касательной к графику функции**

(21.63) $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

❑ **Уравнение нормали к графику функции**

(21.64) $(y - y_0) f'(x_0) + (x - x_0) = 0$

Дифференциал функции

(21.65) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ — приращение функции

(21.66) Если $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, где A — число, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \alpha(\Delta x) = 0$, то функцию называют дифференцируемой в точке

(21.67) $f'(x)$ существует и конечна $\Leftrightarrow$ $f(x)$ дифференцируема

(21.68) $dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$ — дифференциал функции

(21.69) $dx = \Delta x$

(21.70) $d(\alpha u) = \alpha \cdot du$

(21.71) $d(u \pm v) = du \pm dv$

(21.72) $d(uv) = udv + vdu$

(21.73) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}; \quad v \neq 0$

(21.74) Инвариантность формы дифференциала первого порядка: если $y = f(u); u = \varphi(x)$, то $dy = y'_x dx = y'_u u'_x dx = y'_u du$

❑ **Приближенные вычисления с помощью дифференциала**

(21.75) $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

❑ **Дифференциалы высших порядков**

(21.76) $d^1y = dy = f'(x)dx$

(21.77) $d^2y = d(dy) = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2;\ dx^2 \equiv (dx)^2$

(21.78) $d^ny = d\left(d^{n-1}y\right) = f^{(n)}(x)(dx)^n = f^{(n)}(x)dx^n;\ dx^n \equiv (dx)^n$

❑ **Выражение производных через дифференциалы**

(21.79) $y' = \frac{dy}{dx};\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2};\ldots;y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$

22. Неопределенный интеграл

❑ **Первообразная**

(22.1) $F(x)$ называется первообразной для $f(x)$ на заданном промежутке, если $\exists F'(x)$ и $F'(x) = f(x)$

❑ **Неопределенный интеграл**

(22.2) $\int f(x)dx = F(x) + C;$ C — произвольная постоянная

❑ **Свойства неопределенного интеграла**

(22.3) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

(22.4) $d\int f(x)dx = f(x)dx$

(22.5) $\int F'(x)dx = F(x) + C$

(22.6) $\int dF(x) = F(x) + C$

(22.7) $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx;\ A \neq 0$

(22.8) $\int\left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

❑ **Таблица интегралов**

(22.9) $\int 0dx = C$

(22.10) $\int 1dx = \int dx = x + C$

(22.11) $\int (ax+b)dx = \frac{a}{2}x^2 + bx + C$

(22.12) $\int \left(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n\right)dx = \frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^n + ... + a_n x + C$

(22.13) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \in R; \alpha \neq -1$

(22.14) $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

(22.15) $\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$

(22.16) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$

(22.17) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + C$

(22.18) $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$

(22.19) $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

(22.20) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$

(22.21) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$

(22.22) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$

(22.23) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

(22.24) $\int e^x dx = e^x + C$

(22.25) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

(22.26) $\int \cos x dx = \sin x + C$

(22.27) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$

(22.28) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$

(22.29) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$

(22.30) $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$

(22.31) $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C$

(22.32) $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C$

❑ Метод интегрирования с помощью замены переменной

(22.33) Метод подведения под знак дифференциала:

$$\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx = \int f\left(\varphi(x)\right)d\varphi(x) = \int f(u)du\Big|_{u=\varphi(x)}$$

(22.34) $\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$

(22.35) $\int f(x)dx\Big|_{t=\varphi(x)} = \int f\left(\varphi^{-1}(t)\right)\left(\varphi^{-1}(t)\right)' dt\Big|_{t=\varphi(x)}$

❑ Метод интегрирования по частям

(22.36) $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$

(22.37) $\int udv = uv - \int vdu$

❑ Интегрирование рациональных дробей

(22.38) $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx = \int S_{m-n}(x)dx + \int \frac{R_l(x)}{Q_n(x)}$; $m \geq n$; $l < n$;

$P_m(x)$; $Q_n(x)$; $S_{m-n}(x)$: $R_l(x)$ — многочлены. $\int \frac{R_l(x)}{Q_n(x)}$

сводится к сумме интегралов от простейших рациональных дробей методом неопределенных коэффициентов

❑ Интегрирование простейших рациональных дробей

(22.39) Простейшая дробь 1-го типа: $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|+C$

(22.40) Простейшая дробь 2-го типа:

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = -\frac{A}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C; \quad n\in\mathbb{N}; n\geq 2$$

(22.41) Простейшая дробь 3-го типа:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{At}{t^2+a^2}dt + \int \frac{B-\frac{Ap}{2}}{t^2+a^2}dt;$$

$$p^2-4q<0; t=x+\frac{p}{2}; a^2=q-\left(\frac{p}{2}\right)^2>0$$

(22.42) Простейшая дробь 4-го типа:

$$\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx = A\int \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^n} + \left(B-\frac{pA}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n};$$

$$n\in\mathbb{N}; n\geq 2; p^2-4q<0; t=x+\frac{p}{2}; a^2=q-\left(\frac{p}{2}\right)^2>0$$

(22.43) $$\int \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^n} = \frac{1}{2(n-1)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}+C; n\geq 2$$

(22.44) $$\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n} =$$

$$= \frac{1}{2a^2(n-1)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\left(1-\frac{1}{2(n-1)}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}; n\geq 2$$

❑ Интегралы от некоторых рациональных дробей

(22.45) $$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$$

(22.46) $$\int \frac{x}{ax+b}dx = \frac{x}{a}-\frac{b}{a^2}\ln|ax+b|+C$$

(22.47) $\int \frac{ax+b}{cx+d}dx = \frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c^2}\ln|cx+d| + C$

(22.48) $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + C;\ a \neq b$

(22.49) $\int \frac{xdx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b}\left(a\ln|x+a| - b\ln|x+b|\right) + C;\ a \neq b$

(22.50) $\int \frac{x}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+a^2| + C$

(22.51) $\int \frac{x^2}{x^2+a^2}dx = x - a\cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$

(22.52) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right| + C$

$b^2-4ac>0$

(22.53) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C;\ b^2-4ac<0$

(22.54) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = -\frac{2}{2ax+b} + C;\ b^2-4ac=0$

(22.55) $\int \frac{xdx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} + C$

(22.56) $\int \frac{1}{x^3+a^3}dx = \frac{1}{6a^2}\ln\frac{(x+a)^2}{x^2-ax+a^2} + \frac{1}{a^2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}} + C$

(22.57) $\int \frac{x}{x^3+a^3}dx = \frac{1}{6a}\ln\frac{x^2-ax+a^2}{(x+a)^2} + \frac{1}{a\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}} + C$

(22.58) $\int \frac{x^2}{x^3+a^3}dx = \frac{1}{3}\ln|x^3+a^3| + C$

(22.59) $\int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$

(22.60) $\int \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2}+C$

(22.61) $\int \frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx = -\frac{x}{2\left(x^2+a^2\right)}+\frac{1}{2a}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$

(22.62) $\int \frac{1}{\left(x^2-a^2\right)^2}dx = \frac{x}{2a^2\left(a^2-x^2\right)}+\frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$

(22.63) $\int \frac{x}{\left(x^2-a^2\right)^2}dx = \frac{1}{2\left(a^2-x^2\right)}+C$

(22.64) $\int \frac{x^2}{\left(x^2-a^2\right)^2}dx = \frac{x}{2\left(a^2-x^2\right)}-\frac{1}{4a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$

❑ Интегралы от некоторых иррациональных функций

(22.65) $\int \sqrt{ax+b}dx = \frac{2}{3a}\sqrt{(ax+b)^3}+C$

(22.66) $\int x\sqrt{ax+b}dx = \frac{2(3ax-2b)}{15a^2}\sqrt{(ax+b)^3}+C$

(22.67) $\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b}+C$

(22.68) $\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2(ax-2b)}{3a^2}\sqrt{ax+b}+C$

(22.69) $\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$

(22.70) $\int x\sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+a^2\right)^3}+C$

(22.71) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

(22.72) $\int x\sqrt{a^2-x^2}dx = -\frac{1}{3}\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}+C$

❑ Интегралы от некоторых показательных и логарифмических функций

(22.73) $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$

(22.74) $\int xe^x dx = e^x(x-1) + C$

(22.75) $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x dx + C$

(22.76) $\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$

(22.77) $\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C$

(22.78) $\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C$

(22.79) $\int \ln^2 x dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$

(22.80) $\int \ln^n x dx = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1} x dx + C;\ n \neq -1$

(22.81) $\int x\ln x dx = x^2\left(\frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\right) + C$

(22.82) $\int x^n \ln x dx = x^{n+1}\left(\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) + C$

❑ Интегралы от некоторых тригонометрических функций

(22.83) $\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

(22.84) $\int \sin^3 x dx = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$

(22.85) $\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx + C$

(22.86) $\int \frac{1}{\sin^3 x}dx = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$

(22.87) $\int \frac{1}{\sin^n x}dx = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{1}{\sin^{n-2} x}dx + C$

(22.88) $\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

(22.89) $\int \cos^3 x dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

(22.90) $\int \cos^n x dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx + C$

(22.91) $\int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

(22.92) $\int \frac{1}{\cos^n x} dx = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{1}{\cos^{n-2} x} dx + C$

(22.93) $\int \sin mx \sin nx dx = -\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C; m^2 \neq n^2$

(22.94) $\int \sin mx \cos nx dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C; m^2 \neq n^2$

(22.95) $\int \cos mx \cos nx dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C; m^2 \neq n^2$

(22.96) $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\frac{b\sin x - a\cos x + \sqrt{a^2+b^2}}{a\sin x + b\cos x}\right| + C$

(22.97) $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$

(22.98) $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$

(22.99) $\int \arcsin x dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

(22.100) $\int \arccos x dx = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$

(22.101) $\int \operatorname{arctg} x dx = x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2} + C$

(22.102) $\int \operatorname{arcctg} x dx = x\operatorname{arcctg} x + \ln\sqrt{1+x^2} + C$

23. Определенный интеграл

❑ Связь определенного и неопределенного интеграла

(23.1) Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то функция $\int_a^x f(t)\,dt$ — одна из первообразных для $f(x)$, то есть

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x);\ \ x \in [a;b]$$

(23.2) $\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C;\ \ x \in [a;b];\ \ C$ — произвольная постоянная

❑ Формула Ньютона–Лейбница

(23.3) $$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

❑ Свойства определенного интеграла

(23.4) $$\int_a^b 1\,dx = \int_a^b dx = b - a$$

(23.5) $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

(23.6) $$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

(23.7) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$ (аддитивность)

(23.8) $$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx;\quad A$$ — постоянная

(23.9) $$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

(23.10) Если $f(x)$ — четная, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$

(23.11) Если $f(x)$ — нечетная, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

❑ **Оценки значения определенного интеграла** $(a < b)$

(23.12) $f(x) \geq 0; a \leq x \leq b \Rightarrow \int\limits_{a}^{b} f(x)dx \geq 0$

(23.13) $f(x) \leq g(x); a \leq x \leq b \Rightarrow \int\limits_{a}^{b} f(x)dx \leq \int\limits_{a}^{b} g(x)dx$

(23.14) $\left|\int\limits_{a}^{b} f(x)dx\right| \leq \int\limits_{a}^{b} |f(x)|dx$

(23.15) $m \leq f(x) \leq M; a \leq x \leq b \Rightarrow m(b-a) \leq \int\limits_{a}^{b} f(x)dx \leq M(b-a)$

(23.16) Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то

$$\exists c \in (a;b): \int\limits_{a}^{b} f(x)dx = f(c)(b-a)$$ (теорема о среднем)

❑ **Метод интегрирования с помощью замены переменной**

(23.17) $\int\limits_{a}^{b} f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$

(23.18) $\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt$

❑ **Метод интегрирования по частям**

(23.19) $\int\limits_{a}^{b} u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_{a}^{b} - \int\limits_{a}^{b} v(x)u'(x)dx$

(23.20) $\int\limits_{a}^{b} udv = uv\Big|_{a}^{b} - \int\limits_{a}^{b} vdu$

❑ **Вычисление площадей, длин дуг и объемов с помощью определенного интеграла**

(23.21) Вычисление площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной функции $f(x)$, $f(x) \geq 0$; $a \leq x \leq b$, и прямыми $x = a$; $x = b$; $y = 0$: $S = \int_a^b f(x)dx$

(23.22) Вычисление площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции, заданной в параметрической форме $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$; $\alpha \leq t \leq \beta$: $S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt$

(23.23) Вычисление площади криволинейного сектора, ограниченного графиком непрерывной функции $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$; $\varphi = \beta$; $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 2\pi$ (в полярных координатах):

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$$

(23.24) Вычисление длины дуги кривой, заданной непрерывной функцией $f(x)$, имеющей непрерывную производную, $a \leq x \leq b$:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

(23.25) Вычисление длины дуги кривой, заданной функцией в параметрической форме $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$; $\alpha \leq t \leq \beta$:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt$$

(23.26) Вычисление длины дуги кривой, заданной функцией $r = r(\varphi)$, имеющей непрерывную производную в области определения $\alpha \leq \varphi \leq \beta$: $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi$

(23.27) Вычисление объема тела вращения, образованного криволинейной трапецией, ограниченной графиком непрерывной неотрицательной функции $f(x)$; $a \leq x \leq b$ и прямыми $x = a$; $x = b$ при вращении вокруг оси OX: $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$

(23.28) Вычисление объема тела через площадь поперечного сечения $S(x)$, перпендикулярного оси OX : $V = \int_a^b S(x)dx$

(23.29) Вычисление площади поверхности тела вращения, образованного графиком непрерывной, имеющей непрерывную производную, неотрицательной функции $f(x)$ при вращении вокруг оси OX в области определения

$$a \le x \le b: \; S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

(23.30) Вычисление площади поверхности тела вращения, образованного графиком функции, заданной в параметрической форме $x = \varphi(t); y = \psi(t); \psi(t) \ge 0; \alpha \le t \le \beta$:

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt$$

(23.31) Вычисление площади поверхности тела вращения, образованного графиком непрерывной, имеющей непрерывную производную, функции $r = r(\varphi)$ в области определения $\alpha \le \varphi \le \beta$, при вращении вокруг оси OX:

$$S = 2\pi \int_a^b r(\varphi)\sin(\varphi)\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi$$

24. Несобственные интегралы

❑ Несобственные интегралы 1-го рода

(24.1) Если $f(x)$ непрерывна при $a \le x < +\infty$, то несобственным интегралом по бесконечному промежутку называют

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty} \int_a^B f(x)dx = \lim_{B\to+\infty} F(B) - F(a)$$

(24.2) Если $f(x)$ непрерывна при $-\infty < x \le b$, то

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{A\to-\infty} \int_A^b f(x)dx = F(b) - \lim_{A\to-\infty} F(A)$$

(24.3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx, \forall c;\ c \in \mathbb{R}$

(24.4) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$. При $\alpha > 1$ интеграл существует (сходится), при $\alpha \le 1$ интеграл расходится

(24.5) Признак сходимости и расходимости несобственных интегралов 1-го рода (признак сравнения): если $0 \le f(x) \le g(x)$ при $a \le x < +\infty$, то из сходимости $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$, из расходимости $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$

❑ Несобственные интегралы 2-го рода

(24.6) Если $f(x)$ непрерывна при $a \le x < b$, $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty$, то несобственным интегралом от разрывной функции называют $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\delta \to +0} \int\limits_{a}^{b-\delta} f(x)dx$

(24.7) Если $f(x)$ непрерывна при $a < x \le b$, $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$, то $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\delta \to +0} \int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)dx$

(24.8) Если $f(x)$ непрерывна при $a \le x \le b$, кроме точки $x = c$; $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$, то $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{b} f(x)dx$

(24.9) $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$. При $0 < \alpha < 1$ интеграл существует (сходится), при $\alpha \ge 1$ интеграл расходится

(24.10) Признак сходимости и расходимости несобственных интегралов 2-го рода (признак сравнения): если $0 \le f(x) \le g(x)$

при $a \le x < b$, $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \lim\limits_{x \to b-0} g(x) = \infty$, то из сходимости $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_a^b f(x)dx$, из расходимости $\int\limits_a^b f(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_a^b g(x)dx$

❑ Гамма-функция

(24.11) $\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ — сходится при $x > 0$

(24.12) $\Gamma(x) > 0; \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ при $x > 0$

(24.13) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}; \Gamma(1) = 1; \Gamma(n+1) = n!; n \in \mathbb{N}$

❑ Значения некоторых несобственных интегралов

(24.14) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2$

(24.15) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2}$

(24.16) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = 1$

(24.17) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$

(24.18) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-a^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}; a > 0$

(24.19) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}dx = \frac{\pi}{2}; a > 0$

(24.20) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin nxdx = \frac{n}{a^2+n^2}; a > 0$

25. Частные производные и дифференциалы функций нескольких переменных

❑ **Частная производная функции** $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ **по переменной** x_k **в точке** $(x_1, x_2, ... x_n)$

(25.1) $$\frac{\partial f}{\partial x_k} = u'_{x_k} =$$

$$= \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, ... x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_k, ...x_n)}{\Delta x_k}$$

❑ **Производная функции** $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ **по направлению** $\vec{l}(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$

(25.2) $$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

❑ **Частные производные функции** $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ **высшего порядка**

(25.3) $$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}; \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}; \text{... и т. д.}$$

(25.4) $$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial {x_1}^3}; \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial {x_1}^2 \partial x_2}; \text{... и т. д.}$$

(25.5) $$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial {x_1}^{n-1}}\right) = \frac{\partial^n f}{\partial {x_1}^n}; \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial {x_1}^{n-2} \partial x_2}\right) = \frac{\partial^n f}{\partial {x_1}^{n-1} \partial x_2}; \text{... и т. д.}$$

❑ **Полная производная сложной функции**

(25.6) $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $x_i = \varphi_i(t)$;

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{d\varphi_2}{dt} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{d\varphi_n}{dt}$$

(25.7) $u = f\left(t, x_2, ..., x_n\right),\ x_i = \varphi_i(t)$;

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{d\varphi_2}{dt} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{d\varphi_n}{dt}$$

❑ **Частные производные сложной функции**

(25.8) $u = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right),\ x_i = \varphi_i\left(t_1, t_2, ..., t_m\right)$;

$$\frac{\partial f}{\partial t_k} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_k} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k};\quad k = 1; 2; ...; m$$

❑ **Частные дифференциалы функции** $u = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$

(25.9) $d_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i;\quad i = 1, 2, ..., n$

❑ **Полный дифференциал функции** $u = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$

(25.10) $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$

❑ **Дифференциалы n-го порядка функции** $u = f\left(x, y\right)$

(25.11) $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

(25.12) $d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2$

(25.13) $d^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(dx)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(dx)^2 dy +$

$$+3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx (dy)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(dy)^3$$

(25.14) $d^n f = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \cdot (dx)^n + n\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y}(dx)^{n-1} dy + ...$

$$... + \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k}(dx)^{n-k}(dy)^k + ... + \frac{\partial^n f}{\partial y^n} \cdot (dy)^n$$

❑ **Формула Тейлора для функции** $u = f(x, y)$

(25.15) $\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) =$

$$= \frac{df(x,y)}{1!} + \frac{d^2 f(x,y)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(x,y)}{n!} + R_n$$

$$R_n = \frac{d^{n+1} f(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)}{(n+1)!}; \quad 0 < \theta < 1$$

❑ **Необходимые условия экстремума функции** $u = f(x, y)$

(25.16) Если в точке (x_0, y_0) функция $u = f(x, y)$ имеет максимум или минимум и существуют частные производные $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}; \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$, то $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$. Точки, в которых все частные производные 1-го порядка равны нулю, называются стационарными

❑ **Достаточные условия экстремума функции** $u = f(x, y)$

(25.17) Если в окрестности стационарной точки (x_0, y_0) существуют непрерывные частные производные функции $u = f(x, y)$ первого и второго порядка, то:

— при условии $B^2 - AC < 0; A > 0$ в точке (x_0, y_0) функция имеет минимум;

— при условии $B^2 - AC < 0; A < 0$ в точке (x_0, y_0) функция имеет максимум;

— при условии $B^2 - AC > 0$ в точке (x_0, y_0) экстремума нет.

Здесь $A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}; B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}; C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$

❑ **Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности** $z = f(x, y)$ **в точке** $(x_0; y_0; z_0)$

(25.18) $$\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y}(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

(25.19) $$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{-1}$$

26. Кратные интегралы

❑ **Вычисление двойного интеграла через повторные**

$$(26.1)\quad \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy;$$

$$D: \begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$$

$$(26.2)\quad \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx;$$

$$D: \begin{cases} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{cases}$$

❑ **Свойства двойного интеграла**

$$(26.3)\quad \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy \text{ (аддитивность);}$$

$D = D_1 \cup D_2$; D_1 и D_2 не имеют общих внутренних точек

$$(26.4)\quad \iint\limits_D Af(x,y)\,dxdy = A\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy;\ A \text{ — постоянная}$$

$$(26.5)\quad \iint\limits_D \big(f(x,y) \pm g(x,y)\big)\,dxdy = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy$$

$$(26.6)\quad f(x,y) \le g(x,y) \Rightarrow \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy$$

$$(26.7)\quad \left| \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|\,dxdy$$

❑ **Вычисление двойного интеграла в полярных кординатах** (см. (13.1))

$$(26.8)\quad \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,rdrd\varphi =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,rdr$$

❑ Вычисление площадей и объемов с помощью двойного интеграла

(26.9) Вычисление площади фигуры, ограниченной границей области D: $S = \iint\limits_D dxdy$

(26.10) Вычисление объема цилиндрической фигуры, ограниченной областью D и графиком функции $z = f(x,y) \geq 0$: $V = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$

❑ Вычисление тройного интеграла через повторные

$$(26.11)\ \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz;\ V: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \\ z_1(x;y) \leq z \leq z_2(x;y) \end{cases}$$

❑ Свойства тройного интеграла

$$(26.12)\ \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$\iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)\,dxdydz \text{ (аддитивность);}$$

$V = V_1 \cup V_2$; V_1 и V_2 не имеют общих внутренних точек

$$(26.13)\ \iiint\limits_V Af(x,y,z)\,dxdydz = A\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$$

$$(26.14)\ \iiint\limits_V \left(f(x,y,z) \pm g(x,y,z)\right) dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz \pm \iiint\limits_V g(x,y,z)\,dxdydz$$

$$(26.15)\ f(x,y,z) \leq g(x,y,z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz \leq \iiint\limits_V g(x,y,z)\,dxdydz$$

(26.16) $$\left|\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz\right| \le \iiint\limits_V \left|f(x,y,z)\right| dxdydz$$

❑ **Вычисление тройного интеграла в цилиндрических и сферических кординатах** (см. (13.4)–(13.6))

(26.17) $$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,r\,dr\,d\varphi\,dz$$

(26.18) $$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz =$$
$$= \iiint\limits_{V_1} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

(26.19) $$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz =$$
$$= \iiint\limits_{V_1} f(r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta)\,r^2\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

❑ **Вычисление объемов с помощью тройного интеграла**

(26.20) $$V = \iiint\limits_V dxdydz$$

27. Криволинейные и поверхностные интегралы

❑ **Вычисление криволинейных интегралов 1-го рода**

(27.1) $$\int\limits_L f(x,y,z)\,dl =$$
$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$$

(27.2) $$\int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

(27.3) $$\int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$$

❑ Вычисление криволинейных интегралов 2-го рода

(27.4) $$\int_L P(x;y;z)\,dx + Q(x;y;z)\,dy + R(x;y;z)\,dz =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)\right)dt;\ P = P\left(x(t);y(t);z(t)\right);$$

$$Q = Q\left(x(t);y(t);z(t)\right);\ R = R\left(x(t);y(t);z(t)\right)$$

(27.5) $$\int_L P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(P\left(x(t);y(t)\right)x'(t) + Q\left(x(t);y(t)\right)y'(t)\right)dt$$

(27.6) $$\int_L P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = \int_a^b \left(P\left(x;y(x)\right) + Q\left(x;y(x)\right)y'(x)\right)dx$$

❑ Формула Грина

(27.7) $$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$$

❑ Вычисление поверхностных интегралов 1-го рода

(27.8) $$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f\left(x,y,z(x,y)\right)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

❑ Вычисление поверхностных интегралов 2-го рода

(27.9) $$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_S \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)dS;$$

$$\vec{n} = \left(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\right)$$

❑ Формула Стокса

(27.10) $$\int_L P(x;y;z)\,dx + Q(x;y;z)\,dy + R(x;y;z)\,dz =$$

$$= \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right)dS$$

(27.11) $\oint\limits_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint\limits_S \vec{n} \cdot \mathrm{rot}\vec{a}\, dS$

❑ **Формула Гаусса–Остроградского**

(27.12) $\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$

(27.13) $\oiint\limits_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \iiint\limits_V \mathrm{div}\vec{a}\, dV$

28. Дифференциальные операции векторного анализа

❑ **Оператор Гамильтона**

(28.1) $\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$

❑ **Градиент функции**

(28.2) $\mathrm{grad}\, f = \nabla f = \vec{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial f}{\partial z}$

❑ **Производная функции по направлению**

(28.3) $\frac{\partial f}{\partial l} = \vec{l} \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$

❑ **Дивергенция вектор-функции** $\vec{a}(x, y, z) = \{a_x; a_y; a_z\}$

(28.4) $\mathrm{div}\vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$

❑ **Ротор вектор-функции** $\vec{a}(x, y, z) = \{a_x; a_y; a_z\}$

(28.5) $\mathrm{rot}\vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$

❑ **Оператор Лапласа. Дифференциальные операции 2-го порядка**

(28.6) $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа

(28.7) $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

(28.8) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla \cdot \nabla f = \Delta f$

(28.9) $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a})$

(28.10) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$

(28.11) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0$

(28.12) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{a})$

29. Числовые и степенные ряды

Числовые ряды

(29.1) Выражение вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ называется числовым рядом

❑ **Сходящиеся и расходящиеся числовые ряды**

(29.2) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ — частичная сумма ряда.

Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд называется сходящимся, а S — суммой ряда. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ бесконечен или не существует, то ряд называется расходящимся

❑ **Свойства сходящихся числовых рядов**

(29.3) Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\sum\limits_{n=1+k}^{\infty} a_n$ сходится

(29.4) Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n = cS$; c — постоянная

(29.5) Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_1; \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_2$, то $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = S_1 \pm S_2$

❑ Необходимое условие сходимости числового ряда

(29.6) Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

❑ Достаточное условие расходимости числового ряда

(29.7) Если не выполнено условие $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится

❑ Знакопостоянные числовые ряды. Достаточные признаки сходимости и расходимости

(29.8) Первый признак сравнения: если $0 \le a_n \le b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, то: из сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, из расходимости $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(29.9) Второй (предельный) признак сравнения:
если $a_n \ge 0; b_k > 0 \ \forall n, k \in \mathbb{N}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l; 0 < l < \infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ или оба сходятся или оба расходятся

(29.10) Признак Даламбера: если $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}; \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, то при $l < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, при $l > 1$ ряд расходится

(29.11) Радикальный признак Коши: если $a_n \ge 0 \ \forall n \in \mathbb{N}; \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, то при $l < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, при $l > 1$ ряд расходится

(29.12) Интегральный признак Коши: если $f(x)$ — неотрицательная невозрастающая непрерывная функция при $x \ge 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \ldots$ и интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно

(29.13) Ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha \le 1$ расходится, при $\alpha > 1$ сходится

(29.14) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ расходится

(29.15) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots$ сходится

❑ Знакопеременные и знакочередующиеся числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость

(29.16) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ также сходится и называется абсолютно сходящимся. Исследование ряда на абсолютную сходимость производится с помощью признаков сходимости знакопостоянных рядов

(29.17) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ называется условно (не абсолютно) сходящимся

(29.18) Признак сходимости знакочередующегося ряда (признак Лейбница): если $b_n \ge 0\ \forall n;\ b_n \ge b_{n+1}\ \forall n;\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, то $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ сходится (тип сходимости исследуется дополнительно)

(29.19) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ сходится условно

(29.20) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \ldots$ сходится абсолютно

(29.21) Оценка суммы сходящегося знакочередующегося ряда: если $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n = S;\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}b_k = S_n$, то $|S_n - S| \le b_{n+1}$

Степенные ряды

(29.22) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n =$

$= a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + ... + a_n (x - x_0)^n + ...$

(29.23) Если $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = c \geq 0$, то $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ сходится в интервале

$|x - x_0| < R$; $R = \frac{1}{c} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ называется радиусом сходимости.

Сходимость при $x = x_0 \pm R$ исследуется дополнительно. Если $R = +\infty$, то интервал сходимости $(-\infty; +\infty)$

(29.24) Если $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = c \geq 0$, то $R = \frac{1}{c} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

❑ **Сложение и умножение степенных рядов** ($|x - x_0| < R$; R — наименьший из радиусов сходимости заданных рядов)

(29.25) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x - x_0)^n$

(29.26) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$;

$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_n b_0$

❑ **Дифференцирование и интегрирование степенных рядов**

(29.27) $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$; $|x - x_0| < R \Rightarrow$

$\Rightarrow S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$; $|x - x_0| < R$

(29.28) $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$; $|x - x_0| < R \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^x S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x - x_0)^{n+1}}{n+1}$; $|x - x_0| < R$

❑ Разложения функций в степенные ряды

(29.29) $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ — ряд Тейлора

(29.30) $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ — ряд Маклорена

(29.31) $(1+x)^{\alpha}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n=$

$=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots;\ \alpha\notin\mathbb{N};|x|<1$

(29.32) $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\ldots;\ |x|<1$

(29.33) $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-\ldots;\ |x|<1$

(29.34) $\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=1-x^2+x^4-\ldots;\ |x|<1$

(29.35) $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{2\cdot 4}+\dfrac{1\cdot 3\cdot x^3}{2\cdot 4\cdot 6}-\ldots;\ |x|\le 1$

(29.36) $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\ldots;\ -\infty<x<+\infty$

(29.37) $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}=$

$=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\ldots;\ -1<x\le 1$

(29.38) $\sin x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}=$

$=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots;\ -\infty<x<+\infty$

(29.39) $$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots; \quad -\infty < x < +\infty$$

(29.40) $$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} \ldots; \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

(29.41) $$\arcsin x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots; \quad |x| < 1$$

(29.42) $$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots \right); \quad |x| < 1$$

(29.43) $$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots; \quad |x| < 1$$

(29.44) $$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} - \ldots \right); \quad |x| < 1$$

❑ Значения сумм некоторых числовых рядов

(29.45) $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2$$

(29.46) $$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \ldots = \frac{1}{9}$$

(29.47) $$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \ldots = 1$$

(29.48) $$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \ldots = \frac{1}{2}$$

(29.49) $$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots = e$$

(29.50) $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \ln 2$$

(29.51) $$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}$$

(29.52) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$

(29.53) $1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\ldots=\sin 1$

30. Тригонометрические ряды Фурье

(30.1) Если $2l$ — периодическая функция $f(x)$ и производная $f'(x)$ на отрезке $[-l;\,l]$ непрерывны или имеют конечное число точек разрыва 1-го рода, то $f(x)$ раскладывается в ряд Фурье:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right);\ a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx;$$

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx;\ k\in\mathbb{N};\ b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx;\ k\in\mathbb{N}$$

Сумма ряда равна значению $f(x)$ в каждой точке непрерывности и значению $\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to x_i-0}f(x)+\lim\limits_{x\to x_i+0}f(x)\right)$ в точках разрыва x_i

(30.2) Если $f(x)$ четная, то $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{l}$; $a_0=\frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l}f(x)\,dx$;

$$a_k=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx;\ k\in\mathbb{N}$$

(30.3) Если $f(x)$ нечетная, то

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi x}{l};\ b_k=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx;\ k\in\mathbb{N}$$

(30.4) Если $l=\pi$, то

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx);\ a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx;\ k \in \mathbb{N};\ b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx;\ k \in \mathbb{N}$$

❑ **Разложения некоторых функций в ряд Фурье**

(30.5) Если $f(x) = \begin{cases} -1; -\pi < x < 0 \\ +1; 0 < x < \pi \end{cases}$, то $f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$

(30.6) Если $f(x) = x;\ -\pi < x < \pi$, то $f(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}$

(30.7) Если $f(x) = |x|;\ -\pi < x < \pi$, то $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$

31. Элементы теории обыкновенных дифференциальных уравнений

Дифференциальные уравнения 1-го порядка

(31.1) $F(x, y, y') = 0$ — общий вид

(31.2) $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ — дифференциальная форма

(31.3) $y' = f(x,y)$ — уравнение, разрешенное относительно производной

(31.4) Задача Коши (задача с начальным условием): $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

❑ **Дифференциальное уравнение с разделенными переменными**

(31.5) $f(x)dx + g(y)dy = 0$. $\int f(x)dx + \int g(y)dy = C$ — общий интеграл

❑ **Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными**

(31.6) $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0;\ f_2(x)g_1(y) \neq 0;$

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = C \ -$$ общий интеграл

(31.7) $y' = f(x)g(y);\ g(y) \neq 0.\ \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$ — общий интеграл

❑ **Дифференциальное уравнение, однородное относительно аргумента и функции**

(31.8) $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0;$

$M(tx,ty) = t^n M(x,y);\ N(tx,ty) = t^n N(x,y);\ \forall t, t > 0.$

Решается методом замены переменно

$z(x) = \frac{y}{x};\ y = zx;\ dy = zdx + xdz$ и сведением к уравнению с разделяющимися переменными

$M(1,z)dx + N(1,z)(xdz + zdx) = 0$

(31.9) $y' = f(x,y);\ f(tx,ty) = f(x,y);\ \forall t, t > 0.$

$z(x) = \frac{y}{x};\ y = zx;\ y' = z + xz';\ z + xz' = f\left(1, z(x)\right)$

(31.10) $y' = f\left(\frac{y}{x}\right);\ z(x) = \frac{y}{x};\ y = zx;\ y' = z + xz';\ z + xz' = f(z)$

❑ **Линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка**

(31.11) $y'(x) + p(x)y(x) = 0$ — однородное линейное уравнение. $y(x) = Ce^{-\int p(x)dx}$ — общее решение

(31.12) $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$ — неоднородное линейное уравнение.

$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)$ — общее решение

❑ **Уравнение Бернулли**

(31.13) $y'(x) + p(x)y(x) = y^{\alpha}q(x);\ \alpha \neq 0;\ \alpha \neq 1$. Решается методом замены переменной $z(x) = y^{1-\alpha}$ и сведением к линейному уравнению $z'(x) + (1-\alpha)p(x)z(x) = (1-\alpha)q(x)$

❑ **Уравнение в полных дифференциалах**

(31.14) $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0; \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M(x,y)dx + N(x,y)dy = \int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy = C -$$

общий интеграл

Дифференциальные уравнения n-го порядка

❑ **Линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами**

(31.15) $y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$

(31.16) Характеристическое уравнение: $k^2 + pk + q = 0$; $k_1; k_2$ — корни характеристического уравнения

(31.17) Случай различных действительных корней $k_1; k_2$:

$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ — общее решение

(31.18) Случай кратного действительного корня $k = k_1 = k_2$:

$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$ — общее решение

(31.19) Случай пары комплексных сопряженных корней $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$:

$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)$ — общее решение

❑ **Линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами**

(31.20) $y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_n y(x) = 0$

(31.21) Характеристическое уравнение:

$k^n + p_1 k^{n-1} + \ldots + p_n = 0$; $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — корни характеристического уравнения

(31.22) Общее решение: $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$,

где $y_1(x); y_2(x); \ldots; y_n(x)$ — совокупность линейно независимых частных решений, соответствующих корням характеристического уравнения. C_i — произвольные постоянные

Правило нахождения частных решений:

(31.23) Если k — простой действительный корень, то получаем одно частное решение $y = e^{kx}$

(31.24) Если k — действительный корень кратности r, то получаем r частных решений $y = e^{kx}; y = xe^{kx}; ...; y = x^{r-1}e^{kx}$

(31.25) Если $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ — пара простых комплексных сопряженных корней, то получаем два частных решения
$y = e^{\alpha x}\cos\beta x; y = e^{\alpha x}\sin\beta x$

(31.26) Если $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ — пара комплексных сопряженных корней кратности r, то получаем $2r$ частных решений

$y = e^{\alpha x}\cos\beta x; y = xe^{\alpha x}\cos\beta x; ...; y = x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x;$

$y = e^{\alpha x}\sin\beta x; y = xe^{\alpha x}\sin\beta x; ...; y = x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

Решения некоторых дифференциальных уравнений

❑ Уравнения с разделяющимися переменными

(31.27)	$y' = y$	$y = Ce^x$
(31.28)	$y' = y^2$	$y = -\frac{1}{x+C}; y = 0$
(31.29)	$y' = \frac{x}{y}$	$y^2 - x^2 = C$
(31.30)	$y' = -\frac{x}{y}$	$x^2 + y^2 = C$
(31.31)	$y' = \frac{y}{x}$	$y = Cx$
(31.32)	$y' = -\frac{y}{x}$	$y = \frac{C}{x}$
(31.33)	$y' = \frac{2y}{x}$	$y = Cx^2$

(31.34)	$y' = \frac{y^2}{x^2}$	$y = \frac{x}{1 - Cx}$
(31.35)	$y' = e^{x+y}$	$e^x + e^{-y} = C$

❑ Однородные уравнения

(31.36)	$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$	$y^2 = x^2\left(2\ln\lvert x\rvert + C\right)$
(31.37)	$y' = \frac{x - y}{x + y}$	$x^2 - 2xy - y^2 = C$
(31.38)	$x^2y' - y^2 - xy = 0$	$\frac{x}{y} = -\ln Cx;\ y = 0$
(31.39)	$\left(x^2 + y^2\right)y' = 2xy$	$y^2 - x^2 = Cy;\ y = 0$
(31.40)	$\left(x^2 + y^2\right)dx + xydy = 0$	$2y^2 + x^2 = \frac{C}{x^2}$
(31.41)	$xy' = y - xe^{y/x}$	$y = -x\ln(\ln Cx)$

❑ Линейные уравнения 1-го порядка и уравнения Бернулли

(31.42)	$y' + xy + x = 0$	$y = Ce^{-x^2/2} - 1$
(31.43)	$y' + y = e^x$	$y = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$
(31.44)	$y' - y = e^x$	$y = e^x\left(x + C\right)$
(31.45)	$y' - y = \sin x$	$y = Ce^x - \frac{1}{2}\left(\sin x + \cos x\right)$
(31.46)	$y' - \frac{y}{x} = x\sin x$	$y = x\left(C - \cos x\right)$
(31.47)	$y' - \frac{y}{x} + y^2 = 0$	$y = \frac{2x}{x^2 + C};\ y = 0$
(31.48)	$y' + 2y = y^2e^x$	$y\left(e^x + Ce^{2x}\right) = 1;\ y = 0$

❑ Уравнения в полных дифференциалах

(31.49)	$2xydx + \left(x^2 - y^2\right)dy = 0$	$3x^2y - y^3 = C$
(31.50)	$\left(y^2 - x\right)y' - y + x^2 = 0$	$x^3 - 3xy + y^3 = C$
(31.51)	$xy' \cos y + \sin y = 0$	$x \sin y = C$

❑ Линейные уравнения 2-го порядка

(31.52)	$y'' - y = 0$	$y = C_1e^x + C_2e^{-x}$
(31.53)	$y'' + y = 0$	$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
(31.54)	$y'' - 4y' + 5y = 0$	$y = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)$
(31.55)	$y'' - y + x^2 = 0$	$y = C_1e^x + C_1e^{-x} + x^2 + 2$
(31.56)	$y'' + y = e^x$	$y = \frac{1}{2}e^x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$
(31.57)	$y'' + y = \sin x$	$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x}{2}\cos x$

32. Комплексные числа

❑ Степени числа i ($n, m \in \mathbb{Z}$)

(32.1) $i^2 = -1$ — основное свойство числа i

(32.2) $i^0 = i^4 = i^8 = \ldots = i^{4n} = 1$

(32.3) $i^1 = i^5 = i^9 = \ldots = i^{4n+1} = i$

(32.4) $i^2 = i^6 = i^{10} = \ldots = i^{4n+2} = -1$

(32.5) $i^3 = i^7 = i^{11} = \ldots = i^{4n+3} = -i$

(32.6) $i^0 = i^{-4} = i^{-8} = \ldots = i^{-4n} = i^{4m} = 1$

(32.7) $i^{-1} = i^{-5} = i^{-9} = \ldots = i^{-(4n+1)} = i^{4m-1} = -i$

(32.8) $i^{-2} = i^{-6} = i^{-10} = \ldots = i^{-(4n+2)} = i^{4m-2} = -1$

(32.9) $i^{-3} = i^{-7} = i^{-11} = \ldots = i^{-(4n+3)} = i^{4m-3} = i$

(32.10) $i^{2n} = (-1)^n$

(32.11) $i^{2n+1} = (-1)^n i$

(32.12) $i^{4n+m} = i^m$

❑ **Алгебраическая форма комплексного числа** $(x; y \in \mathbb{R})$

(32.13) $z = x + iy$; $x = \operatorname{Re} z$ — действительная часть числа; $y = \operatorname{Im} z$ — мнимая часть числа

❑ **Равенство комплексных чисел**

(32.14) $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2; y_1 = y_2$

(32.15) $z = 0 \Leftrightarrow x + iy = 0 \Leftrightarrow x = 0; y = 0$

❑ **Комплексно сопряженное число**

(32.16) $\bar{z} = x - iy$

(32.17) $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

❑ **Модуль комплексного числа**

(32.18) $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$; $|z| \geq 0$

(32.19) $|\bar{z}| = |z|$

❑ **Аргумент комплексного числа** $\varphi = \arg z$ **(главное значение аргумента)**

(32.20) $$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{|z|} \end{cases} \Rightarrow \varphi;\ 0 \leq \varphi < 2\pi \ (\text{или } -\pi < \varphi \leq \pi)$$

(32.21) $\arg \bar{z} = 2\pi - \arg z$ (или $\arg \bar{z} = -\arg z$)

❑ **Множество значений аргумента**

(32.22) $\operatorname{Arg} z = \varphi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

❑ **Действия над комплексными числами в алгебраической форме**

(32.23) Сложение и вычитание:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

(32.24) $z + \bar{z} = 2x;\ x = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$

(32.25) $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

(32.26) $z - \bar{z} = 2yi;\ y = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$

(32.27) Умножение:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

(32.28) $z \cdot \bar{z} = r^2$

(32.29) $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

(32.30) $z^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

(32.31) Деление: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x^2{}_2 + y^2{}_2} + i \cdot \dfrac{y_1x_2 - x_1y_2}{x^2{}_2 + y^2{}_2}$

(32.32) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{r^2} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - i \cdot \dfrac{y}{x^2 + y^2}$

(32.33) $\dfrac{1}{\bar{z}} = \dfrac{z}{r^2} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i \cdot \dfrac{y}{x^2 + y^2}$

❑ **Свойства действий над комплексными числами**

(32.34) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (коммутативность сложения)

(32.35) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (ассоциативность сложения)

(32.36) $z_1z_2 = z_2z_1$ (коммутативность умножения)

(32.37) $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$ (ассоциативность умножения)

(32.38) $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ (дистрибутивность умножения относительно сложения)

❑ Тригонометрическая форма комплексного числа

(32.39) $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

❑ Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

(32.40) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$

(32.41) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \cdot \left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$

(32.42) Возведение в степень:

$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$; $n \in \mathbb{N}$ — формула Муавра

(32.43) Извлечение корня :

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) = w_k;$$

$n \in N$; $k = 0, 1, 2, ..., n-1$

(32.44) $\sqrt[n]{1} = \left(\cos\dfrac{2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{2\pi k}{n}\right) = w_k$; $k = 0, 1, 2, ..., n-1$

(32.45) $\sqrt{1} = \pm 1$

(32.46) $\sqrt[3]{1} = w_k$; $w_1 = 1$; $w_2 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $w_3 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(32.47) $\sqrt[n]{-1} = \left(\cos\dfrac{\pi(2k+1)}{n} + i\sin\dfrac{\pi(2k+1)}{n}\right) = w_k$; $k = 0, 1, 2, ..., n-1$

(32.48) $\sqrt{-1} = \pm i$

(32.49) $\sqrt[3]{-1} = w_k$; $w_1 = -1$; $w_2 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $w_3 = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

❑ Показательная форма комплексного числа

(32.50) $z = re^{i\varphi}$

(32.51) Формулы Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi;\ \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2};\ \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

(32.52) $e^{\frac{\pi}{2}i} = i;\ e^{\pi i} = -1;\ e^{\frac{3\pi}{2}i} = -i;\ e^{2\pi i} = 1$

❑ **Действия над комплексными числами в показательной форме**

(32.53) $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

(32.54) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

(32.55) $z^n = r^n e^{in\varphi}$

(32.56) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\cdot\frac{\varphi+2\pi k}{n}};\ k = 0, 1, 2, \ldots n-1$

❑ **Расстояние между точками** $z_1 = x_1 + iy_1$ **и** $z_2 = x_2 + iy_2$

(32.57) $d = |z_2 - z_1|$

❑ **Уравнение прямой, проходящей через точку** $z_0 = x_0 + iy_0$ **и образующей угол** α **с осью** OX

(32.58) $z = z_0 + te^{i\alpha};\ t \in \mathbb{R}$

❑ **Уравнение окружности с центром в точке** $z_0 = x_0 + iy_0$

(32.59) $z = z_0 + Re^{it};\ 0 \le t < 2\pi$

❑ **Разложение многочлена на линейные множители**

(32.60) $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n =$

$$= a_0 (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n);\ a_i, z_j \in \mathbb{C}\ \forall i, j;\ n \ge 1$$

❑ **Основная теорема алгебры**

(32.61) Любое уравнение n-й степени с комплексными коэффициентами $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0,\quad n \ge 1$, имеет n комплексных корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность

33. Элементы теории функций комплексной переменной

(33.1) $z = x + iy$; $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$; $x, y \in \mathbb{R}$; $z, w \in \mathbb{C}$;

$u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$ — действительная часть функции;

$v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$ — мнимая часть функции

❑ Основные функции комплексной переменной

(33.2) $w = az + b$

(33.3) $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ — функция Жуковского

(33.4) $w = z^n$; $n \in \mathbb{N}$

(33.5) $w = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) = w_k$;

$n \in N$; $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

(33.6) $w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

(33.7) $w = \operatorname{Ln} z = \ln z + 2\pi ki$; $k \in \mathbb{Z}$ — многозначная функция;

$\ln z = \ln|z| + i\arg z$ — главное значение логарифма

(33.8) $w = z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$; $\alpha \in \mathbb{C}$

(33.9) $w = a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$; $a \in \mathbb{C}$

(33.10) $w = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

(33.11) $w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

(33.12) $w = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$

(33.13) $w = \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$

❑ Гиперболические функции

(33.14) $w = \operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$

(33.15) $w = \operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$

(33.16) $w = \operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$

(33.17) $w = \operatorname{cth} z = \dfrac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$

❑ Производная функции комплексной переменной

(33.18) Производной однозначной функции $f(z)$ в точке z называется предел $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$. Функция, имеющая в каждой точке области непрерывную производную, называется аналитической в этой области

(33.19) Условия Коши–Римана: для того чтобы функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ была аналитической в области, необходимо и достаточно, чтобы в этой области существовали непрерывные частные производные функций $u(x,y)$; $v(x,y)$ и выполнялись условия: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

(33.20) Вычисление производной аналитической функции:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

❑ Вычисление интегралов

(33.21) Если $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, то

$$\int_l f(z)\,dz = \int_l u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\int_l v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy$$

(33.22) Если $l : z(t) = x(t) + iy(t);\ t_1 < t < t_2$, то

$$\int_l f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} f\left(z(t)\right)z'(t)dt$$

❑ Формула Ньютона–Лейбница

(33.23) Если $f(z)$ аналитическая в односвязной области, z_1, z_2 — точки внутри области, $F'(z) = f(z)$, то

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)$$

❑ Теорема Коши

(33.24) Если $f(z)$ аналитическая в односвязной области, γ — замкнутый контур в этой области, то $\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$

❑ Интегральная формула Коши

(33.25) Если $f(z)$ аналитическая в односвязной области, z_0 — точка внутри области, γ — замкнутый контур в этой области, охватывающий точку z_0, то $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \dfrac{f(z)}{z - z_0}\,dz$

(33.26) $f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i}\oint_{\gamma} \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz;\ n = 1, 2...$

❑ Ряды Тейлора

(33.27) Если $f(z)$ — аналитическая в круге $|z - z_0| < R$, то ее можно однозначно разложить в этом

круге в ряд Тейлора $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$;

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z - z_0| = \rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz;\ \rho < R$$

(33.28) $\dfrac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n;\ |z| < 1$

(33.29) $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!};\ z \in \mathbb{C}$

(33.30) $\ln(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} z^n}{n};\ |z| < 1$

(33.31) $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!};\ z \in \mathbb{C}$

(33.32) $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}; \ z \in \mathbb{C}$

(33.33) $\operatorname{tg} z = z + \frac{2}{3!} z^3 + \frac{16}{5!} z^5 + \ldots; \ |z| < \frac{\pi}{2}$

❑ Ряды Лорана

(33.34) $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$

$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n$ — главная часть ряда;

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ — правильная часть ряда

(33.35) Если $f(z)$ — аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R; \quad 0 \le r < R \le \infty$, то ее можно однозначно разложить в этом кольце в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n; \ c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - z_0| = \rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz; \ r < \rho < R$$

❑ Особые точки

(33.36) Если $f(z)$ — аналитическая в круге $0 < |z - z_0| < R$, а в точке z_0 не является аналитической, то точка z_0 называется изолированной особой точкой

❑ Классификация изолированных особых точек

(33.37) Если z_0 — особая точка и $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n; \ 0 < |z - z_0| < R,$

то z_0 называется устранимой особой точкой

(33.38) Если z_0 — особая точка и

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n; \ c_{-m} \neq 0; \ 0 < |z - z_0| < R,$$

то z_0 называется полюсом порядка m

(33.39) Если z_0 — особая точка и $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n; \ 0 < |z - z_0| < R,$

то z_0 называется существенно особой точкой

❑ **Вычеты. Основная теорема о вычетах**

(33.40) Вычетом аналитической функции $f(z)$ в точке z_0 называется коэффициент c_{-1} в разложении $f(z)$ в ряд Лорана

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz;\ 0<\rho<R$$

(33.41) Если $f(z)$ аналитична в ограниченной односвязной области D за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1; z_2; ...; z_n$, γ — замкнутый контур, лежащий в D и охватывающий все точки $z_1; z_2; ...; z_n$, то $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$

34. Элементы теории вероятностей

Формулы комбинаторики (сочетания, размещения, перестановки)

❑ **Число сочетаний без повторений из n элементов по k**

(34.1) $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$; $0! = 1$

(34.2) $C_n^0 = C_n^n = 1$

(34.3) $C_n^k = C_n^{n-k}$

(34.4) $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$

❑ **Число размещений без повторений из n элементов по k**

(34.5) $A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot ...\cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

(34.6) $A_n^k = C_n^k P_n$

❑ **Число перестановок без повторений из n элементов по n**

(34.7) $P_n = n\cdot (n-1)(n-2)\cdot ...\cdot 1 = n!$

(34.8) $P_n = A_n^n$

❑ **Число размещений с повторениями из n элементов по k**

(34.9) $\overline{A}_n^k = n^k$

❑ **Формула Стирлинга**

(34.10) При $n \to \infty \quad n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

Классическая формула вычисления вероятности

(34.11) Если множество всех возможных исходов случайного эксперимента состоит из n равновозможных и взаимно исключающих исходов — элементарных событий, то вероятность события A равна $P(A) = \frac{m_A}{n}$, где m_A — число исходов, благоприятствующих событию A, n — число всех возможных исходов

Алгебра событий

(34.12) Достоверным событием называется событие, которое наступает всегда; обозначается символом Ω

(34.13) Невозможным событием называется событие, которое не происходит никогда; обозначается символом $\varnothing$

(34.14) Суммой событий $A + B$ называется событие C, состоящее в выполнении хотя бы одного из событий A или B (или A, или B, или обоих вместе)

(34.15) Произведением $A \cdot B$ событий называется событие C, состоящее в совместном выполнении обоих событий A и B

(34.16) Противоположным к A событием называется событие $\overline{A}$, состоящее в невыполнении события A

(34.17) События A и B называются несовместными, если $A \cdot B = \varnothing$

❑ **Свойства операций сложения и умножения событий**

(34.18) $A + B = B + A$; $A \cdot B = B \cdot A$ (коммутативность)

(34.19) $(A + B) + C = A + (B + C)$; $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B + C)$ (ассоциативность)

(34.20) $A(B + C) = AB + AC$ (дистрибутивность)

(34.21) $A + A = A;\ A + \overline{A} = \Omega;\ A + \Omega = \Omega;\ A + \varnothing = A$

(34.22) $A \cdot A = A;\ A \cdot \overline{A} = \varnothing;\ A \cdot \Omega = A;\ A \cdot \varnothing = \varnothing$

Алгебра вероятностей

(34.23) $P(\varnothing) = 0$

(34.24) $P(\Omega) = 1$

(34.25) $0 \le P(A) \le 1$

(34.26) Если из события A следует событие B, то $P(A) \le P(B)$

❑ Правило сложения вероятностей

(34.27) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$

(34.28) $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) -$
$-P(A \cdot B) - P(B \cdot C) - P(A \cdot C) + P(A \cdot B \cdot C)$

(34.29) Если события A и B несовместны, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

(34.30) $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

❑ Условная вероятность. Независимые события

(34.31) Условной вероятностью события B при условии выполнения события A называется выражение

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)};\ P(A) \neq 0$$

(34.32) События A и B называются независимыми, если

$$P(B \mid A) = P(B)$$

❑ Правило умножения вероятностей

(34.33) $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$

(34.34) $P(A \cdot B \cdot C) = P(A)P(B \mid A) \cdot P(C \mid (A \cdot B))$

(34.35) Если события A и B независимы, то

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

❑ Формула полной вероятности

(34.36) Если события $H_1; H_2; ...; H_n$ образуют полную группу, то есть $\sum_{k=1}^{n} H_k = \Omega$ и $H_i \cdot H_j = \varnothing; i \neq j$, то $P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) P(A \mid H_k)$; события $H_1; H_2; ...; H_n$ называются гипотезами: $P(H_k)$ называются априорными вероятностями гипотез

❑ Формула Байеса. Пересчет вероятностей гипотез

(34.37) $P(H_k \mid A) = \dfrac{P(H_k) P(A \mid H_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k) P(A \mid H_k)}; k = 1, 2, ..., n;$ $P(H_k \mid A)$ называются апостериорными вероятностями гипотез

❑ Повторение испытаний с двумя исходами. Формула Бернулли

(34.38) Если производится n независимых опытов, в каждом из которых может произойти событие A («успех») с вероятностью p или событие $\overline{A}$ («неудача») с вероятностью $q = 1 - p$, то вероятность выполнения события A ровно m раз равна $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}; q = 1 - p; m = 0, 1, 2, ..., n$

(34.39) $P_n(0) = q^n; P_n(n) = p^n$

Случайные величины

❑ Функция распределения $F(x)$ случайной величины X

(34.40) $F(x) = P\{X < x\}; x \in \mathbb{R}$

(34.41) Если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \geq F(x_1)$

(34.42) $F(-\infty) = 0; F(+\infty) = 1$

(34.43) $F(x)$ непрерывна слева

(34.44) $P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a)$

❑ Ряд распределения дискретной случайной величины

(34.45) $p_k = P\{X = x_k\};\ k = 1, 2, ..., n, ...;\ \sum_{k=1} p_k = 1;$

X	x_1	x_2	...	x_n	...
p	p_1	p_2	...	p_n	...

❑ Плотность распределения непрерывной случайной величины

(34.46) $f(x) = F'(x)$

(34.47) $P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)\,dx$

(34.48) $F(x) = P\{-\infty < X < x\} = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$

(34.49) $f(x) \geq 0$

(34.50) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

❑ Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины с n значениями

(34.51) $M(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k$

(34.52) $D(X) = M\left(X - M(X)\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} p_k \left(x_k - M(X)\right)^2$

(34.53) $D(X) = M\left(X^2\right) - \left(M(X)\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k\right)^2$

❑ Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины

(34.54) $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$

(34.55) $D(X) = M\left(X - M(X)\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - M(X)\right)^2 f(x)\,dx$

(34.56) $D(X) = M\left(X^2\right) - \left(M(X)\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx\right)^2$

❑ Среднее квадратическое отклонение

(34.57) $\sigma = \sqrt{D(X)}$

❑ Биномиальное распределение

(34.58) Дискретная случайная величина X имеет биномиальное распределение, если ее возможные значения равны $0, 1, 2, ..., n$, а вероятности равны $p_m = P\{X = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}$; $0 < p < 1; q = 1 - p; m = 0, 1, 2, ..., n$

(34.59) $M(X) = np; D(X) = npq$

❑ Распределение Пуассона

(34.60) Дискретная случайная величина X имеет распределение Пуассона, если ее возможные значения равны $0, 1, 2, ..., m, ...$, а вероятности равны $p_m = P\{X = m\} = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$; $a > 0; m = 0, 1, 2, ...$

(34.61) $M(X) = a; D(X) = a$

❑ Равномерное распределение

(34.62) Непрерывная случайная величина X имеет равномерное распределение в интервале $(a; b)$, если плотность распределения равна $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a; b) \\ 0, & x \notin (a; b) \end{cases}$

(34.63) $M(X) = \frac{a+b}{2}; D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

(34.64) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ 1, & x > b \end{cases}$

(34.65) $P\{\alpha < X < \beta\} = \frac{\beta - \alpha}{b-a}; a \le \alpha < \beta \le b$

❑ Нормальное распределение

(34.66) Непрерывная случайная величина X имеет нормальное распределение, если плотность распределения равна

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

(34.67) $M(X)=a;\ D(X)=\sigma^2$

(34.68) $$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)+\frac{1}{2}$$

(34.69) $$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$ — функция Лапласа, интеграл вероятностей

(34.70) $$\Phi(0)=0;\ \Phi(-x)=-\Phi(x);\ \Phi(+\infty)=\frac{1}{2};\ \Phi(-\infty)=-\frac{1}{2}$$

(34.71) $$P\{\alpha<X<\beta\}=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

(34.72) $$P\{|X-a|<l\}=2\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right)$$

(34.73) $$P\{|X-a|<k\sigma\}=2\Phi(k)$$

(34.74) $$P\{|X-a|<\sigma\}=2\Phi(1)\approx 0,682$$

(34.75) $$P\{|X-a|<2\sigma\}=2\Phi(2)\approx 0,954$$

(34.76) $$P\{|X-a|<3\sigma\}=2\Phi(3)\approx 0,997$$ — «правило трех сигм»

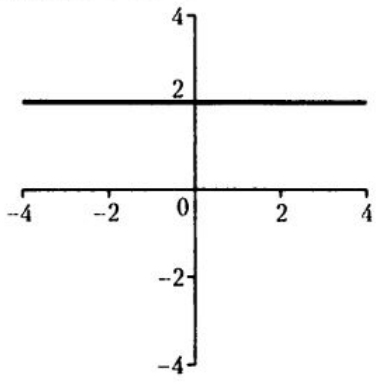
❑ Неравенство Чебышева

Для любой случайной величины X с математическим ожиданием m_x и дисперсией D_x и любого числа $\alpha>0$:

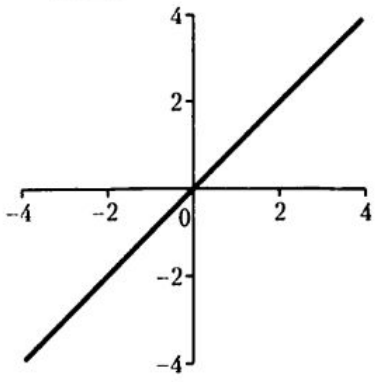
(34.77) $$P\{|X-m_x|\geq\alpha\}\leq\frac{D_x}{\alpha^2}$$

(34.78) $$P\{|X-m_x|<\alpha\}\geq 1-\frac{D_x}{\alpha^2}$$

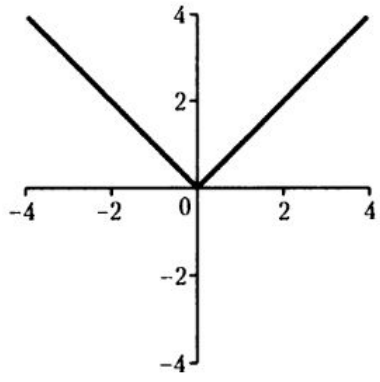
Часть 2. Графики функций



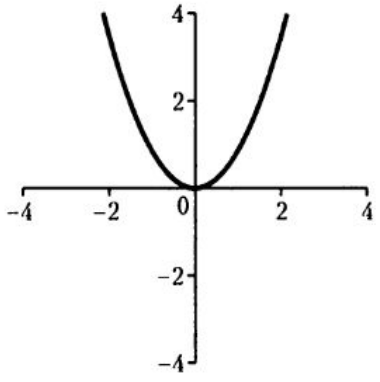
1 $y = \text{const}$



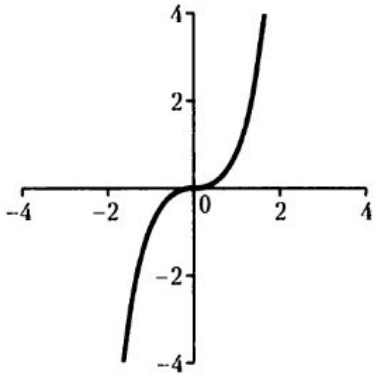
2 $y = x$



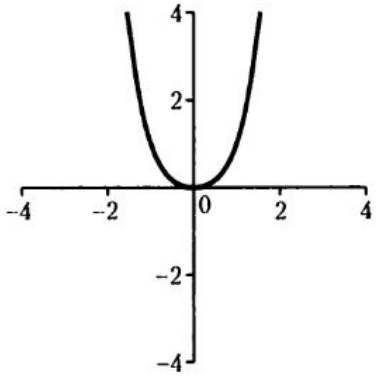
3 $y = |x|$



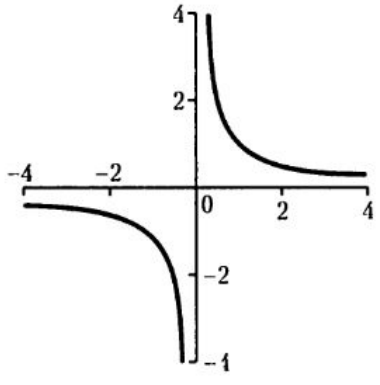
4 $y = x^2$



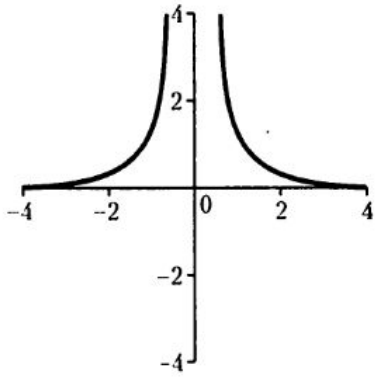
5 $y = x^3$



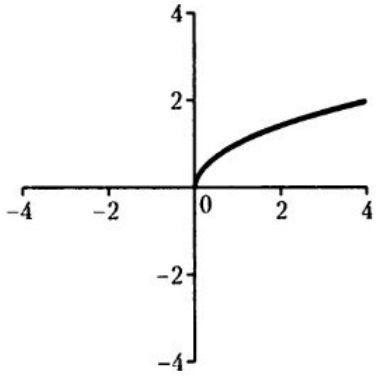
6 $y = x^4$



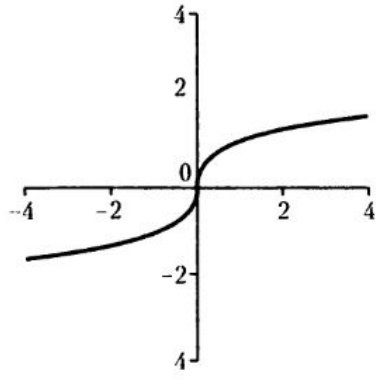
7 $y = x^{-1}$



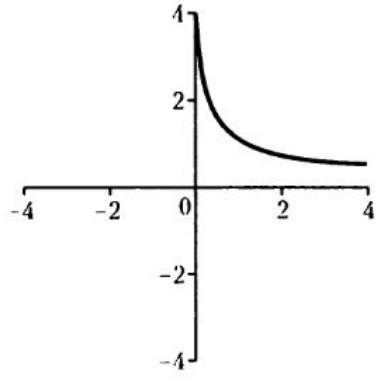
8 $y = x^{-2}$



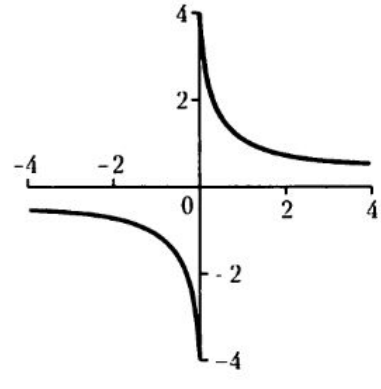
9 $y = x^{1/2}$



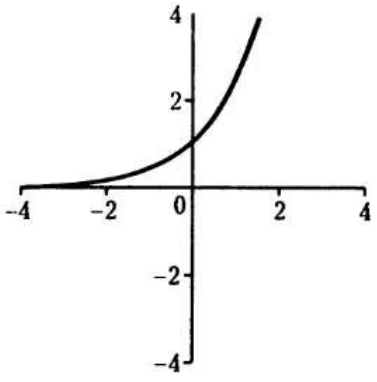
10 $y = x^{1/3}$



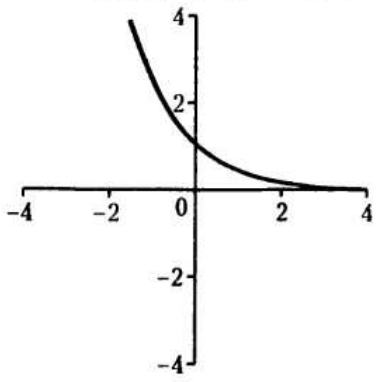
11 $y = x^{-1/2}$



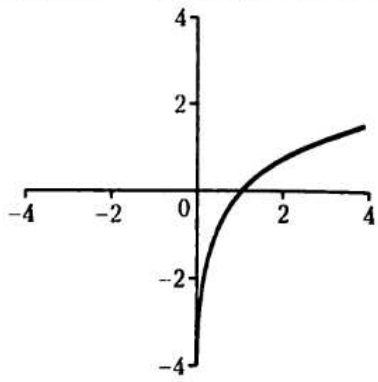
12 $y = x^{-1/3}$



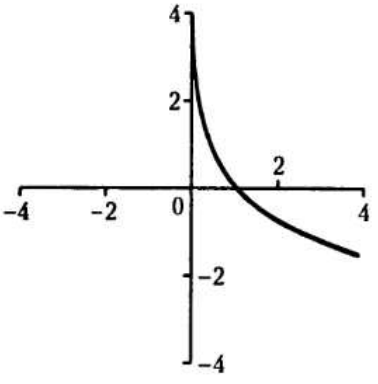
13 $y = a^x;\ a > 1$



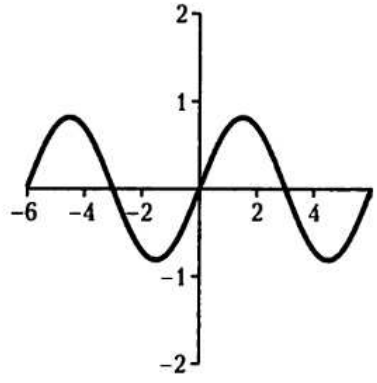
14 $y = a^x;\ 0 < a < 1$



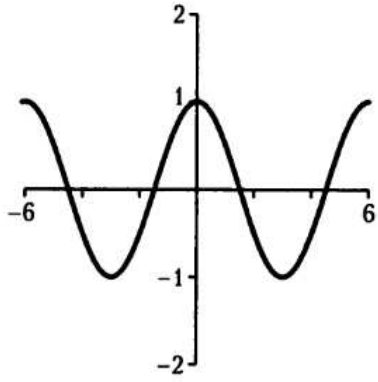
15 $y = \log_a x;\ a > 1$



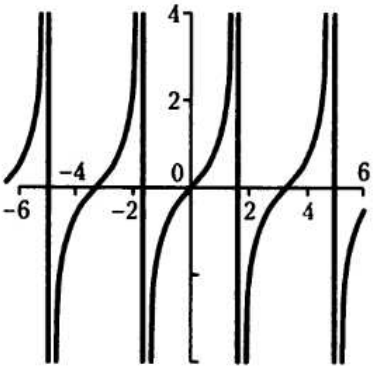
16 $y = \log_a x;\ 0 < a < 1$



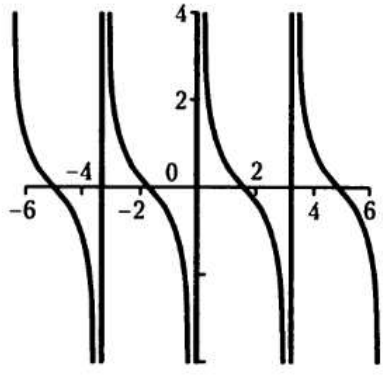
17 $y = \sin x$



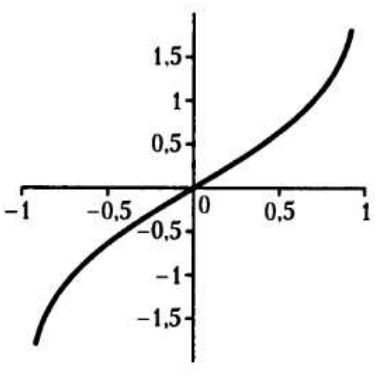
18 $y = \cos x$



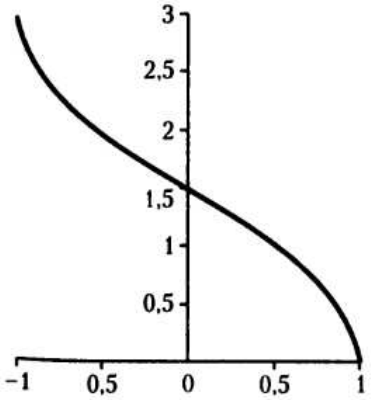
19 $y = \operatorname{tg} x$



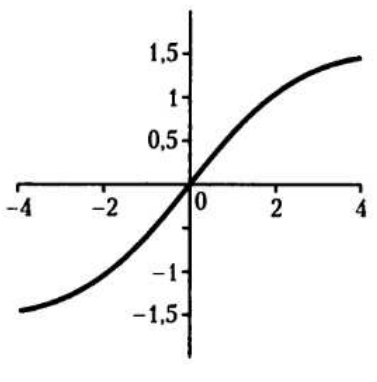
20 $y = \operatorname{ctg} x$



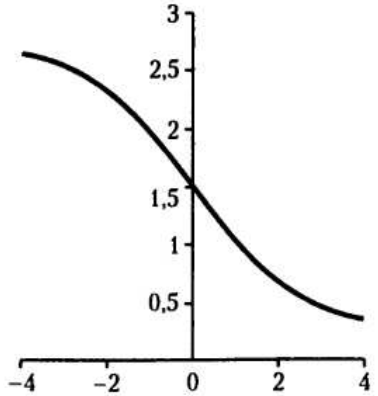
21 $y = \arcsin x$



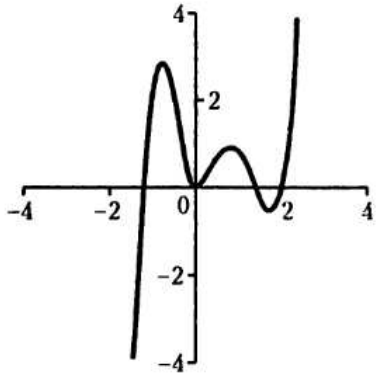
22 $y = \arccos x$



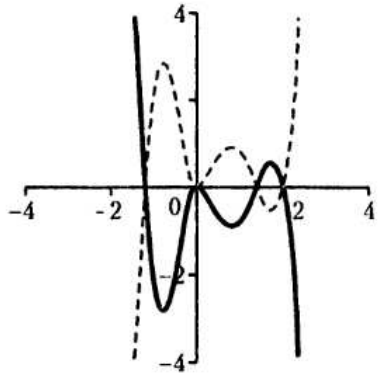
23 $y = \operatorname{arctg} x$



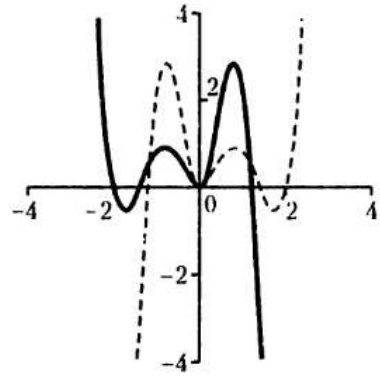
24 $y = \operatorname{arcctg} x$



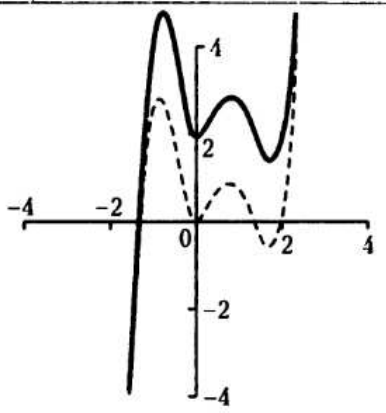
25 $y = f(x)$



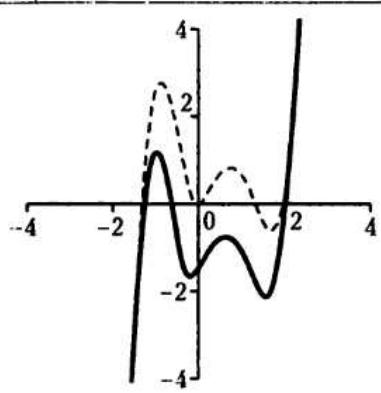
26 $y = -f(x)$



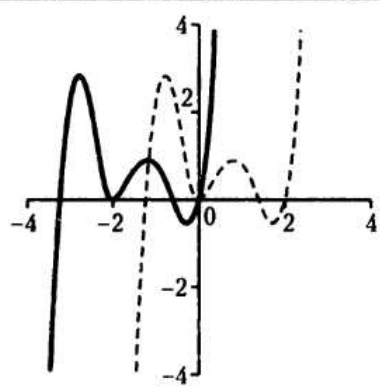
27 $y = f(-x)$



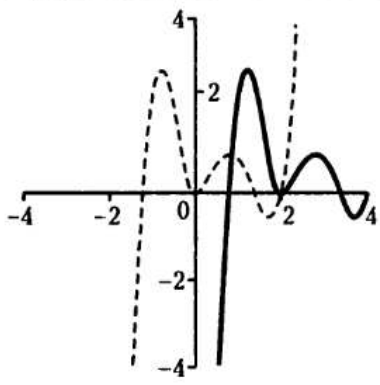
28 $y = f(x) + a,\ a > 0$



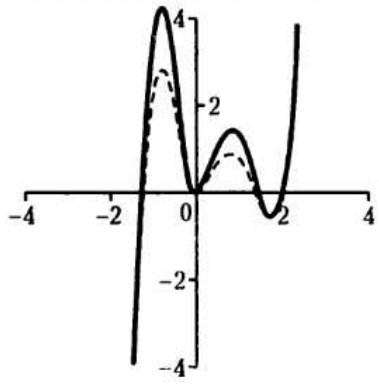
29 $y = f(x) - a,\ a > 0$



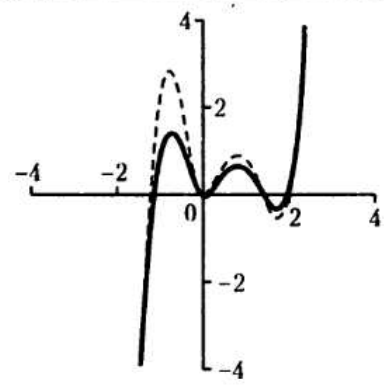
30 $y = f(x + a),\ a > 0$



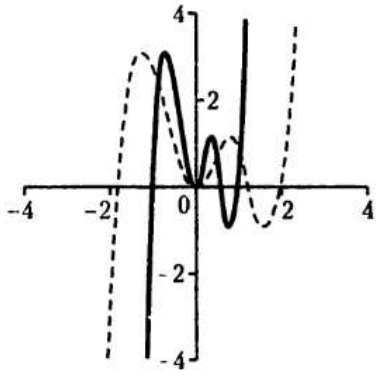
31 $y = f(x - a),\ a > 0$



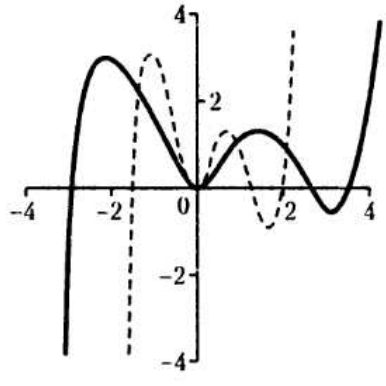
32 $y = kf(x),\ k > 1$



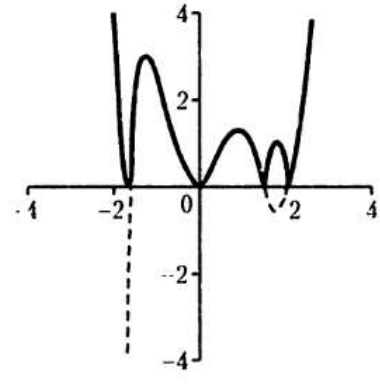
33 $y = kf(x),\ 0 < k < 1$



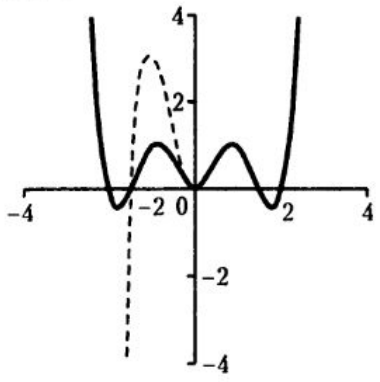
34 $y = f(kx),\ k > 1$



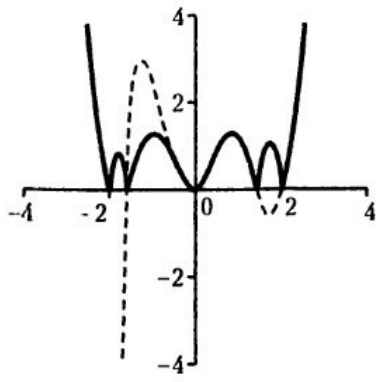
35 $y = f(kx),\ 0 < k < 1$



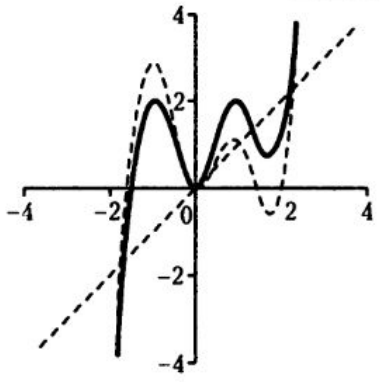
36 $y = |f(x)|$



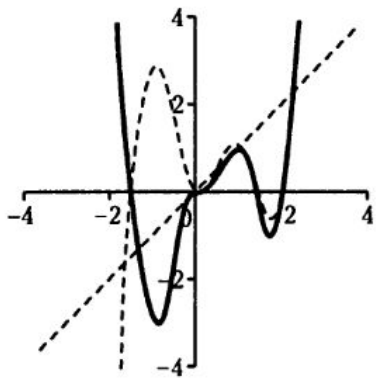
37 $y = f(|x|)$



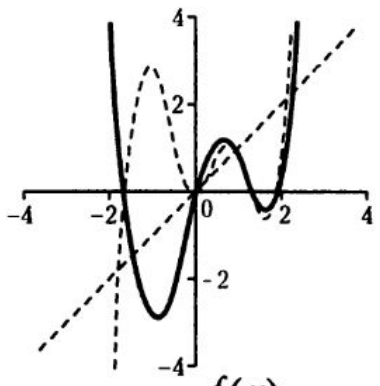
38 $y = |f(|x|)|$



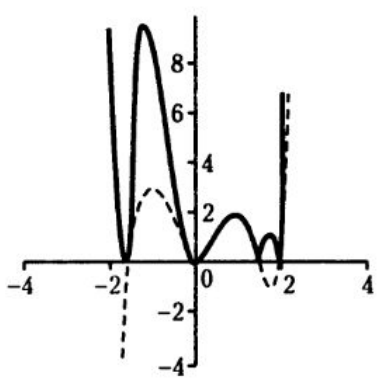
39 $y = f(x) + g(x)$



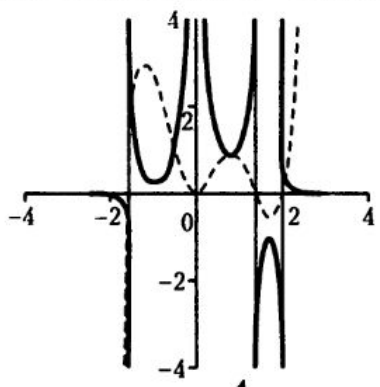
40 $y = f(x)g(x)$



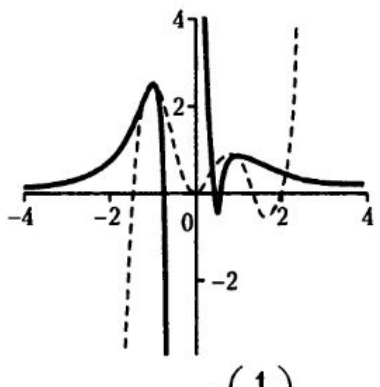
41 $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$



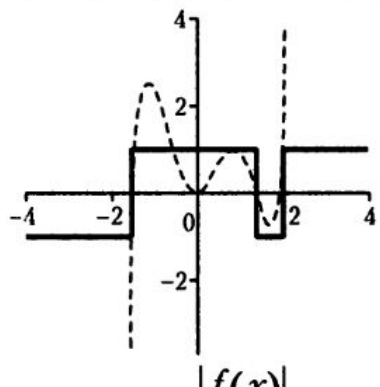
42 $y = f^2(x)$



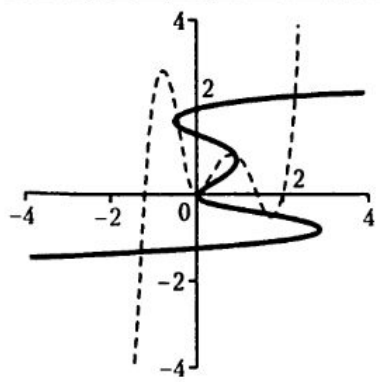
43 $y = \dfrac{1}{f(x)}$



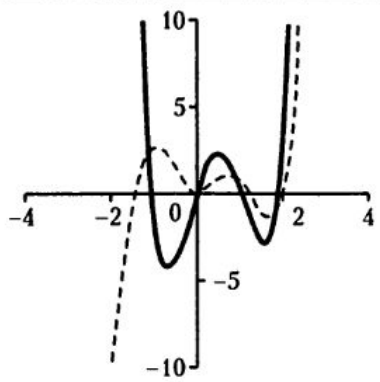
44 $y = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$



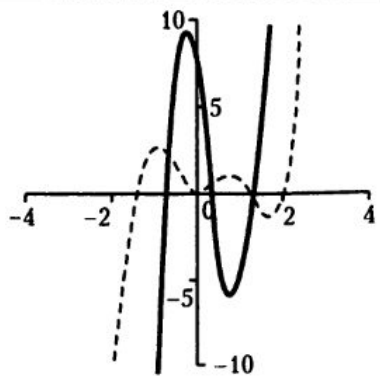
45 $y = \dfrac{|f(x)|}{f(x)}$



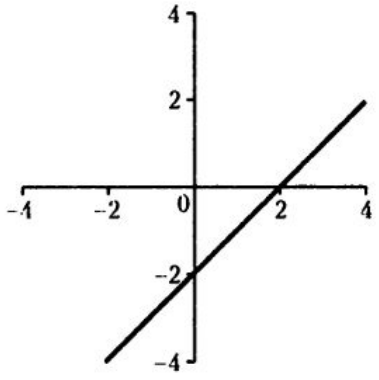
46 $x = f(y)$



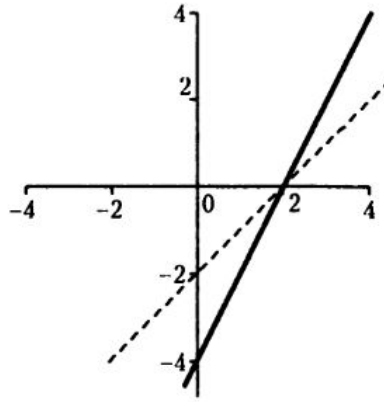
47 $y = f'(x)$



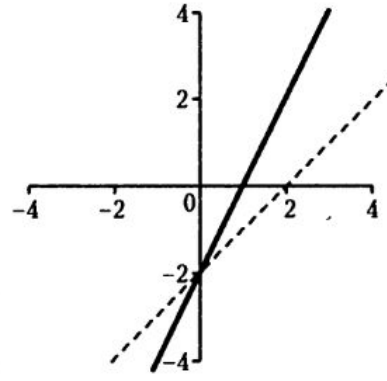
48 $y = f''(x)$



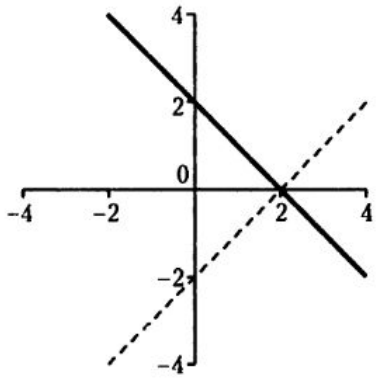
49 $y = x - 2$



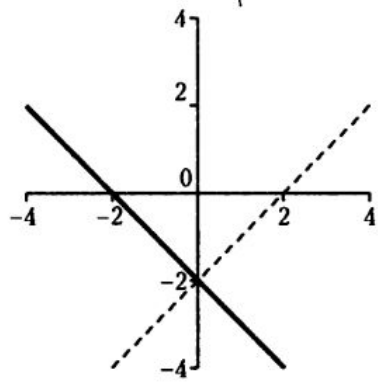
50 $y = 2(x - 2)$



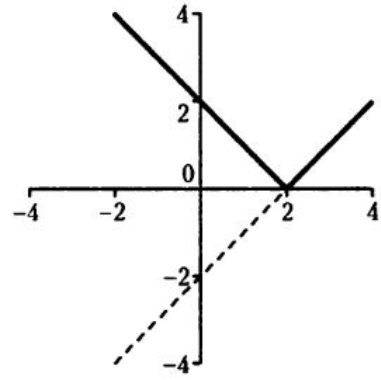
51 $y = 2x - 2$



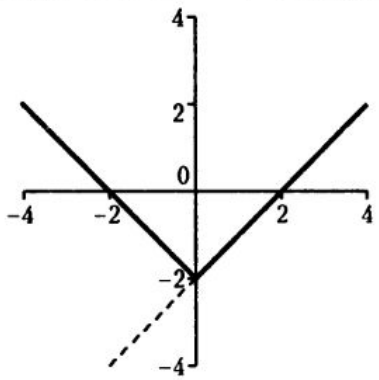
52 $y = -x + 2$



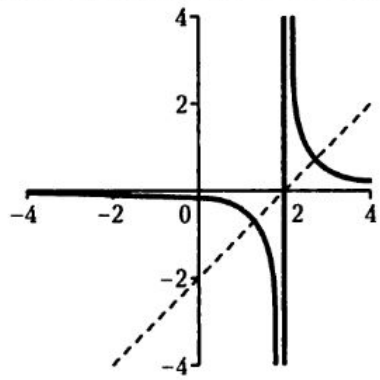
53 $y = -x - 2$



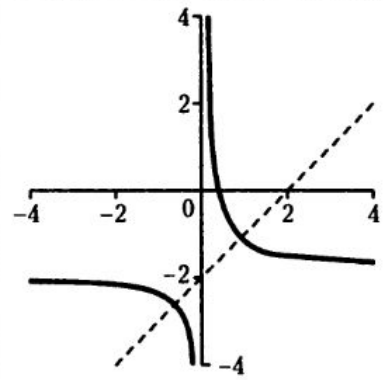
54 $y = |x - 2|$



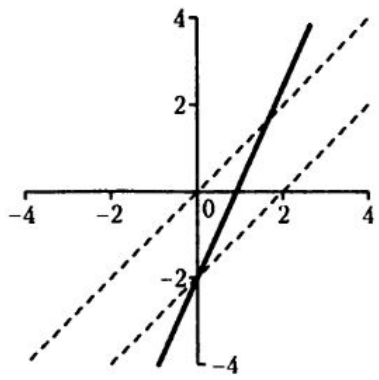
55 $y = |x| - 2$



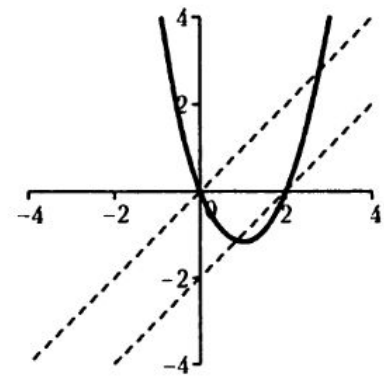
56 $y = \dfrac{1}{x - 2}$



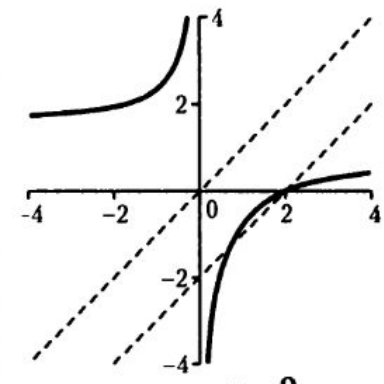
57 $y = \dfrac{1}{x} - 2$



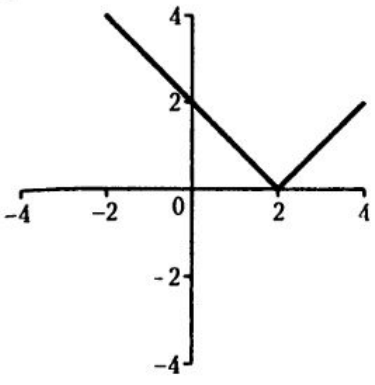
58 $y = 2x - 2$



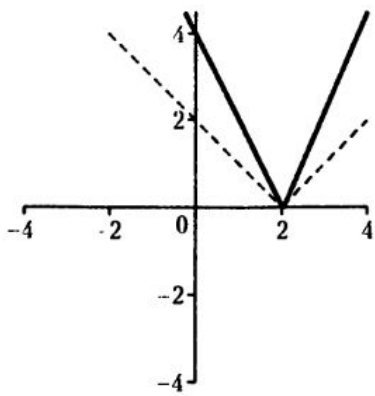
59 $y = (x - 2)x$



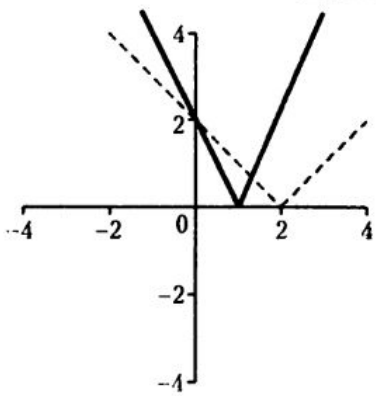
60 $y = \dfrac{x - 2}{x}$



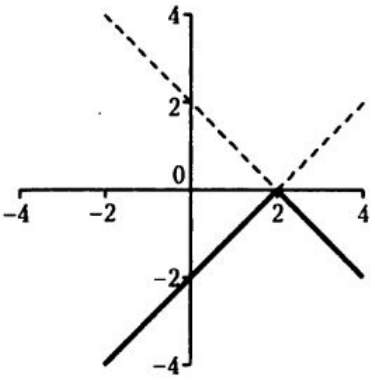
61 $y = |x - 2|$



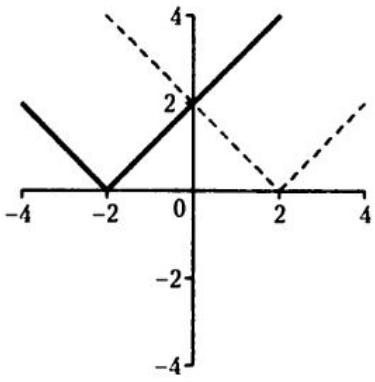
62 $y = 2|x - 2|$



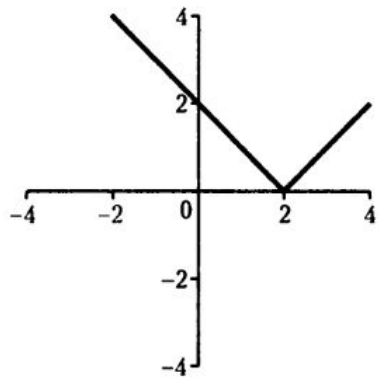
63 $y = |2x - 2|$



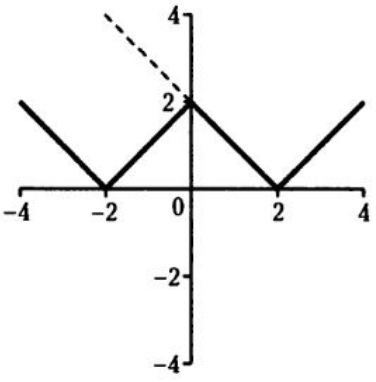
64 $y = -|x - 2|$



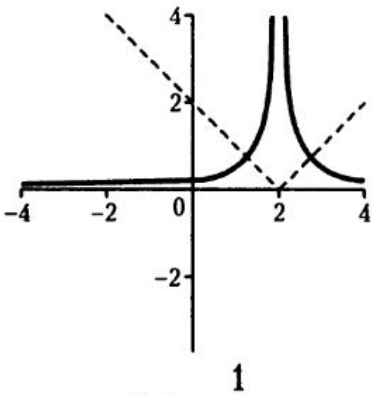
65 $y = |-x - 2|$



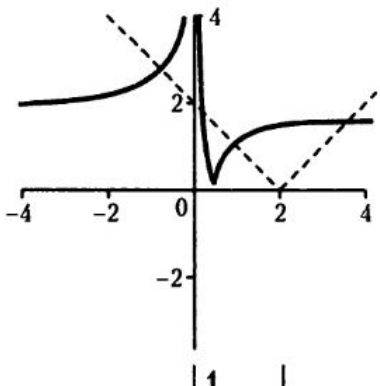
66 $y = ||x - 2||$



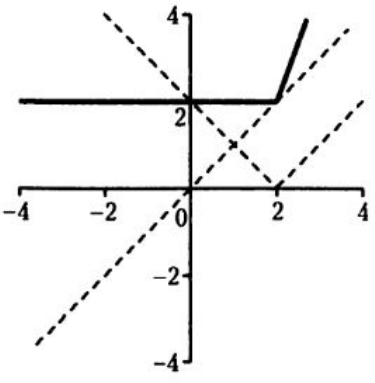
67 $y = ||x| - 2|$



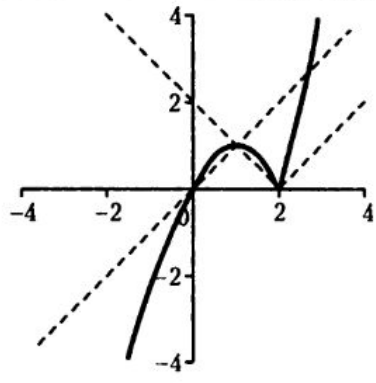
68 $y = \dfrac{1}{|x - 2|}$



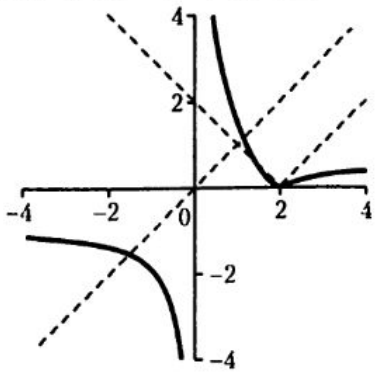
69 $y = \left|\dfrac{1}{x} - 2\right|$



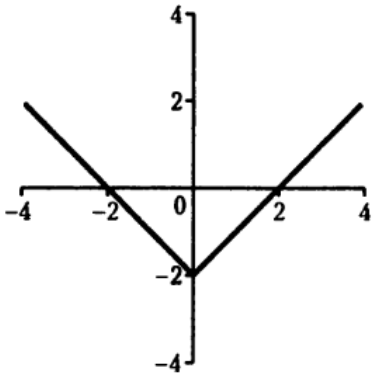
70 $y = |x - 2| + x$



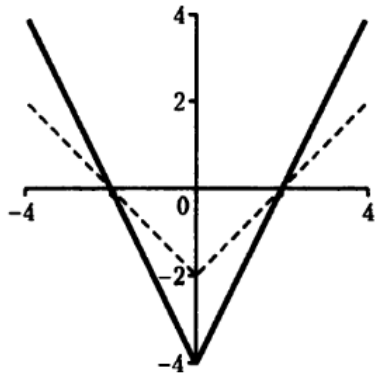
71 $y = |x - 2|\,x$



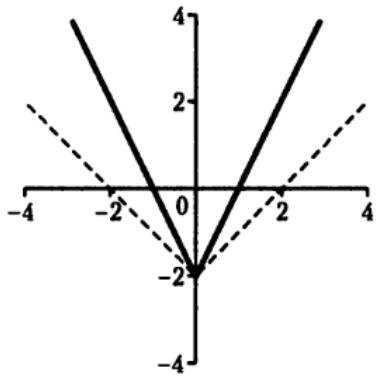
72 $y = |x - 2| \,/\, x$



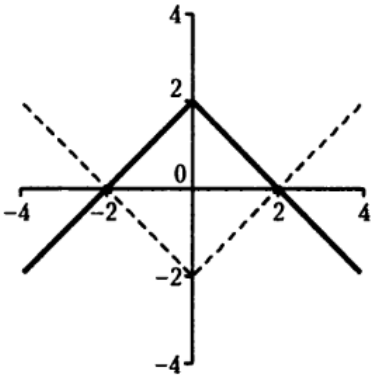
73 $y = |x| - 2$



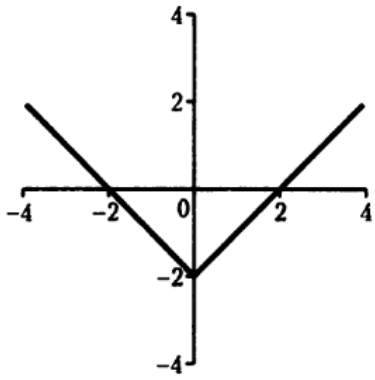
74 $y = 2(|x| - 2)$



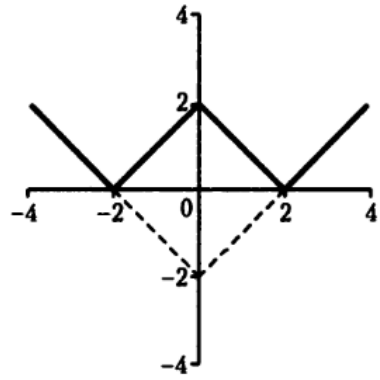
75 $y = |2x| - 2$



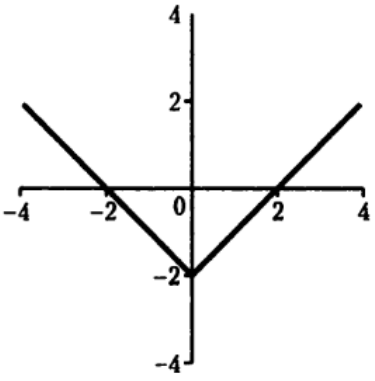
76 $y = -|x| + 2$



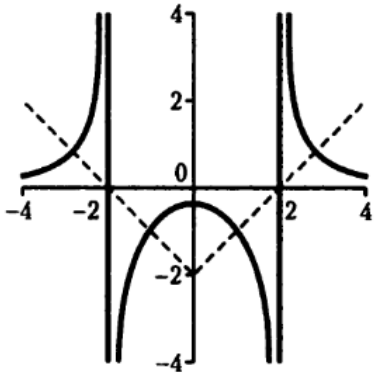
77 $y = |-x| - 2$



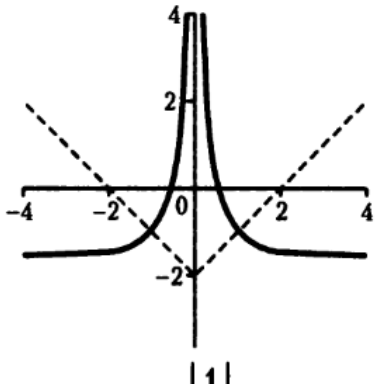
78 $y = \| x | - 2|$



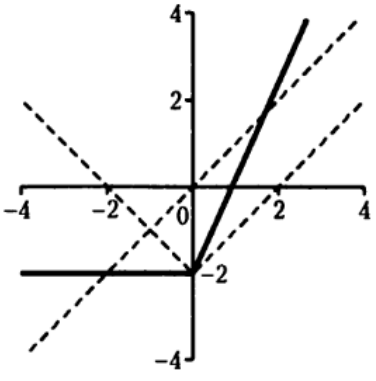
79 $y = \| x \| - 2$



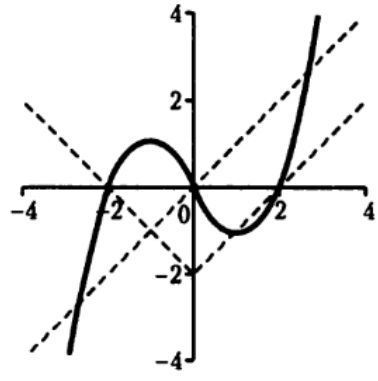
80 $y = 1/(|x| - 2)$



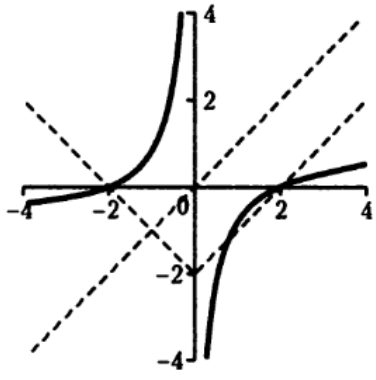
81 $y = \left|\frac{1}{x}\right| - 2$



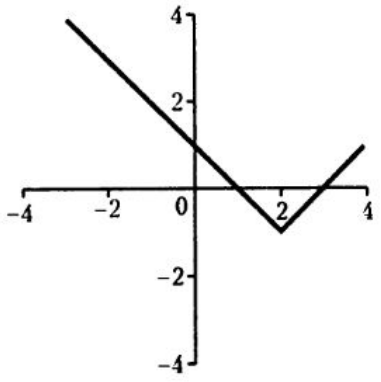
82 $y = |x| + x - 2$



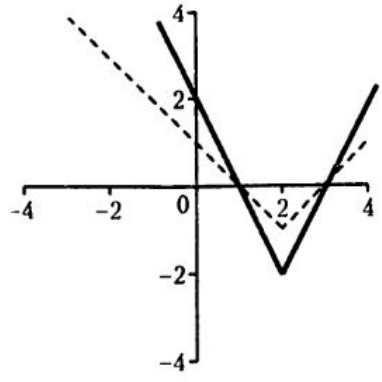
83 $y = (|x| - 2)x$



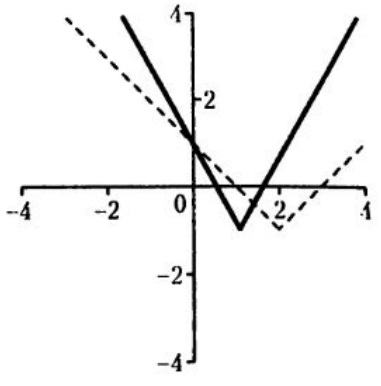
84 $y = (|x| - 2)/x$



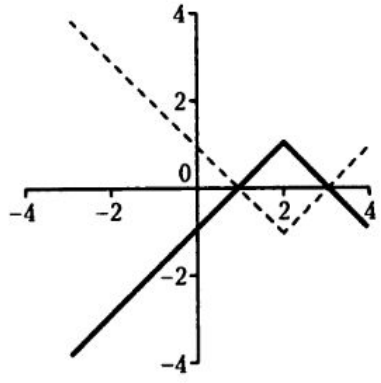
85 $y = |x-2|-1$



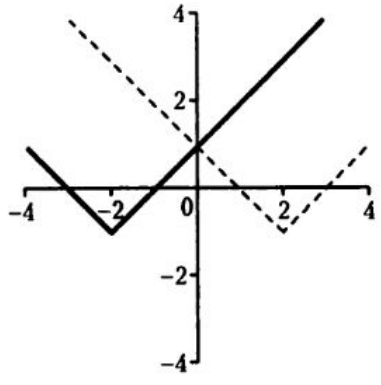
86 $y = 2|x-2|-2$



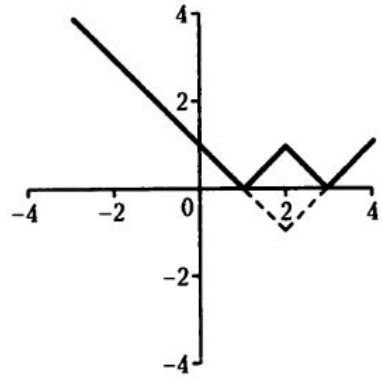
87 $y = |2x-2|-1$



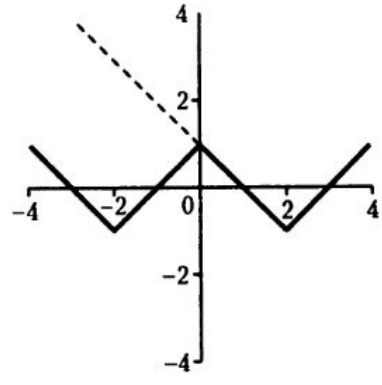
88 $y = -|x-2|+1$



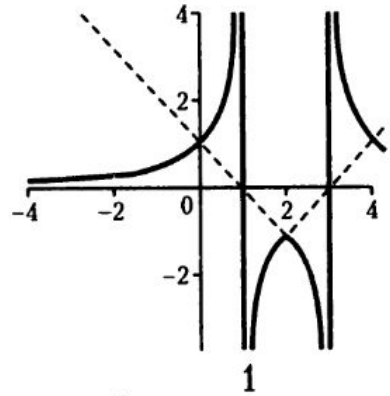
89 $y = |-x-2|-1$



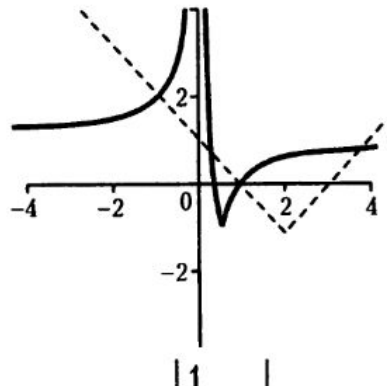
90 $y = \big||x-2|-1\big|$



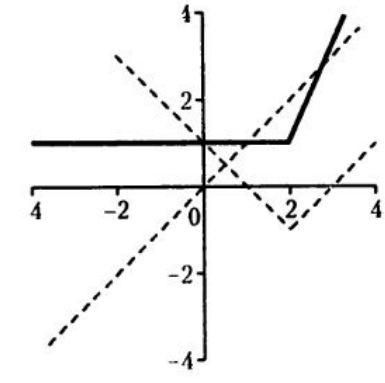
91 $y = \big||x|-2\big|-1$



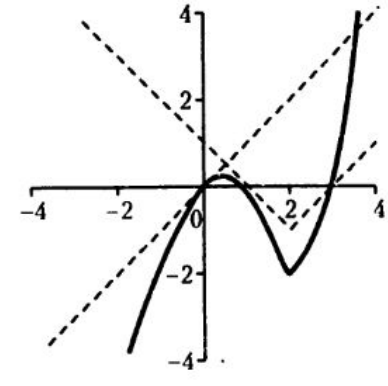
92 $y = \dfrac{1}{|x-2|-1}$



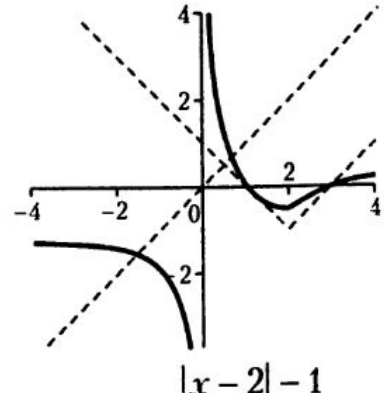
93 $y = \left|\dfrac{1}{x}-2\right|-1$



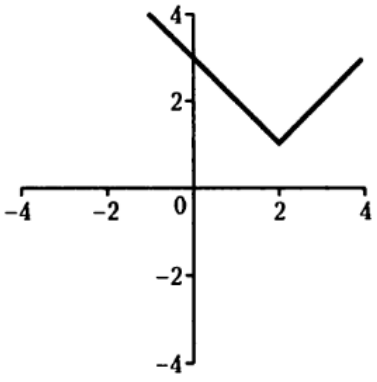
94 $y = |x-2|-1+x$



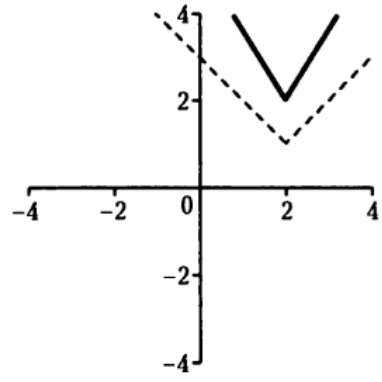
95 $y = x|x-2|-x$



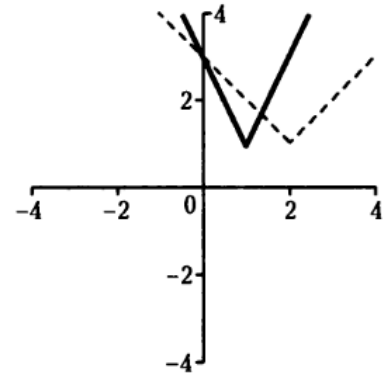
96 $y = \dfrac{|x-2|-1}{x}$



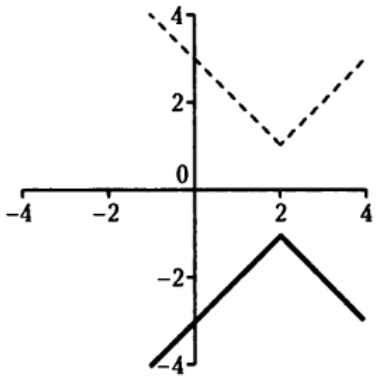
97 $y = |x-2|+1$



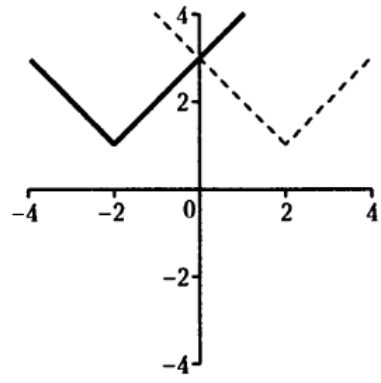
98 $y = 2(|x-2|+1)$



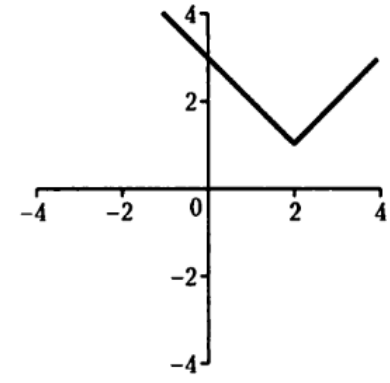
99 $y = |2x-2|+1$



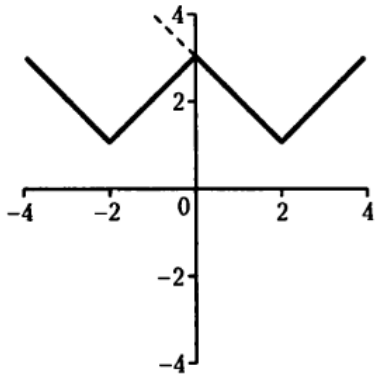
100 $y = -|x-2|-1$



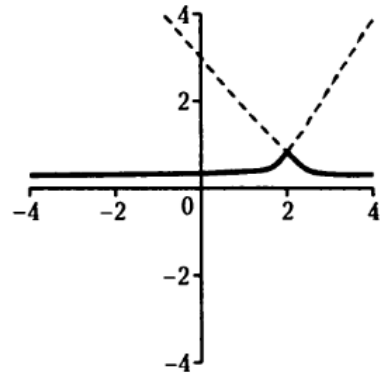
101 $y = |-x-2|+1$



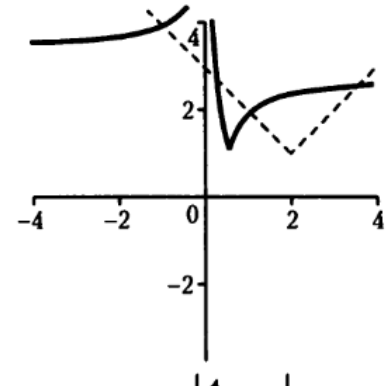
102 $y = ||x-2|+1|$



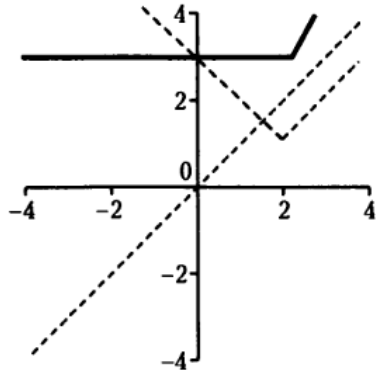
103 $y = ||x|-2|+1$



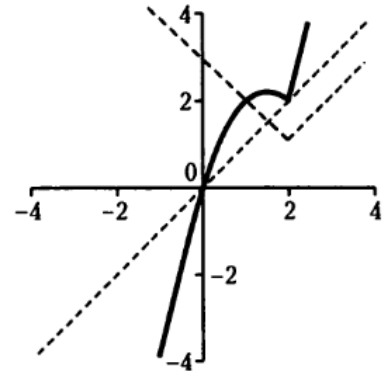
104 $y = 1/(|x-2|+1)$



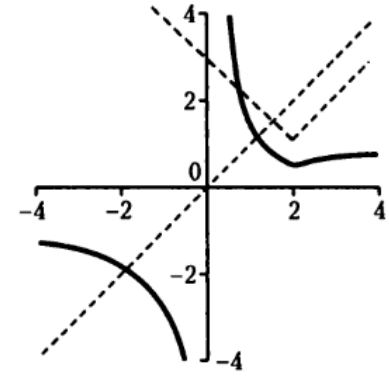
105 $y = \left|\frac{1}{x}-2\right|+1$



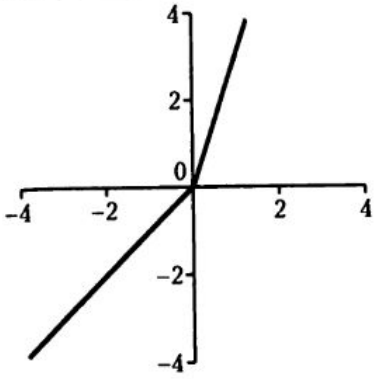
106 $y = |x-2|+1+x$



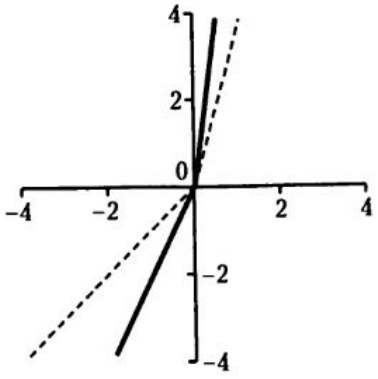
107 $y = (|x-2|+1)x$



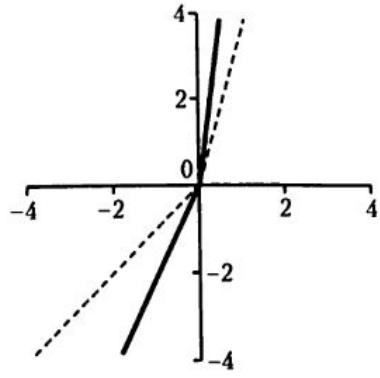
108 $y = (|x-2|+1)/x$



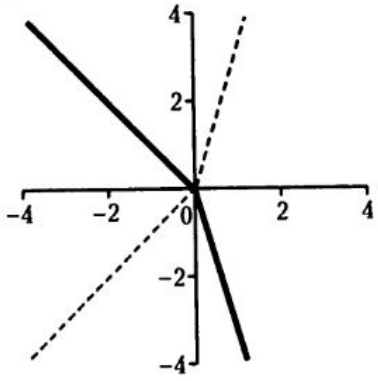
109 $y = |x| + 2x$



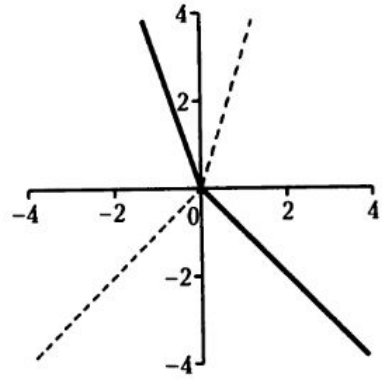
110 $y = 2|x| + 4x$



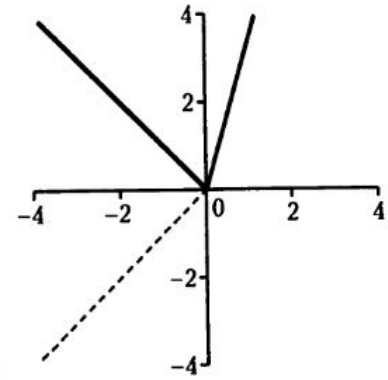
111 $y = |2x| + 4x$



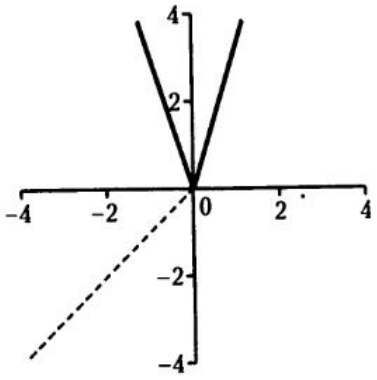
112 $y = -|x| - 2x$



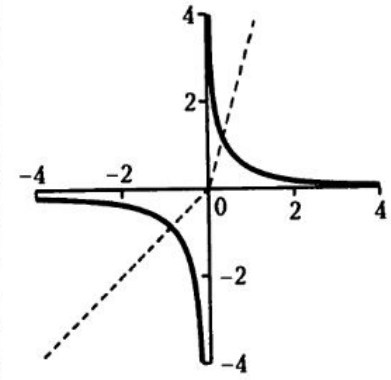
113 $y = |x| - 2x$



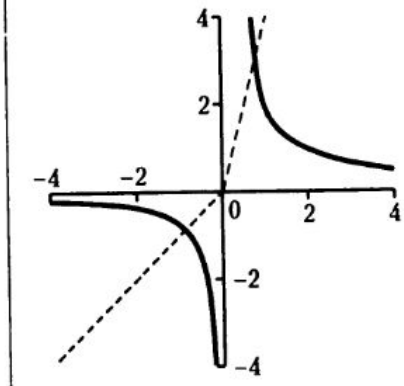
114 $y = \| x | + 2x|$



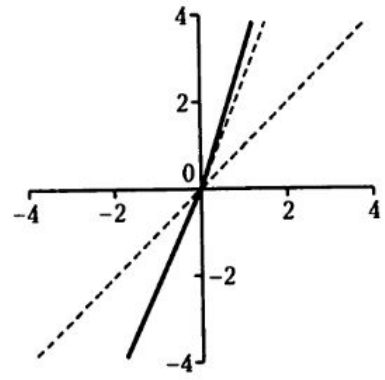
115 $y = |x| + 2|x|$



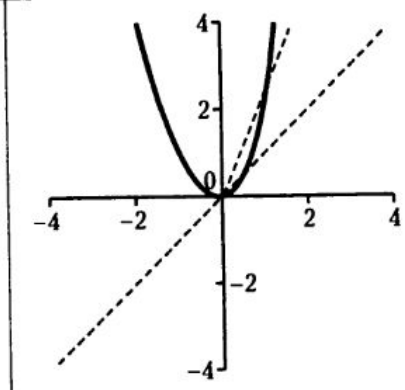
116 $y = 1/(|x| + 2x)$



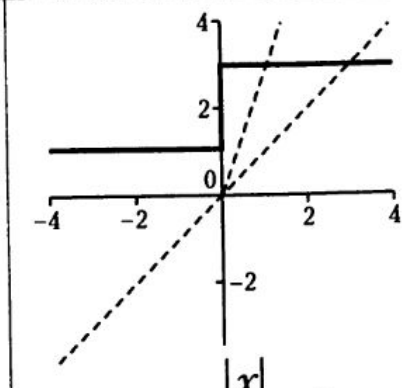
117 $y = 1/|x| + 2/x$



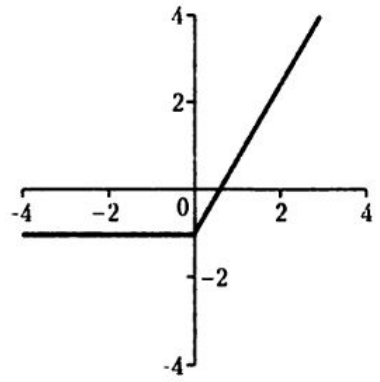
118 $y = |x| + 3x$



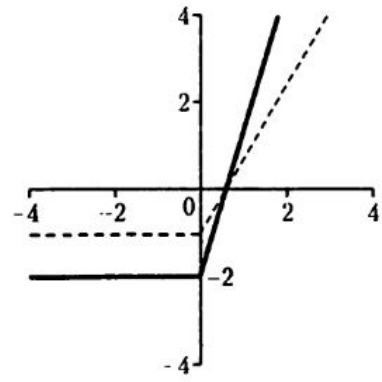
119 $y = x|x| + 2x^2$



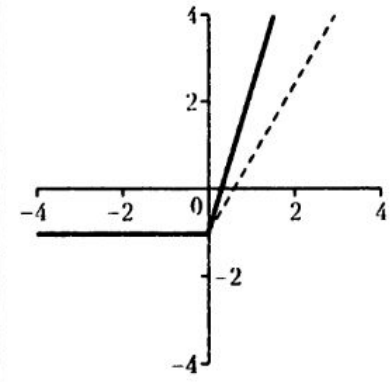
120 $y = \dfrac{|x|}{x} + 2$



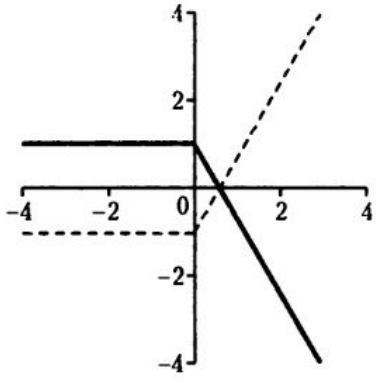
121 $y = |x| + x - 1$



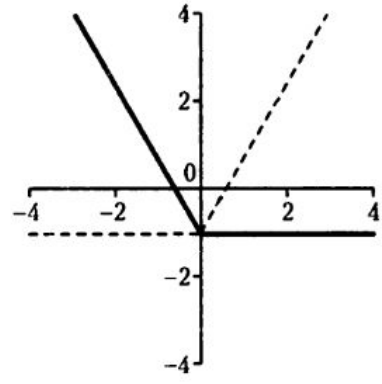
122 $y = 2|x| + 2x - 2$



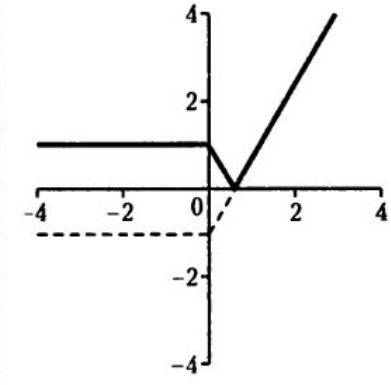
123 $y = 2|x| + 2x - 1$



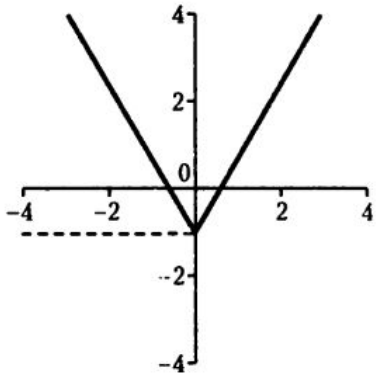
124 $y = -|x| - x + 1$



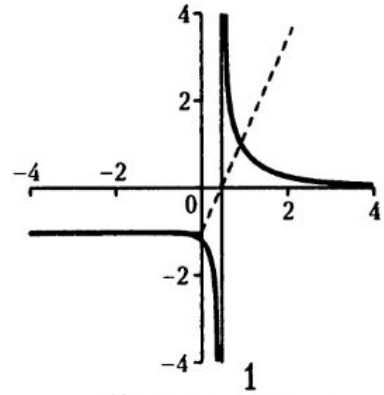
125 $y = |x| - x - 1$



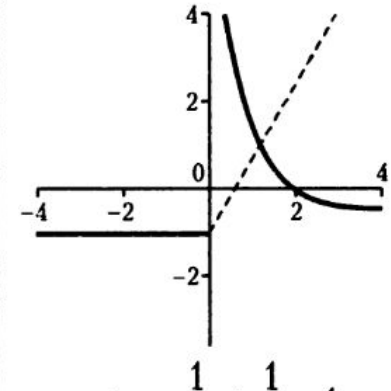
126 $y = \| x | + x - 1|$



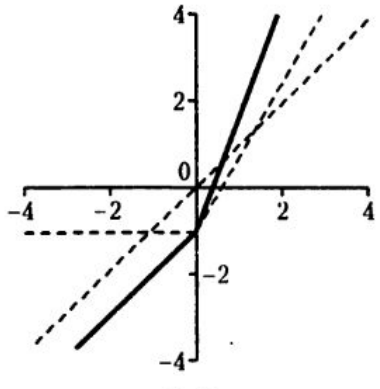
127 $y = 2|x| - 1$



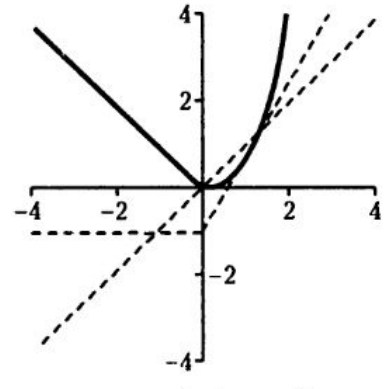
128 $y = \dfrac{1}{|x| + x - 1}$



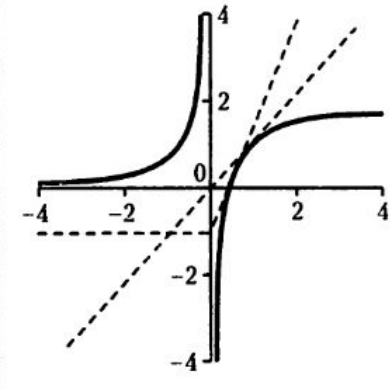
129 $y = \dfrac{1}{|x|} + \dfrac{1}{x} - 1$



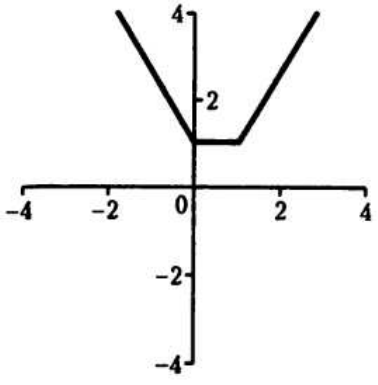
130 $y = |x| + 2x - 1$



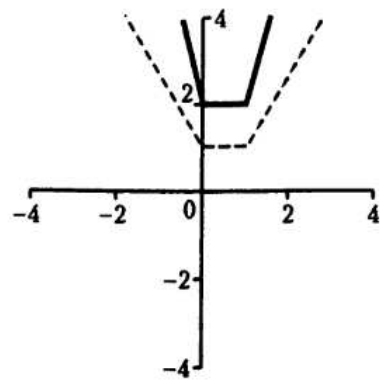
131 $y = x|x| + x^2 - x$



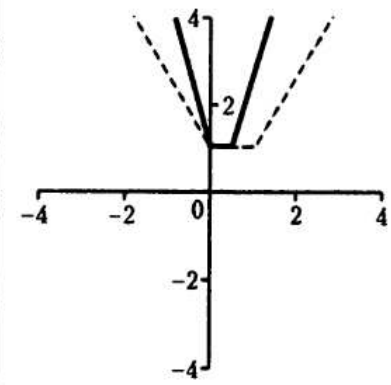
132 $y = \big(|x| + x - 1\big) / x$



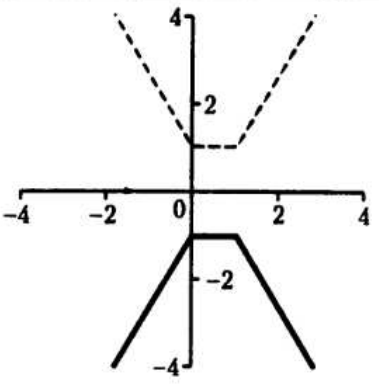
133 $y = |x| + |x-1|$



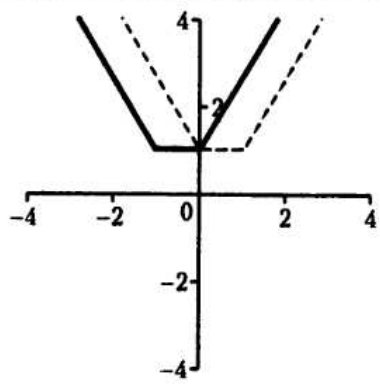
134 $y = 2(|x| + |x-1|)$



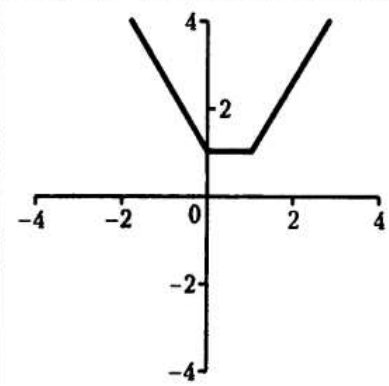
135 $y = 2|x| + |2x-1|$



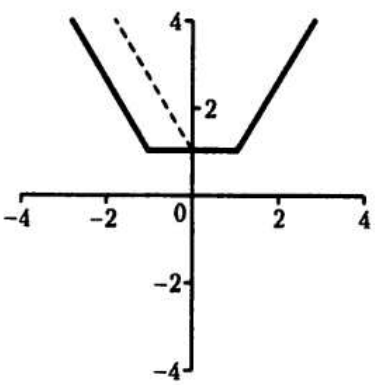
136 $y = -|x| - |x-1|$



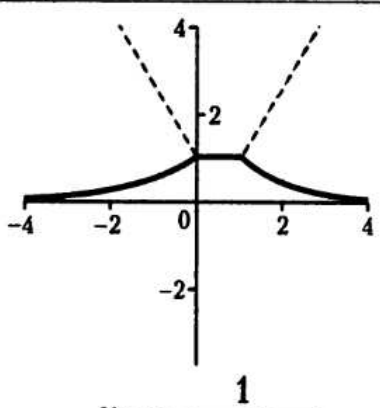
137 $y = |x| + |x+1|$



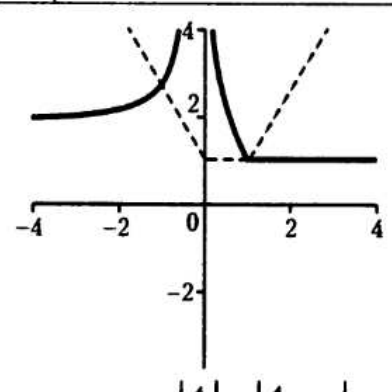
138 $y = \| x | + | x-1 \|$



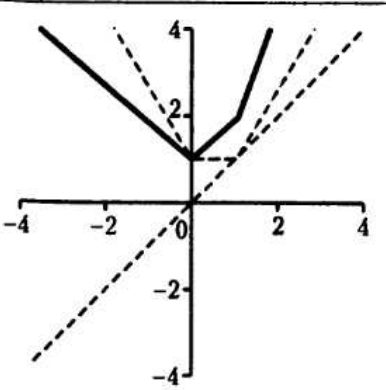
139 $y = |x| + \|x| - 1|$



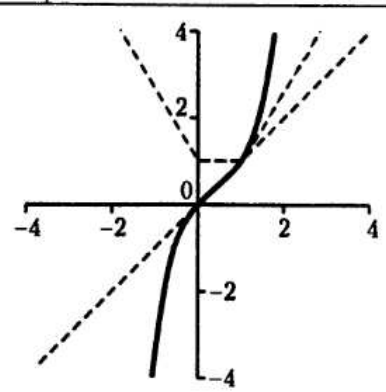
140 $y = \dfrac{1}{|x| + |x-1|}$



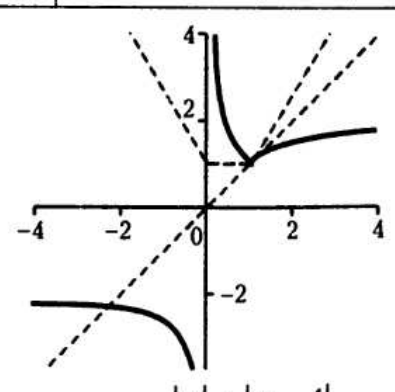
141 $y = \left|\dfrac{1}{x}\right| + \left|\dfrac{1}{x} - 1\right|$



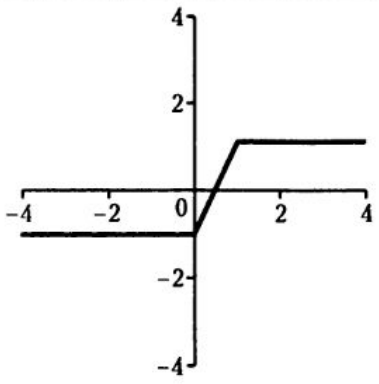
142 $y = |x| + |x-1| + x$



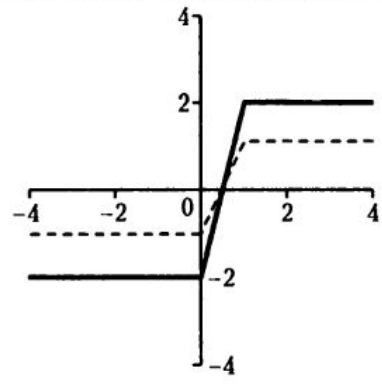
143 $y = x|x| + x|x-1|$



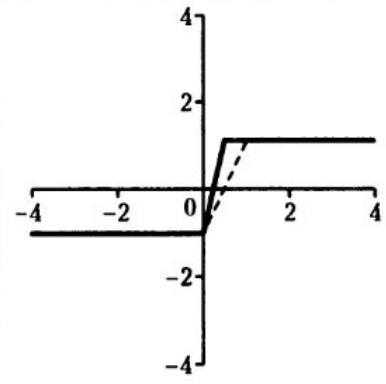
144 $y = \dfrac{|x| + |x-1|}{x}$



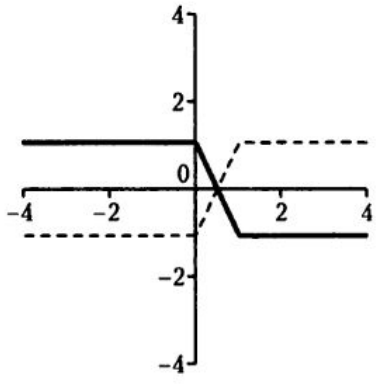
145 $y = |x| - |x-1|$



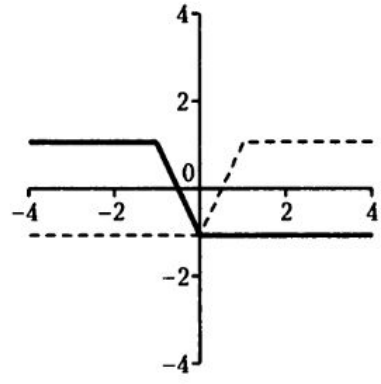
146 $y = 2|x| - 2|x-1|$



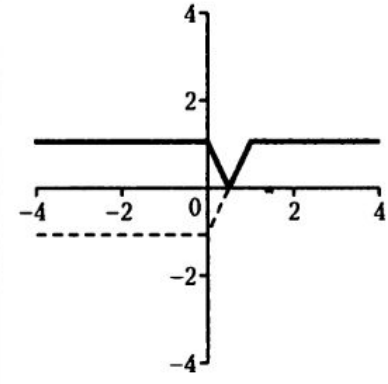
147 $y = 2|x| - |2x-1|$



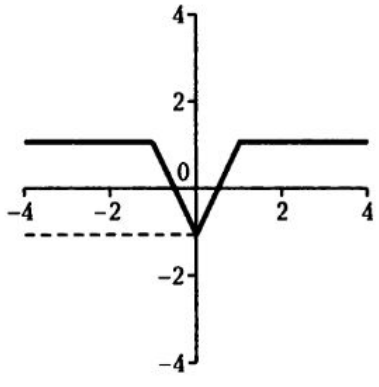
148 $y = -|x| + |x-1|$



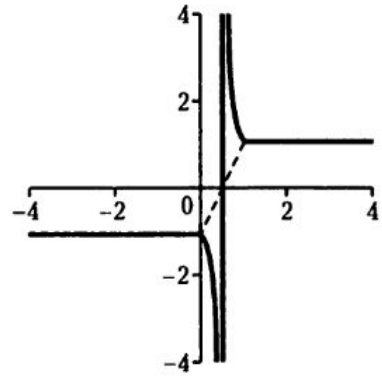
149 $y = |x| - |x+1|$



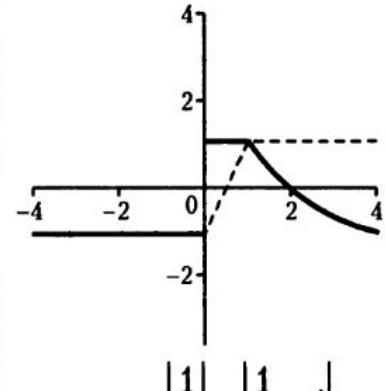
150 $y = \big|\,|x| - |x-1|\,\big|$



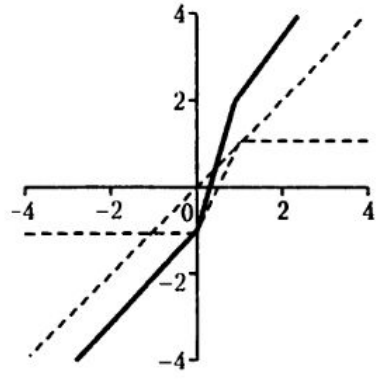
151 $y = |x| - \big||x| - 1\big|$



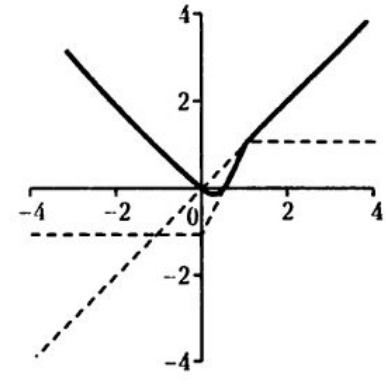
152 $y = 1/\big(|x| - |x-1|\big)$



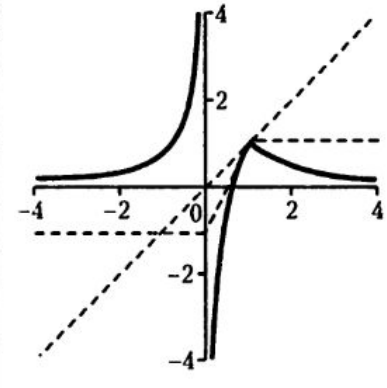
153 $y = \left|\frac{1}{x}\right| - \left|\frac{1}{x} - 1\right|$



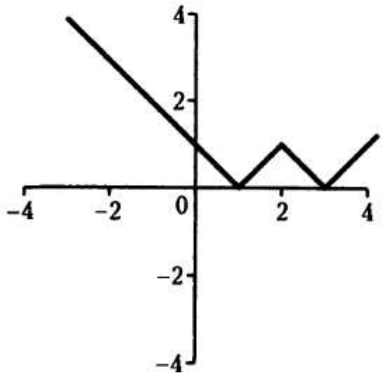
154 $y = |x| - |x-1| + x$



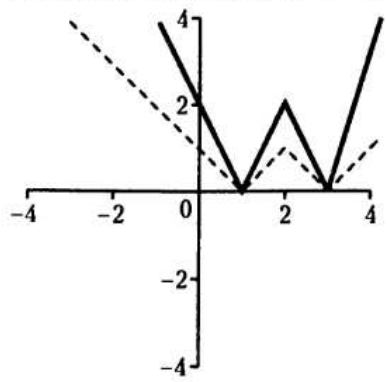
155 $y = x|x| - x|x-1|$



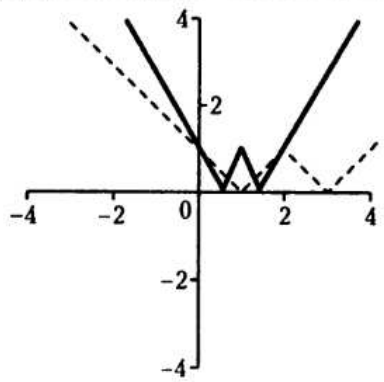
156 $y = \big(|x| - |x-1|\big)/x$



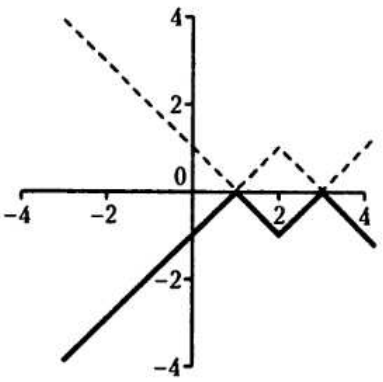
157 $y = \big|\,|x-2|-1\big|$



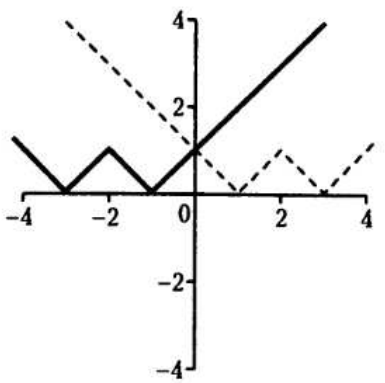
158 $y = 2\big|\,|x-2|-1\big|$



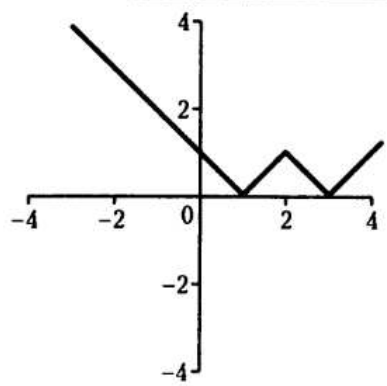
159 $y = \big||2x-2|-1\big|$



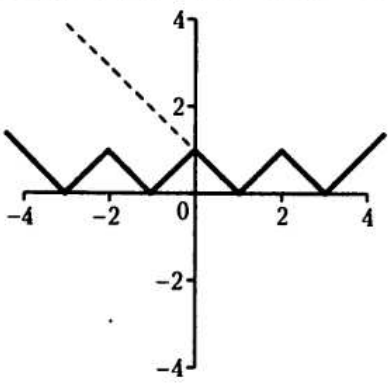
160 $y = -\big|\,|x-2|-1\big|$



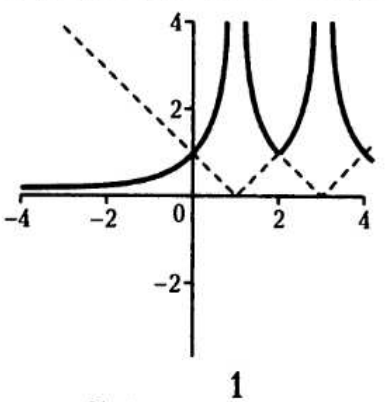
161 $y = \big|\,|-x-2|-1\big|$



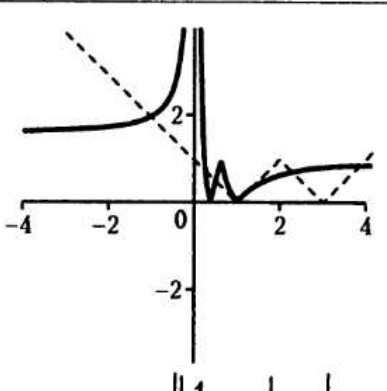
162 $y = \big|\big||x-2|-1\big|\big|$



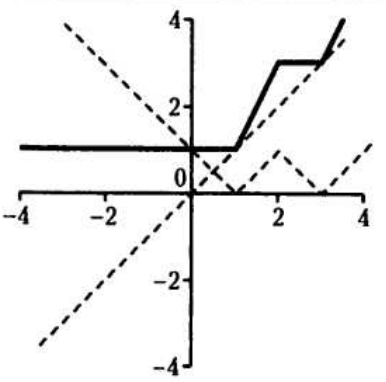
163 $y = \big|\big||x|-2\big|-1\big|$



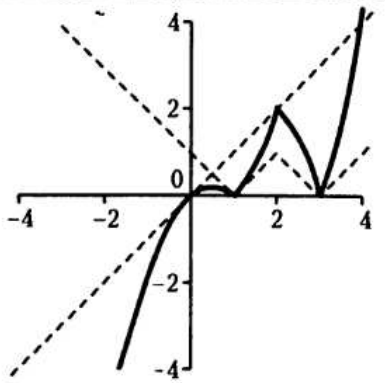
164 $y = \dfrac{1}{\big|\,|x-2|-1\big|}$



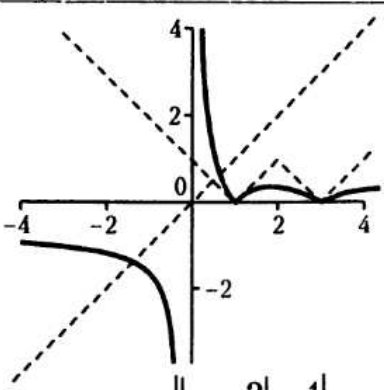
165 $y = \left|\left|\dfrac{1}{x}-2\right|-1\right|$



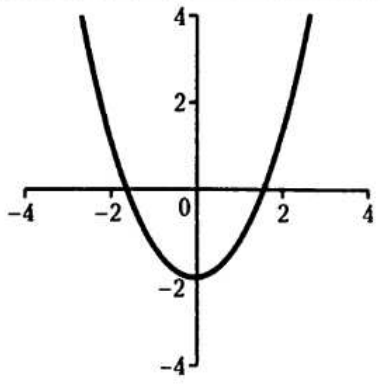
166 $y = \big||x-2|-1\big|+x$



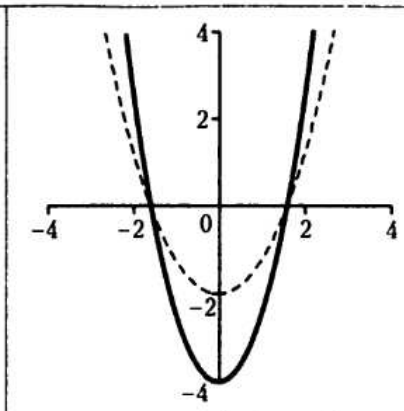
167 $y = x\big||x-2|-1\big|$



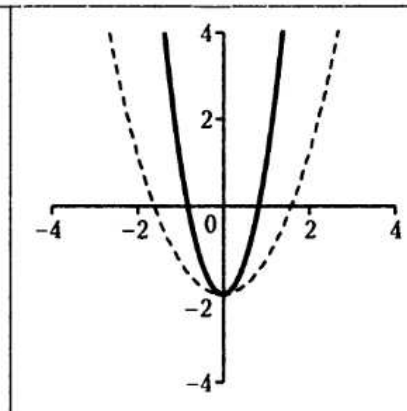
168 $y = \dfrac{\big||x-2|-1\big|}{x}$



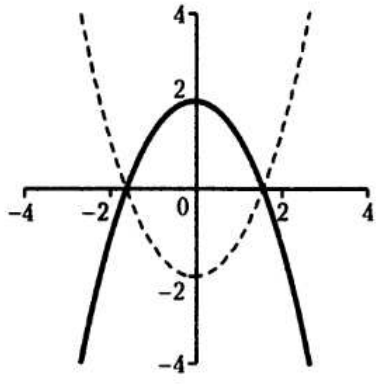
169 $y = x^2 - 2$



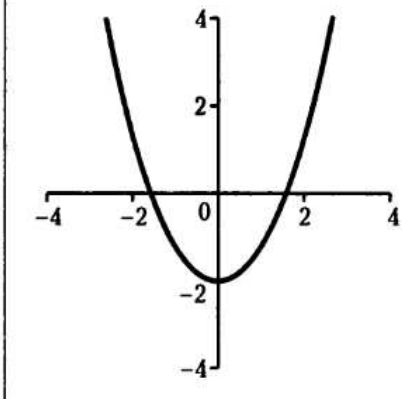
170 $y = 2\left(x^2 - 2\right)$



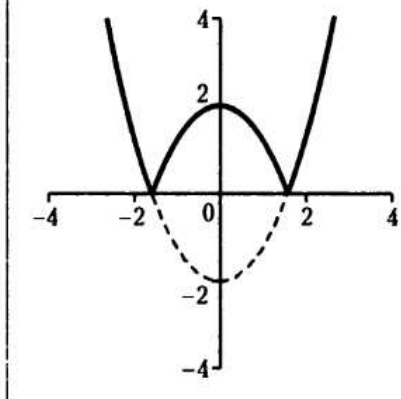
171 $y = 4x^2 - 2$



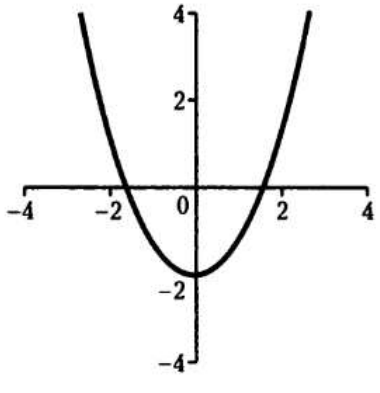
172 $y = -\left(x^2 - 2\right)$



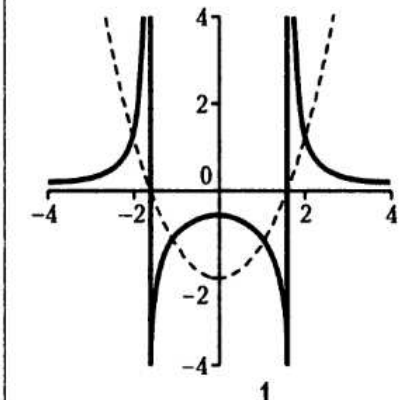
173 $y = (-x)^2 - 2$



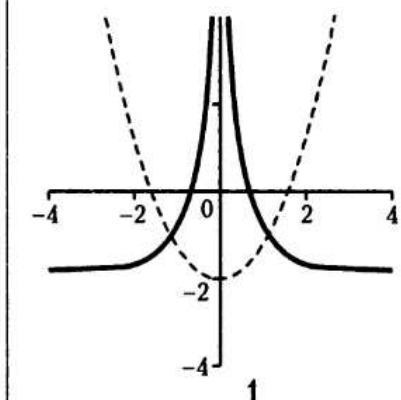
174 $y = \left|x^2 - 2\right|$



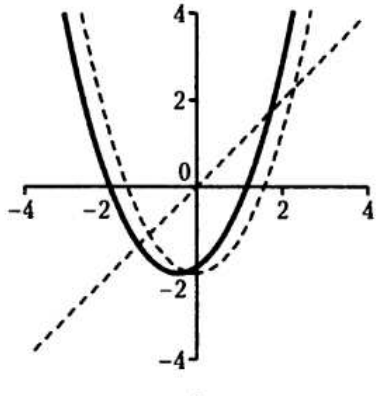
175 $y = |x|^2 - 2$



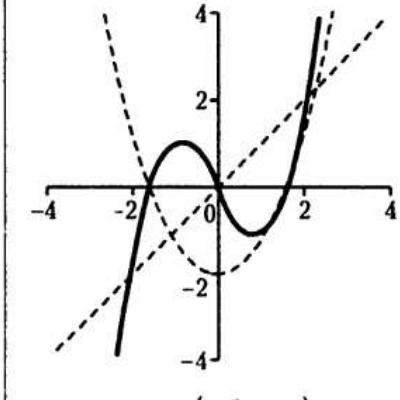
176 $y = \dfrac{1}{x^2 - 2}$



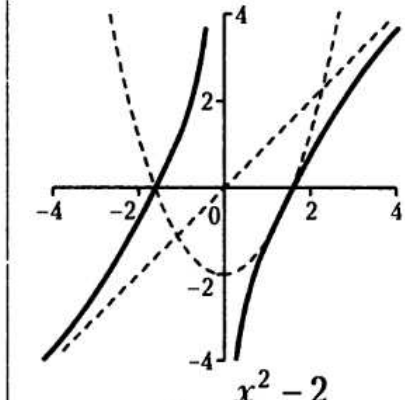
177 $y = \dfrac{1}{x^2} - 2$



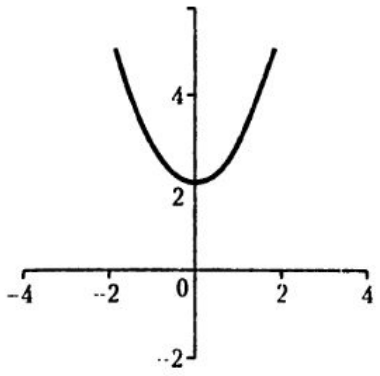
178 $y = x^2 + x - 2$



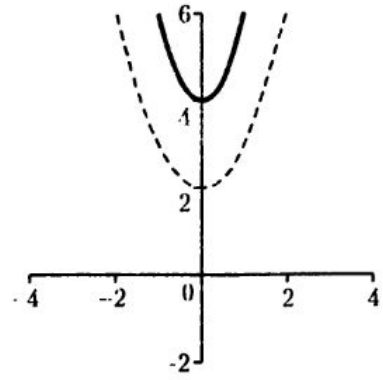
179 $y = \left(x^2 - 2\right)x$



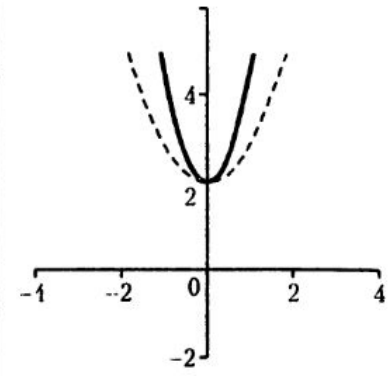
180 $y = \dfrac{x^2 - 2}{x}$



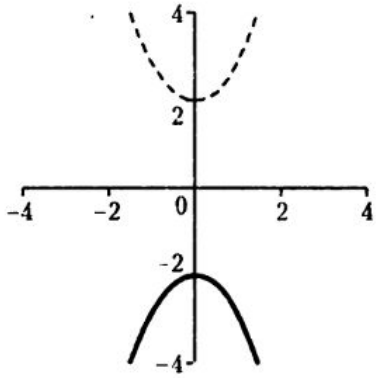
181 $y = x^2 + 2$



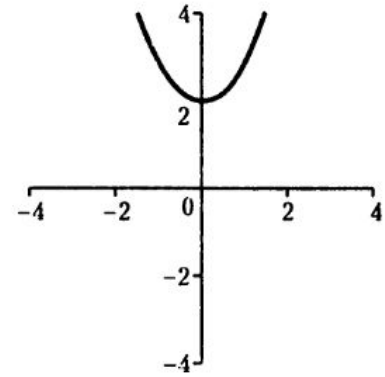
182 $y = 2\left(x^2 + 2\right)$



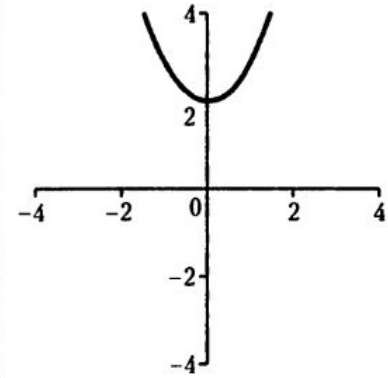
183 $y = 4x^2 + 2$



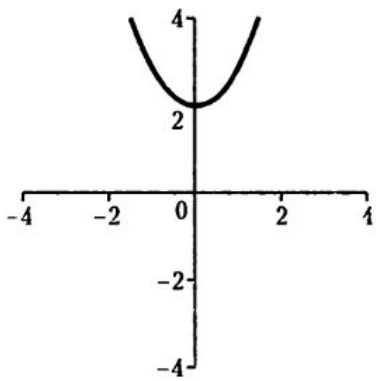
184 $y = -\left(x^2 + 2\right)$



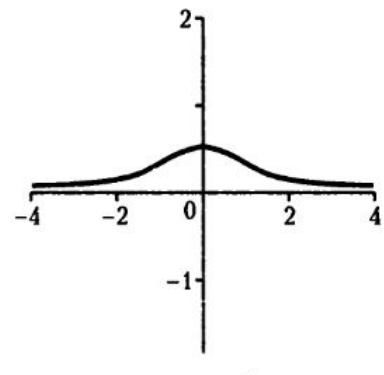
185 $y = \left(-x\right)^2 + 2$



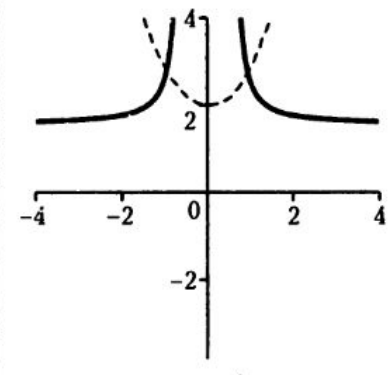
186 $y = \left|x^2 + 2\right|$



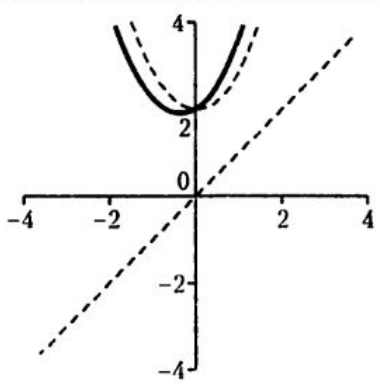
187 $y = \left|x\right|^2 + 2$



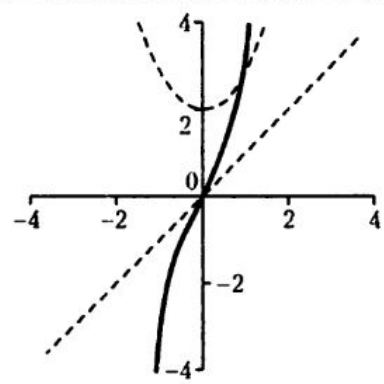
188 $y = \dfrac{1}{x^2 + 2}$



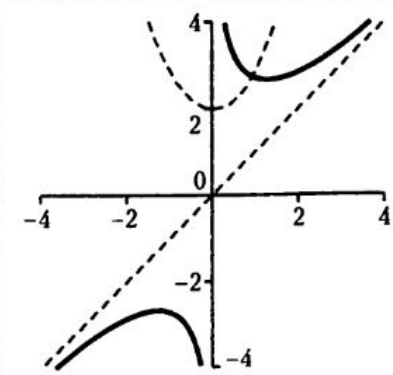
189 $y = \dfrac{1}{x^2} + 2$



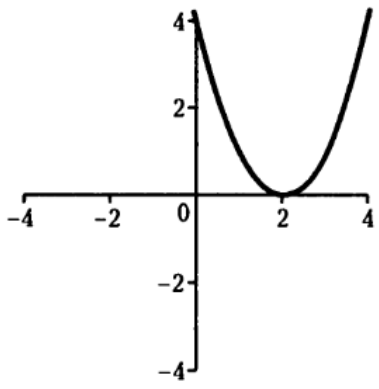
190 $y = x^2 + x + 2$



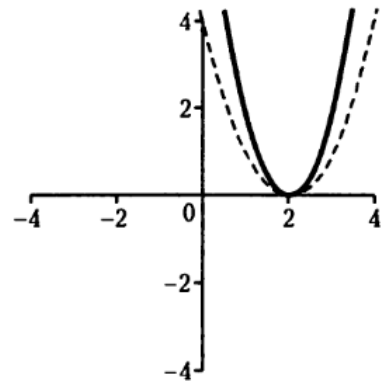
191 $y = \left(x^2 + 2\right)x$



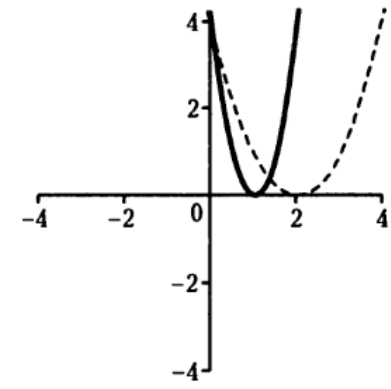
192 $y = \dfrac{x^2 + 2}{x}$



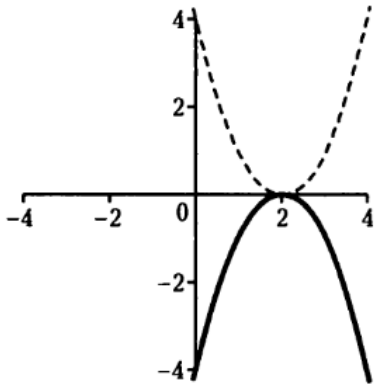
193 $y=(x-2)^2$



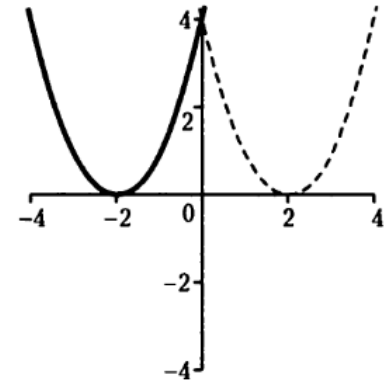
194 $y=2(x-2)^2$



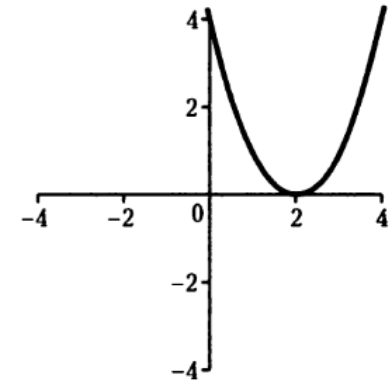
195 $y=(2x-2)^2$



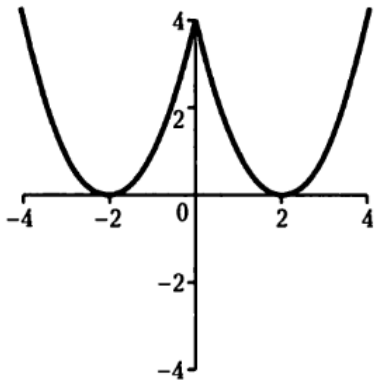
196 $y=-(x-2)^2$



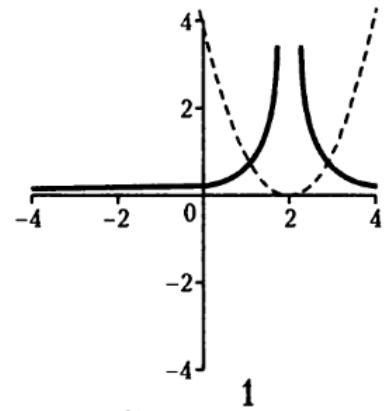
197 $y=(-x-2)^2$



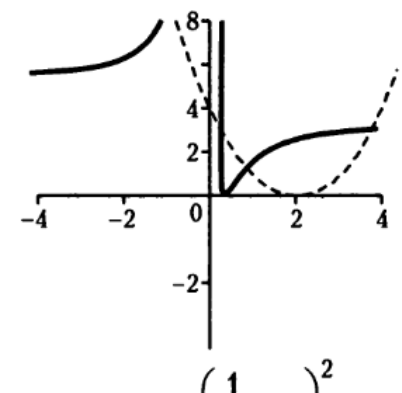
198 $y=\left|(x-2)^2\right|$



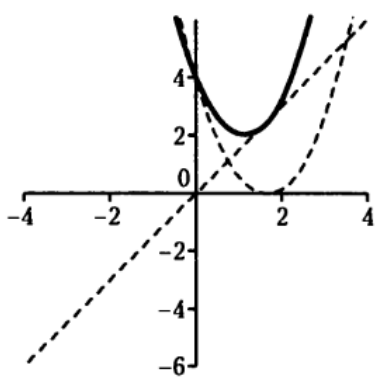
199 $y=(|x|-2)^2$



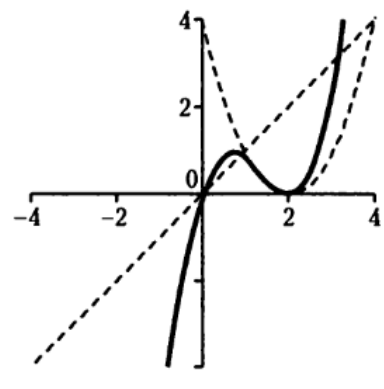
200 $y=\dfrac{1}{(x-2)^2}$



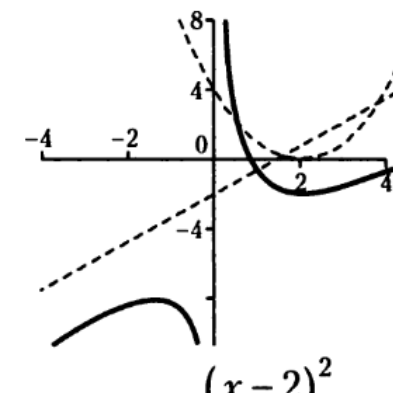
201 $y=\left(\dfrac{1}{x}-2\right)^2$



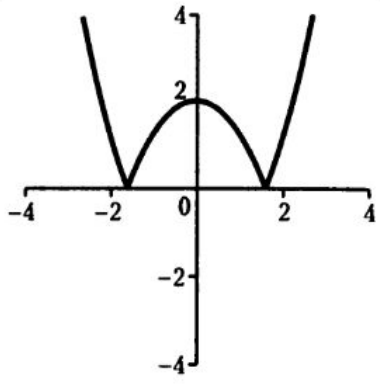
202 $y=(x-2)^2+x$



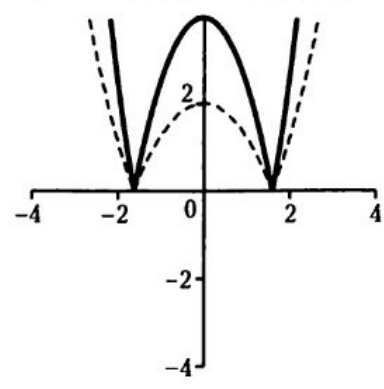
203 $y=(x-2)^2 x$



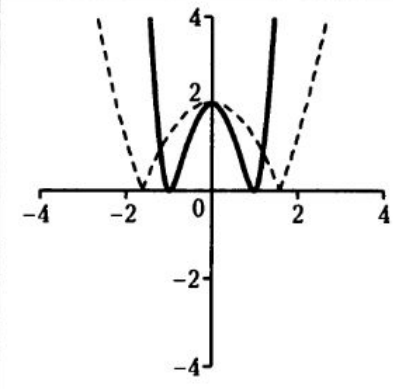
204 $y=\dfrac{(x-2)^2}{x}$



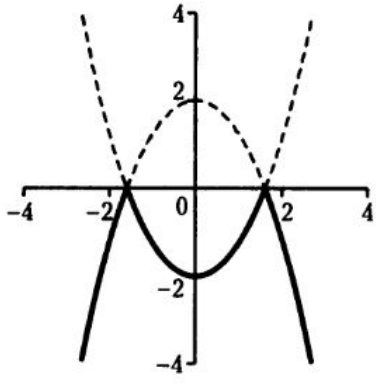
205 $y = |x^2 - 2|$



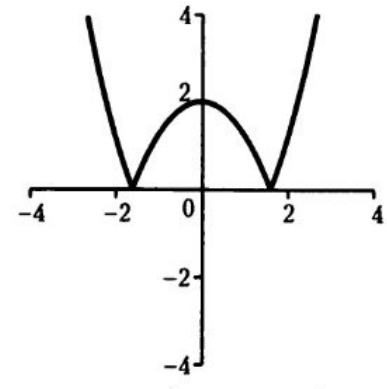
206 $y = 2|x^2 - 2|$



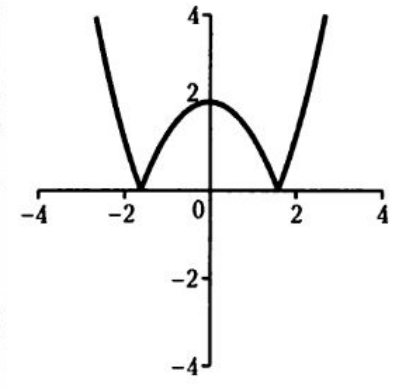
207 $y = |4x^2 - 2|$



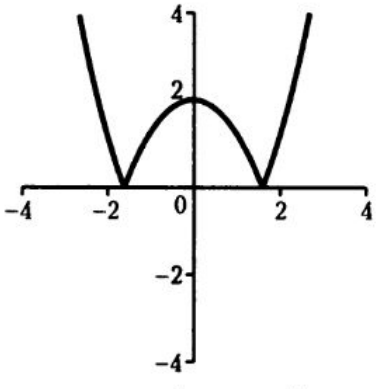
208 $y = -|x^2 - 2|$



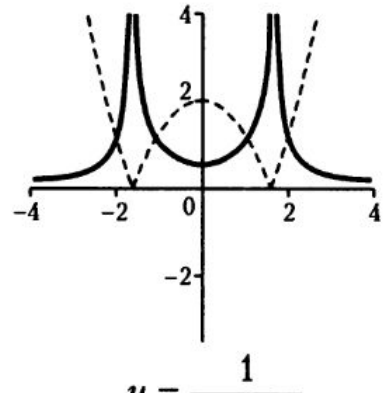
209 $y = |(-x)^2 - 2|$



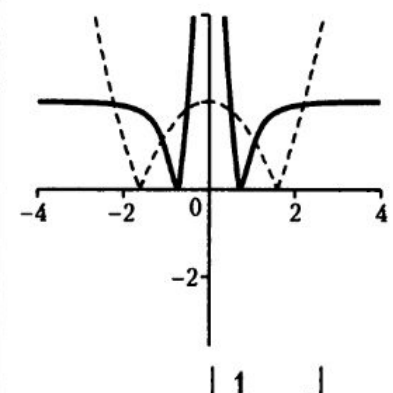
210 $y = ||x^2 - 2||$



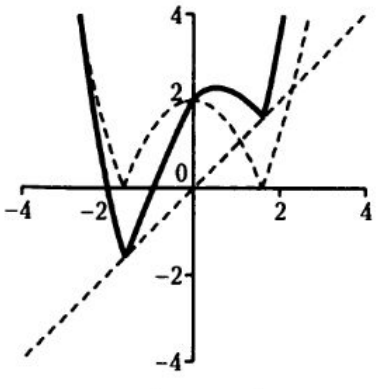
211 $y = ||x|^2 - 2|$



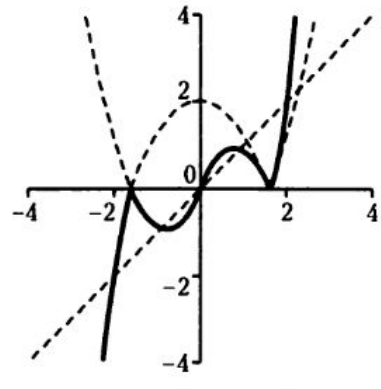
212 $y = \dfrac{1}{|x^2 - 2|}$



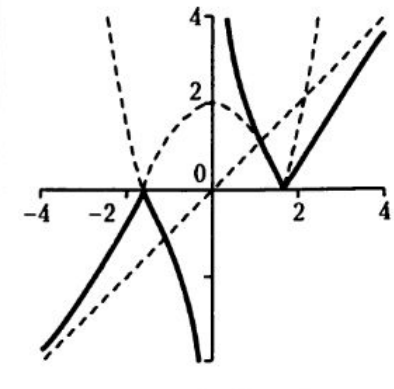
213 $y = \left|\dfrac{1}{x^2} - 2\right|$



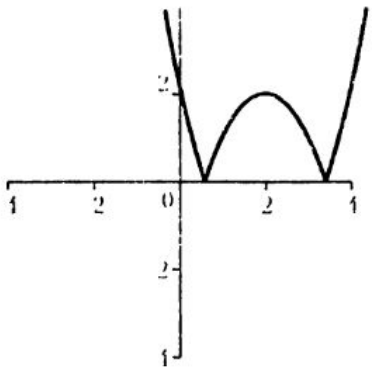
214 $y = |x^2 - 2| + x$



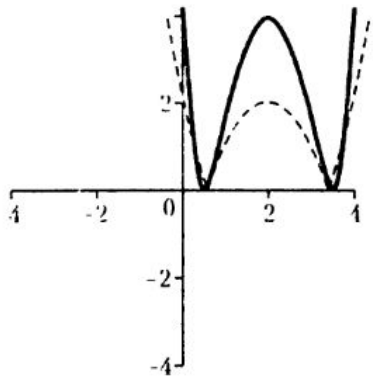
215 $y = |x^2 - 2|x$



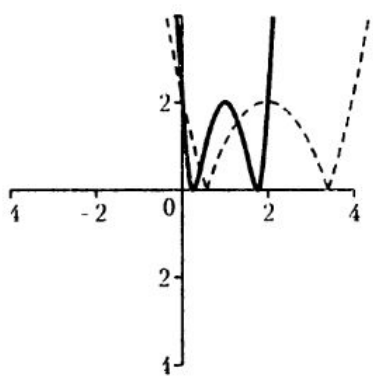
216 $y = |x^2 - 2| / x$



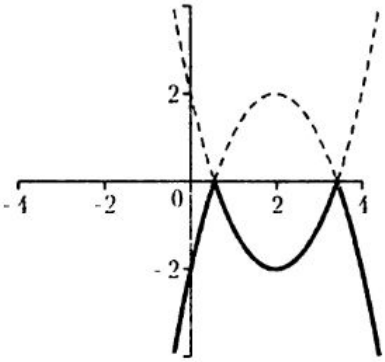
217 $y = \left|(x-2)^2 - 2\right|$



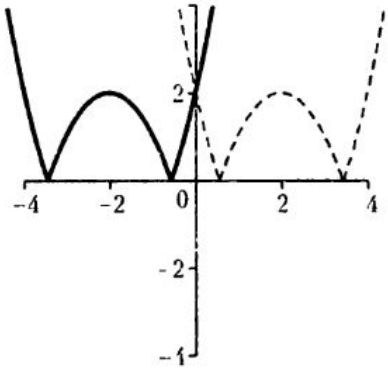
218 $y = 2\left|(x-2)^2 - 2\right|$



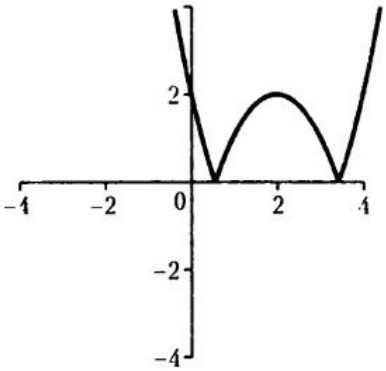
219 $y = \left|(2x-2)^2 - 2\right|$



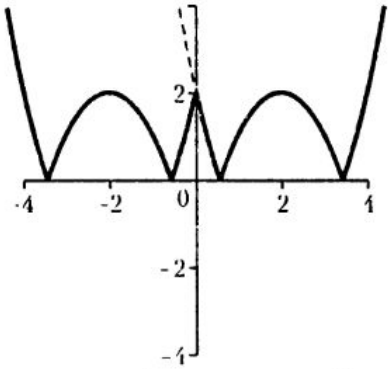
220 $y = -\left|(x-2)^2 - 2\right|$



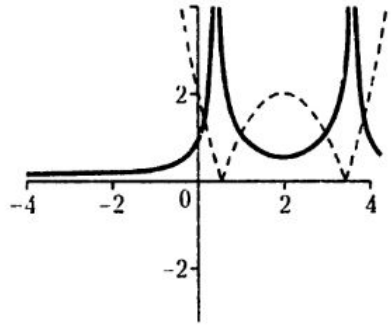
221 $y = \left|(x+2)^2 - 2\right|$



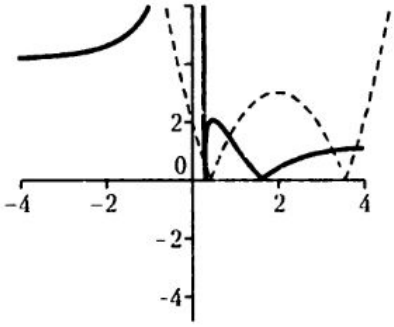
222 $y = \left|\left|(x-2)^2 - 2\right|\right|$



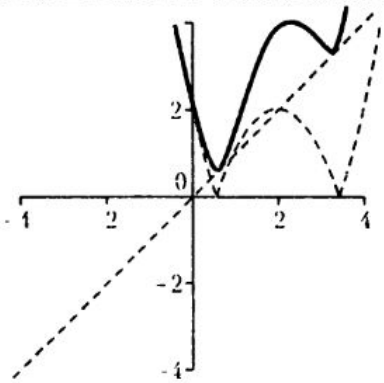
223 $y = \left|(|x|-2)^2 - 2\right|$



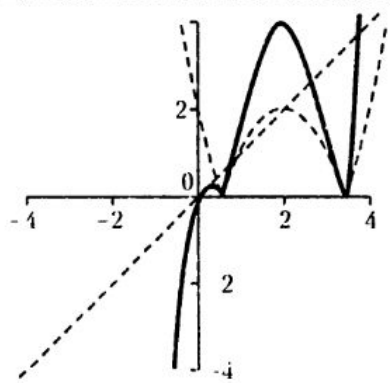
224 $y = \dfrac{1}{\left|(x-2)^2 - 2\right|}$



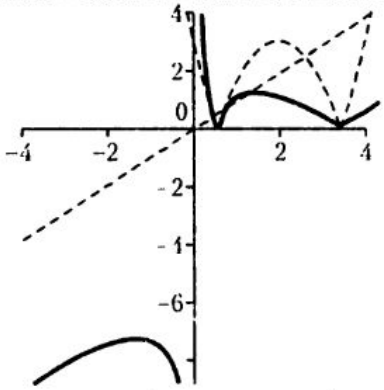
225 $y = \left|\left(\dfrac{1}{x} - 2\right)^2 - 2\right|$



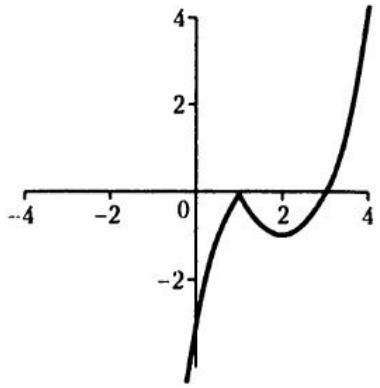
226 $y = \left|(x-2)^2 - 2\right| + x$



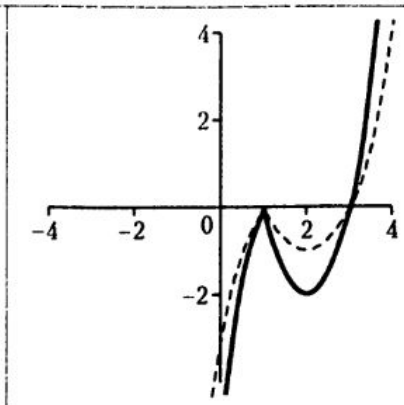
227 $y = \left|(x-2)^2 - 2\right| x$



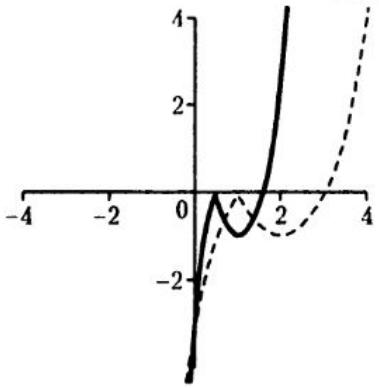
228 $y = \left|(x-2)^2 - 2\right| / x$



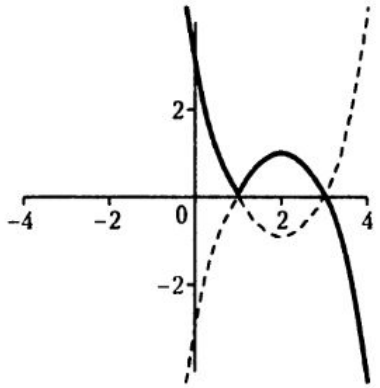
229 $y = |x-1|(x-3)$



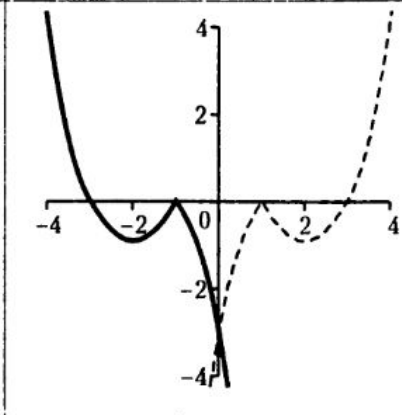
230 $y = 2|x-1|(x-3)$



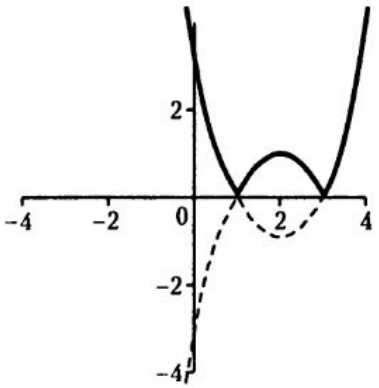
231 $y = |2x-1|(2x-3)$



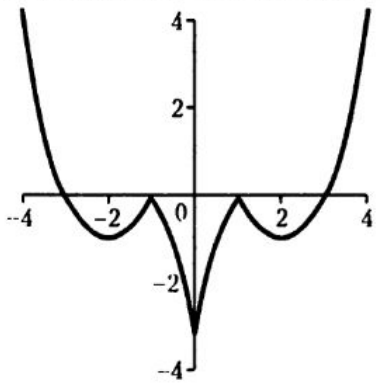
232 $y = -|x-1|(x-3)$



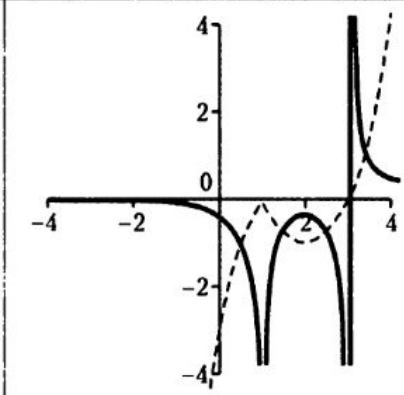
233 $y = -|x+1|(x+3)$



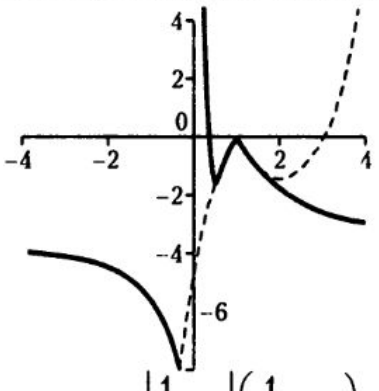
234 $y = |(x-1)(x-3)|$



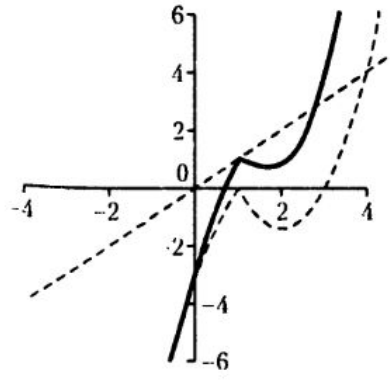
235 $y = ||x|-1|(|x|-3)$



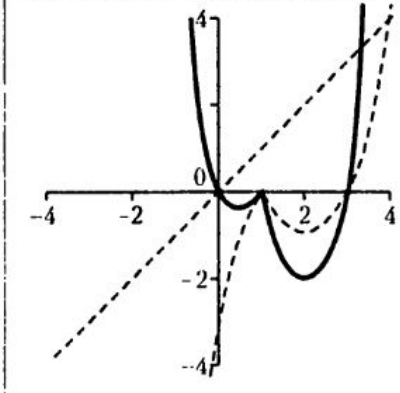
236 $y = 1/(|x-1|(x-3))$



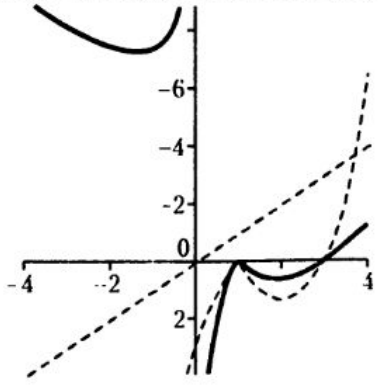
237 $y = \left|\frac{1}{x}-1\right|\left(\frac{1}{x}-3\right)$



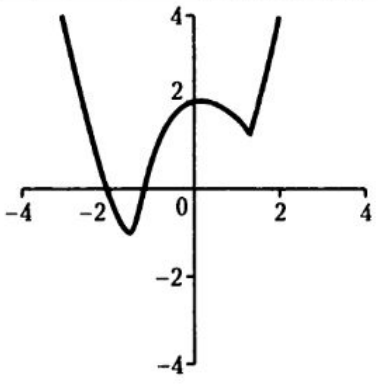
238 $y = |x-1|(x-3)+x$



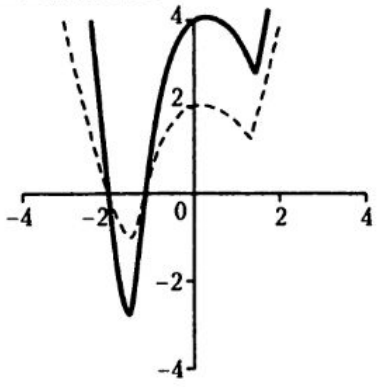
239 $y = |x-1|(x-3)x$



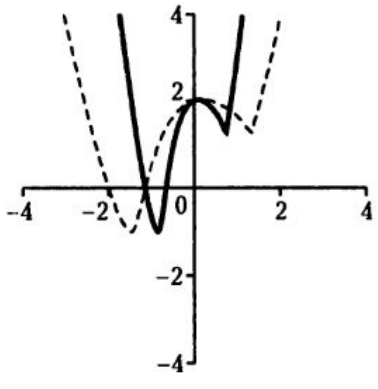
240 $y = |x-1|(x-3)/x$



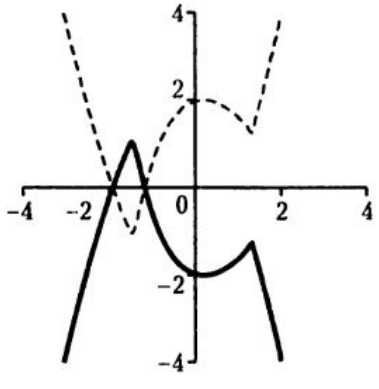
241 $y = |x^2 - 2| + x$



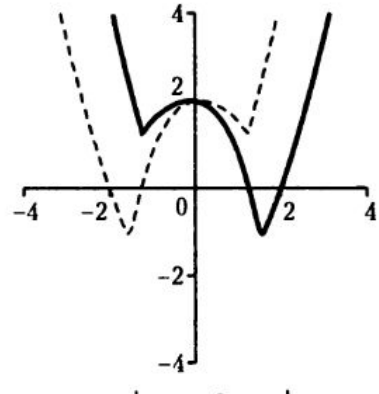
242 $y = 2|x^2 - 2| + 2x$



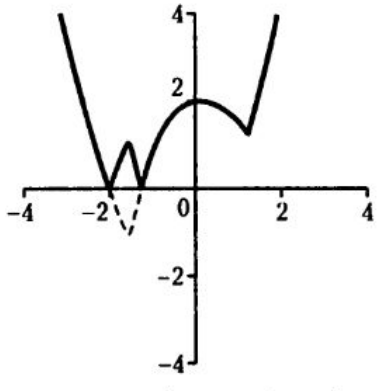
243 $y = |4x^2 - 2| + 2x$



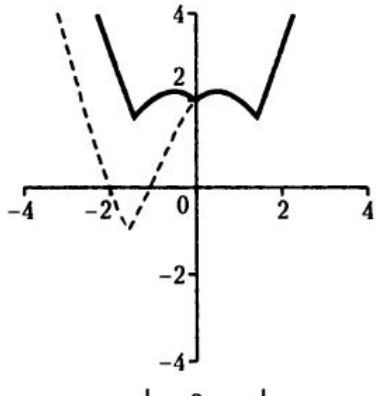
244 $y = -|x^2 - 2| - x$



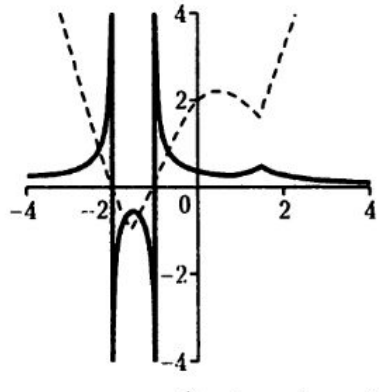
245 $y = |(-x)^2 - 2| - x$



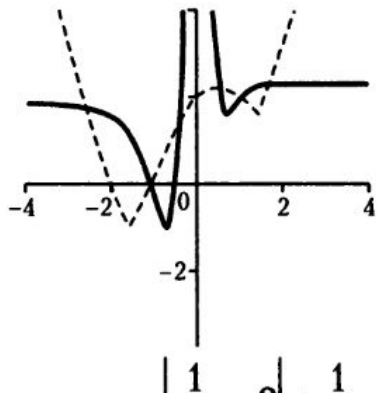
246 $y = ||x^2 - 2| + x|$



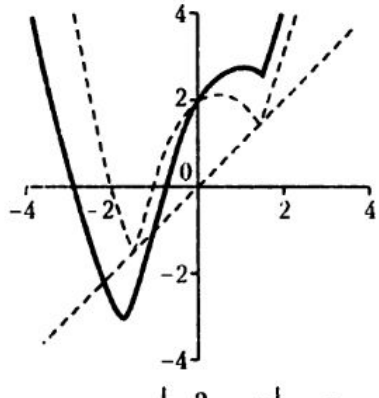
247 $y = ||x|^2 - 2| + |x|$



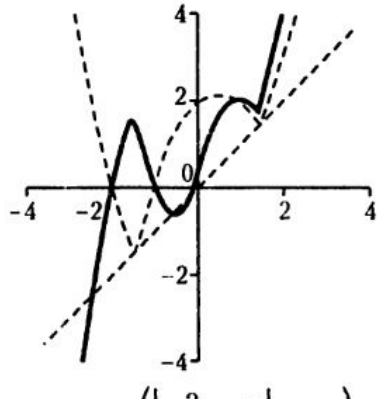
248 $y = 1/(|x^2 - 2| + x)$



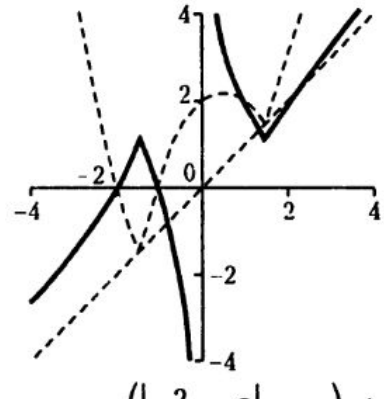
249 $y = \left|\frac{1}{x^2} - 2\right| + \frac{1}{x}$



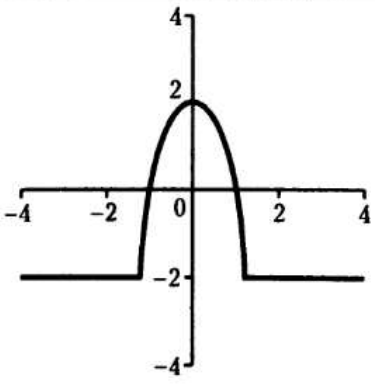
250 $y = |x^2 - 2| + 2x$



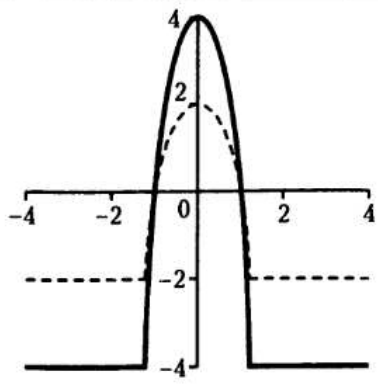
251 $y = (|x^2 - 2| + x)x$



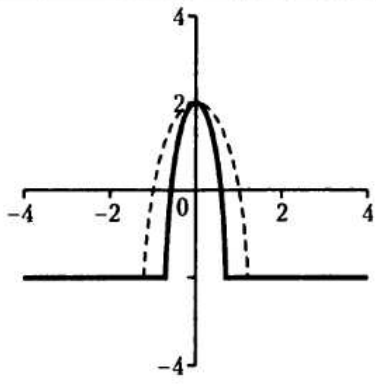
252 $y = (|x^2 - 2| + x)/x$



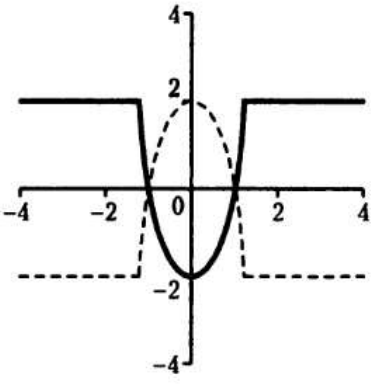
253 $y = \left|x^2 - 2\right| - x^2$



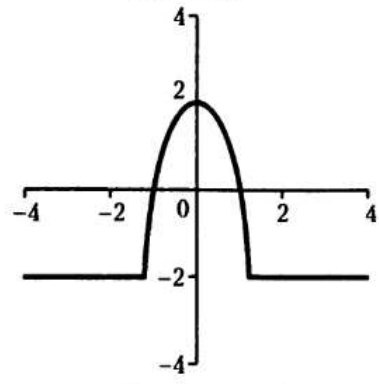
254 $y = 2\left|x^2 - 2\right| - 2x^2$



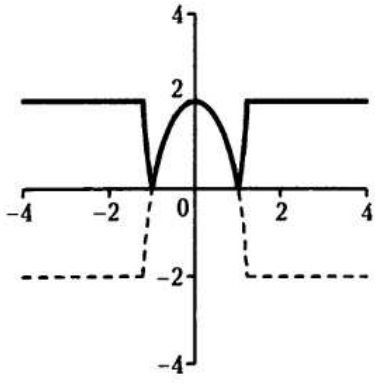
255 $y = \left|4x^2 - 2\right| - 4x^2$



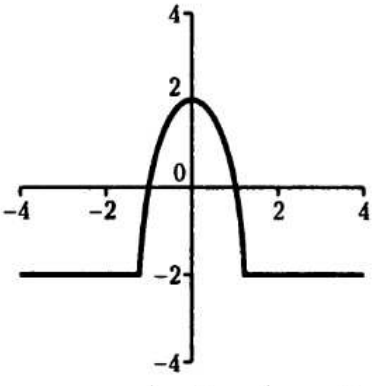
256 $y = -\left|x^2 - 2\right| + x^2$



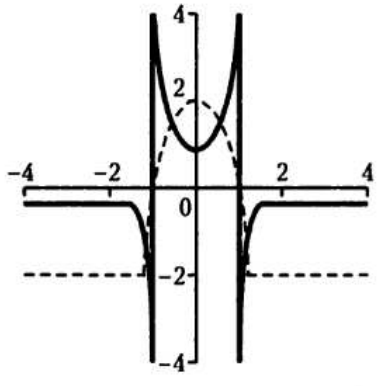
257 $y = \left|(-x)^2 - 2\right| - x^2$



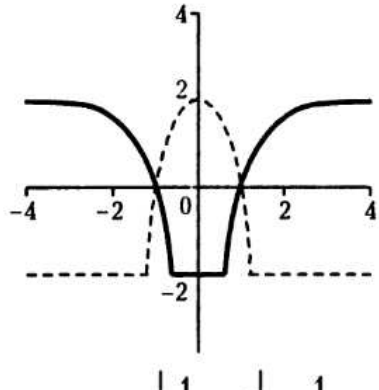
258 $y = \left|\left|x^2 - 2\right| - x^2\right|$



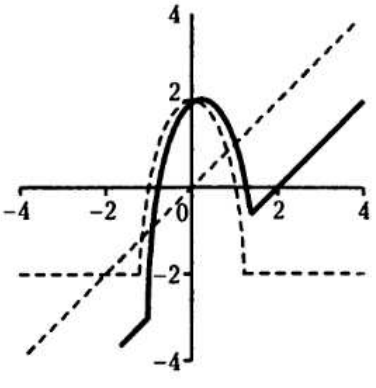
259 $y = \left|\left|x\right|^2 - 2\right| - \left|x\right|^2$



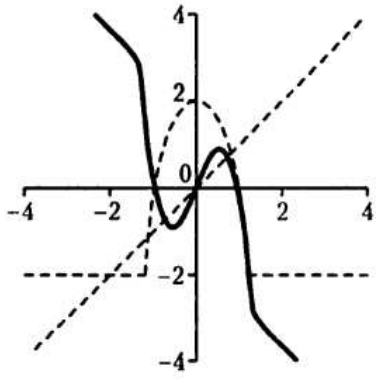
260 $y = 1/\left(\left|x^2 - 2\right| - x^2\right)$



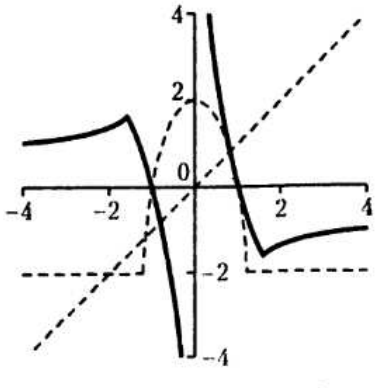
261 $y = \left|\frac{1}{x^2} - 2\right| - \frac{1}{x^2}$



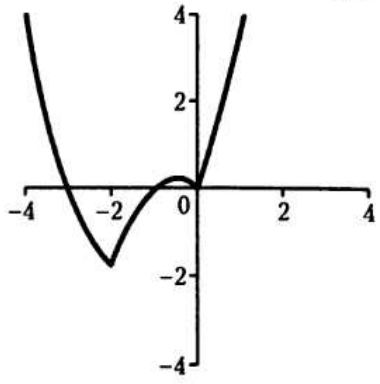
262 $y = \left|x^2 - 2\right| - x^2 + x$



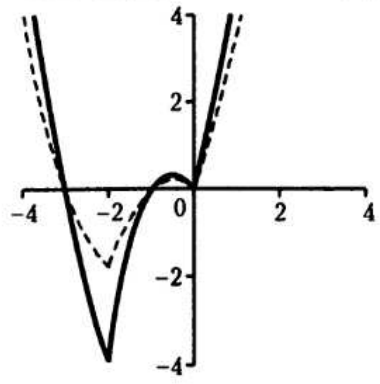
263 $y = \left(\left|x^2 - 2\right| - x^2\right)x$



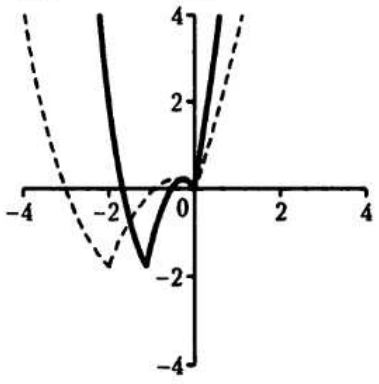
264 $y = \left(\left|x^2 - 2\right| - x^2\right)/x$



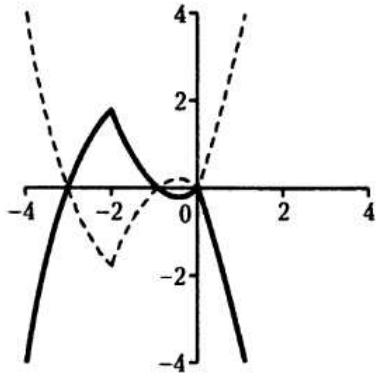
265 $y = |x^2 + 2x| + x$



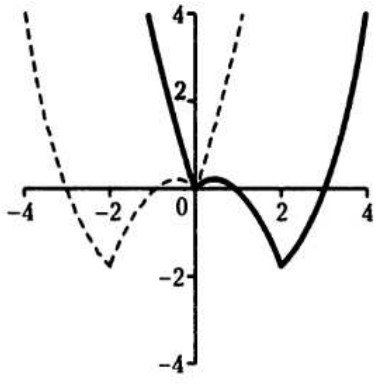
266 $y = 2|x^2 + 2x| + 2x$



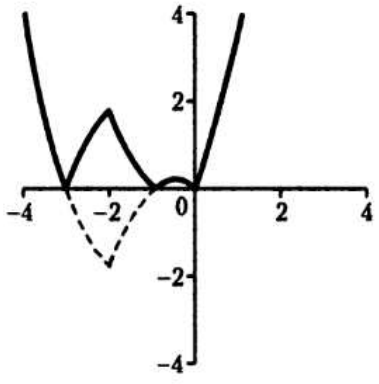
267 $y = |4x^2 + 4x| + 2x$



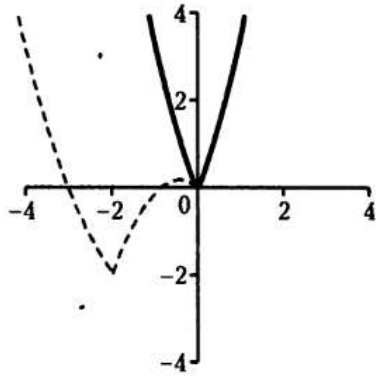
268 $y = -|x^2 + 2x| - x$



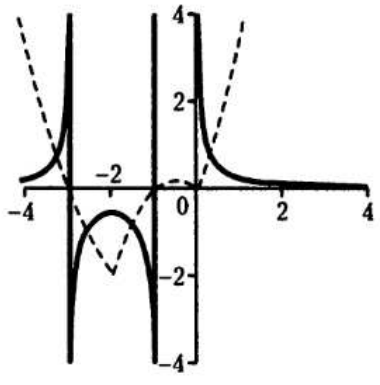
269 $y = |x^2 - 2x| - x$



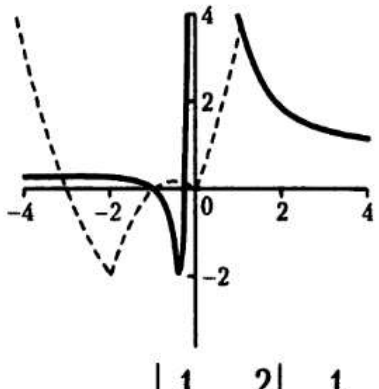
270 $y = ||x^2 + 2x| + x|$



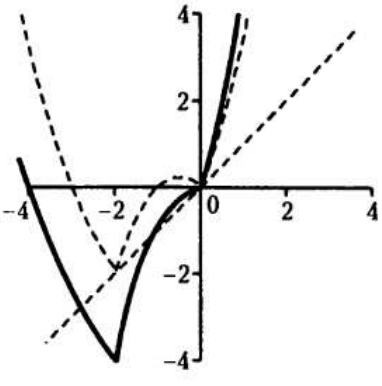
271 $y = |x^2 + 2|x|| + |x|$



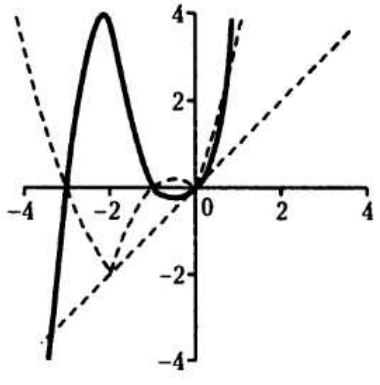
272 $y = 1/(|x^2 + 2x| + x)$



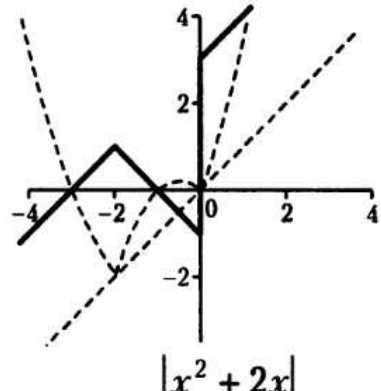
273 $y = \left|\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}\right| + \frac{1}{x}$



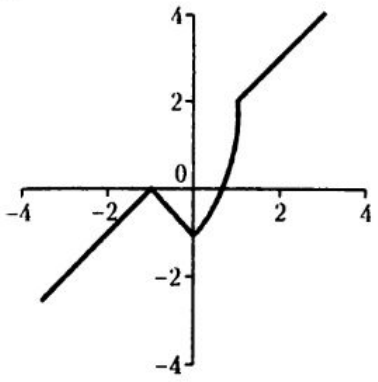
274 $y = |x^2 + 2x| + 2x$



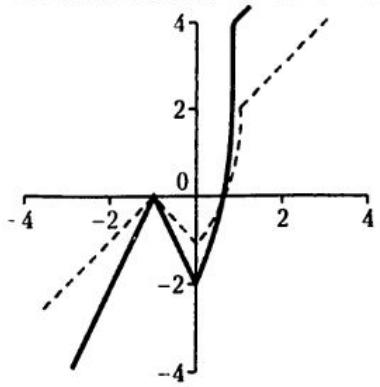
275 $y = (|x^2 + 2x| + x)x$



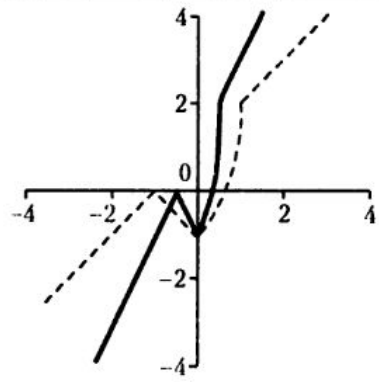
276 $y = \frac{|x^2 + 2x|}{x} + 1$



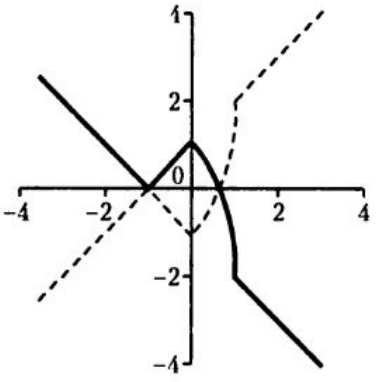
277 $y = |x^2 + x| - |x^2 - 1|$



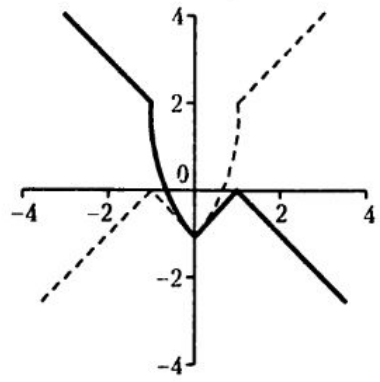
278 $y = 2|x^2 + x| - 2|x^2 - 1|$



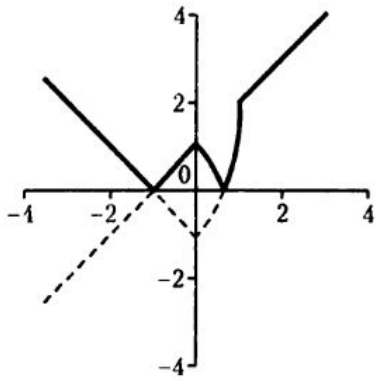
279 $y = |4x^2 + 2x| - |4x^2 - 1|$



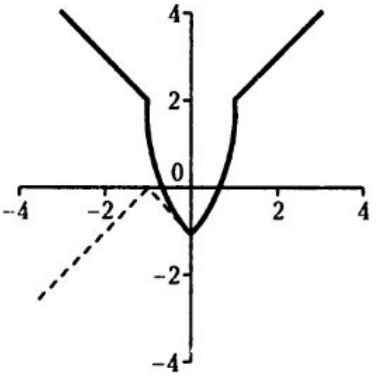
280 $y = -|x^2 + x| + |x^2 - 1|$



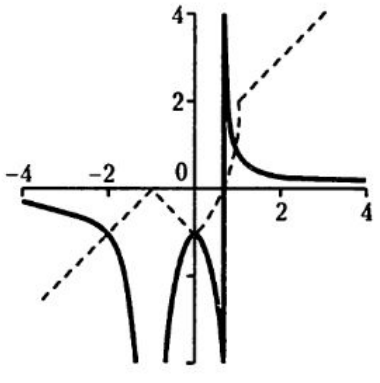
281 $y = |x^2 - x| - |x^2 - 1|$



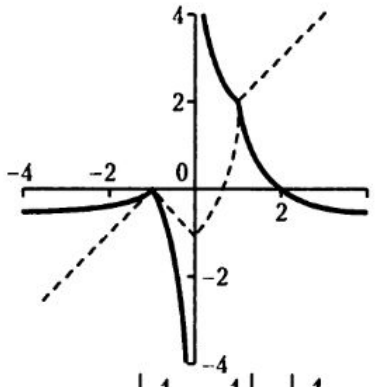
282 $y = \big||x^2 + x| - |x^2 - 1|\big|$



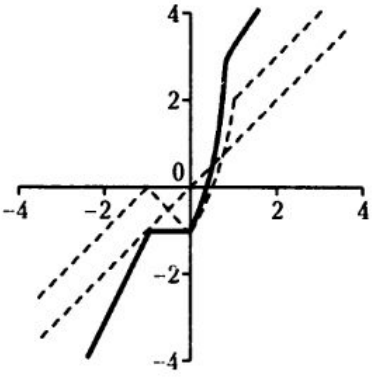
283 $y = |x^2 + |x|| - |x^2 - 1|$



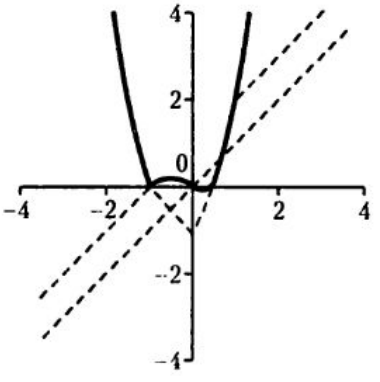
284 $y = \big(|x^2 + x| - |x^2 - 1|\big)^{-1}$



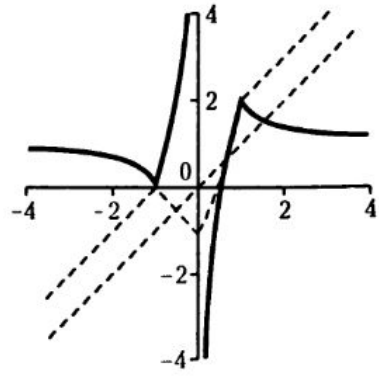
285 $y = \left|\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right| - \left|\frac{1}{x^2} - 1\right|$



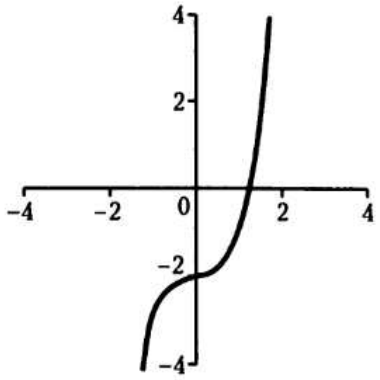
286 $y = |x^2 + x| - |x^2 - 1| + x$



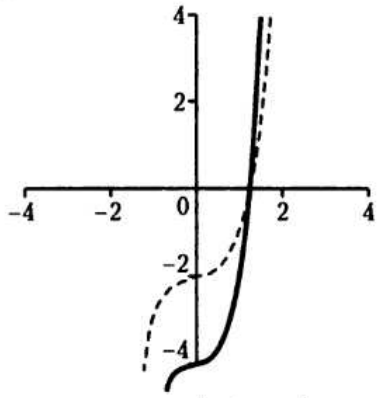
287 $y = x|x^2 + x| - x|x^2 - 1|$



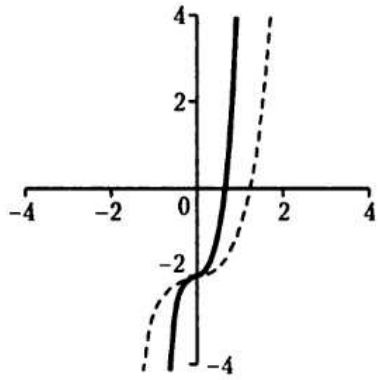
288 $y = \big(|x^2 + x| - |x^2 - 1|\big) / x$



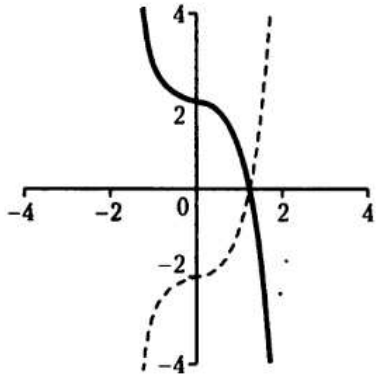
289 $y = x^3 - 2$



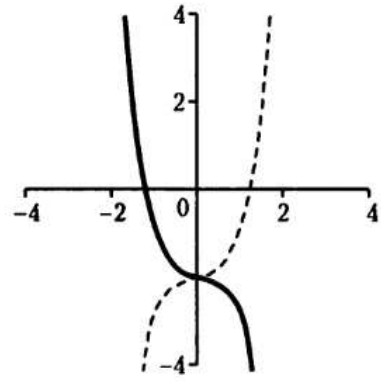
290 $y = 2\left(x^3 - 2\right)$



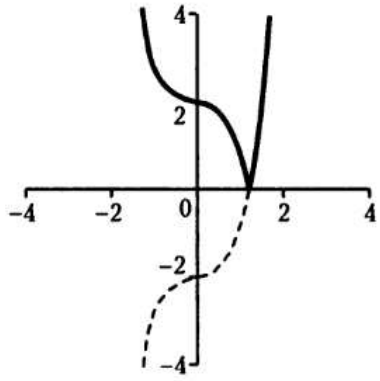
291 $y = 8x^3 - 2$



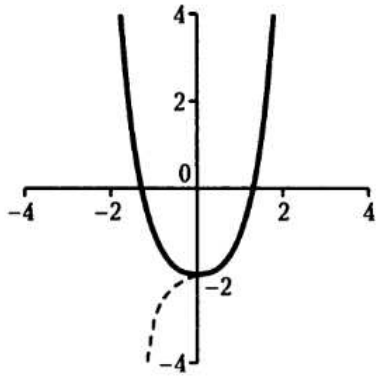
292 $y = -\left(x^3 - 2\right)$



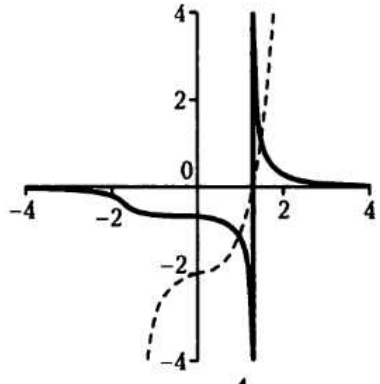
293 $y = -x^3 - 2$



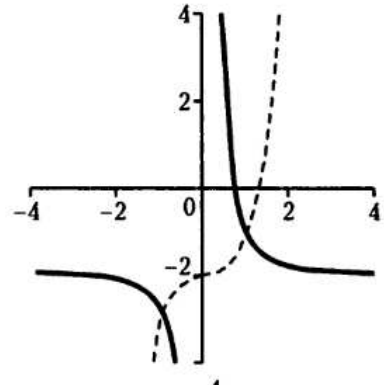
294 $y = \left|x^3 - 2\right|$



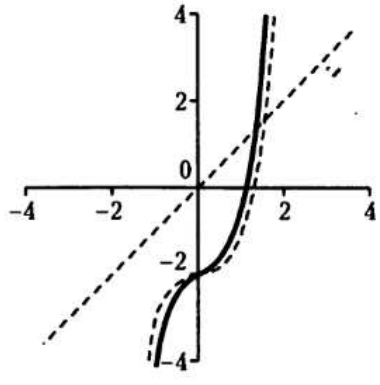
295 $y = |x|^3 - 2$



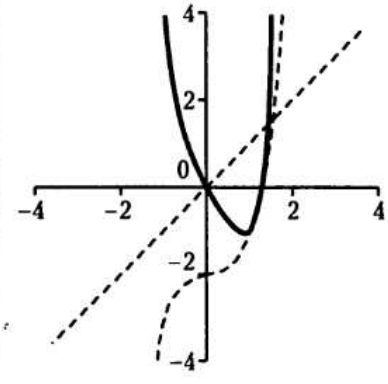
296 $y = \dfrac{1}{x^3 - 2}$



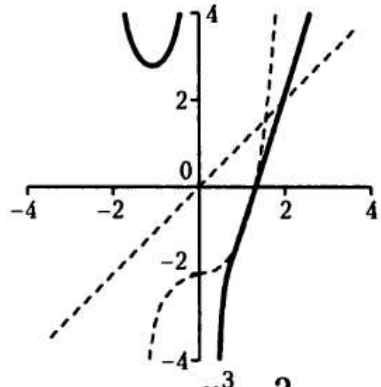
297 $y = \dfrac{1}{x^3} - 2$



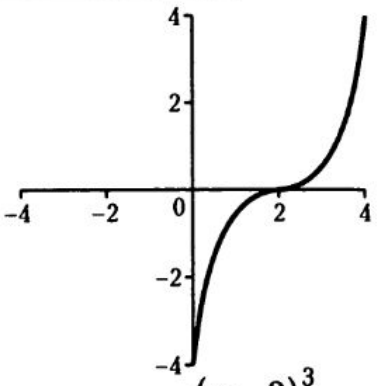
298 $y = x^3 + x - 2$



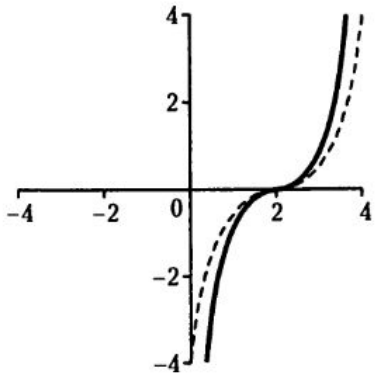
299 $y = \left(x^3 - 2\right)x$



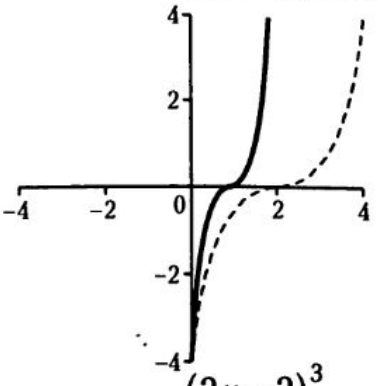
300 $y = \dfrac{x^3 - 2}{x}$



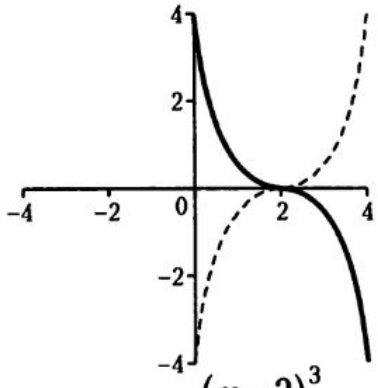
301 $y = \dfrac{(x-2)^3}{2}$



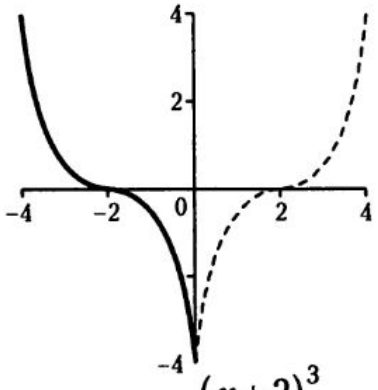
302 $y = (x-2)^3$



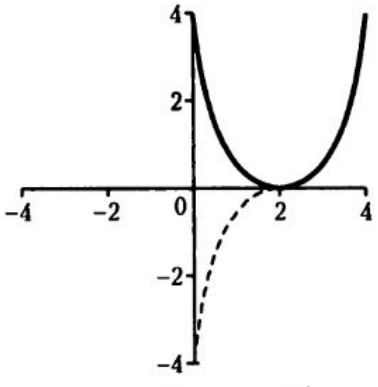
303 $y = \dfrac{(2x-2)^3}{2}$



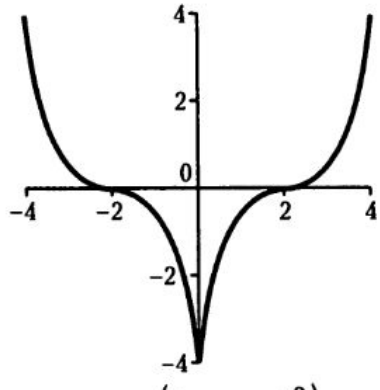
304 $y = -\dfrac{(x-2)^3}{2}$



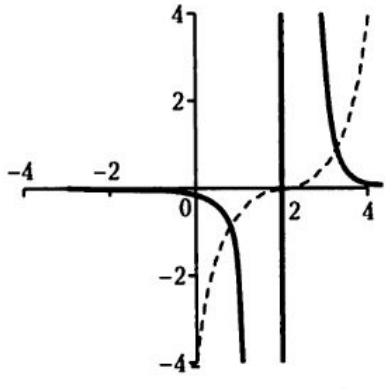
305 $y = -\dfrac{(x+2)^3}{2}$



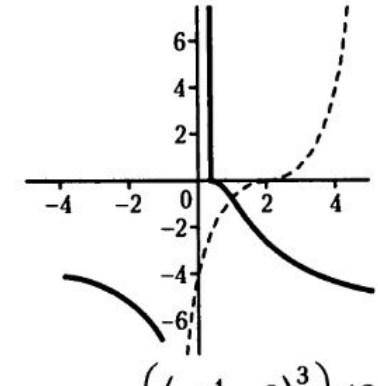
306 $y = \left(\left|(x-2)^3\right|\right)/2$



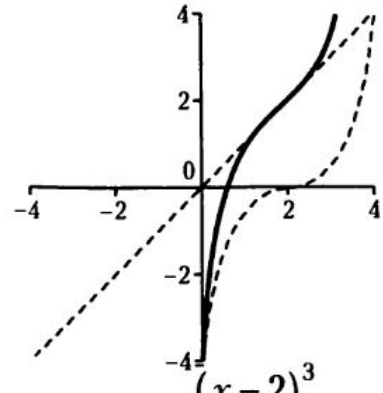
307 $y = \left(\left(|x|-2\right)^3\right)/2$



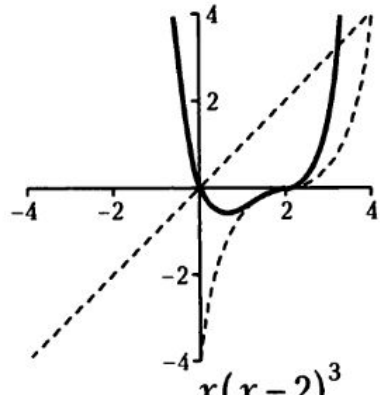
308 $y = 2/\left((x-2)^3\right)$



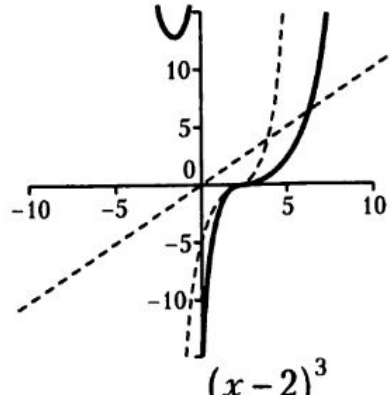
309 $y = \left(\left(x^{-1}-2\right)^3\right)/2$



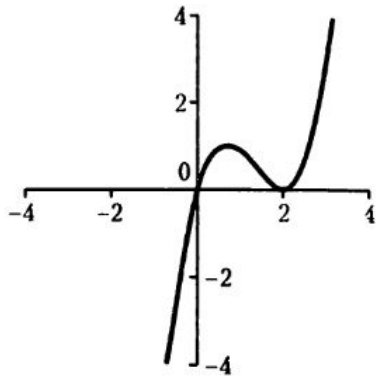
310 $y = \dfrac{(x-2)^3}{2} + x$



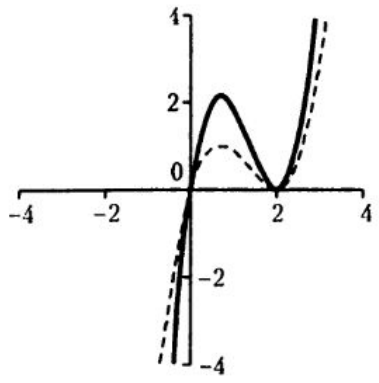
311 $y = \dfrac{x(x-2)^3}{2}$



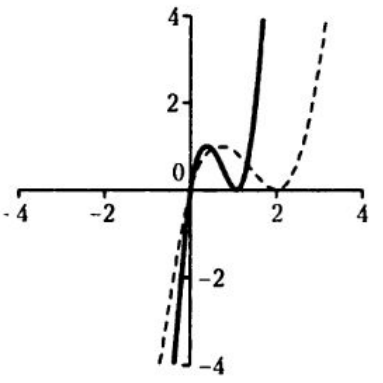
312 $y = \dfrac{(x-2)^3}{2x}$



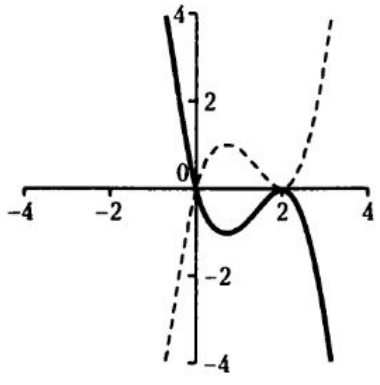
313 $y = x(x-2)^2$



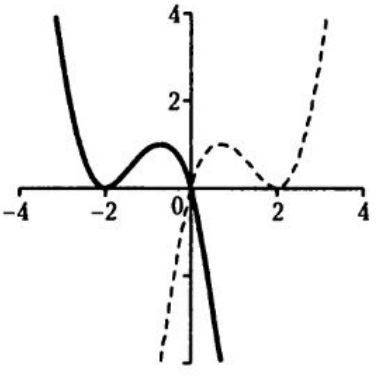
314 $y = 2x(x-2)^2$



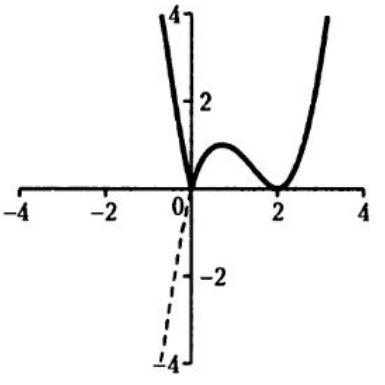
315 $y = 2x(2x-2)^2$



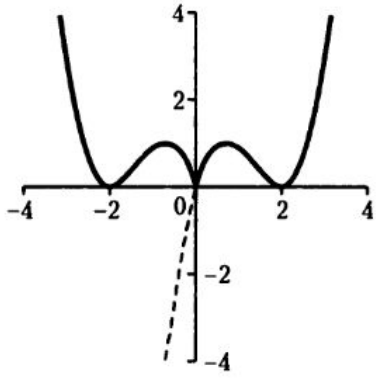
316 $y = -x(x-2)^2$



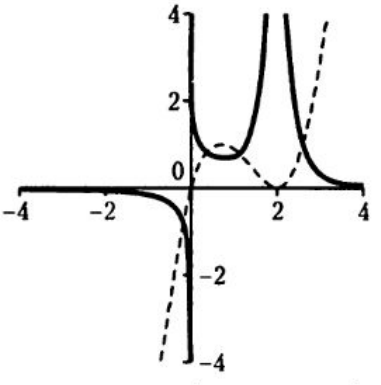
317 $y = -x(x+2)^2$



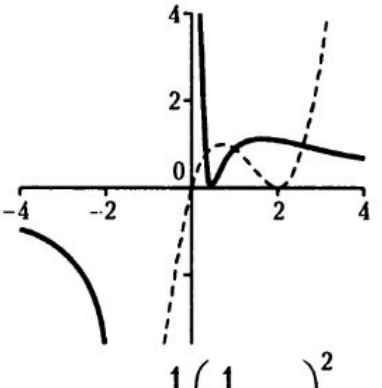
318 $y = \left|x(x-2)^2\right|$



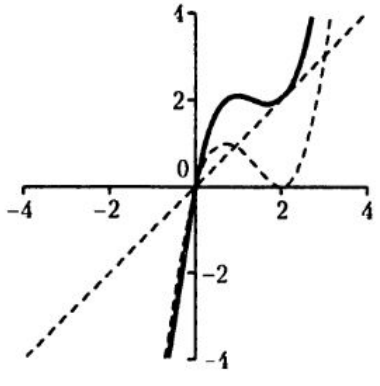
319 $y = |x|(|x|-2)^2$



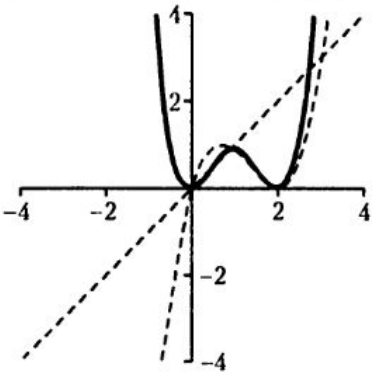
320 $y = 1/\left(x(x-2)^2\right)$



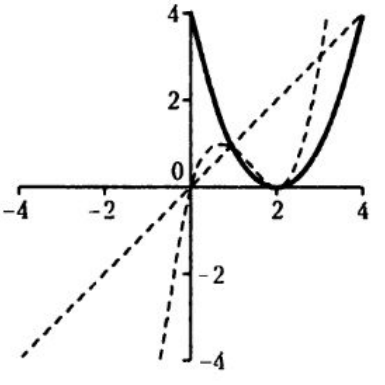
321 $y = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-2\right)^2$



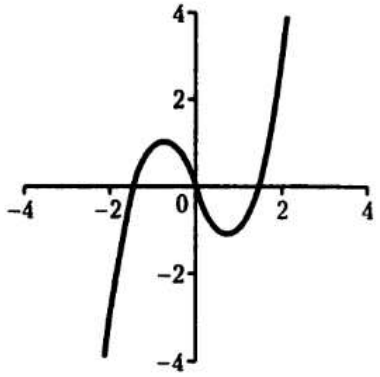
322 $y = x(x-2)^2 + x$



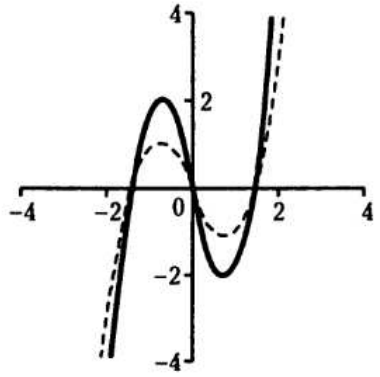
323 $y = x^2(x-2)^2$



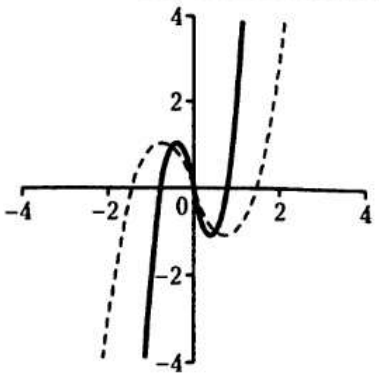
324 $y = (x-2)^2$



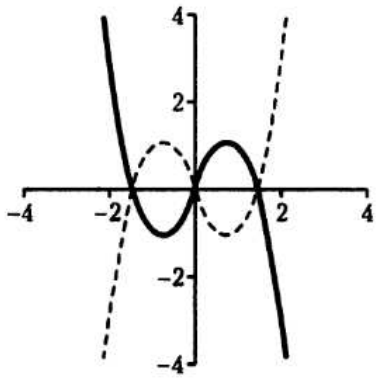
325 $y = x\left(x^2 - 2\right)$



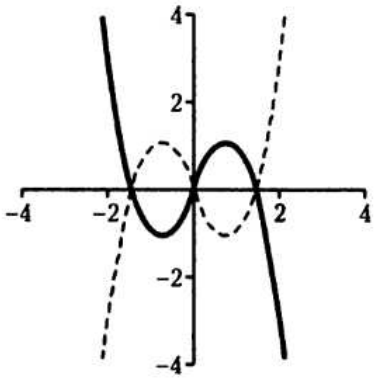
326 $y = 2x\left(x^2 - 2\right)$



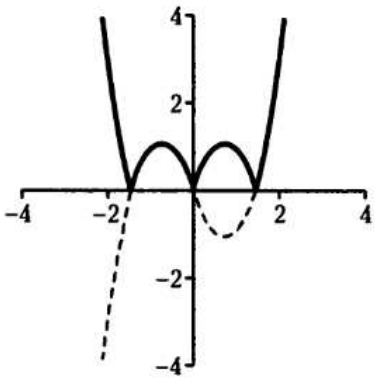
327 $y = 2x\left(4x^2 - 2\right)$



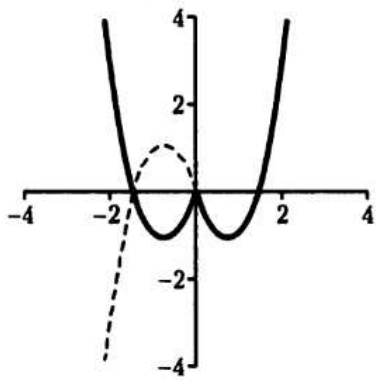
328 $y = -x\left(x^2 - 2\right)$



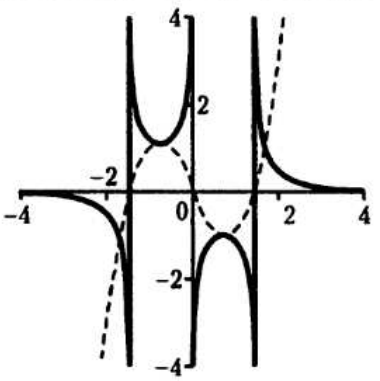
329 $y = -x\left(x^2 - 2\right)$



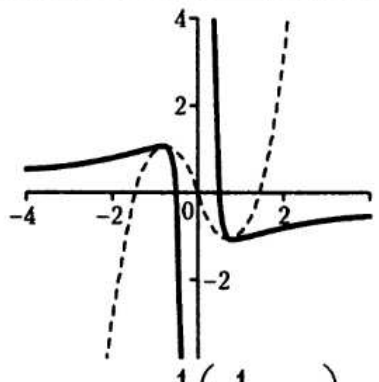
330 $y = \left|x\left(x^2 - 2\right)\right|$



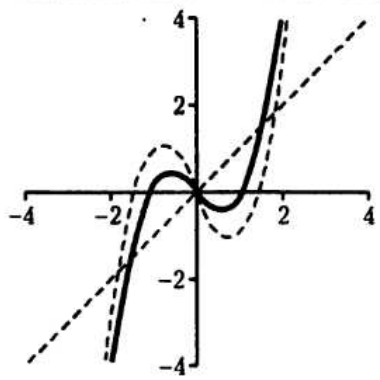
331 $y = |x|\left(x^2 - 2\right)$



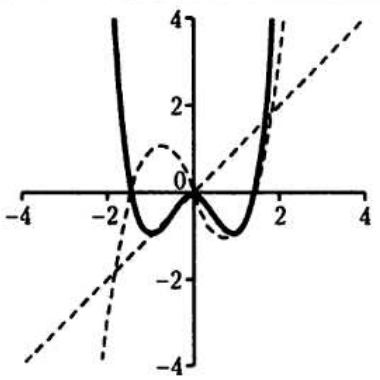
332 $y = 1/\left(x\left(x^2 - 2\right)\right)$



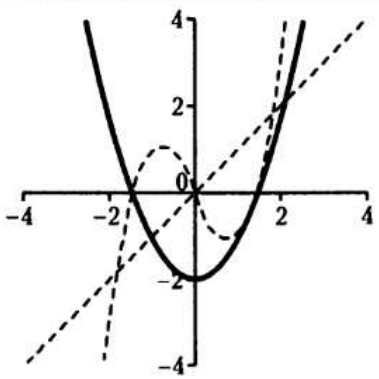
333 $y = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x^2} - 2\right)$



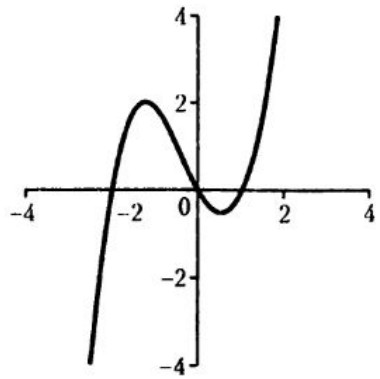
334 $y = x\left(x^2 - 2\right) + x$



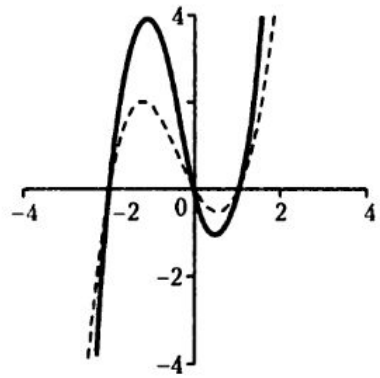
335 $y = x^2\left(x^2 - 2\right)$



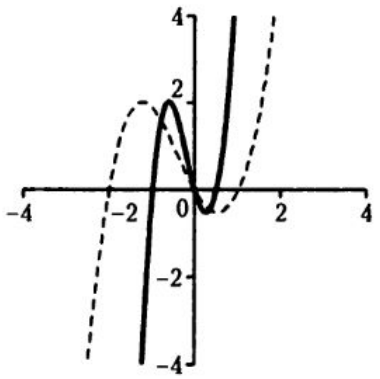
336 $y = x^2 - 2$



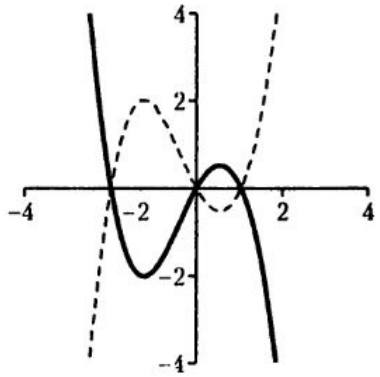
337 $y = \left(x^2 - x\right)(x+2)$



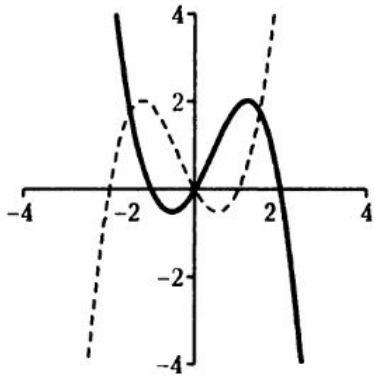
338 $y = 2\left(x^2 - x\right)(x+2)$



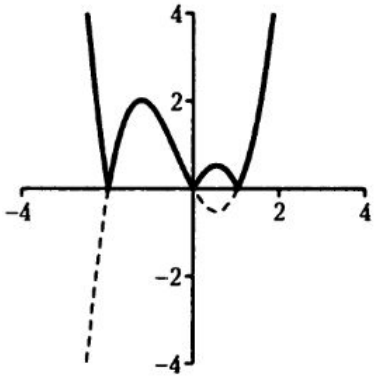
339 $y = \left(4x^2 - 2\right)(2x+2)$



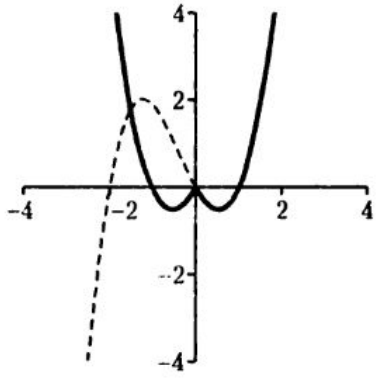
340 $y = -\left(x^2 - x\right)(x+2)$



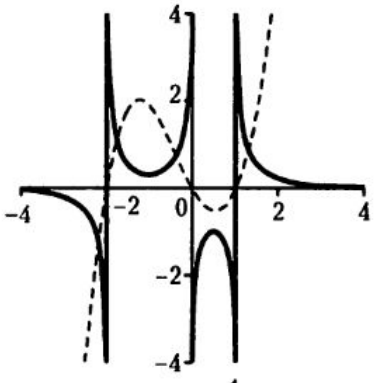
341 $y = \left(x^2 + x\right)(-x+2)$



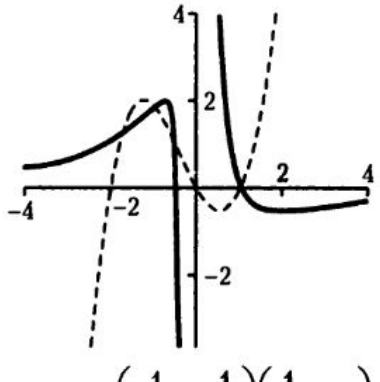
342 $y = \left|\left(x^2 - x\right)(x+2)\right|$



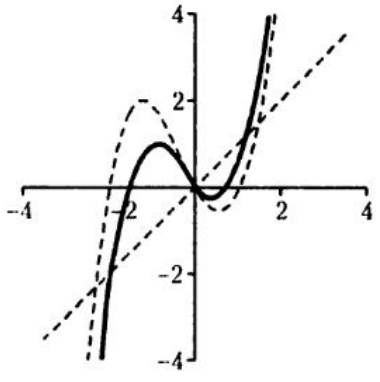
343 $y = |x|\left(|x| - 1\right)\left(|x| + 2\right)$



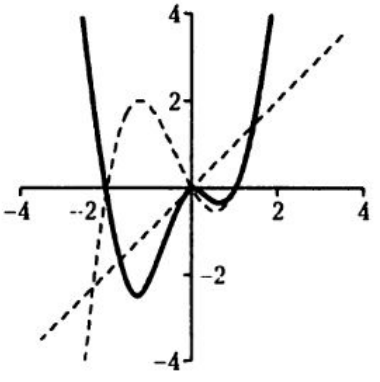
344 $y = \dfrac{1}{x(x-1)(x+2)}$



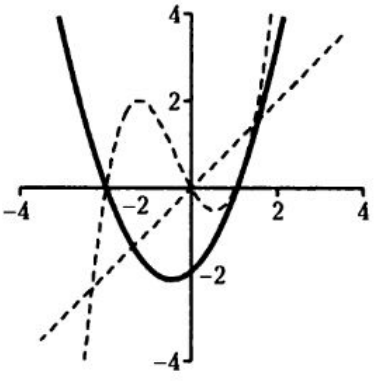
345 $y = \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{1}{x} + 2\right)$



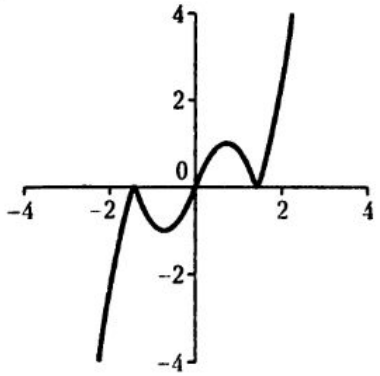
346 $y = \left(x^2 - x\right)(x+2) + x$



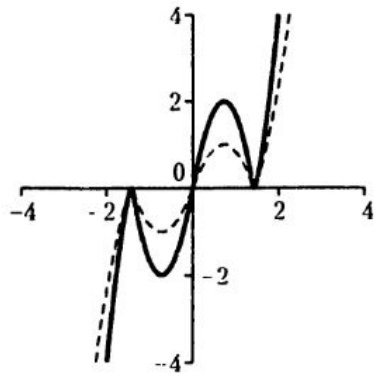
347 $y = \left(x^3 - x^2\right)(x+2)$



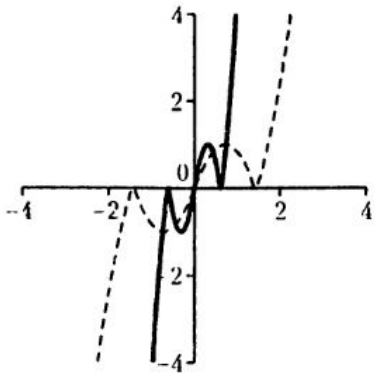
348 $y = (x-1)(x+2)$



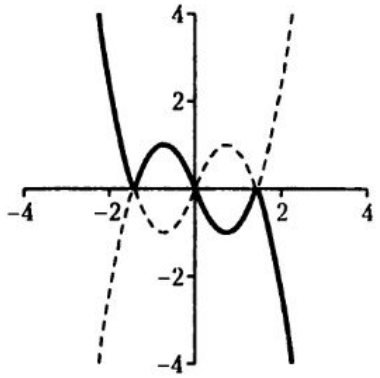
349 $y = x\left|x^2 - 2\right|$



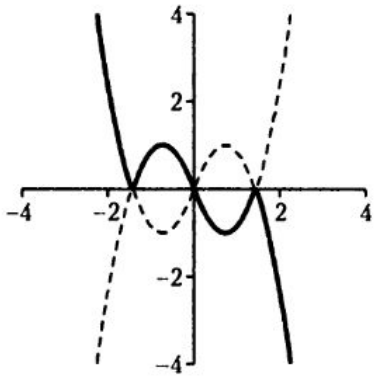
350 $y = 2x\left|x^2 - 2\right|$



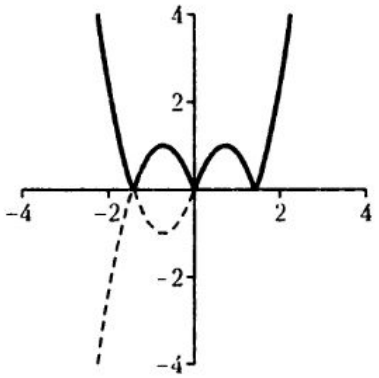
351 $y = 2x\left|4x^2 - 2\right|$



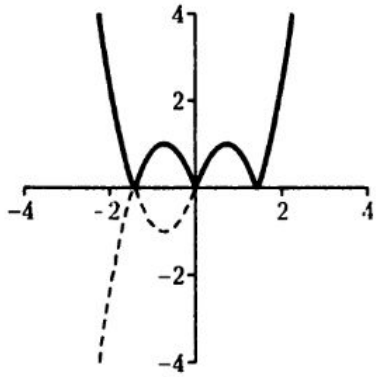
352 $y = -x\left|x^2 - 2\right|$



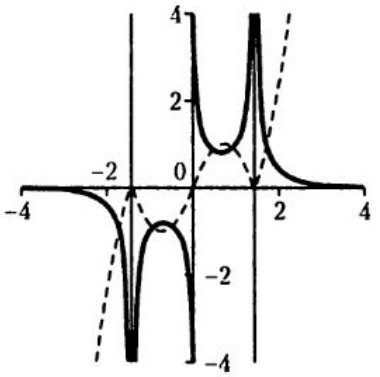
353 $y = -x\left|x^2 - 2\right|$



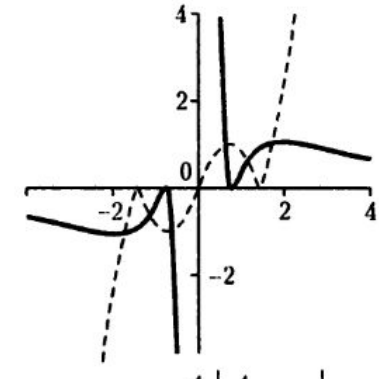
354 $y = |x|\left|x^2 - 2\right|$



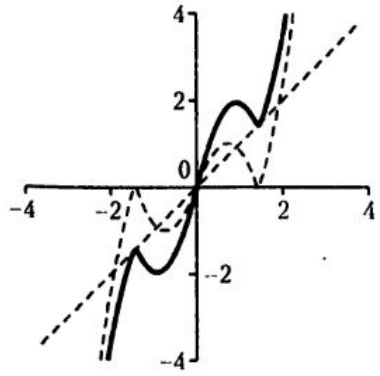
355 $y = |x|\left|x^2 - 2\right|$



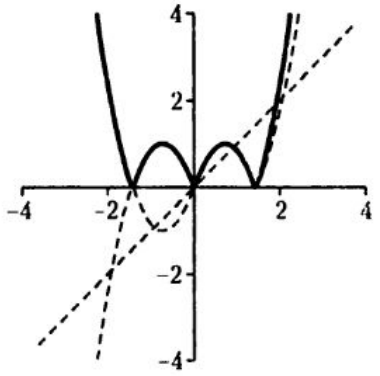
356 $y = 1/\left(x\left|x^2 - 2\right|\right)$



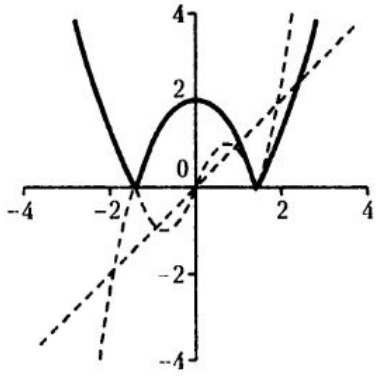
357 $y = \dfrac{1}{x}\left|\dfrac{1}{x^2} - 2\right|$



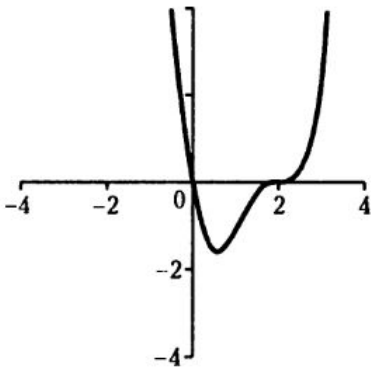
358 $y = x\left|x^2 - 2\right| + x$



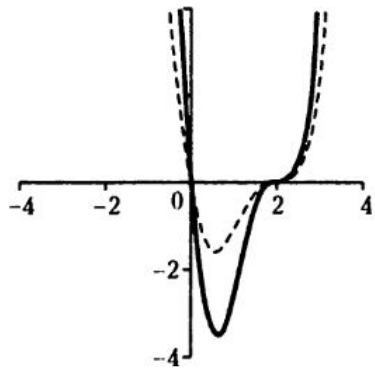
359 $y = x^2\left|x^2 - 2\right|$



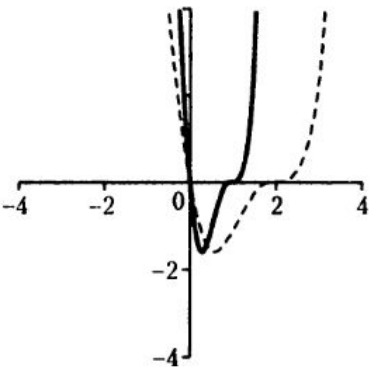
360 $y = \left|x^2 - 2\right|$



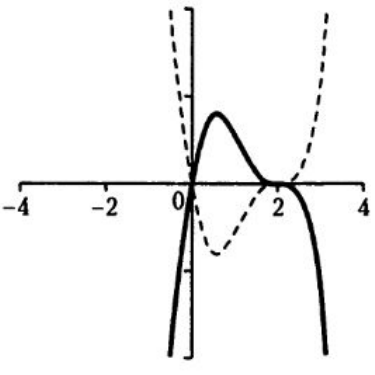
361 $y = x(x-2)^3$



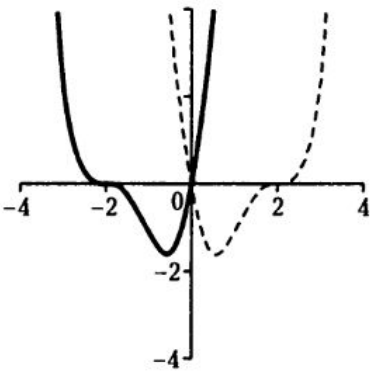
362 $y = 2x(x-2)^3$



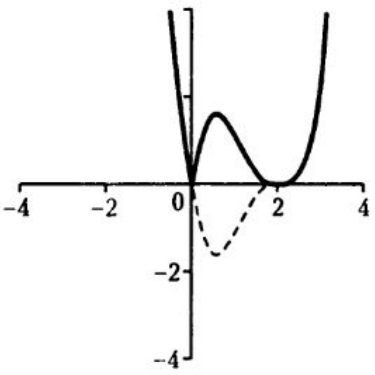
363 $y = 2x(2x-2)^3$



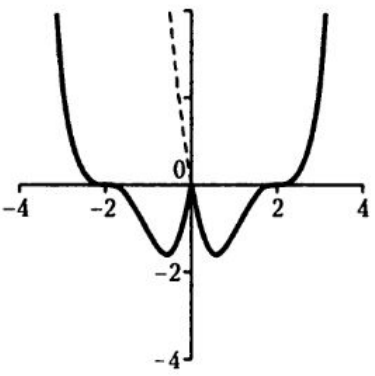
364 $y = -x(x-2)^3$



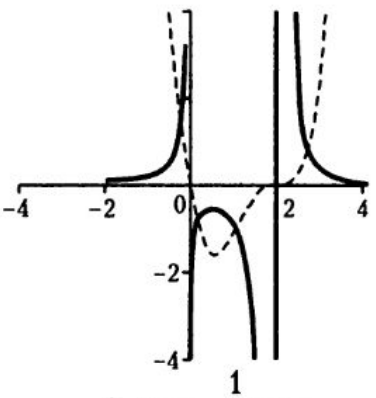
365 $y = x(x+2)^3$



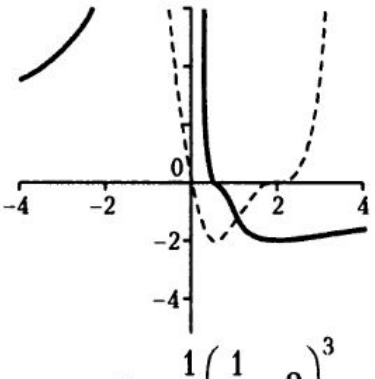
366 $y = \left|x(x-2)^3\right|$



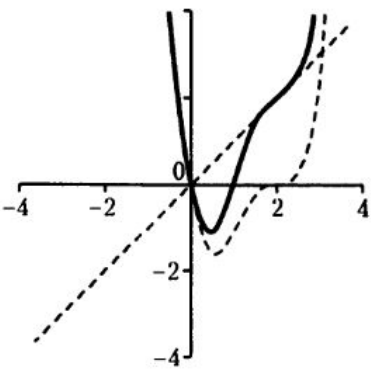
367 $y = |x|(|x|-2)^3$



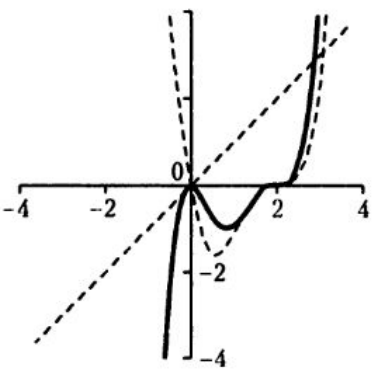
368 $y = \dfrac{1}{x(x-2)^3}$



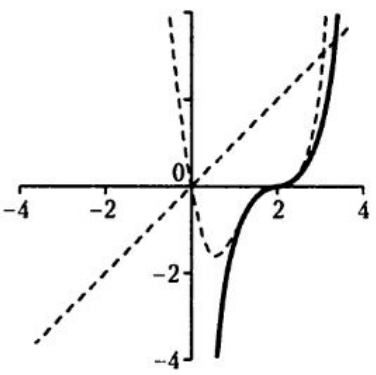
369 $y = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-2\right)^3$



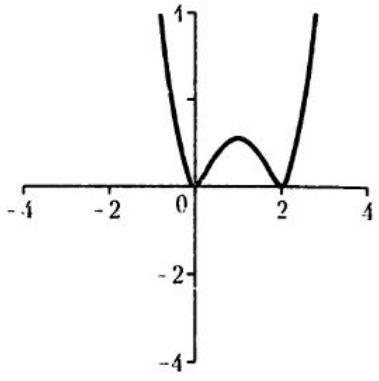
370 $y = x(x-2)^3 + x$



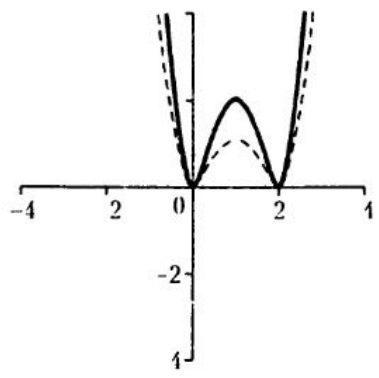
371 $y = x^2(x-2)^3$



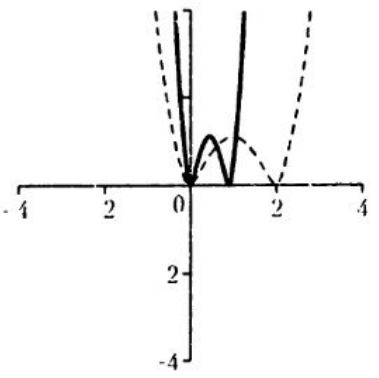
372 $y = (x-2)^3$



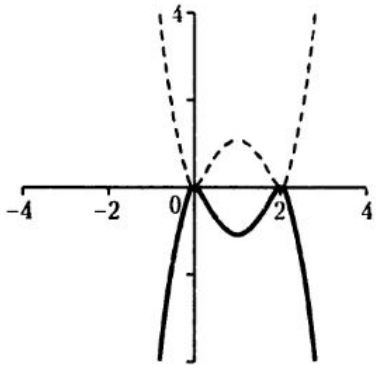
373 $y = x^2(x-2)^2$



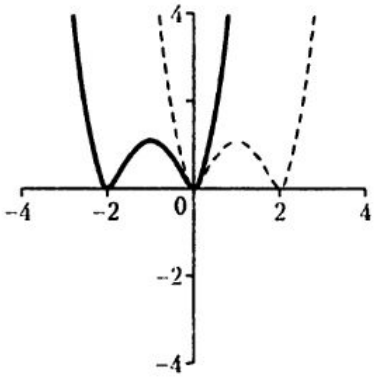
374 $y = 2x^2(x-2)^2$



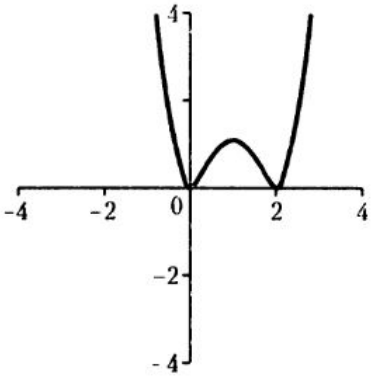
375 $y = 4x^2(2x-2)^2$



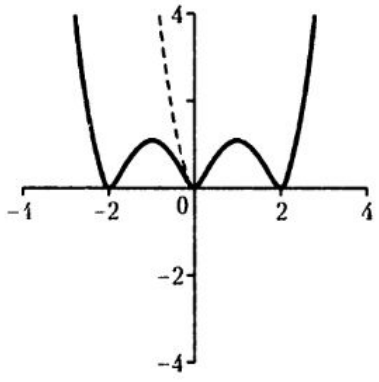
376 $y = -x^2(x-2)^2$



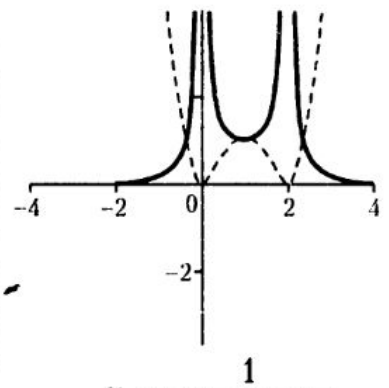
377 $y = x^2(x+2)^2$



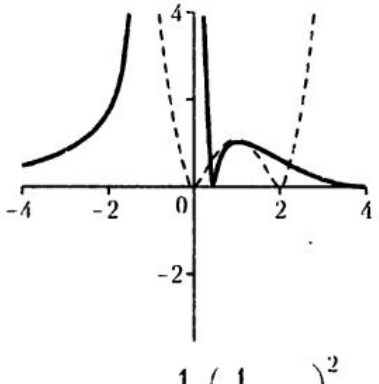
378 $y = \left|x^2(x-2)^2\right|$



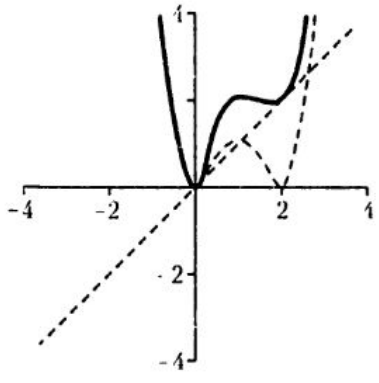
379 $y = x^2(|x|-2)^2$



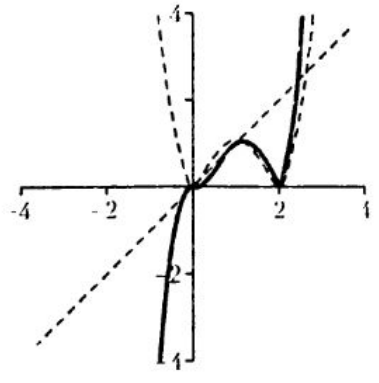
380 $y = \dfrac{1}{x^2(x-2)^2}$



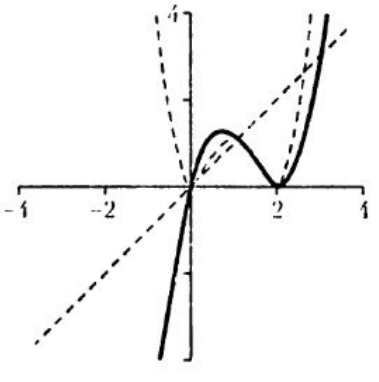
381 $y = \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{x}-2\right)^2$



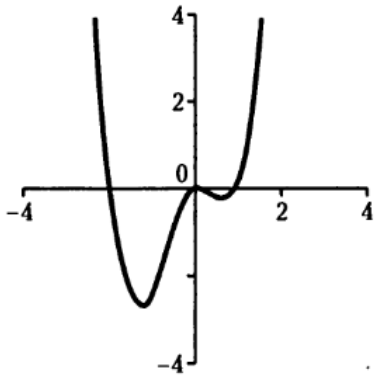
382 $y = x^2(x-2)^2 + x$



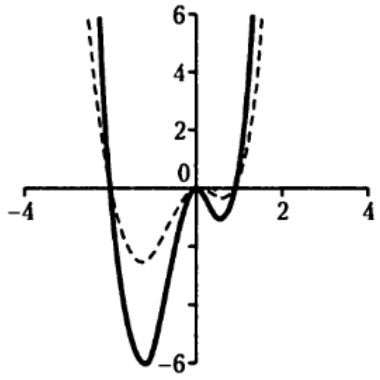
383 $y = x^3(x-2)^2$



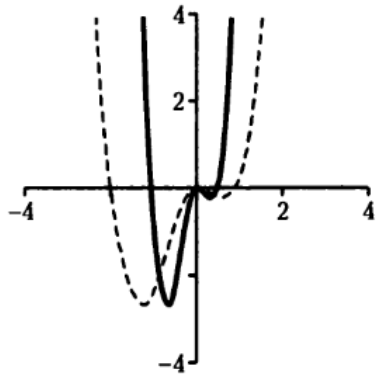
384 $y = x(x-2)^2$



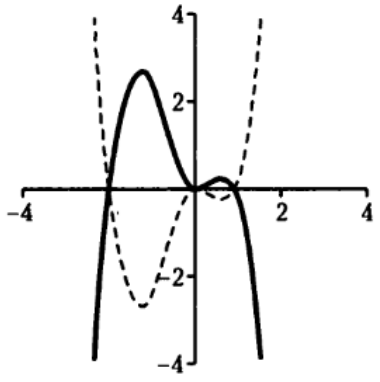
385 $y = \left(x^3 - x^2\right)(x+2)$



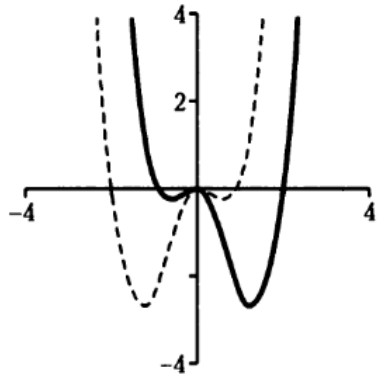
386 $y = 2\left(x^3 - x^2\right)(x+2)$



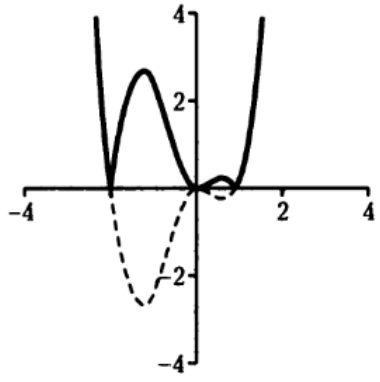
387 $y = \left(8x^3 - 4x^2\right)(2x+2)$



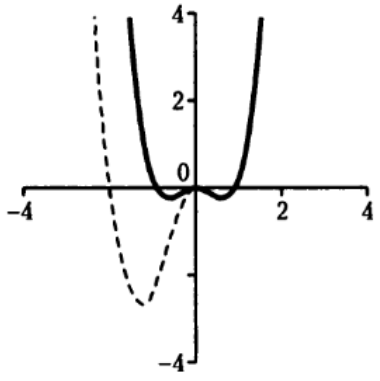
388 $y = -\left(x^3 - x^2\right)(x+2)$



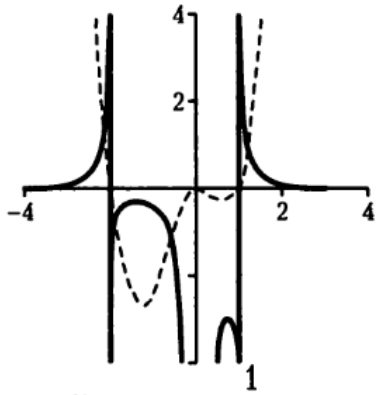
389 $y = \left(x^3 + x^2\right)(x-2)$



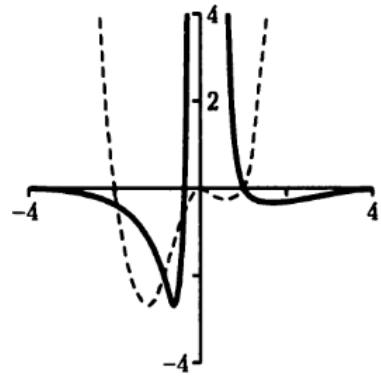
390 $y = \left|\left(x^3 - x^2\right)(x+2)\right|$



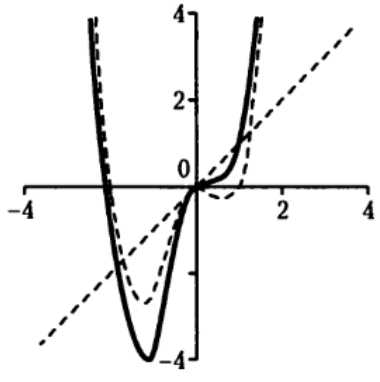
391 $y = x^2\left(|x|-1\right)\left(|x|+2\right)$



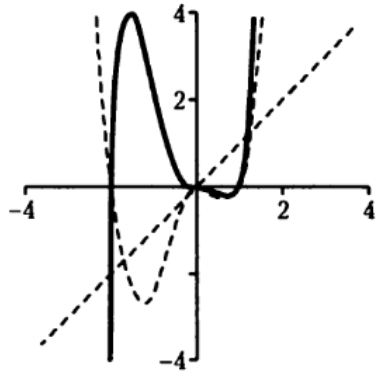
392 $y = \dfrac{1}{\left(x^3 - x^2\right)(x+2)}$



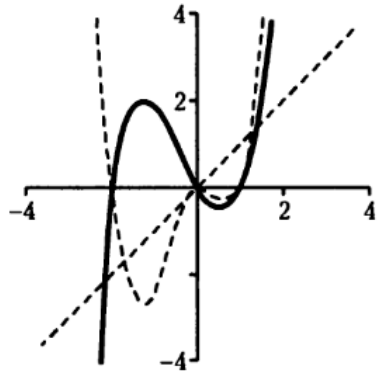
393 $y = x^{-2}\left(x^{-1}-1\right)\left(x^{-1}+2\right)$



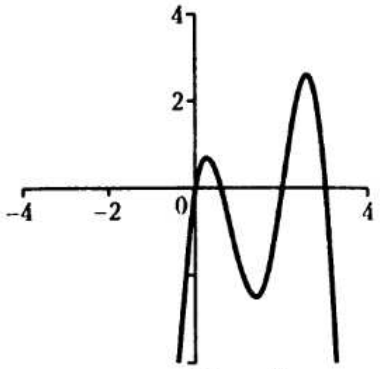
394 $y = x^2(x-1)(x+2) + x$



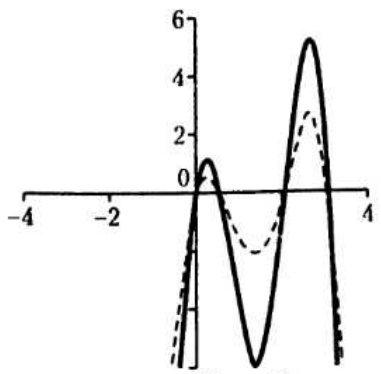
395 $y = x^3(x-1)(x+2)$



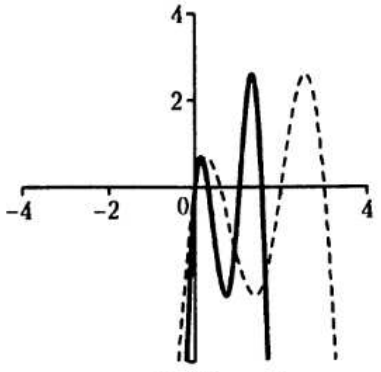
396 $y = x(x-1)(x+2)$



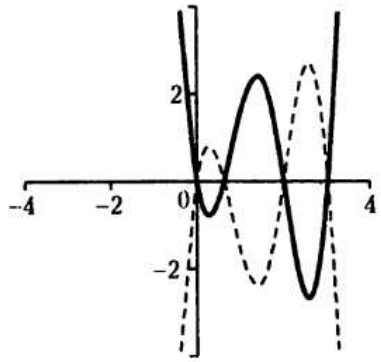
397 $y = x(2x-1)\times$
$\times(2-x)(x-3)$



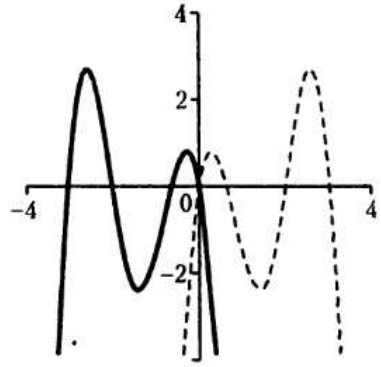
398 $y = 2x(2x-1)\times$
$\times(2-x)(x-3)$



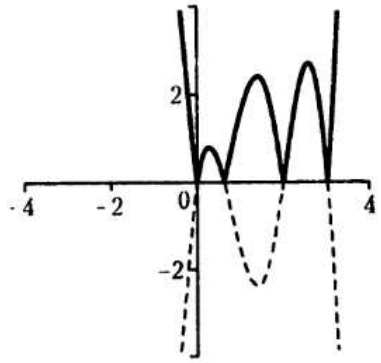
399 $y = 2x(4x-1)\times$
$\times(2-2x)(2x-3)$



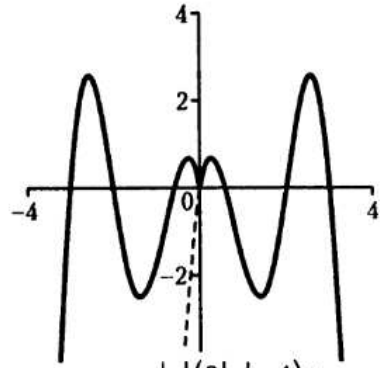
400 $y = -x(2x-1)\times$
$\times(2-x)(x-3)$



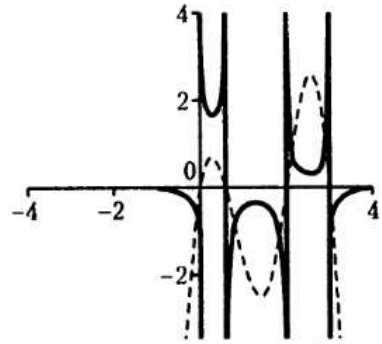
401 $y = x(2x+1)\times$
$\times(2+x)(-x-3)$



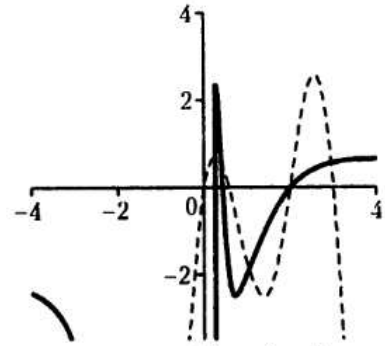
402 $y = |x(2x-1)\times$
$\times(2-x)(x-3)|$



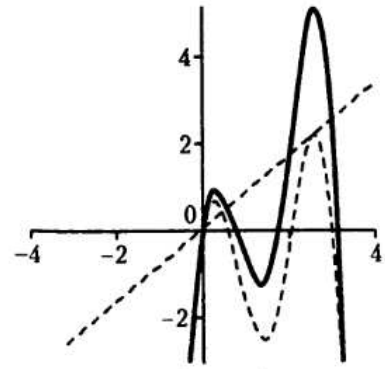
403 $y = |x|(2|x|-1)\times$
$\times(2-|x|)(|x|-3)$



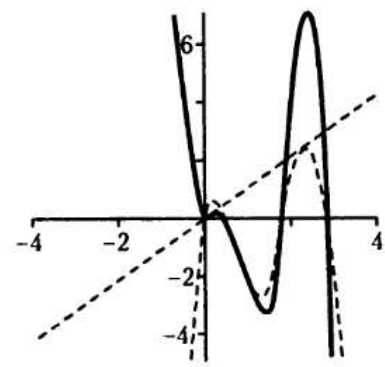
404 $y = (x(2x-1))^{-1}\times$
$\times((2-x)(x-3))^{-1}$



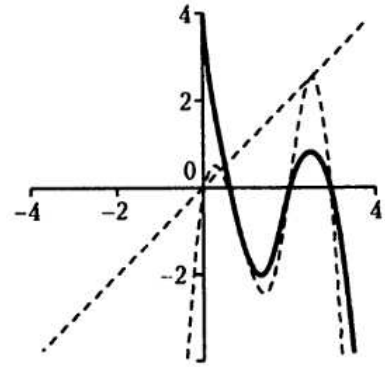
405 $y = x^{-1}(2x^{-1}-1)\times$
$\times(2-x^{-1})(x^{-1}-3)$



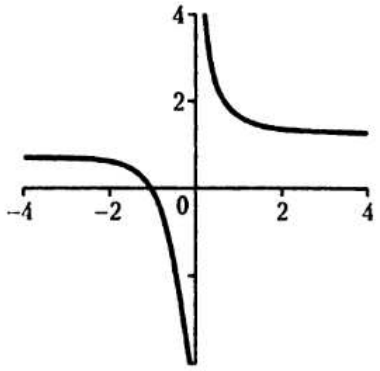
406 $y = x(2x-1)\times$
$\times(2-x)(x-3)+x$



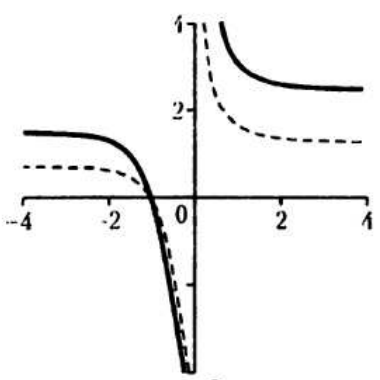
407 $y = x^2(2x-1)\times$
$\times(2-x)(x-3)$



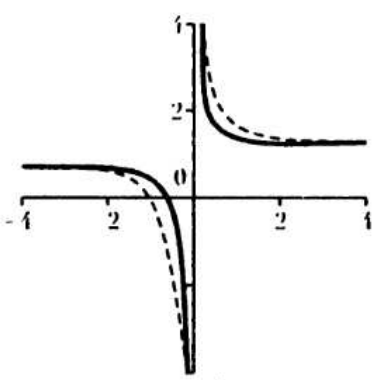
408 $y = (2x-1)\times$
$\times(2-x)(x-3)$



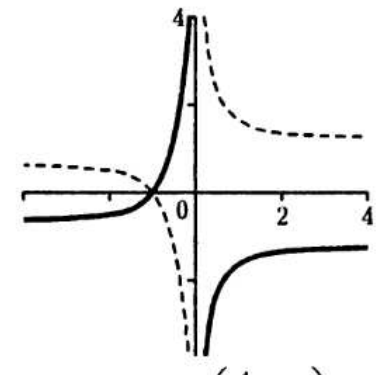
409 $y = \frac{1}{x} + 1$



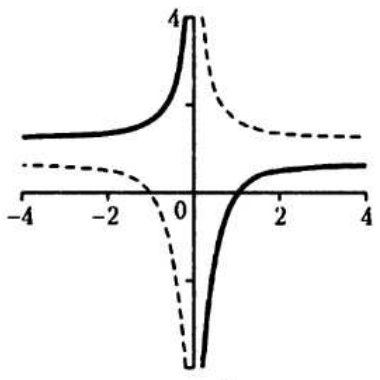
410 $y = \frac{2}{x} + 2$



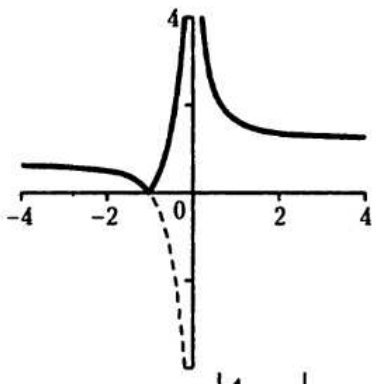
411 $y = \frac{1}{2x} + 1$



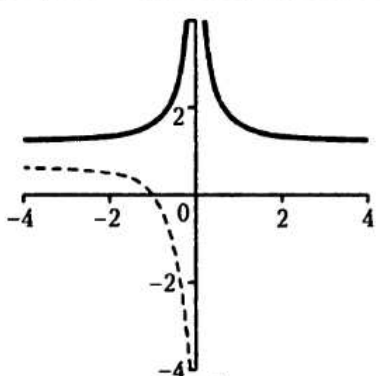
412 $y = -\left(\frac{1}{x} + 1\right)$



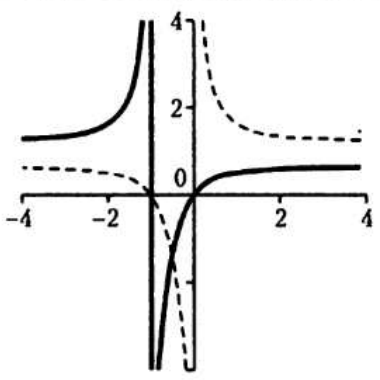
413 $y = -\frac{1}{x} + 1$



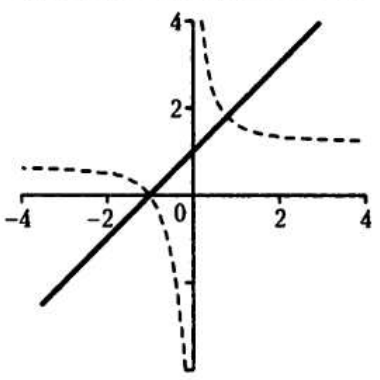
414 $y = \left|\frac{1}{x} + 1\right|$



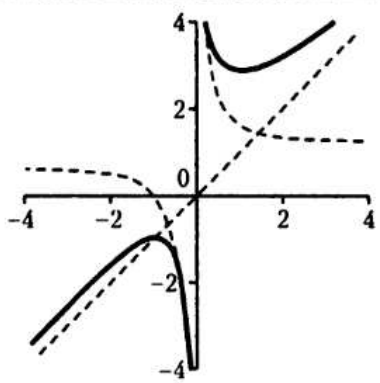
415 $y = \frac{1}{|x|} + 1$



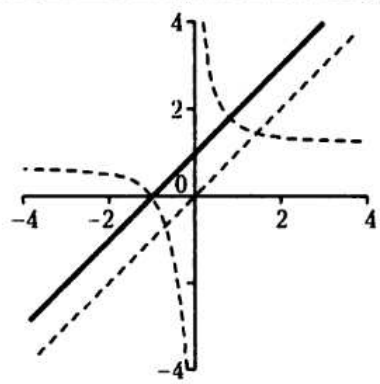
416 $y = \frac{x}{x+1}$



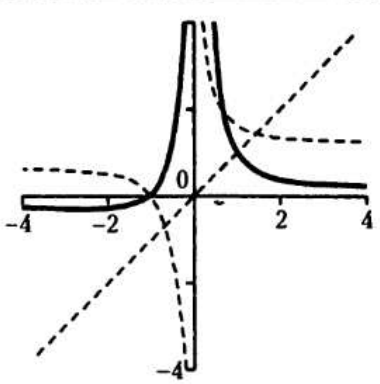
417 $y = x + 1$



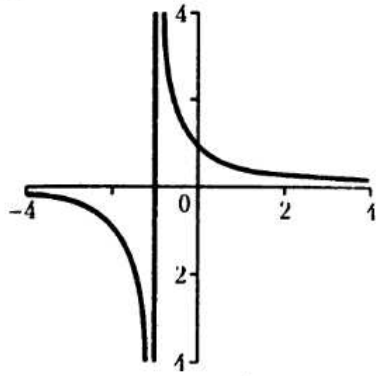
418 $y = \frac{1}{x} + x + 1$



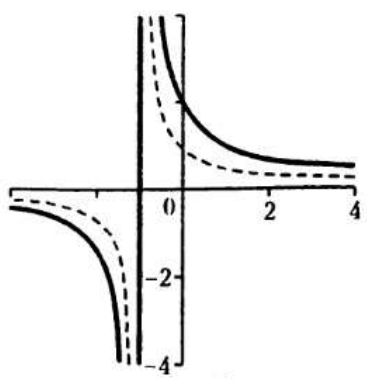
419 $y = x + 1$



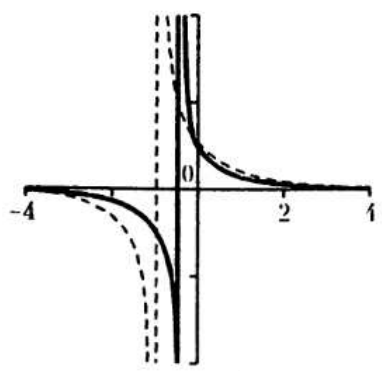
420 $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$



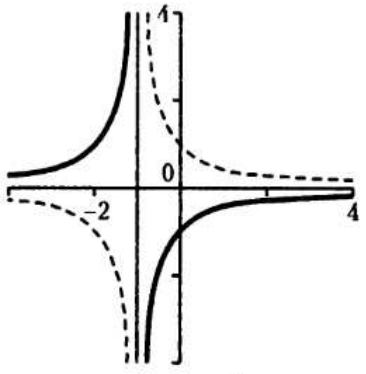
421 $y = \dfrac{1}{x+1}$



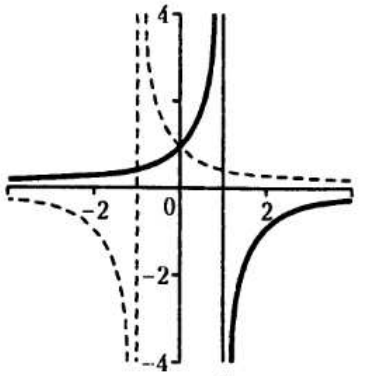
422 $y = \dfrac{2}{x+1}$



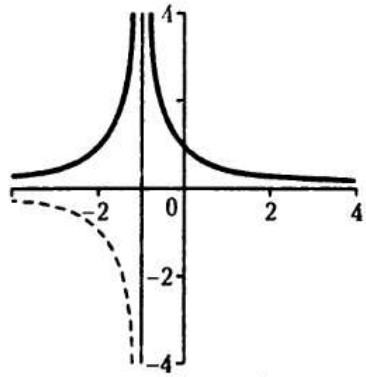
423 $y = \dfrac{1}{2x+1}$



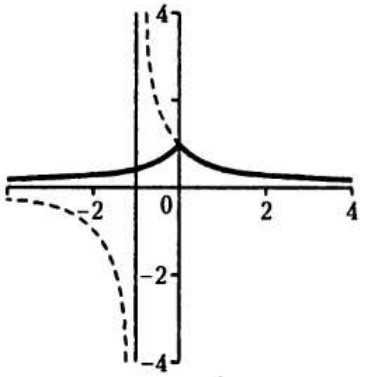
424 $y = -\dfrac{1}{x+1}$



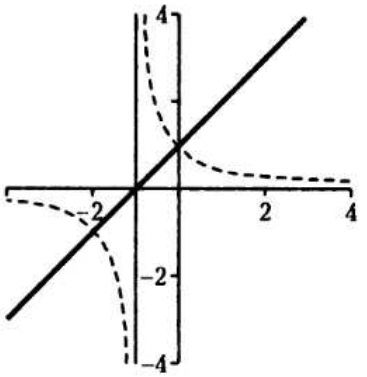
425 $y = \dfrac{1}{1-x}$



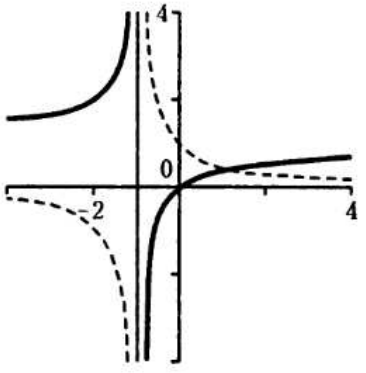
426 $y = \left|\dfrac{1}{x+1}\right|$



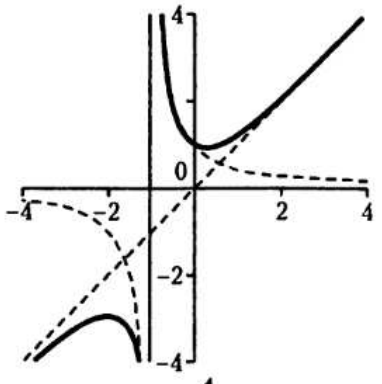
427 $y = \dfrac{1}{|x|+1}$



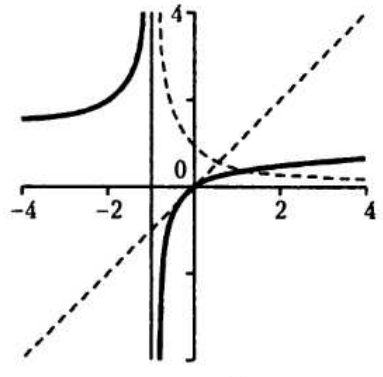
428 $y = x+1$



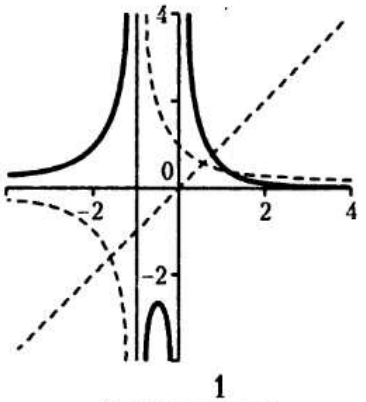
429 $y = \dfrac{x}{x+1}$



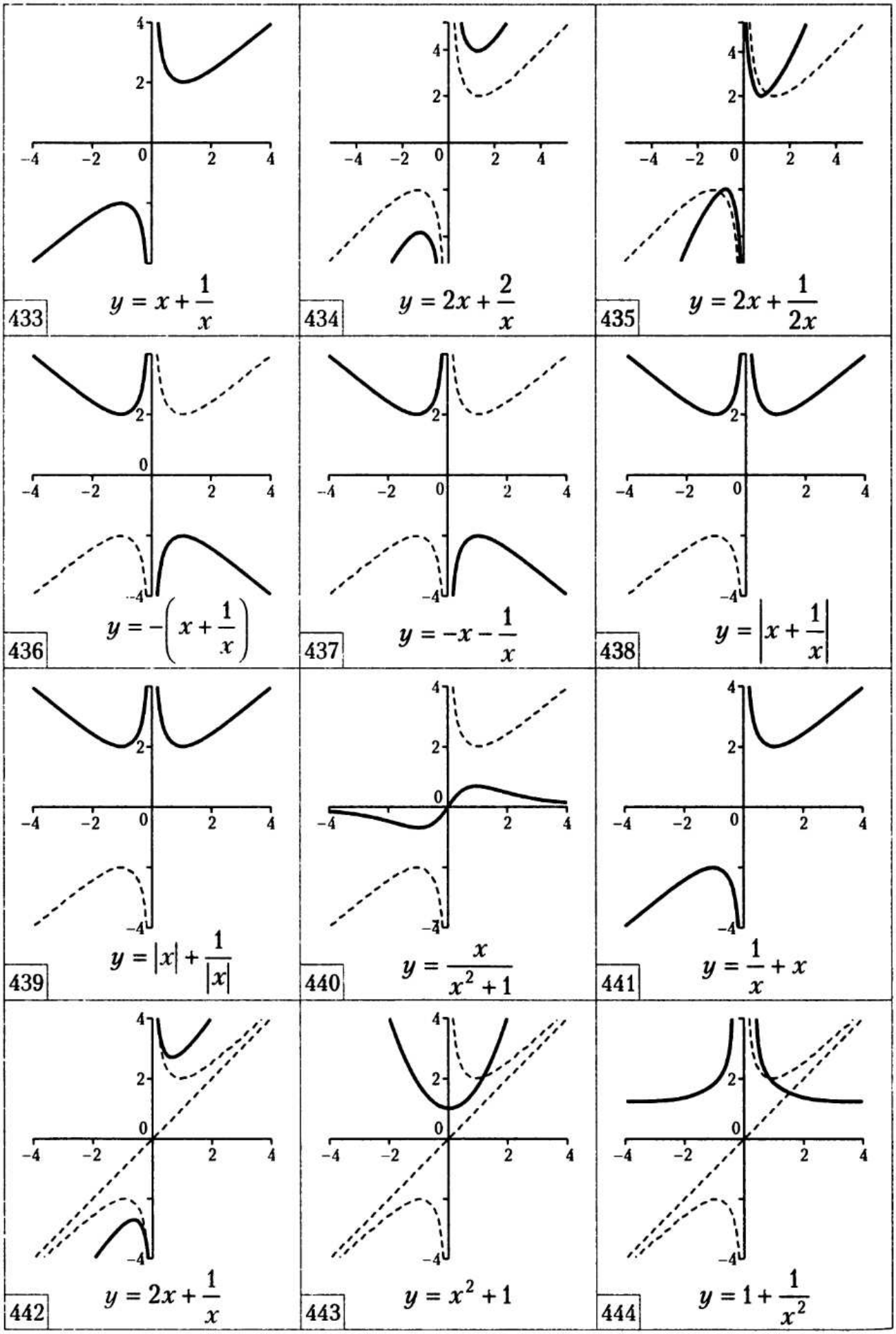
430 $y = \dfrac{1}{x+1} + x$

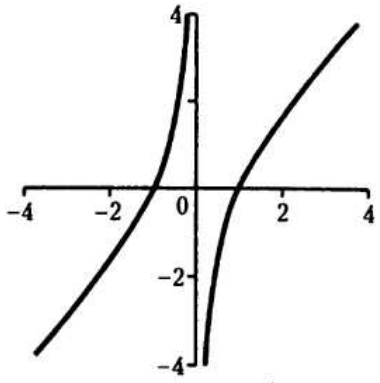


431 $y = \dfrac{x}{x+1}$

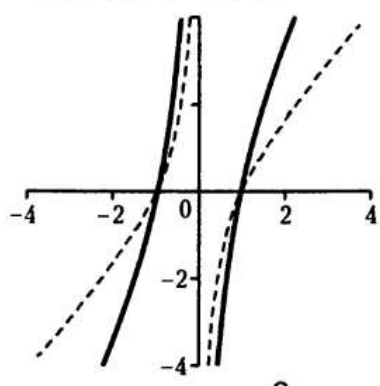


432 $y = \dfrac{1}{x(x+1)}$

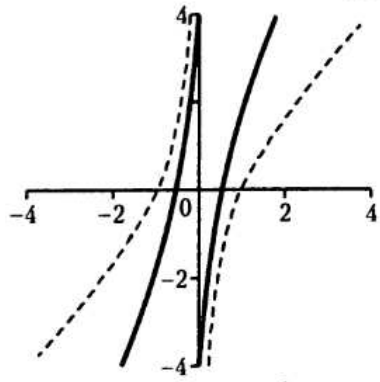

433 $y = x + \frac{1}{x}$
434 $y = 2x + \frac{2}{x}$
435 $y = 2x + \frac{1}{2x}$
436 $y = -\left(x + \frac{1}{x}\right)$
437 $y = -x - \frac{1}{x}$
438 $y = \left|x + \frac{1}{x}\right|$
439 $y = |x| + \frac{1}{|x|}$
440 $y = \frac{x}{x^2 + 1}$
441 $y = \frac{1}{x} + x$
442 $y = 2x + \frac{1}{x}$
443 $y = x^2 + 1$
444 $y = 1 + \frac{1}{x^2}$



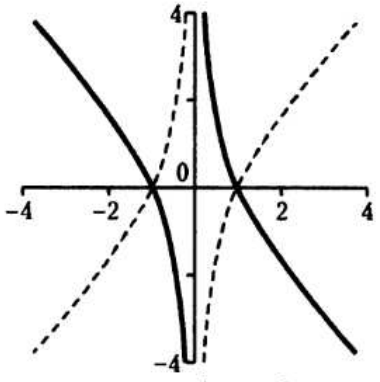
445 $y = x - \frac{1}{x}$



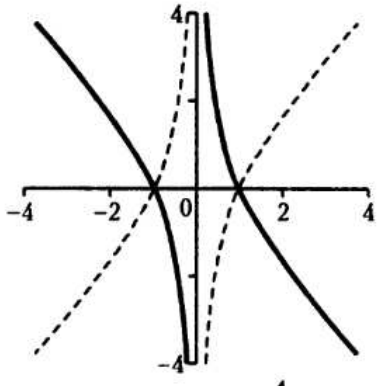
446 $y = 2x - \frac{2}{x}$



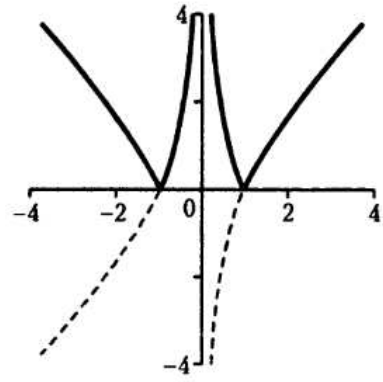
447 $y = 2x - \frac{1}{2x}$



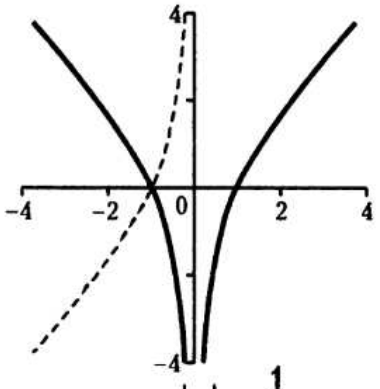
448 $y = -\left(x - \frac{1}{x}\right)$



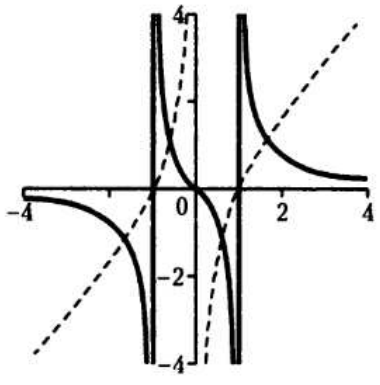
449 $y = -x + \frac{1}{x}$



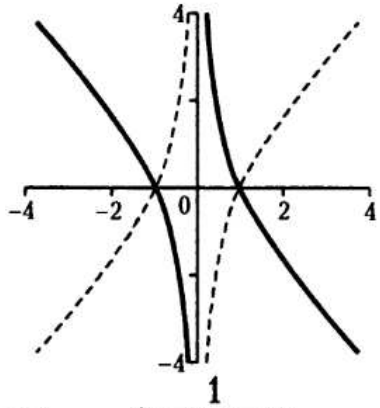
450 $y = \left|x - \frac{1}{x}\right|$



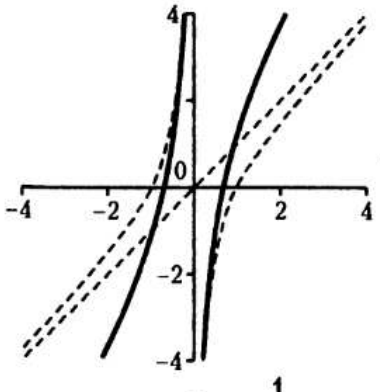
451 $y = |x| - \frac{1}{|x|}$



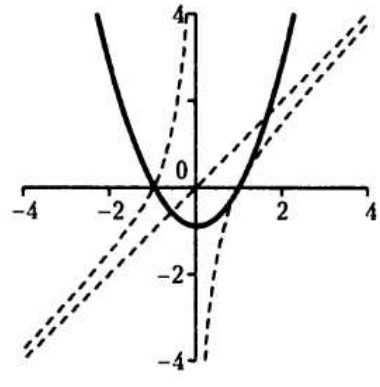
452 $y = \frac{x}{x^2 - 1}$



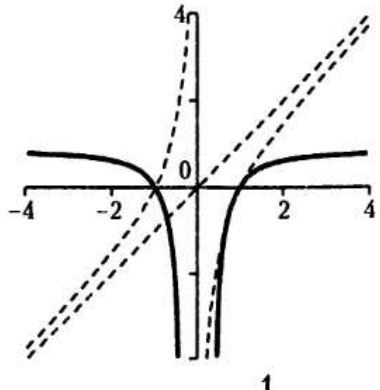
453 $y = \frac{1}{x} - x$



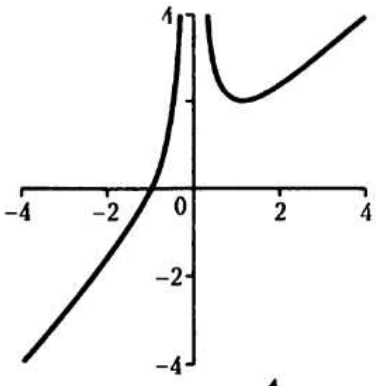
454 $y = 2x - \frac{1}{x}$



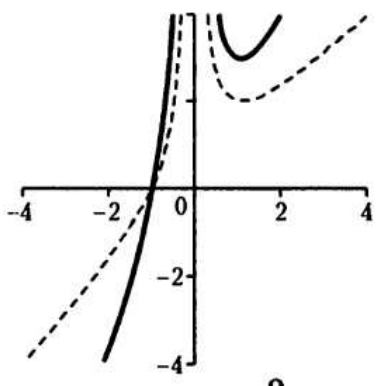
455 $y = x^2 - 1$



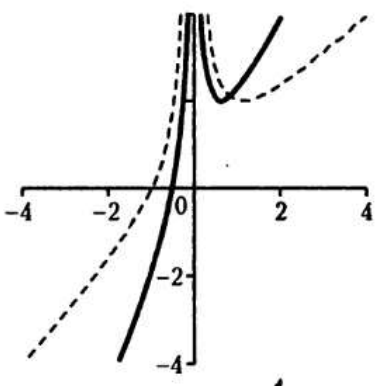
456 $y = 1 - \frac{1}{x^2}$



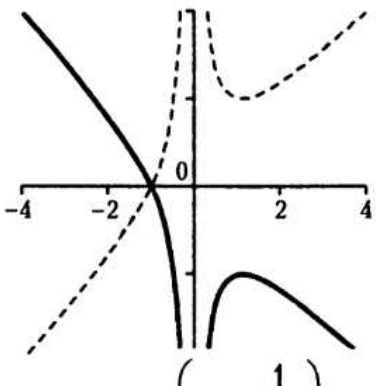
457 $y = x + \frac{1}{x^2}$



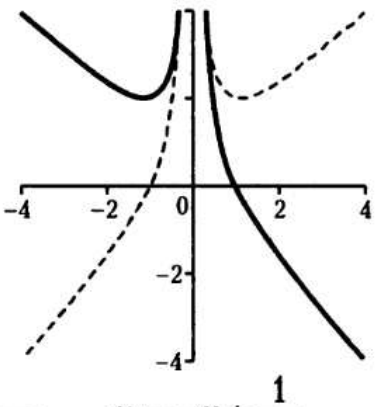
458 $y = 2x + \frac{2}{x^2}$



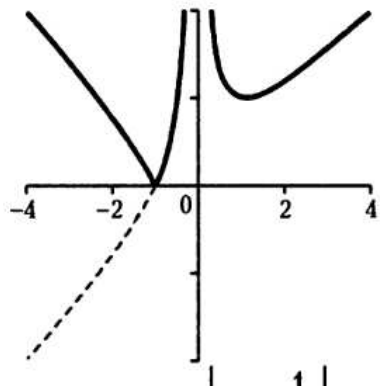
459 $y = 2x + \frac{1}{4x^2}$



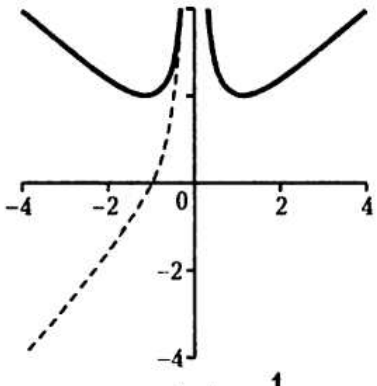
460 $y = -\left(x + \frac{1}{x^2}\right)$



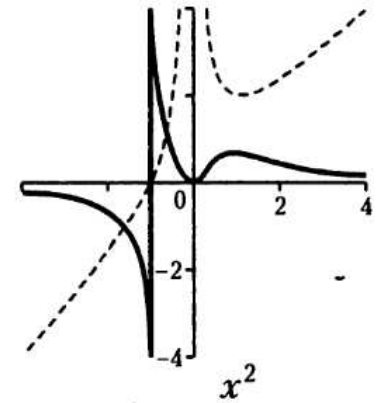
461 $y = -x + \frac{1}{x^2}$



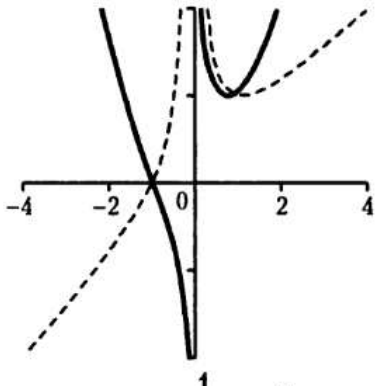
462 $y = \left|x + \frac{1}{x^2}\right|$



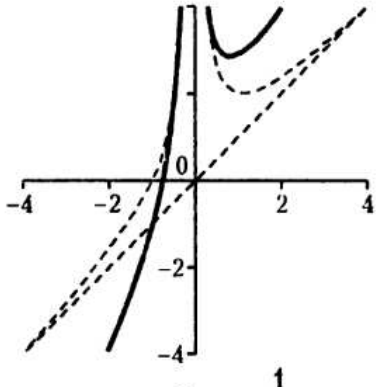
463 $y = |x| + \frac{1}{x^2}$



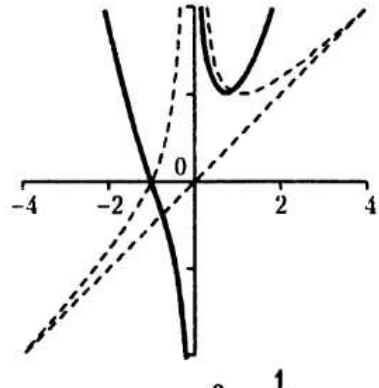
464 $y = \frac{x^2}{x^3 + 1}$



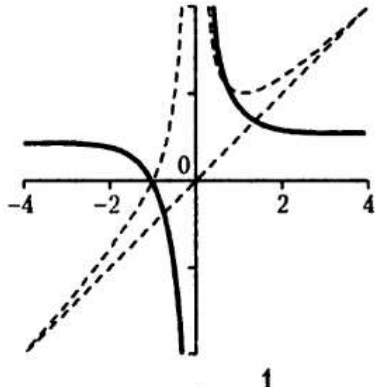
465 $y = \frac{1}{x} + x^2$



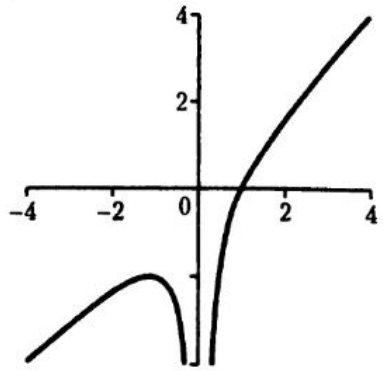
466 $y = 2x + \frac{1}{x^2}$



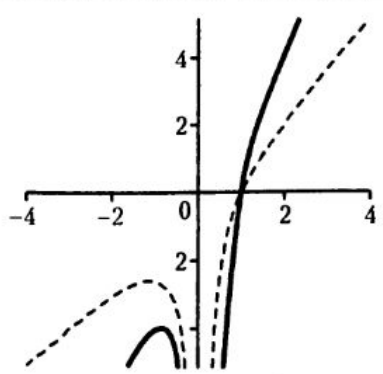
467 $y = x^2 + \frac{1}{x}$



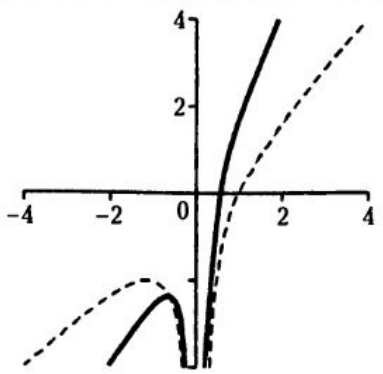
468 $y = 1 + \frac{1}{x^3}$



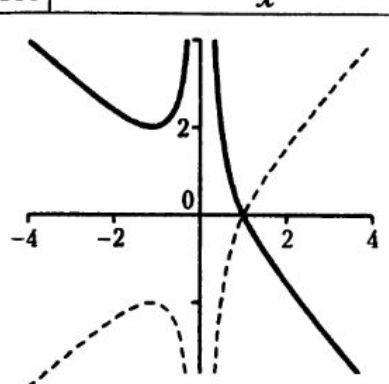
469 $y = x - \dfrac{1}{x^2}$



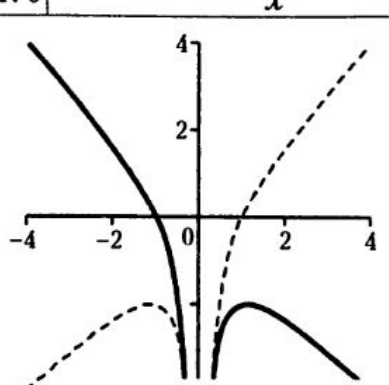
470 $y = 2x - \dfrac{2}{x^2}$



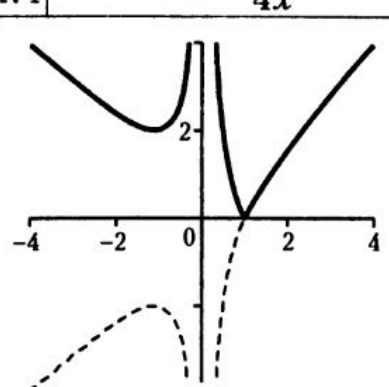
471 $y = 2x - \dfrac{1}{4x^2}$



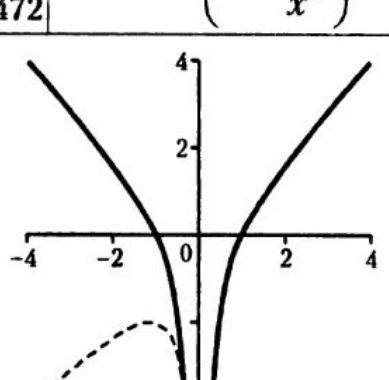
472 $y = -\left(x - \dfrac{1}{x^2}\right)$



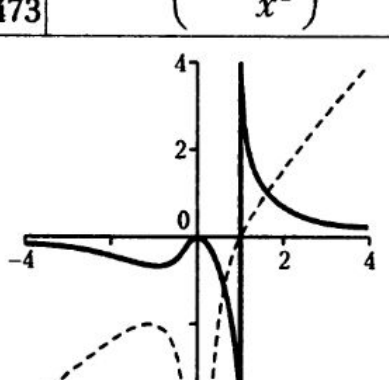
473 $y = -\left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)$



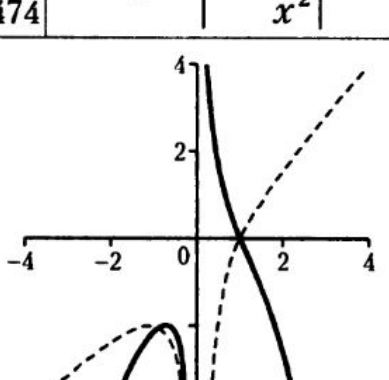
474 $y = \left|x - \dfrac{1}{x^2}\right|$



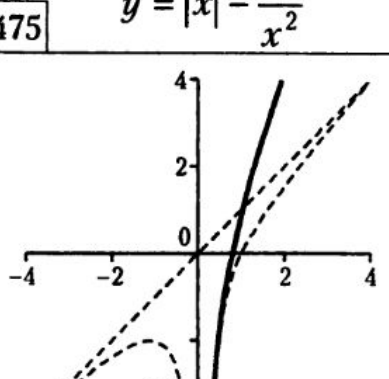
475 $y = |x| - \dfrac{1}{x^2}$



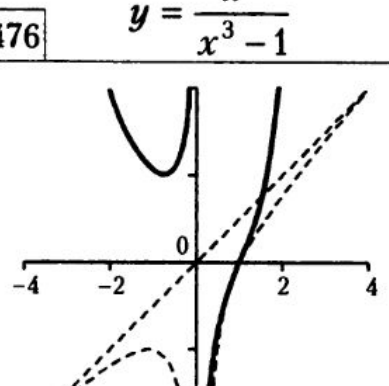
476 $y = \dfrac{x^2}{x^3 - 1}$



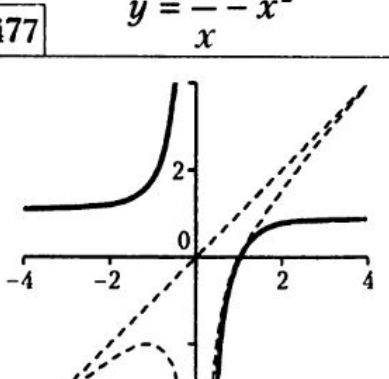
477 $y = \dfrac{1}{x} - x^2$



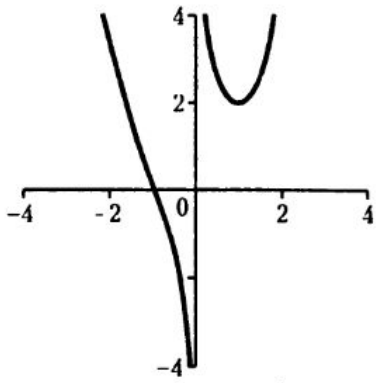
478 $y = 2x - \dfrac{1}{x^2}$



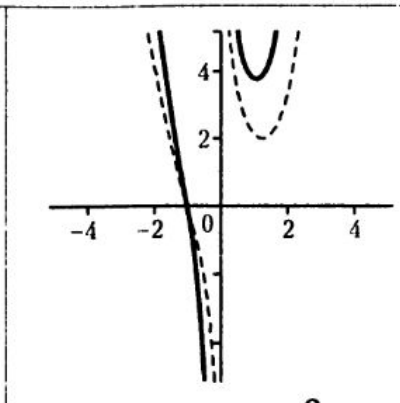
479 $y = x^2 - \dfrac{1}{x}$



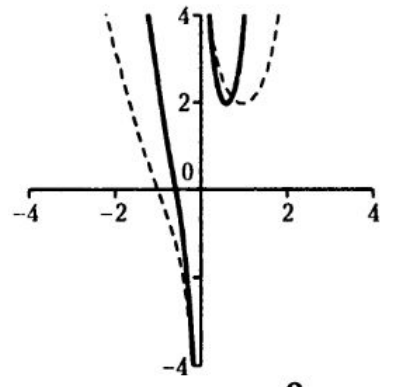
480 $y = 1 - \dfrac{1}{x^3}$



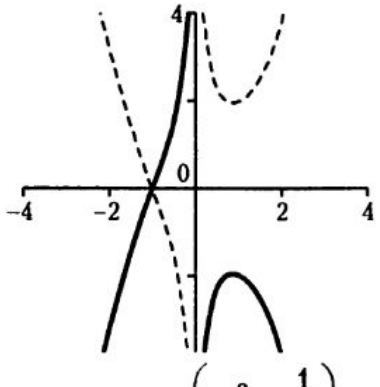
481 $y = x^2 + \frac{1}{x}$



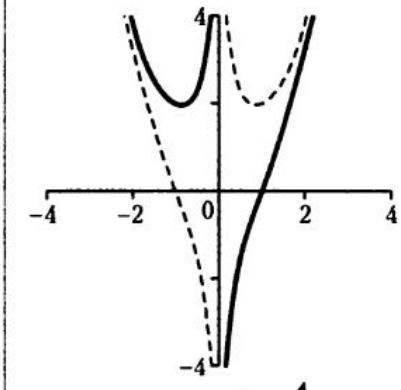
482 $y = 2x^2 + \frac{2}{x}$



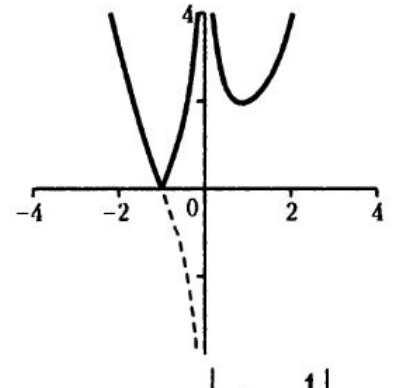
483 $y = 4x^2 + \frac{2}{x}$



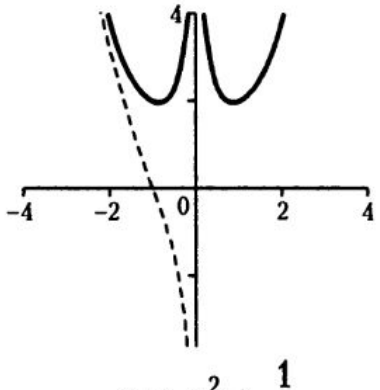
484 $y = -\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$



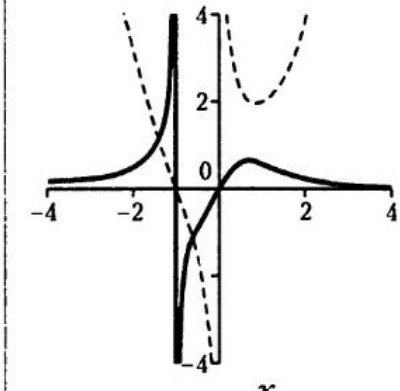
485 $y = x^2 - \frac{1}{x}$



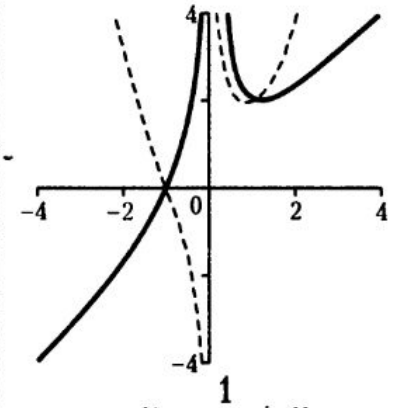
486 $y = \left|x^2 + \frac{1}{x}\right|$



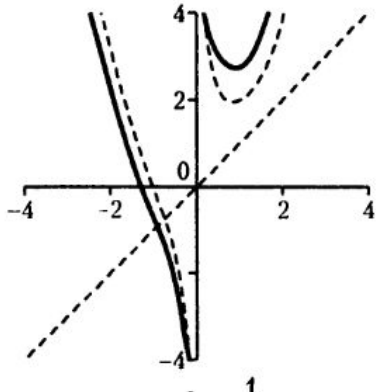
487 $y = x^2 + \frac{1}{|x|}$



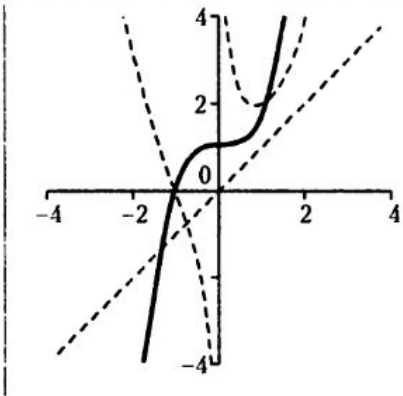
488 $y = \frac{x}{x^3 + 1}$



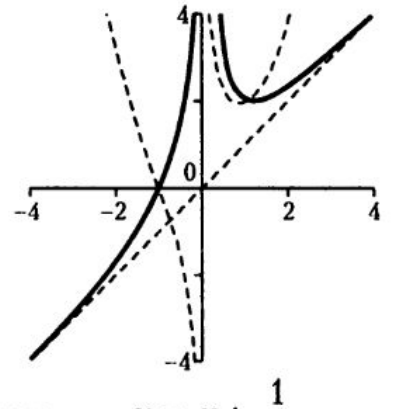
489 $y = \frac{1}{x^2} + x$



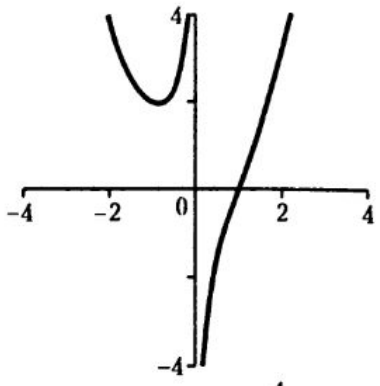
490 $y = x^2 + \frac{1}{x} + x$



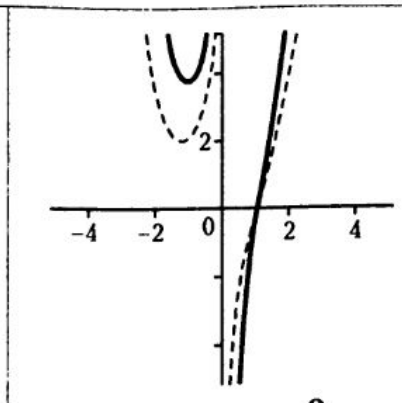
491 $y = x^3 + 1$



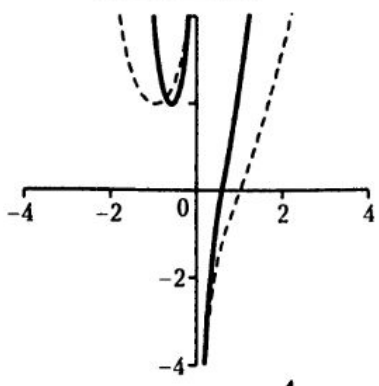
492 $y = x + \frac{1}{x^2}$



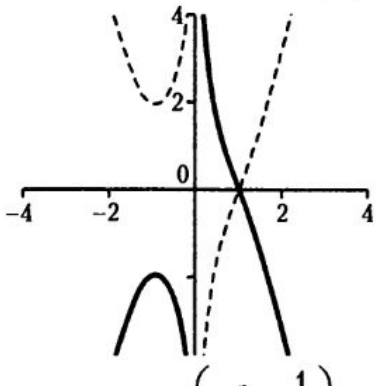
493 $y = x^2 - \dfrac{1}{x}$



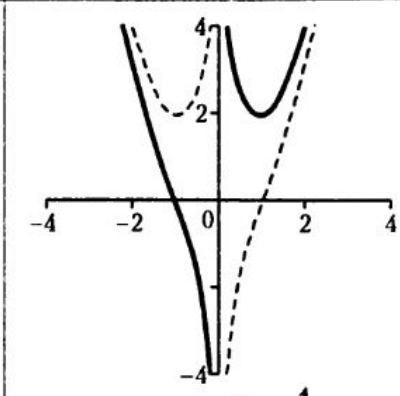
494 $y = 2x^2 - \dfrac{2}{x}$



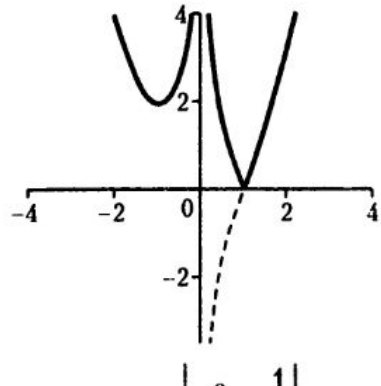
495 $y = 4x^2 - \dfrac{1}{2x}$



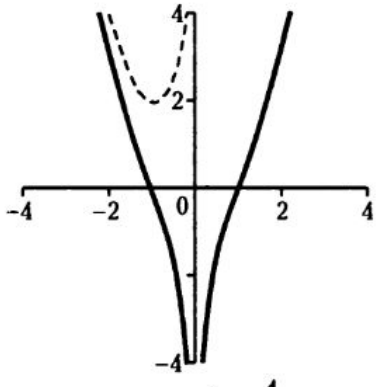
496 $y = -\left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)$



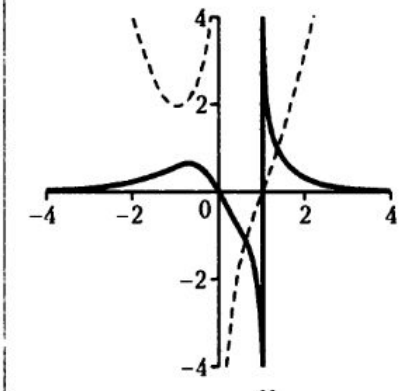
497 $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$



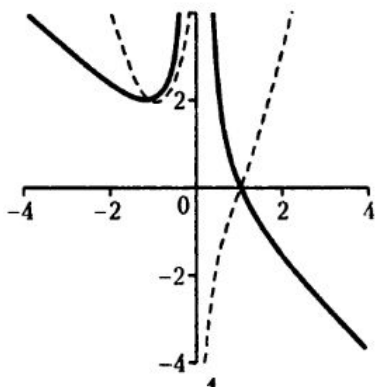
498 $y = \left|x^2 - \dfrac{1}{x}\right|$



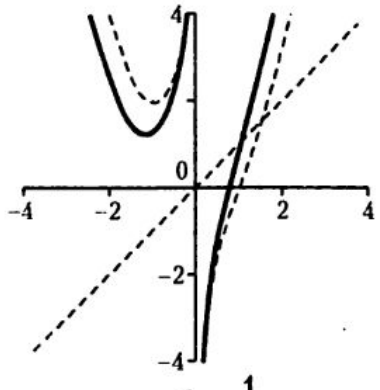
499 $y = x^2 - \dfrac{1}{|x|}$



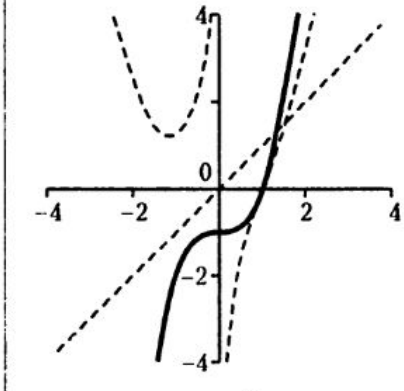
500 $y = \dfrac{x}{x^3 - 1}$



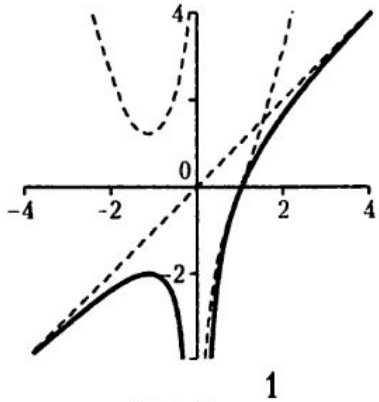
501 $y = \dfrac{1}{x^2} - x$



502 $y = x^2 - \dfrac{1}{x} + x$

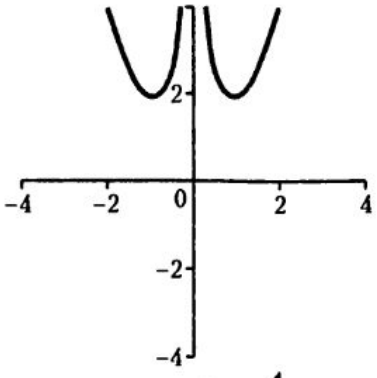


503 $y = x^3 - 1$

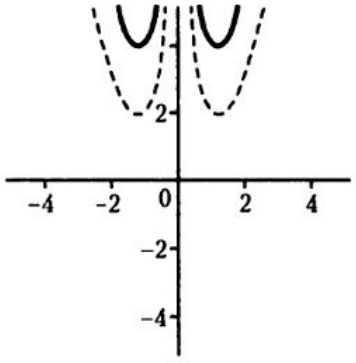


504 $y = x - \dfrac{1}{x^2}$

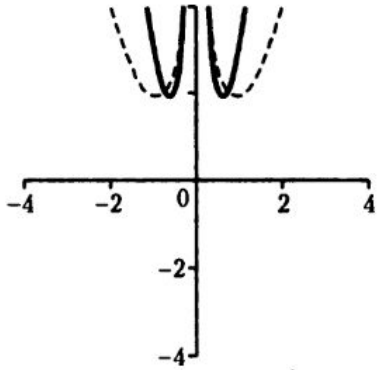
505 $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$



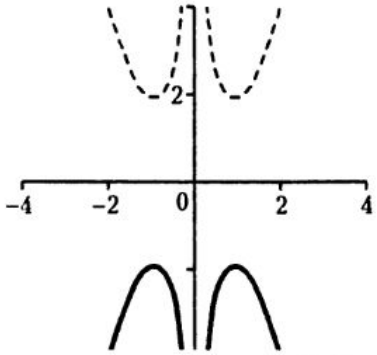
506 $y = 2x^2 + \frac{2}{x^2}$



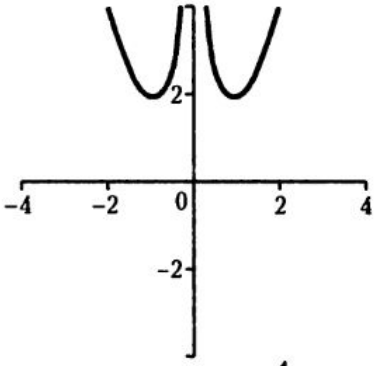
507 $y = 4x^2 + \frac{1}{4x^2}$



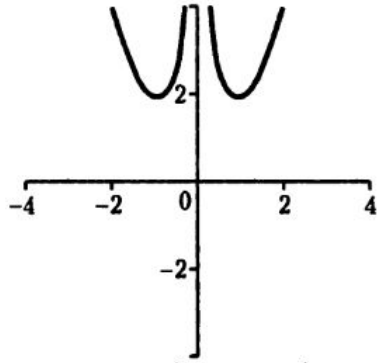
508 $y = -\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$



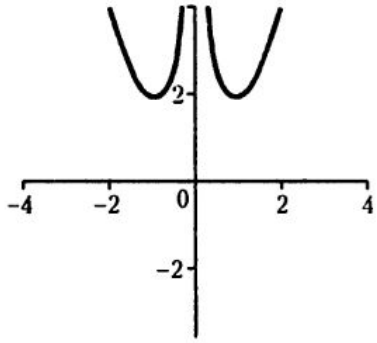
509 $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$



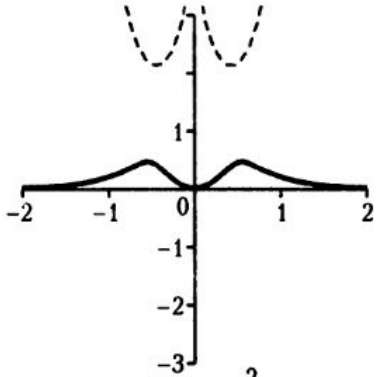
510 $y = \left|x^2 + \frac{1}{x^2}\right|$



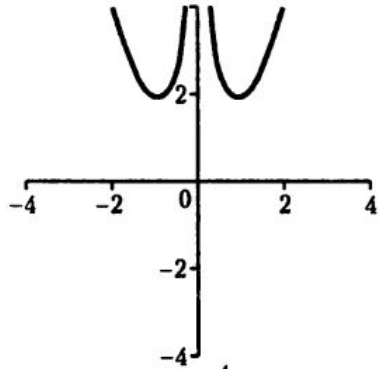
511 $y = |x|^2 + \frac{1}{|x|^2}$



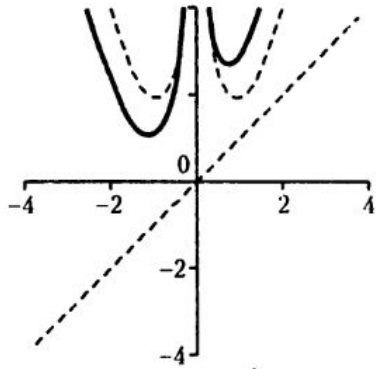
512 $y = \frac{x^2}{x^4 + 1}$



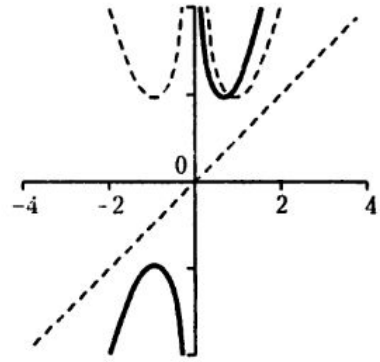
513 $y = \frac{1}{x^2} + x^2$



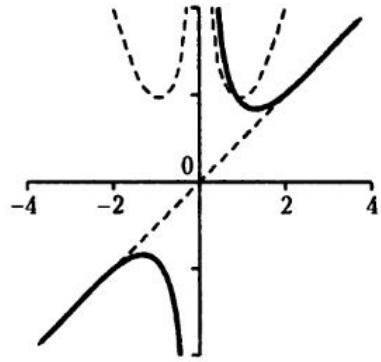
514 $y = x^2 + \frac{1}{x^2} + x$

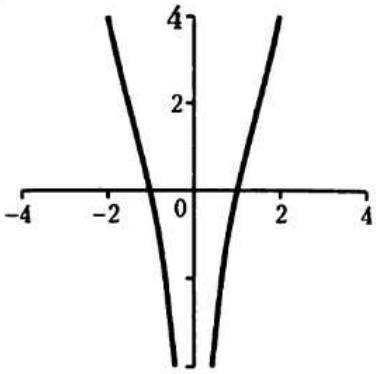


515 $y = x^3 + \frac{1}{x}$

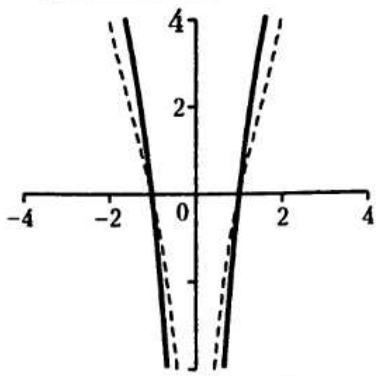


516 $y = x + \frac{1}{x^3}$

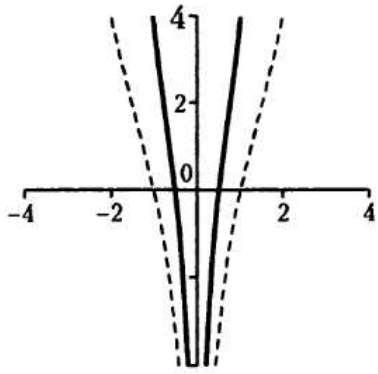




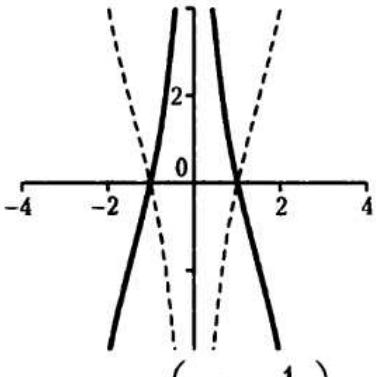
517 $y = x^2 - \dfrac{1}{x^2}$



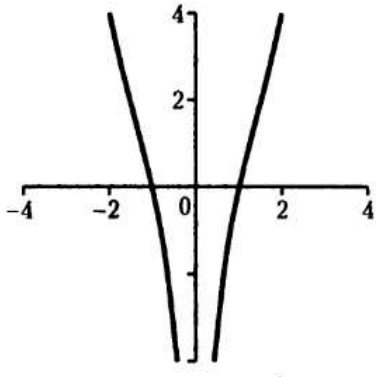
518 $y = 2x^2 - \dfrac{2}{x^2}$



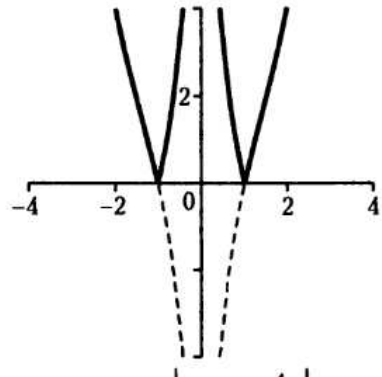
519 $y = 4x^2 - \dfrac{1}{4x^2}$



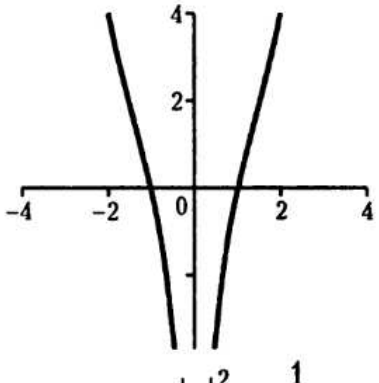
520 $y = -\left(x^2 - \dfrac{1}{x^2}\right)$



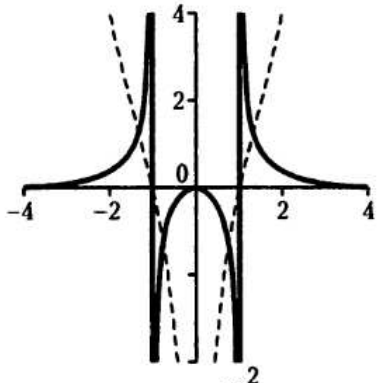
521 $y = x^2 - \dfrac{1}{x^2}$



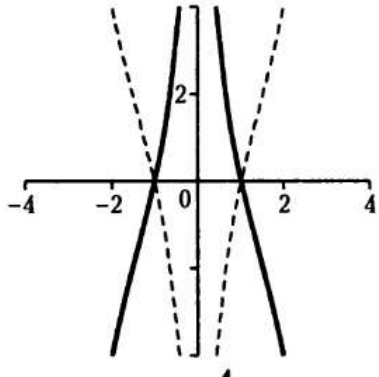
522 $y = \left|x^2 - \dfrac{1}{x^2}\right|$



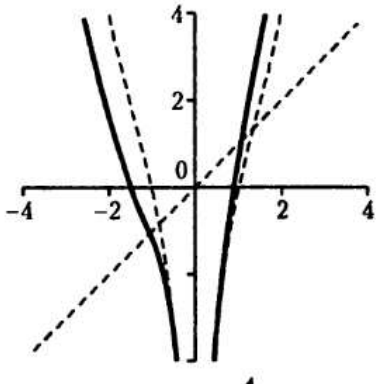
523 $y = |x|^2 - \dfrac{1}{|x|^2}$



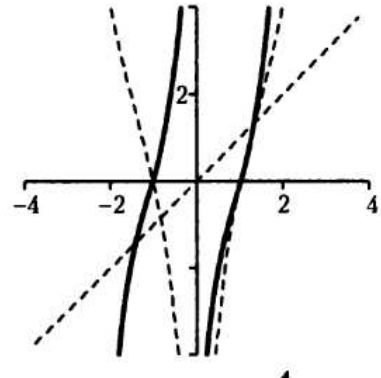
524 $y = \dfrac{x^2}{x^4 - 1}$



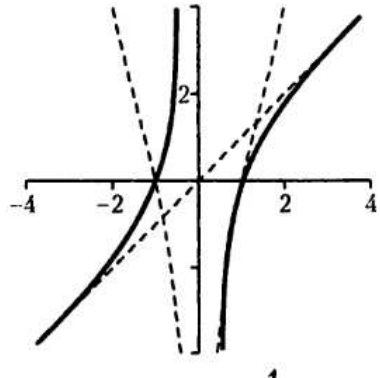
525 $y = \dfrac{1}{x^2} - x^2$



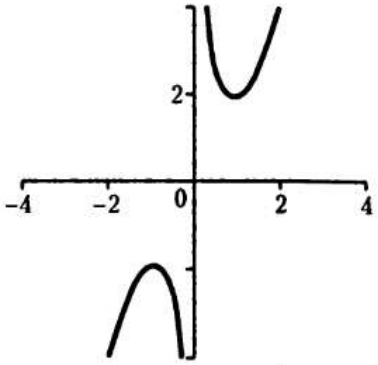
526 $y = x^2 - \dfrac{1}{x^2} + x$



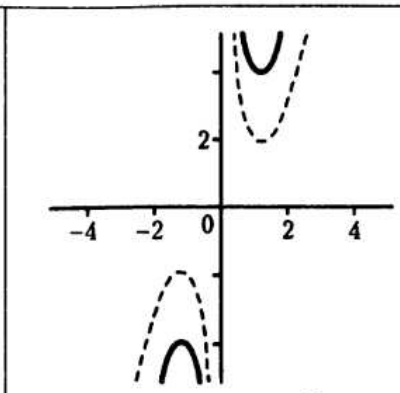
527 $y = x^3 - \dfrac{1}{x}$



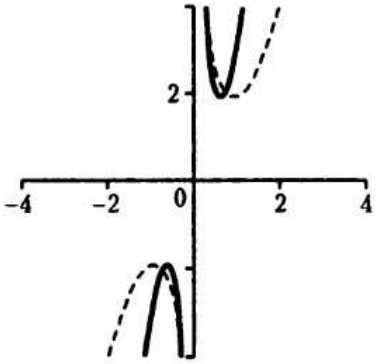
528 $y = x - \dfrac{1}{x^3}$



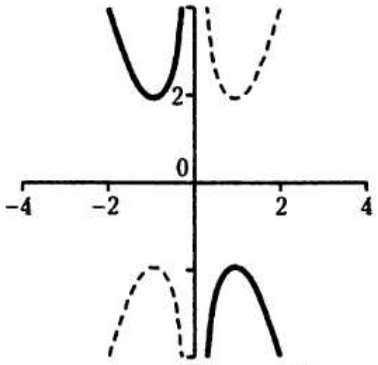
529 $y = x^3 + \frac{1}{x}$



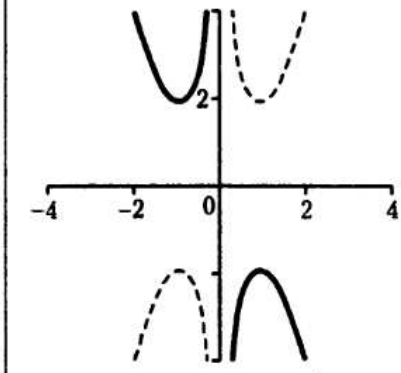
530 $y = 2x^3 + \frac{2}{x}$



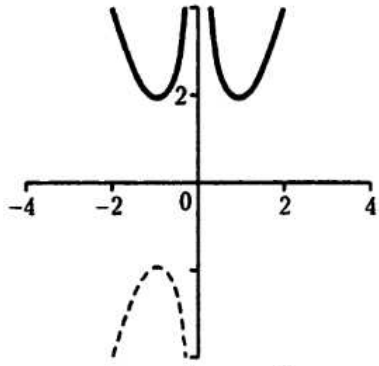
531 $y = 8x^3 + \frac{1}{2x}$



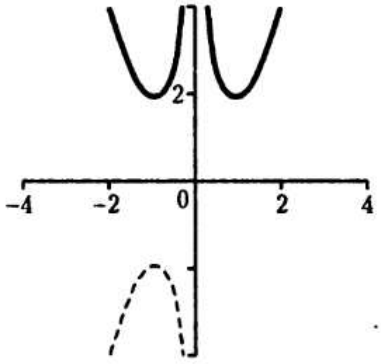
532 $y = -\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)$



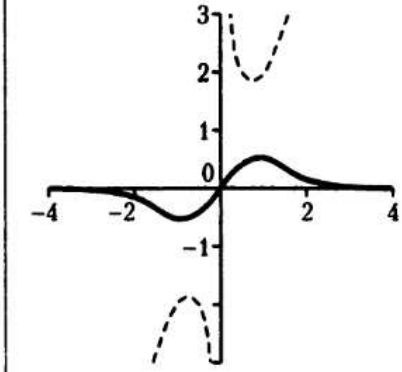
533 $y = -x^3 - \frac{1}{x}$



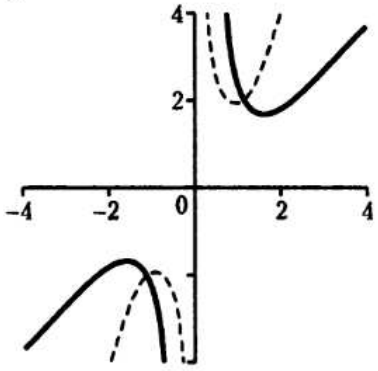
534 $y = \left|x^3 + \frac{1}{x}\right|$



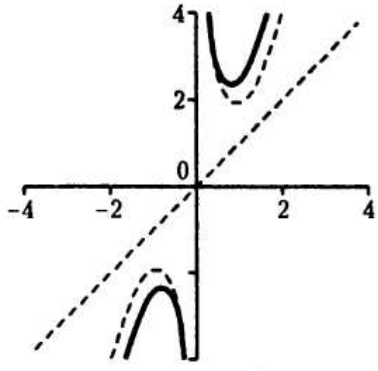
535 $y = |x|^3 + \frac{1}{|x|}$



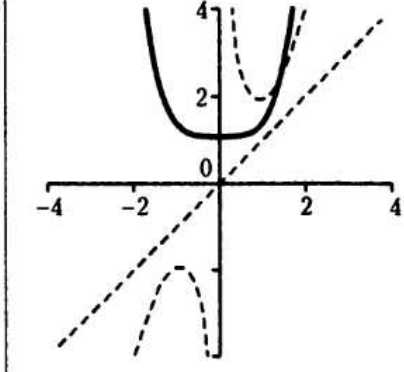
536 $y = \frac{x}{x^4 + 1}$



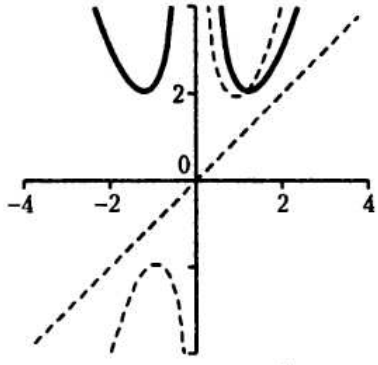
537 $y = \frac{1}{x^3} + x$



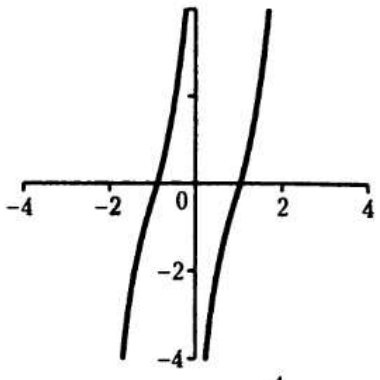
538 $y = x^3 + \frac{1}{x} + x$



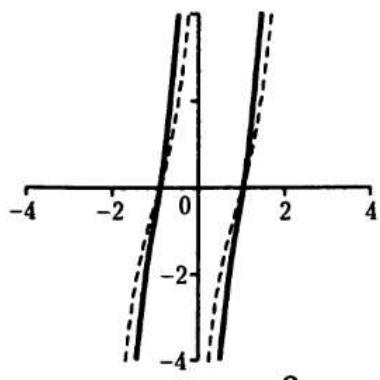
539 $y = x^4 + 1$



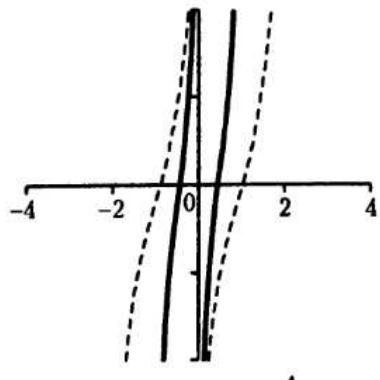
540 $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$



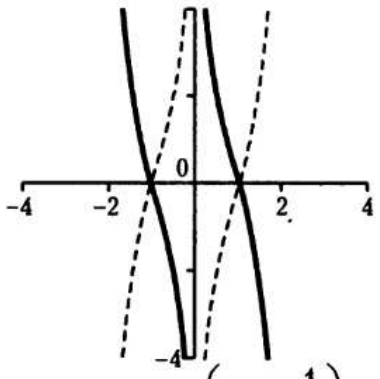
541 $y = x^3 - \frac{1}{x}$



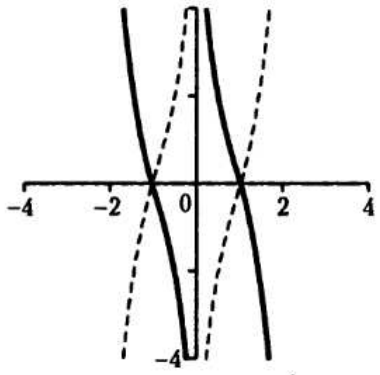
542 $y = 2x^3 - \frac{2}{x}$



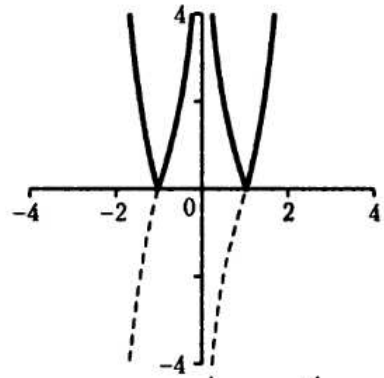
543 $y = 8x^3 - \frac{1}{2x}$



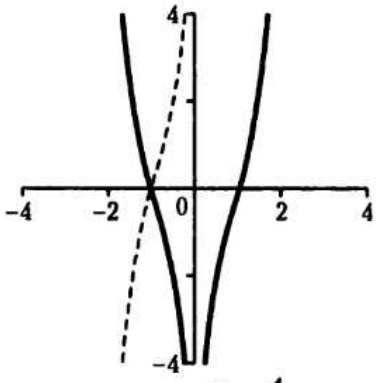
544 $y = -\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)$



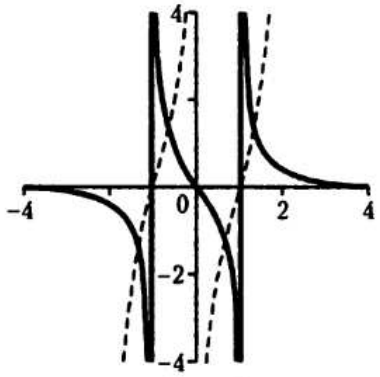
545 $y = -x^3 + \frac{1}{x}$



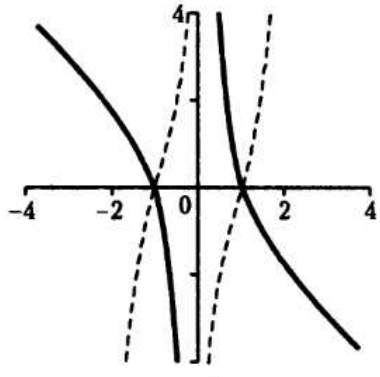
546 $y = \left|x^3 - \frac{1}{x}\right|$



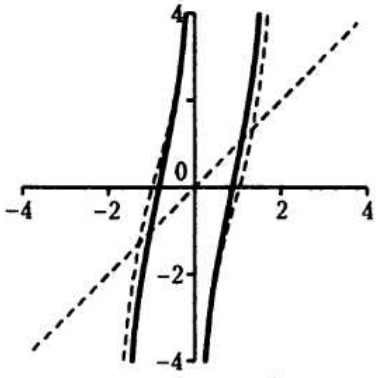
547 $y = |x|^3 - \frac{1}{|x|}$



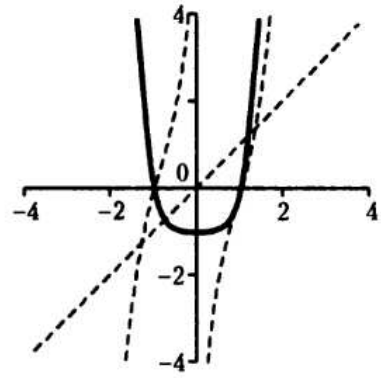
548 $y = \frac{x}{x^4 - 1}$



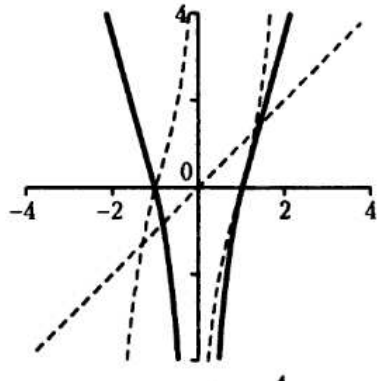
549 $y = \frac{1}{x^3} - x$



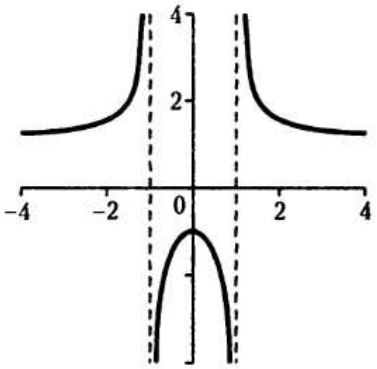
550 $y = x^3 - \frac{1}{x} + x$



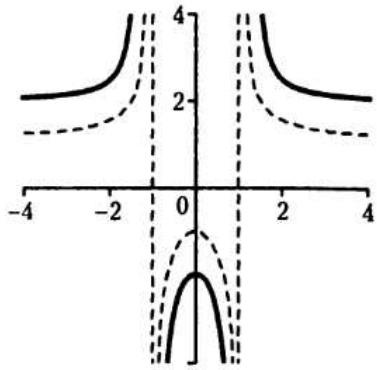
551 $y = x^4 - 1$



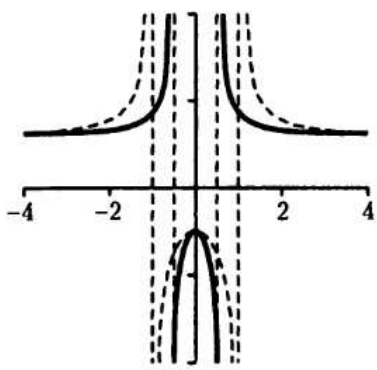
552 $y = x^2 - \frac{1}{x^2}$



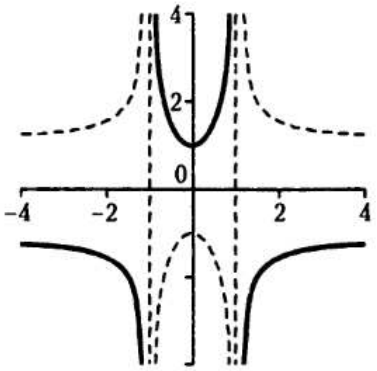
553 $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$



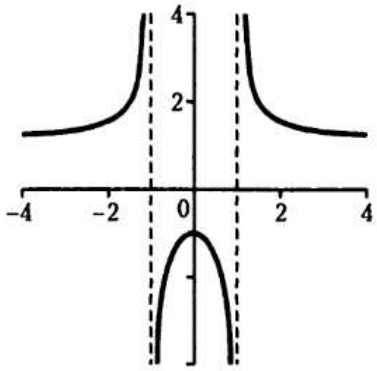
554 $y = \dfrac{2x^2+2}{x^2-1}$



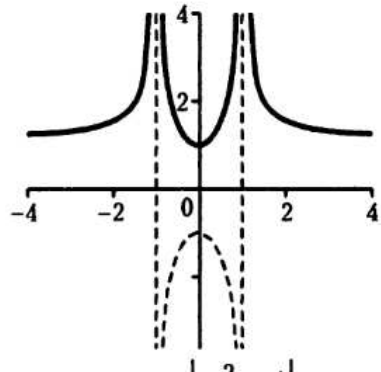
555 $y = \dfrac{4x^2+1}{4x^2-1}$



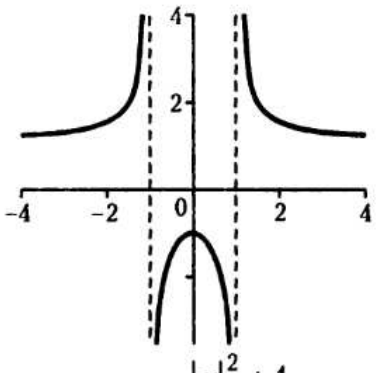
556 $y = -\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$



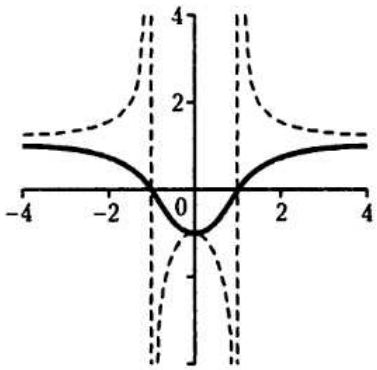
557 $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$



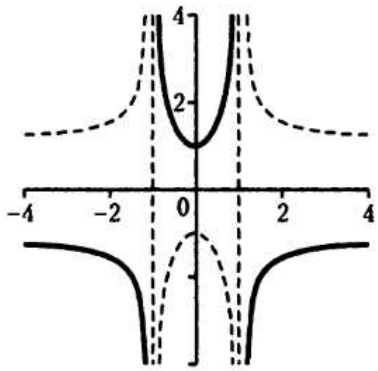
558 $y = \left|\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right|$



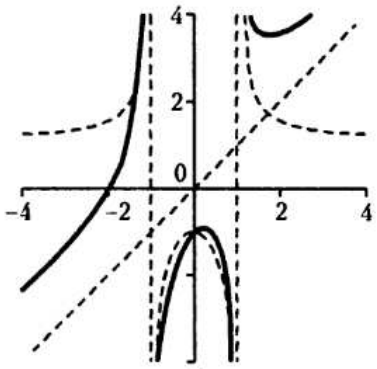
559 $y = \dfrac{|x|^2+1}{|x|^2-1}$



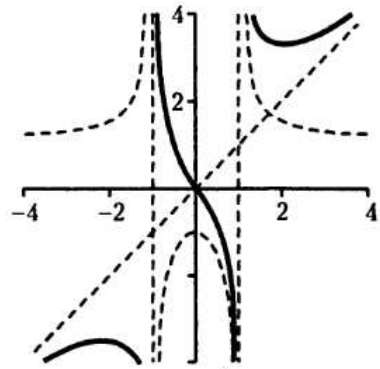
560 $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$



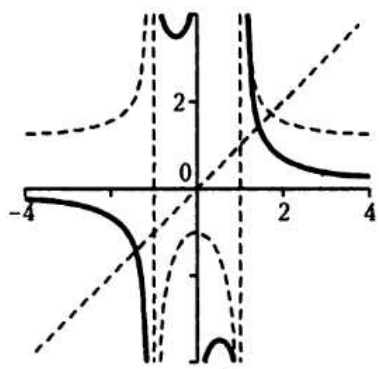
561 $y = \dfrac{x^2+1}{1-x^2}$



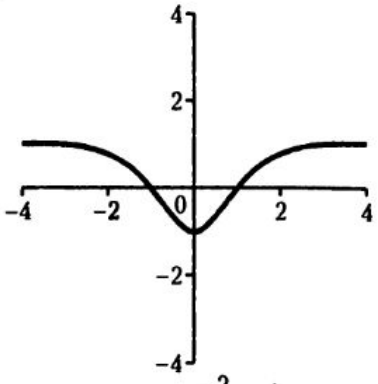
562 $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1} + x$



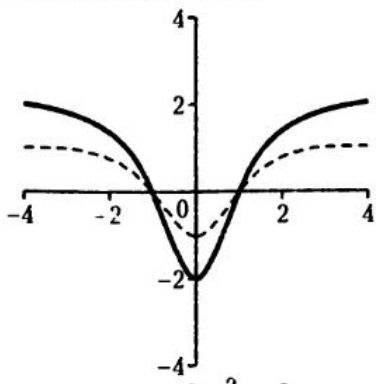
563 $y = \dfrac{x^3+x}{x^2-1}$



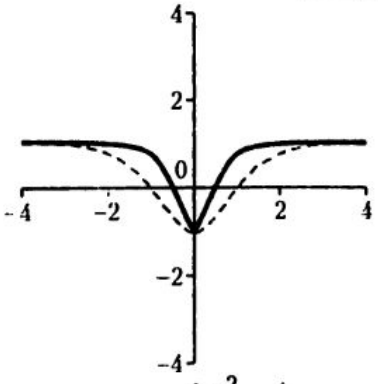
564 $y = \dfrac{x^2+1}{x^3-x}$



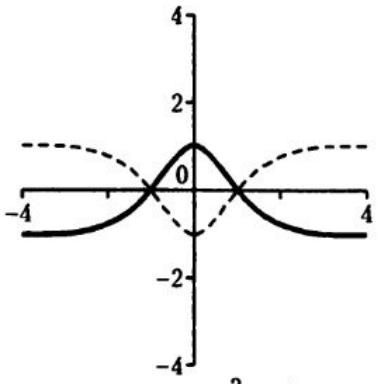
565 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$



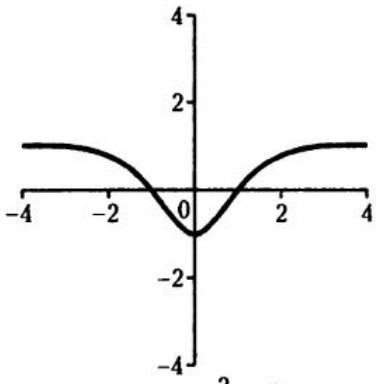
566 $y = \dfrac{2x^2 - 2}{x^2 + 1}$



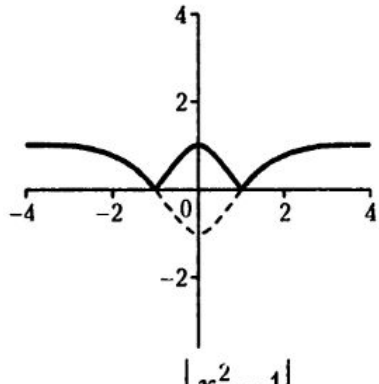
567 $y = \dfrac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1}$



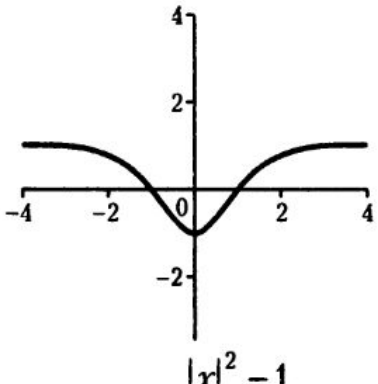
568 $y = -\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$



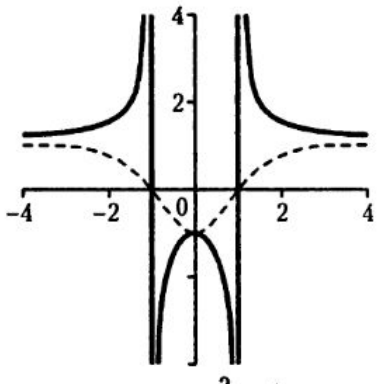
569 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$



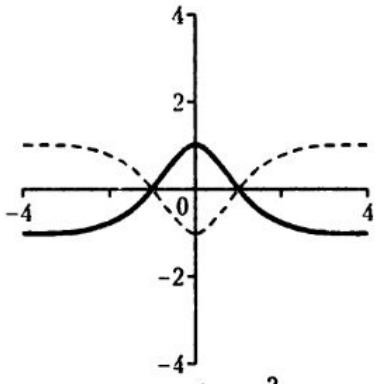
570 $y = \left|\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right|$



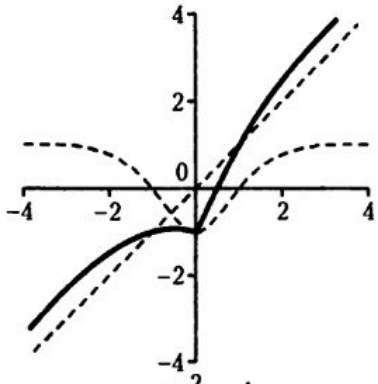
571 $y = \dfrac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1}$



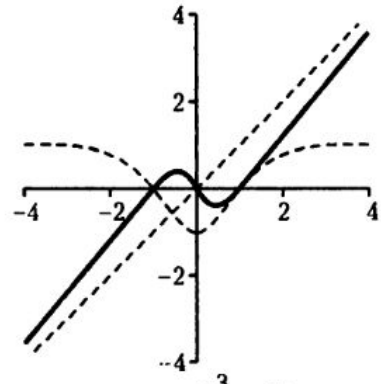
572 $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$



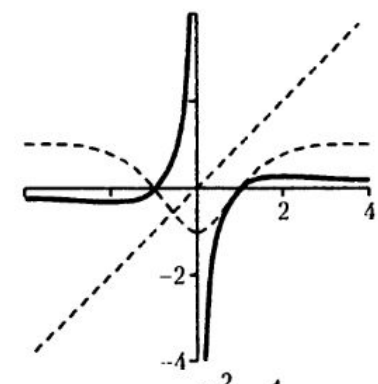
573 $y = \dfrac{1 - x^2}{x^2 + 1}$



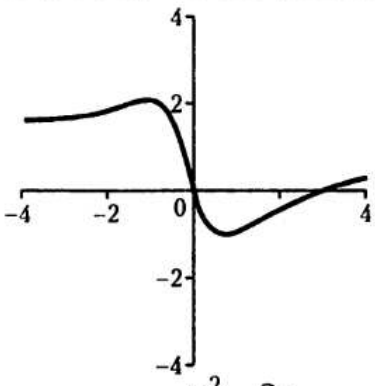
574 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + x$



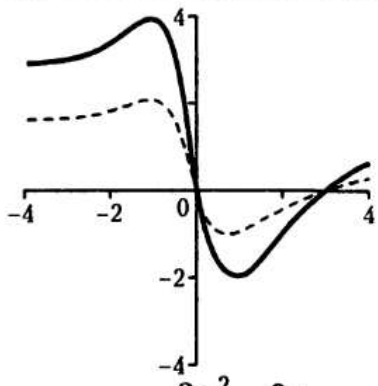
575 $y = \dfrac{x^3 - x}{x^2 + 1}$



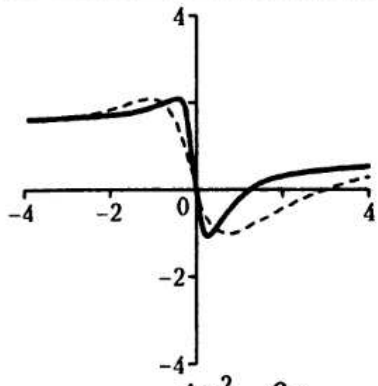
576 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 + x}$



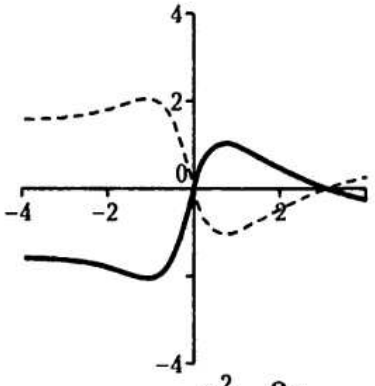
577 $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 + 1}$



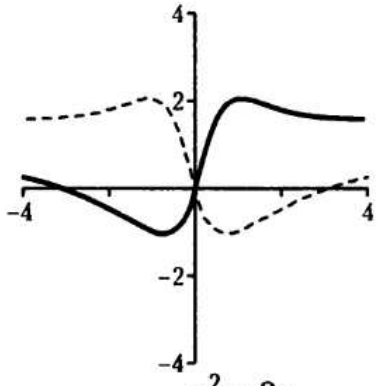
578 $y = \dfrac{2x^2 - 6x}{x^2 + 1}$



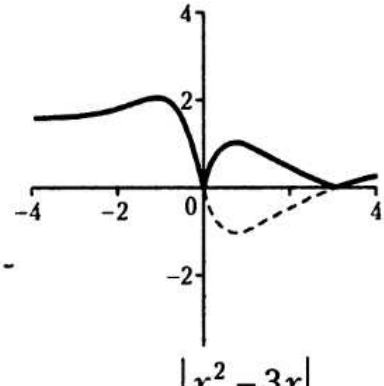
579 $y = \dfrac{4x^2 - 6x}{4x^2 + 1}$



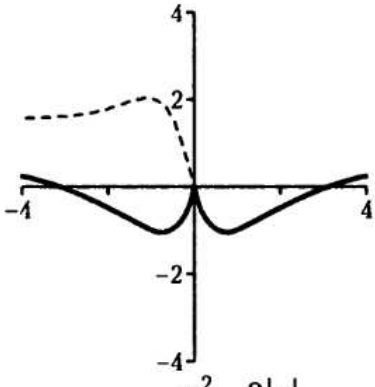
580 $y = -\dfrac{x^2 - 3x}{x^2 + 1}$



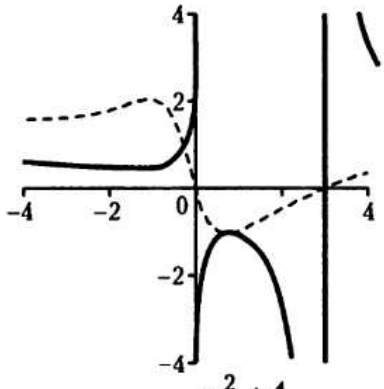
581 $y = \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 + 1}$



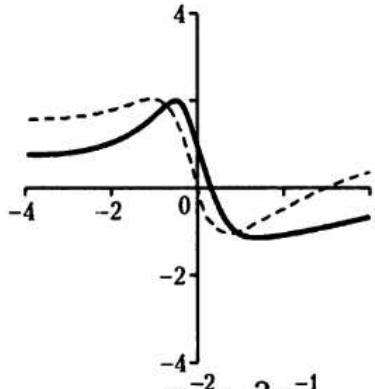
582 $y = \left|\dfrac{x^2 - 3x}{x^2 + 1}\right|$



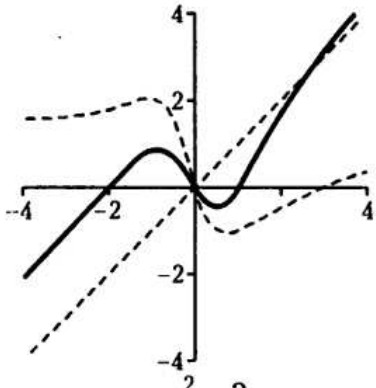
583 $y = \dfrac{x^2 - 3|x|}{x^2 + 1}$



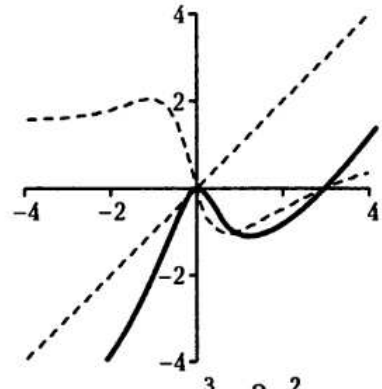
584 $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 3x}$



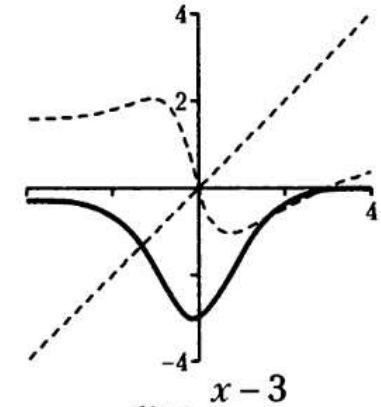
585 $y = \dfrac{x^{-2} - 3x^{-1}}{x^{-2} + 1}$



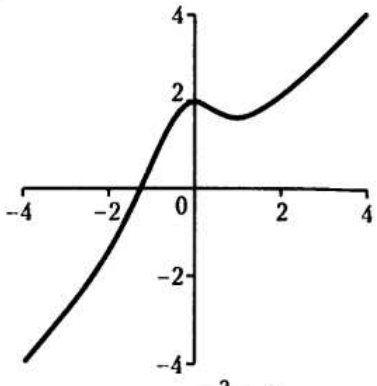
586 $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 + 1} + x$



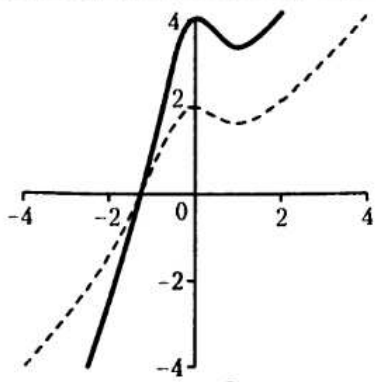
587 $y = \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 + 1}$



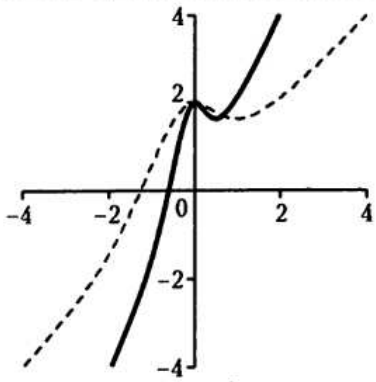
588 $y = \dfrac{x - 3}{x^2 + 1}$



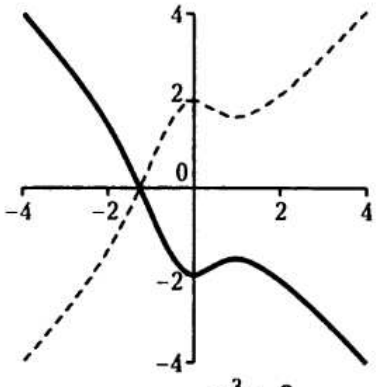
589 $y = \dfrac{x^3 + 2}{x^2 + 1}$



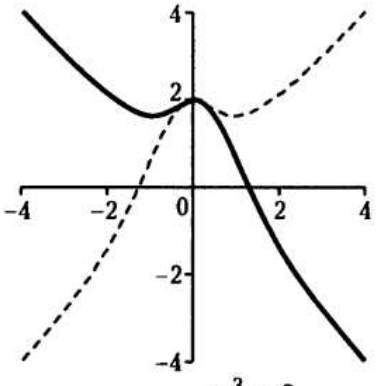
590 $y = \dfrac{2x^3 + 4}{x^2 + 1}$



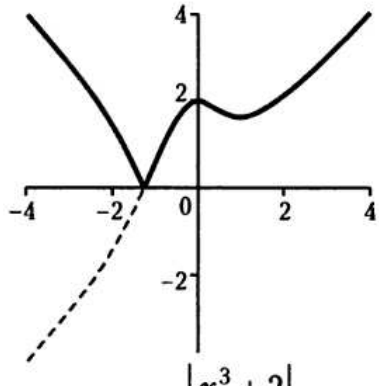
591 $y = \dfrac{8x^3 + 2}{4x^2 + 1}$



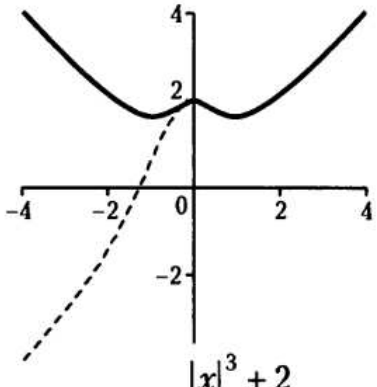
592 $y = -\dfrac{x^3 + 2}{x^2 + 1}$



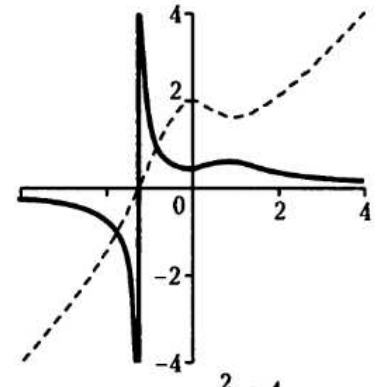
593 $y = \dfrac{-x^3 + 2}{x^2 + 1}$



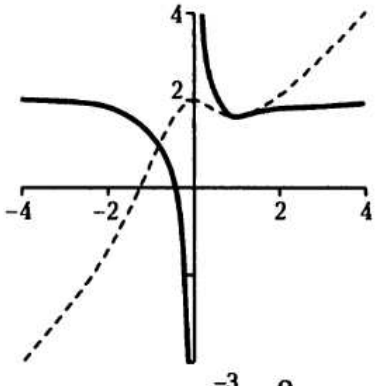
594 $y = \left|\dfrac{x^3 + 2}{x^2 + 1}\right|$



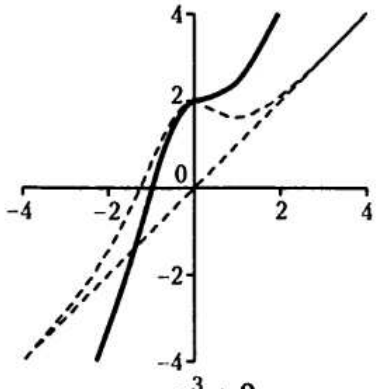
595 $y = \dfrac{|x|^3 + 2}{|x|^2 + 1}$



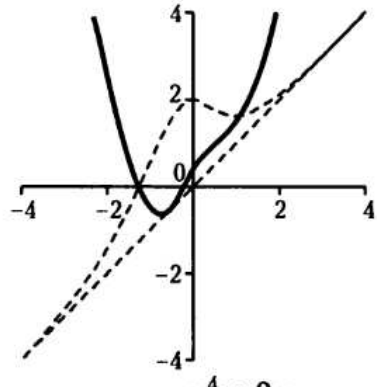
596 $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + 2}$



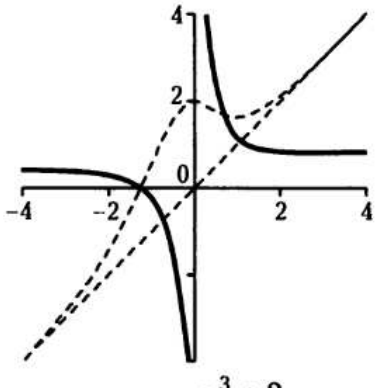
597 $y = \dfrac{x^{-3} + 2}{x^{-2} + 1}$



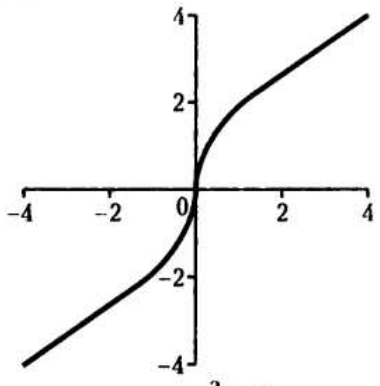
598 $y = \dfrac{x^3 + 2}{x^2 + 1} + x$



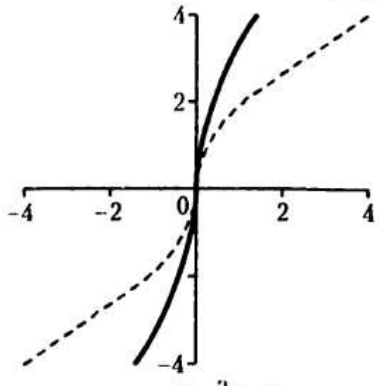
599 $y = \dfrac{x^4 + 2x}{x^2 + 1}$



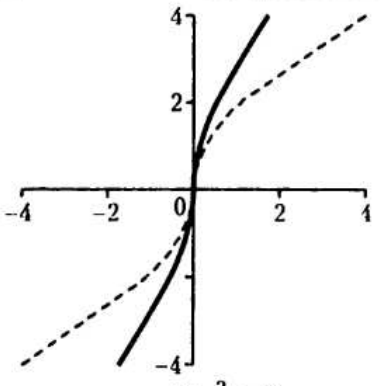
600 $y = \dfrac{x^3 + 2}{x^3 + x}$



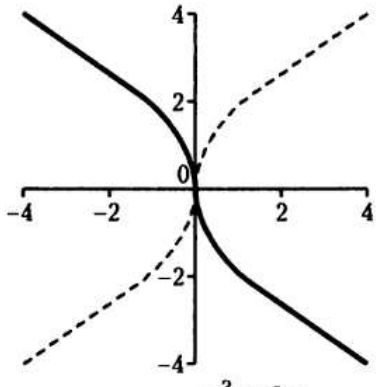
601 $y = \dfrac{x^3 + 3x}{x^2 + 1}$



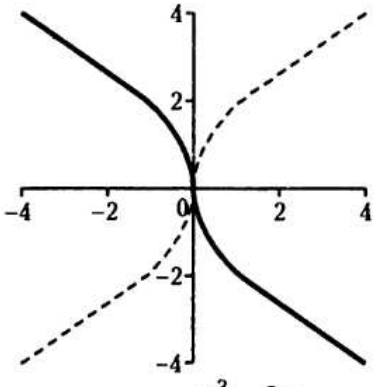
602 $y = \dfrac{2x^3 + 6x}{x^2 + 1}$



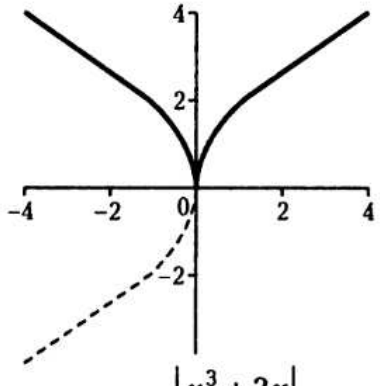
603 $y = \dfrac{8x^3 + 6x}{4x^2 + 1}$



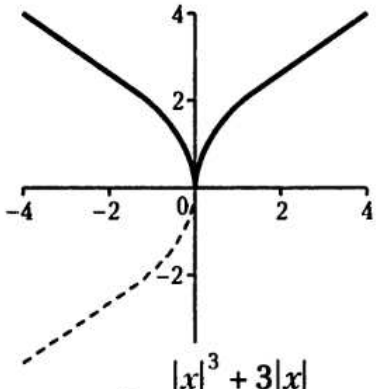
604 $y = -\dfrac{x^3 + 3x}{x^2 + 1}$



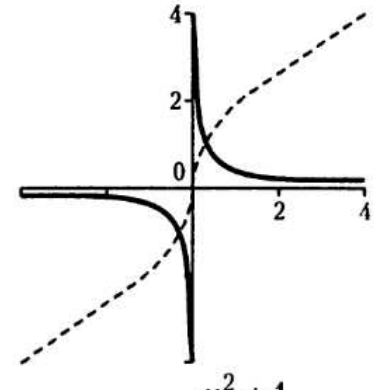
605 $y = \dfrac{-x^3 - 3x}{x^2 + 1}$



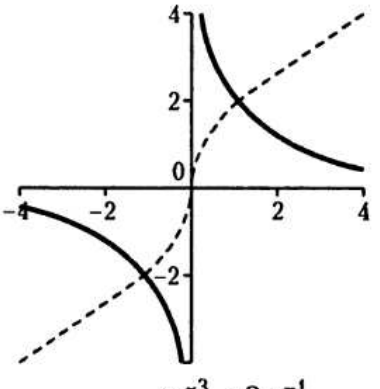
606 $y = \left|\dfrac{x^3 + 3x}{x^2 + 1}\right|$



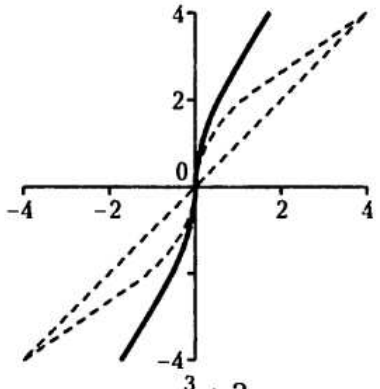
607 $y = \dfrac{|x|^3 + 3|x|}{|x|^2 + 1}$



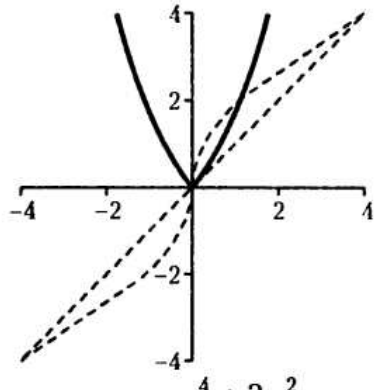
608 $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + 3x}$



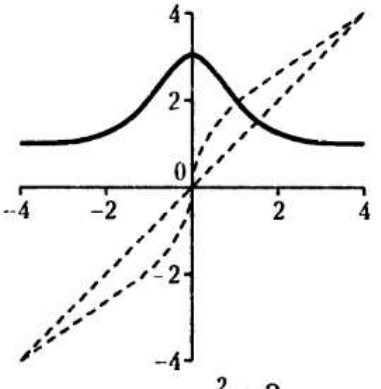
609 $y = \dfrac{x^{-3} + 3x^{-1}}{x^{-2} + 1}$



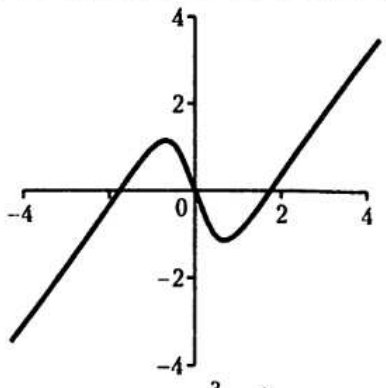
610 $y = \dfrac{x^3 + 3x}{x^2 + 1} + x$



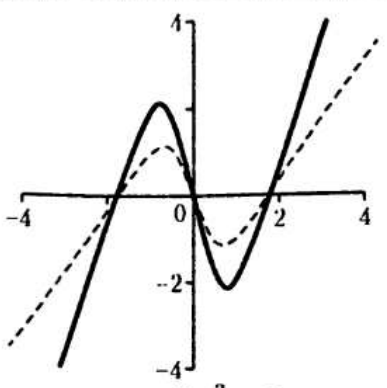
611 $y = \dfrac{x^4 + 3x^2}{x^2 + 1}$



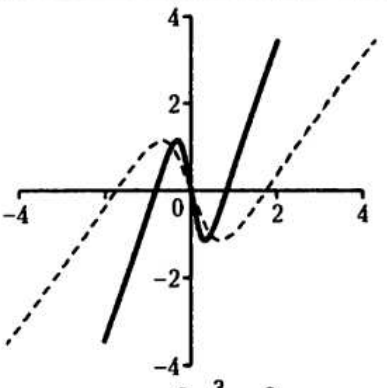
612 $y = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 + 1}$



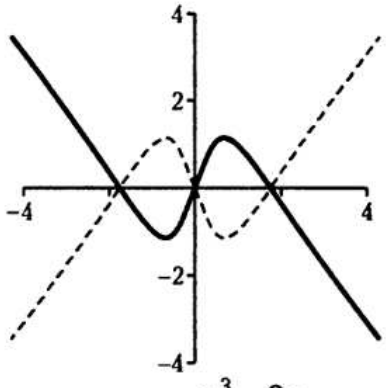
613 $y = \dfrac{x^3 - 3x}{x^2 + 1}$



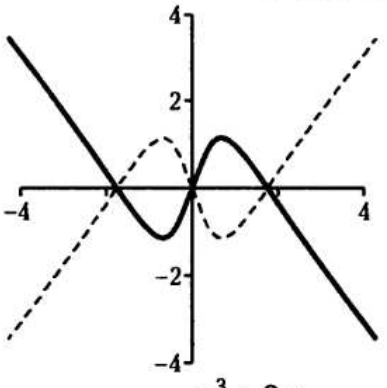
614 $y = \dfrac{2x^3 - 6x}{x^2 + 1}$



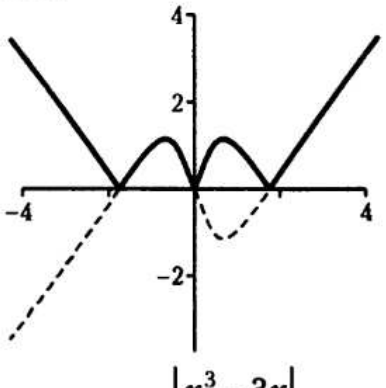
615 $y = \dfrac{8x^3 - 6x}{4x^2 + 1}$



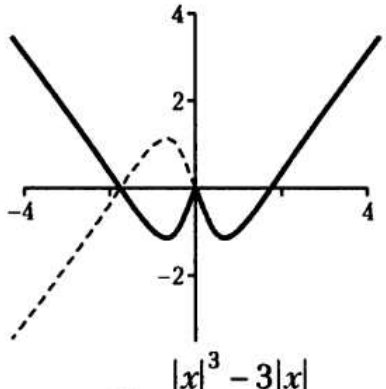
616 $y = -\dfrac{x^3 - 3x}{x^2 + 1}$



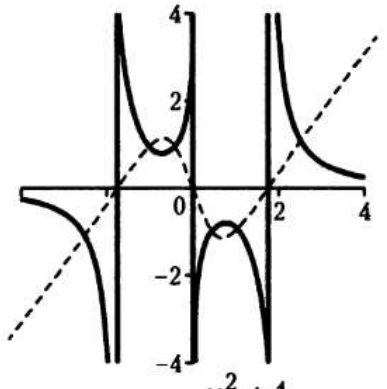
617 $y = \dfrac{-x^3 + 3x}{x^2 + 1}$



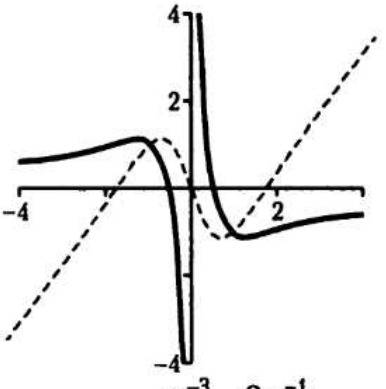
618 $y = \left|\dfrac{x^3 - 3x}{x^2 + 1}\right|$



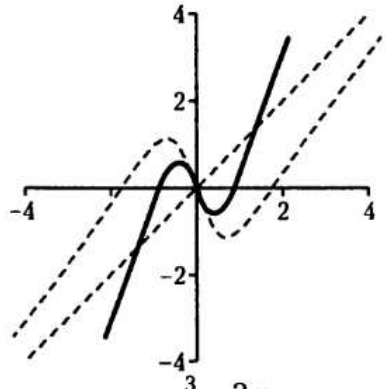
619 $y = \dfrac{|x|^3 - 3|x|}{|x|^2 + 1}$



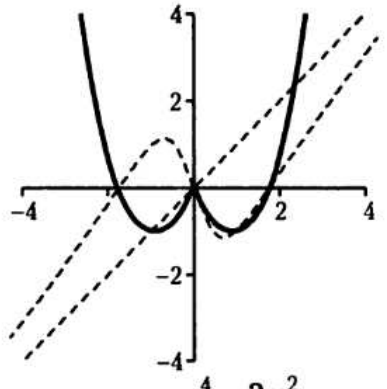
620 $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 - 3x}$



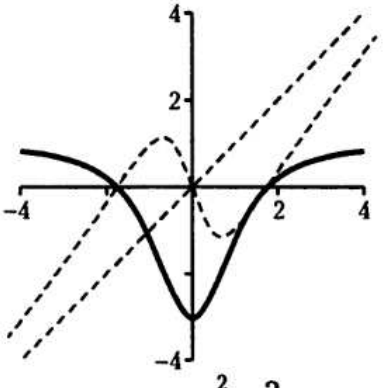
621 $y = \dfrac{x^{-3} - 3x^{-1}}{x^{-2} + 1}$



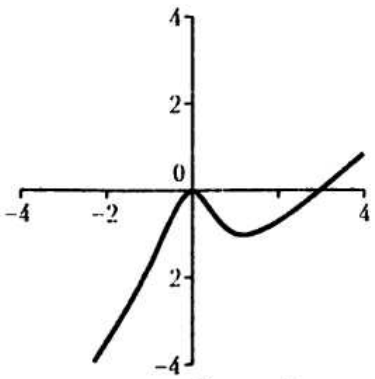
622 $y = \dfrac{x^3 - 3x}{x^2 + 1} + x$



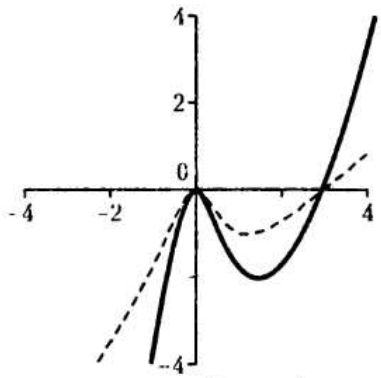
623 $y = \dfrac{x^4 - 3x^2}{x^2 + 1}$



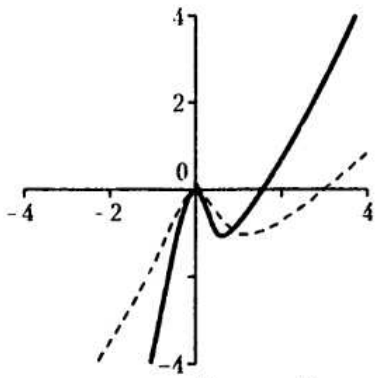
624 $y = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 1}$



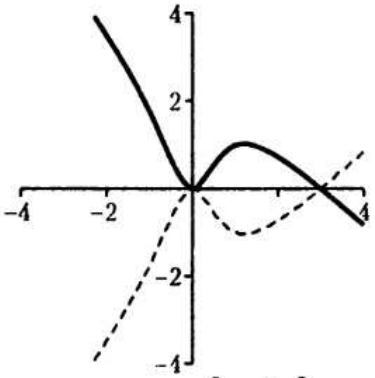
625 $y = \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 + 1}$



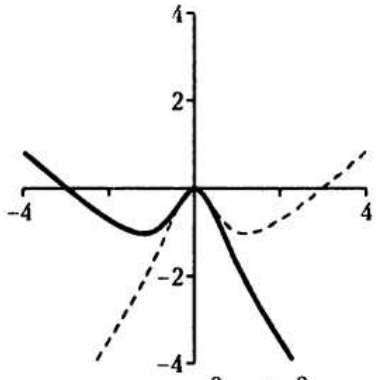
626 $y = \dfrac{2x^3 - 6x^2}{x^2 + 1}$



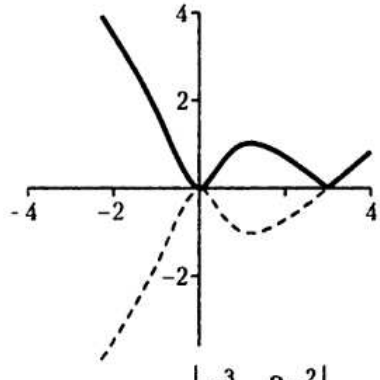
627 $y = \dfrac{8x^3 - 12x^2}{4x^2 + 1}$



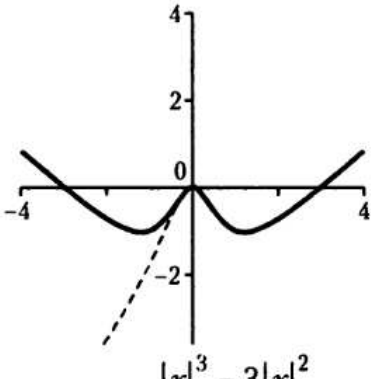
628 $y = -\dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 + 1}$



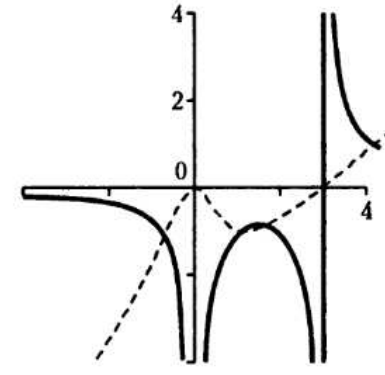
629 $y = -\dfrac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 1}$



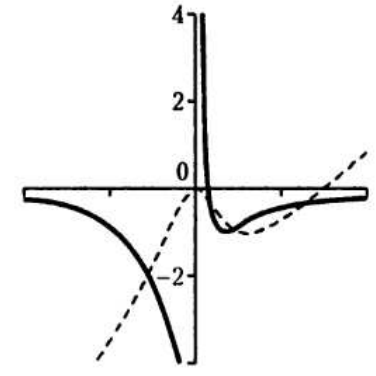
630 $y = \left|\dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 + 1}\right|$



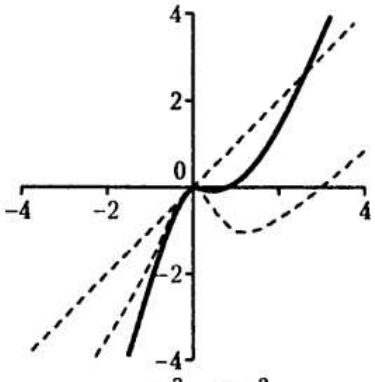
631 $y = \dfrac{|x|^3 - 3|x|^2}{|x|^2 + 1}$



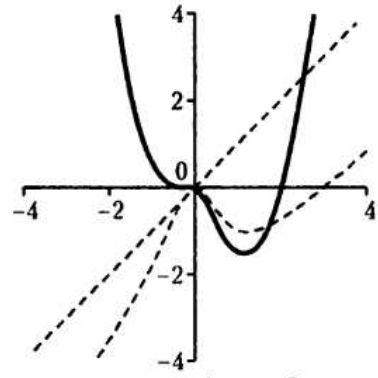
632 $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 - 3x^2}$



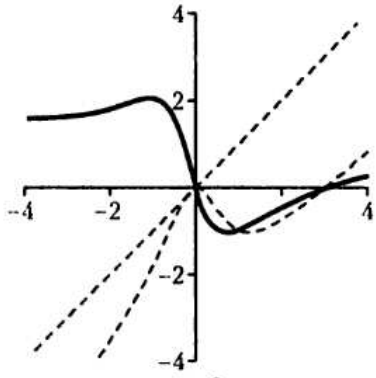
633 $y = \dfrac{x^{-3} - 3x^{-2}}{x^{-2} + 1}$



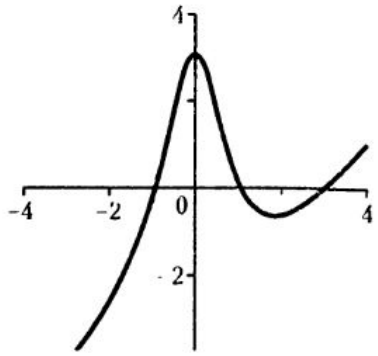
634 $y = \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 + 1} + x$



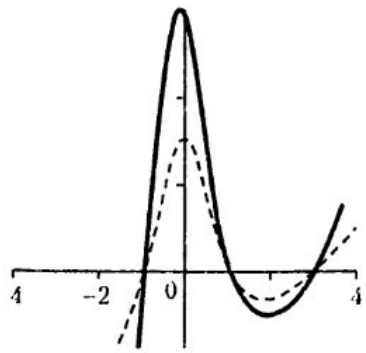
635 $y = \dfrac{x^4 - 3x^3}{x^2 + 1}$



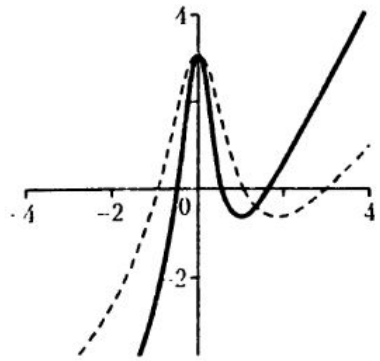
636 $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 + 1}$



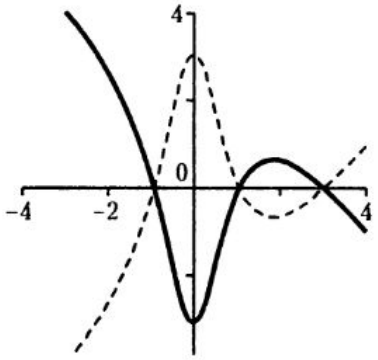
637 $y = \dfrac{(x-3)(x^2-1)}{x^2+1}$



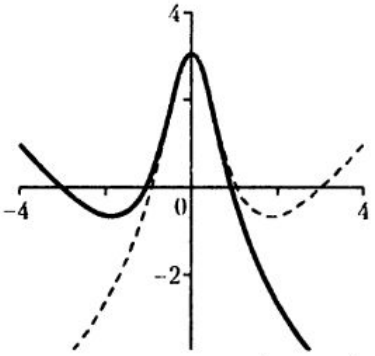
638 $y = \dfrac{2(x-3)(x^2-1)}{x^2+1}$



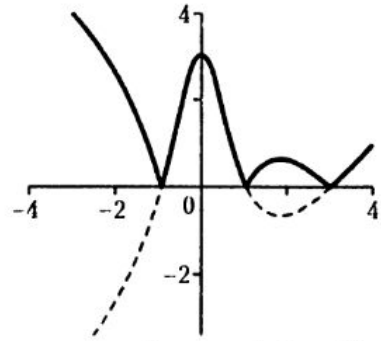
639 $y = \dfrac{(2x-3)(4x^2-1)}{4x^2+1}$



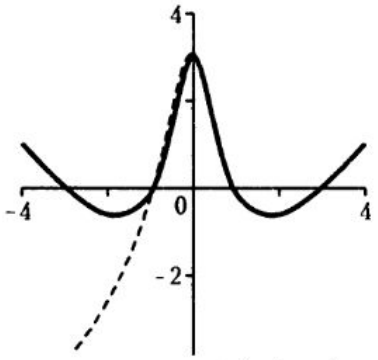
640 $y = -\dfrac{(x-3)(x^2-1)}{x^2+1}$



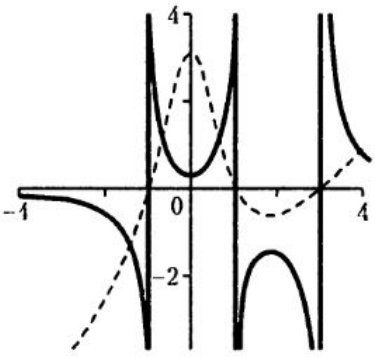
641 $y = -\dfrac{(x+3)(x^2-1)}{x^2+1}$



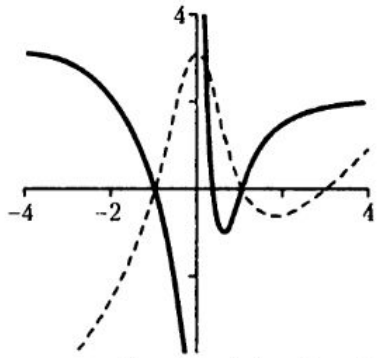
642 $y = \left|\dfrac{(x-3)(x^2-1)}{x^2+1}\right|$



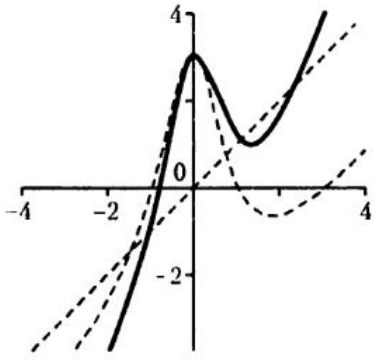
643 $y = \dfrac{(|x|-3)(x^2-1)}{x^2+1}$



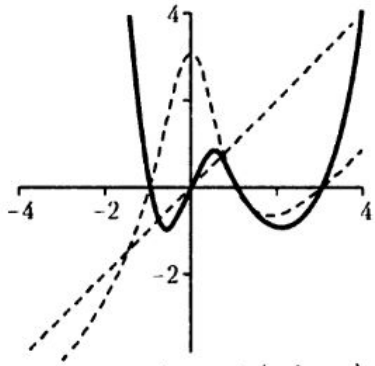
644 $y = \dfrac{x^2+1}{(x-3)(x^2-1)}$



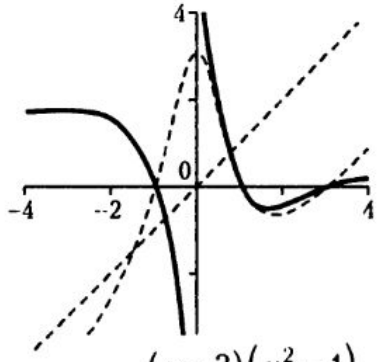
645 $y = \dfrac{(x^{-1}-3)(x^{-2}-1)}{x^{-2}+1}$



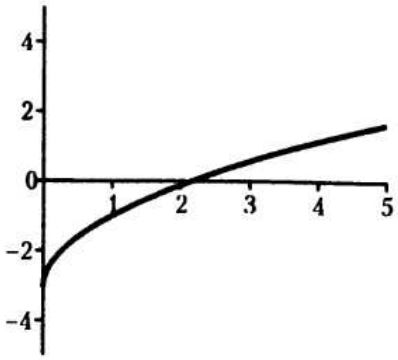
646 $y = \dfrac{(x-3)(x^2-1)}{x^2+1} + x$



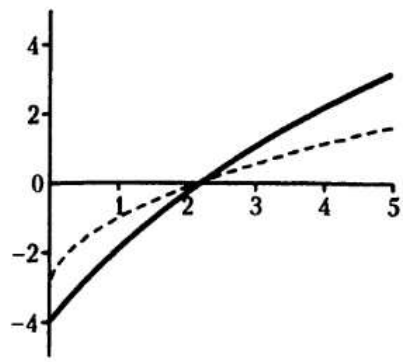
647 $y = \dfrac{x(x-3)(x^2-1)}{x^2+1}$



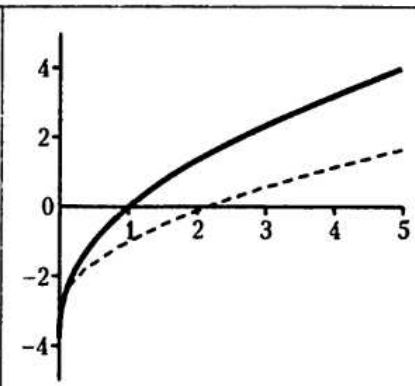
648 $y = \dfrac{(x-3)(x^2-1)}{x(x^2+1)}$



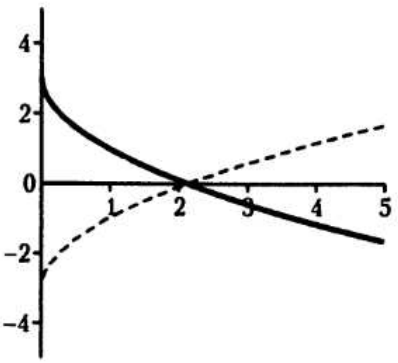
649 $y = 2\sqrt{x} - 3$



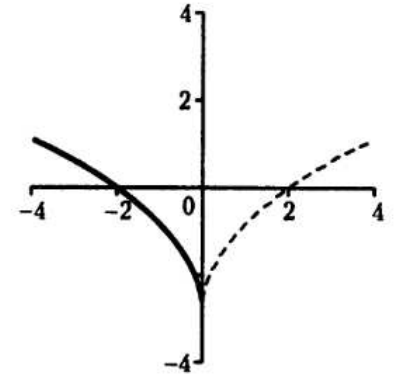
650 $y = 4\sqrt{x} - 6$



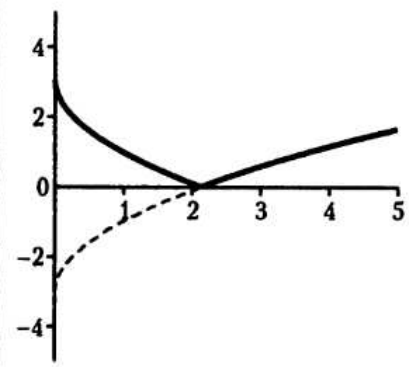
651 $y = 2\sqrt{2x} - 3$



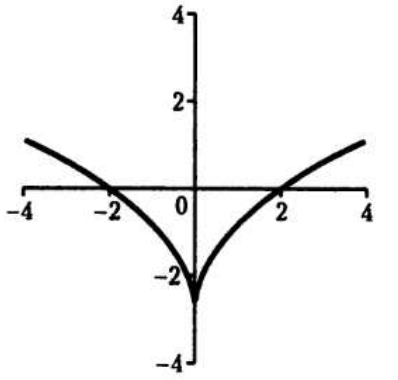
652 $y = 3 - 2\sqrt{x}$



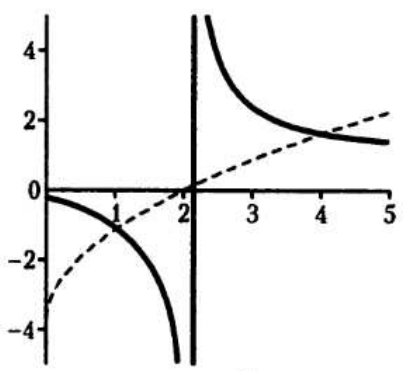
653 $y = 2\sqrt{-x} - 3$



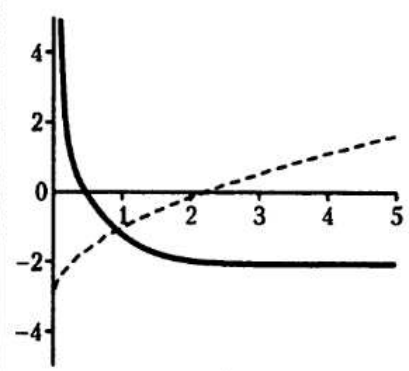
654 $y = \left|2\sqrt{x} - 3\right|$



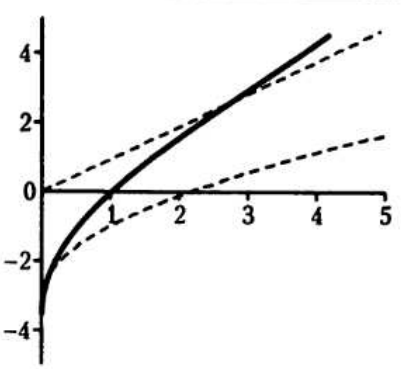
655 $y = 2\sqrt{|x|} - 3$



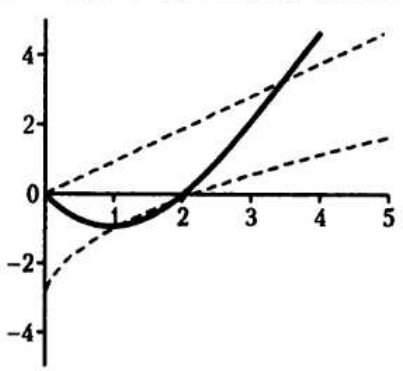
656 $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x} - 3}$



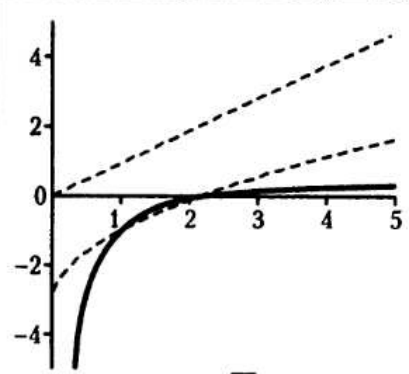
657 $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 3$



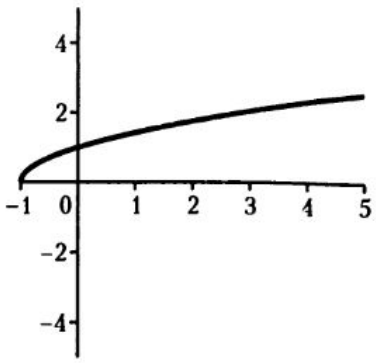
658 $y = 2\sqrt{x} + x - 3$



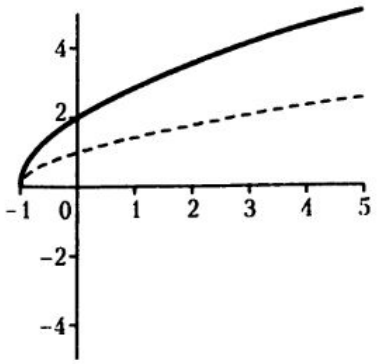
659 $y = x\left(2\sqrt{x} - 3\right)$



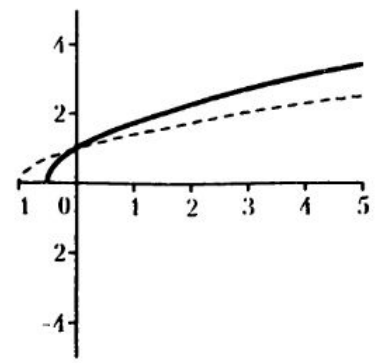
660 $y = \dfrac{2\sqrt{x} - 3}{x}$



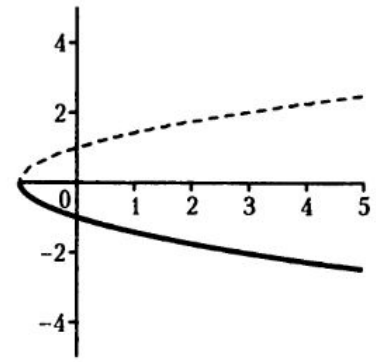
661 $y = \sqrt{x+1}$



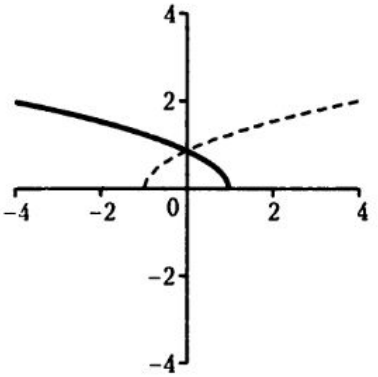
662 $y = 2\sqrt{x+1}$



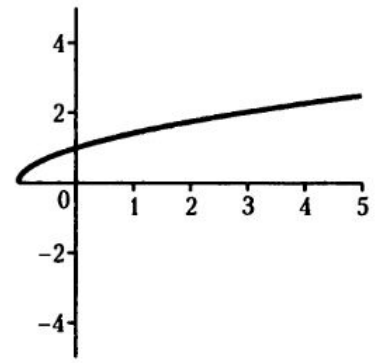
663 $y = \sqrt{2x+1}$



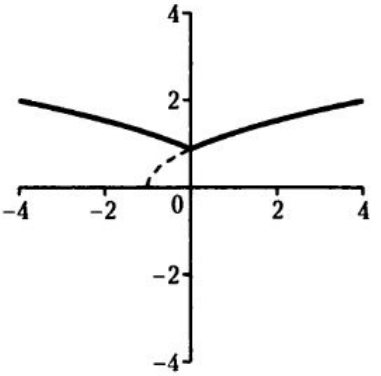
664 $y = -\sqrt{x+1}$



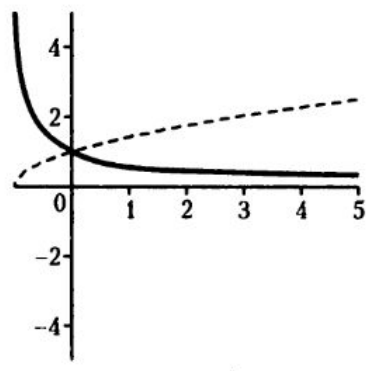
665 $y = \sqrt{-x+1}$



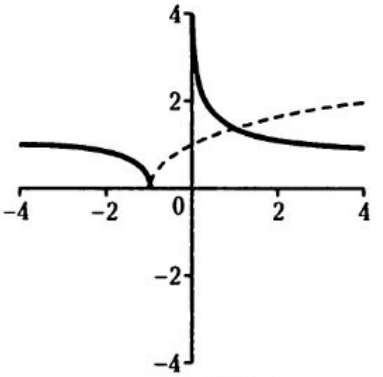
666 $y = \left|\sqrt{x+1}\right|$



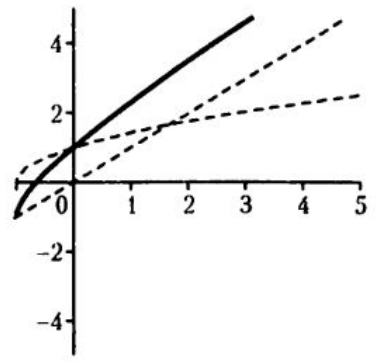
667 $y = \sqrt{|x|+1}$



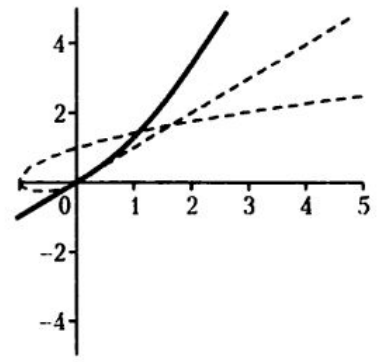
668 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$



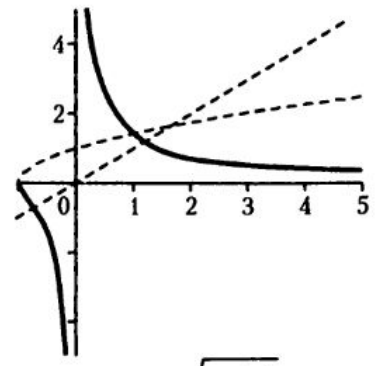
669 $y = \sqrt{\dfrac{1}{x}+1}$



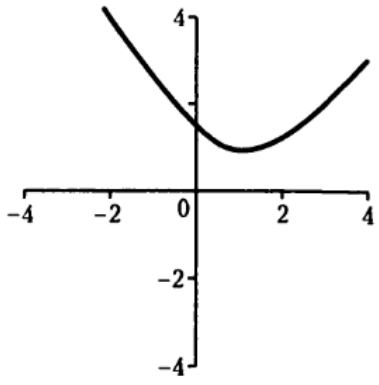
670 $y = \sqrt{x+1} + x$



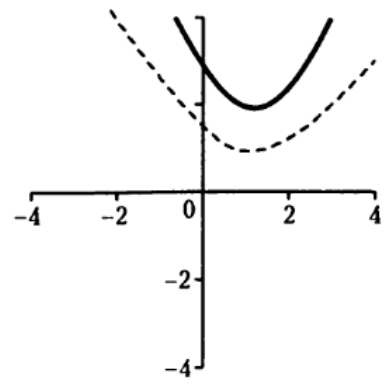
671 $y = x\sqrt{x+1}$



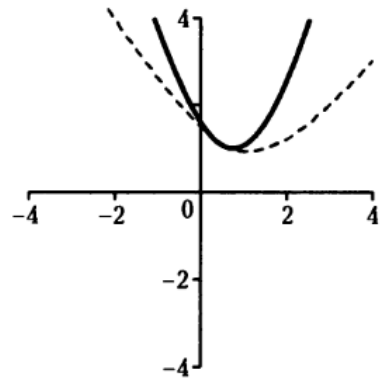
672 $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$



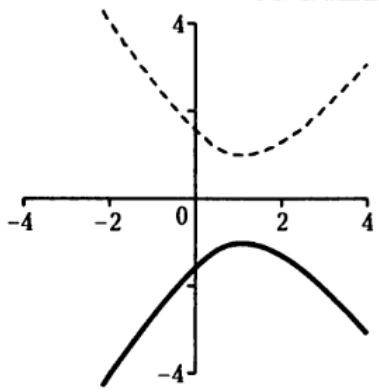
673 $y = \sqrt{1+(x-1)^2}$



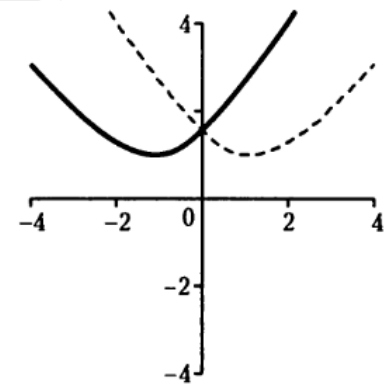
674 $y = 2\sqrt{1+(x-1)^2}$



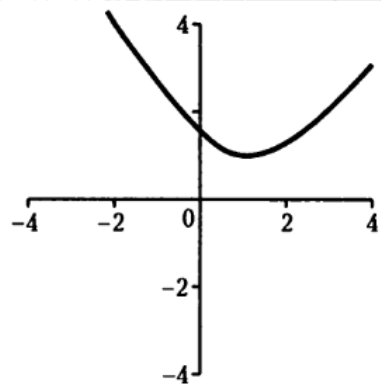
675 $y = \sqrt{1+(2x-1)^2}$



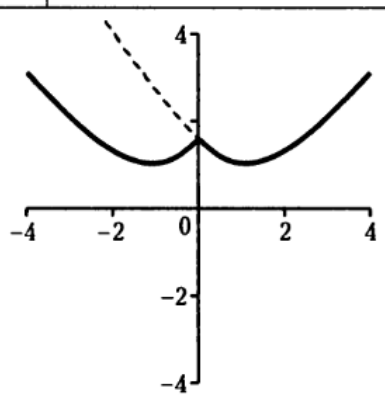
676 $y = -\sqrt{1+(x-1)^2}$



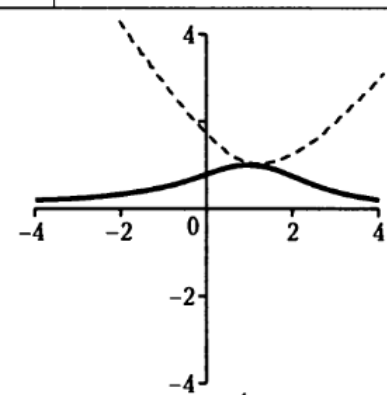
677 $y = \sqrt{1+(x+1)^2}$



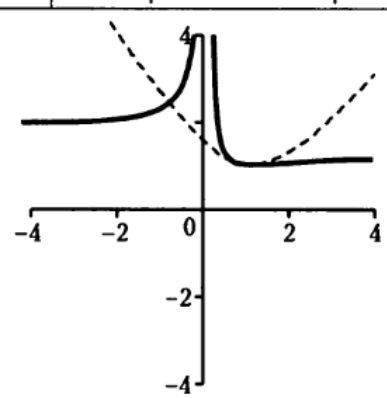
678 $y = \left|\sqrt{1+(x-1)^2}\right|$



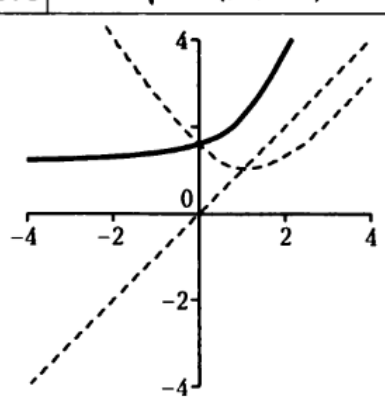
679 $y = \sqrt{1+(|x|-1)^2}$



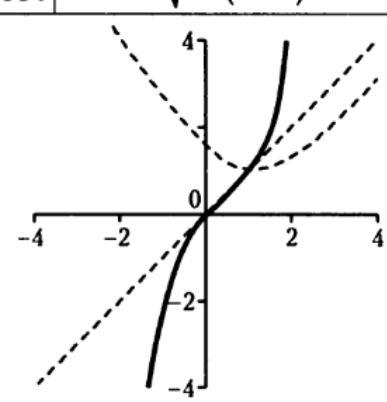
680 $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+(x-1)^2}}$



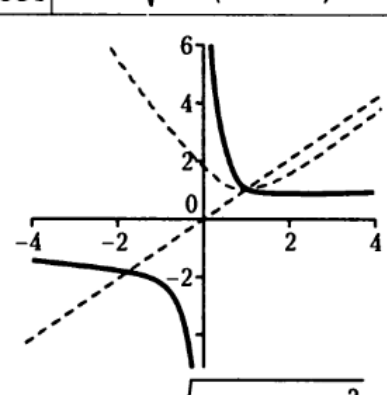
681 $y = \sqrt{1+(x^{-1}-1)^2}$



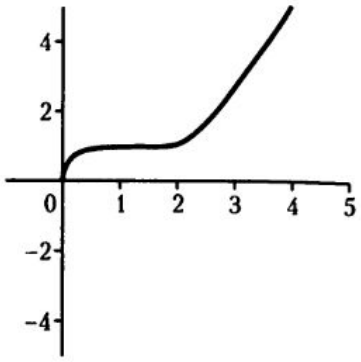
682 $y = \sqrt{1+(x-1)^2}+x$



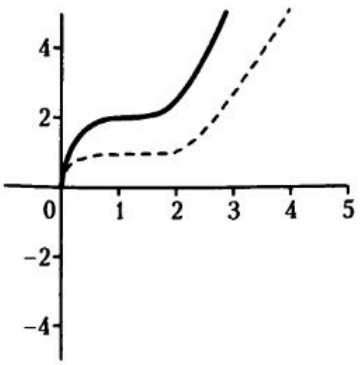
683 $y = x\sqrt{1+(x-1)^2}$



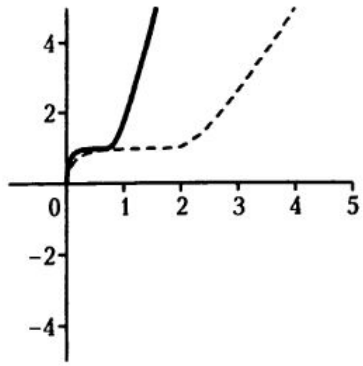
684 $y = \dfrac{\sqrt{1+(x-1)^2}}{x}$



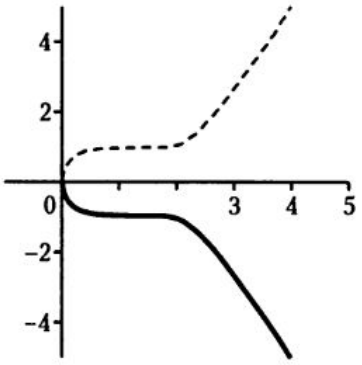
685 $y = \sqrt{1+(x-1)^3}$



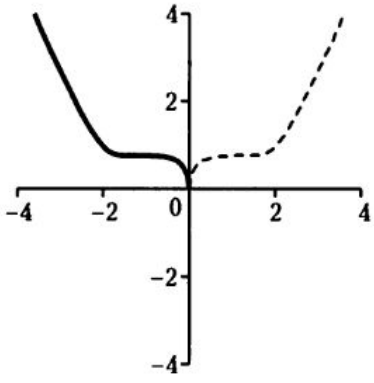
686 $y = 2\sqrt{1+(x-1)^3}$



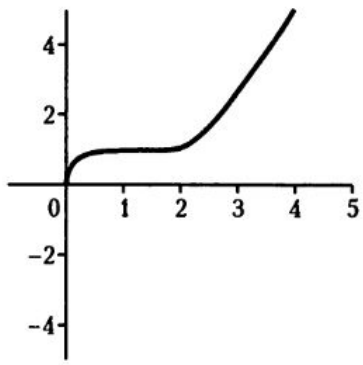
687 $y = \sqrt{1+(2x-1)^3}$



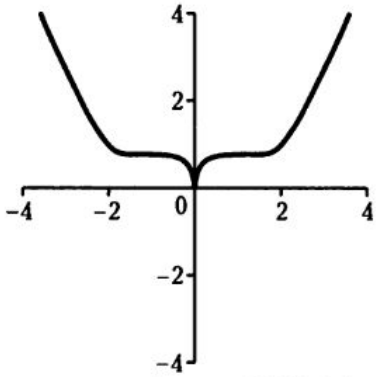
688 $y = -\sqrt{1+(x-1)^3}$



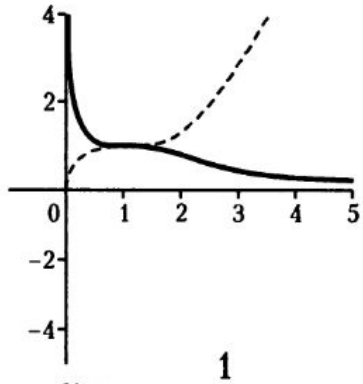
689 $y = \sqrt{1-(x+1)^3}$



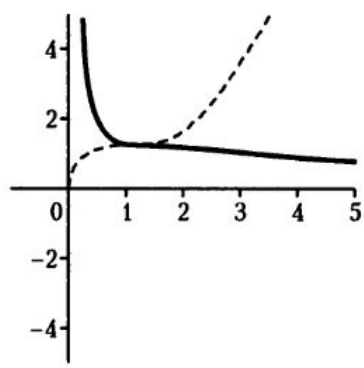
690 $y = \left|\sqrt{1+(x-1)^3}\right|$



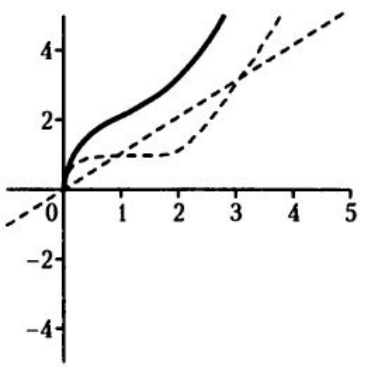
691 $y = \sqrt{1+(|x|-1)^3}$



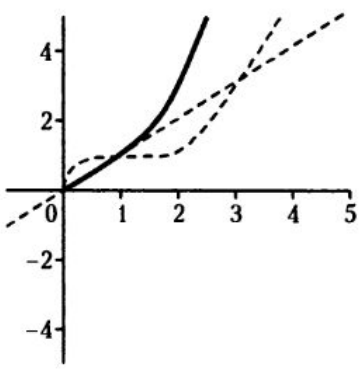
692 $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+(x-1)^3}}$



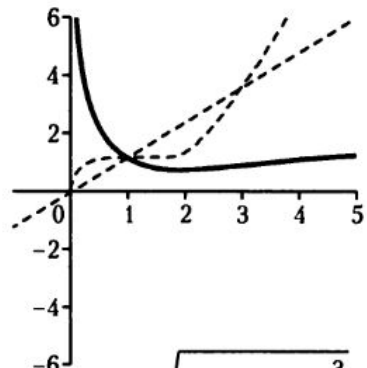
693 $y = \sqrt{1+(x^{-1}-1)^3}$



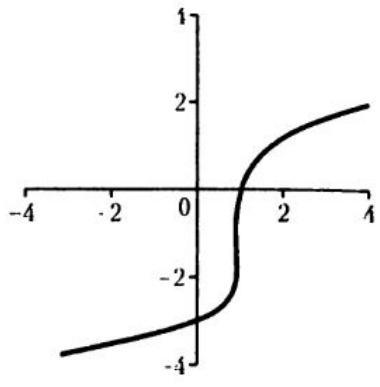
694 $y = \sqrt{1+(x-1)^3}+x$



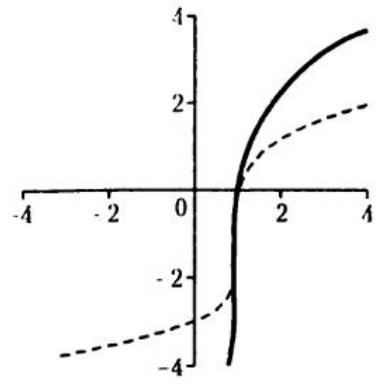
695 $y = x\sqrt{1+(x-1)^3}$



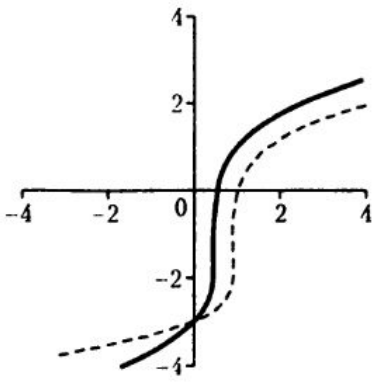
696 $y = \dfrac{\sqrt{1+(x-1)^3}}{x}$



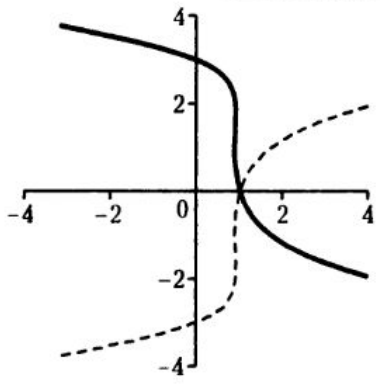
697 $y = 2\sqrt[3]{x-1}-1$



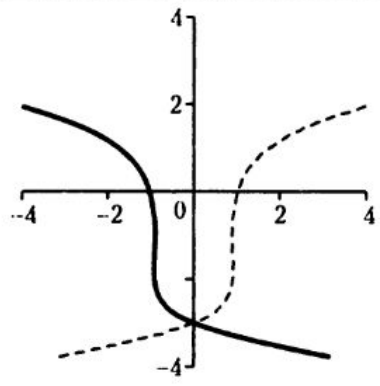
698 $y = 4\sqrt[3]{x-1}-1$



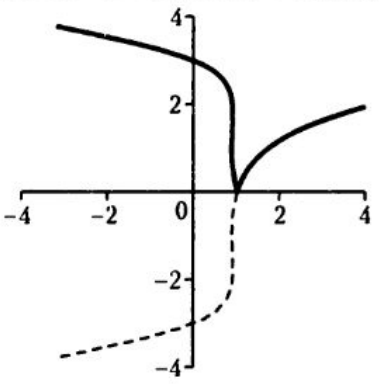
699 $y = 2\sqrt[3]{2x-1}-1$



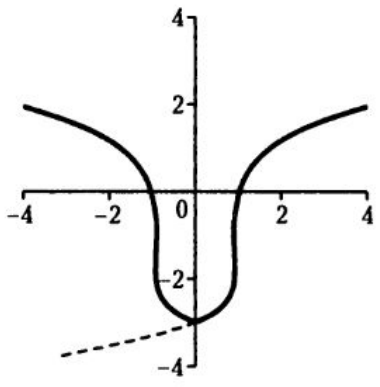
700 $y = -2\sqrt[3]{x-1}+1$



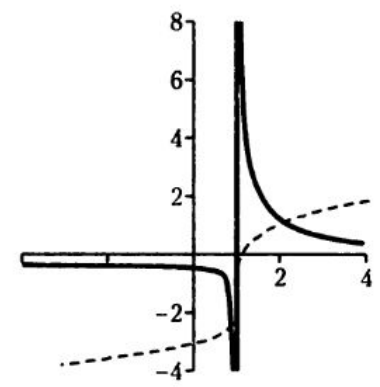
701 $y = 2\sqrt[3]{-x-1}-1$



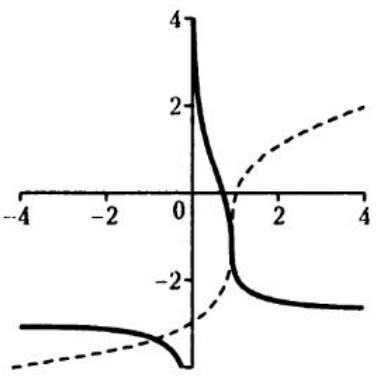
702 $y = \left|2\sqrt[3]{x-1}-1\right|$



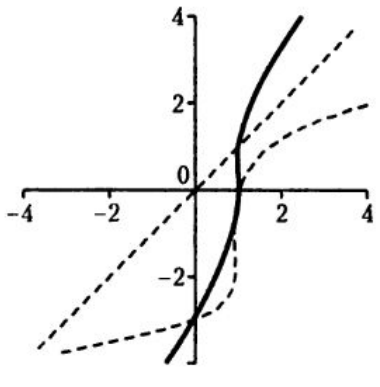
703 $y = 2\sqrt[3]{|x|-1}-1$



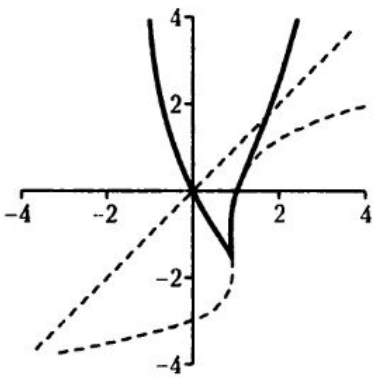
704 $y = 1/\left(2\sqrt[3]{x-1}-1\right)$



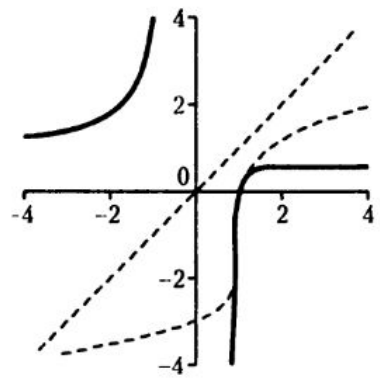
705 $y = 2\sqrt[3]{x^{-1}-1}-1$



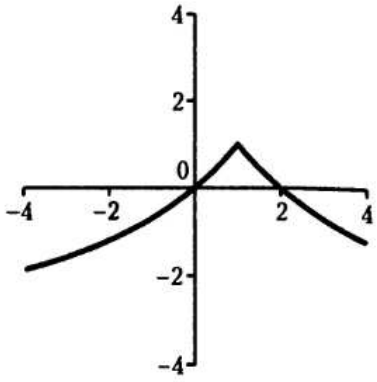
706 $y = 2\sqrt[3]{x-1}+x-1$



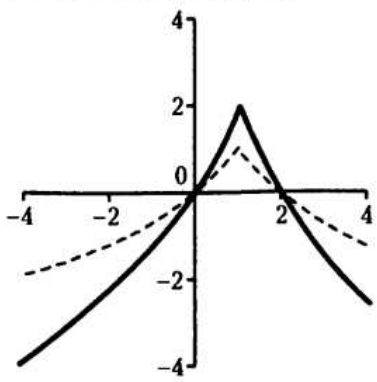
707 $y = 2x\sqrt[3]{x-1}-x$



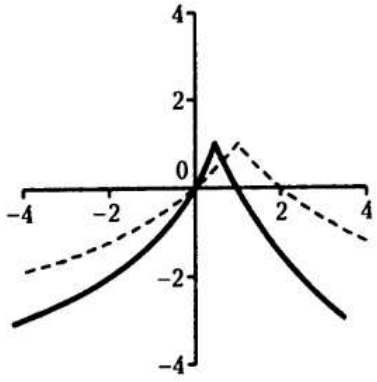
708 $y = \left(2\sqrt[3]{x-1}-1\right)/x$



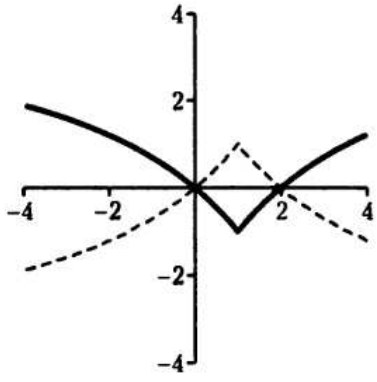
709 $y = 1 - \sqrt[3]{(x-1)^2}$



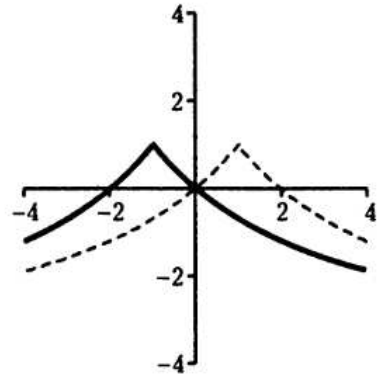
710 $y = 2 - 2\sqrt[3]{(x-1)^2}$



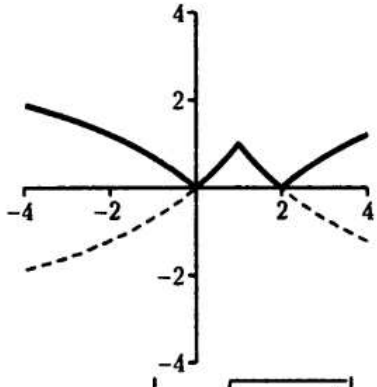
711 $y = 1 - \sqrt[3]{(2x-1)^2}$



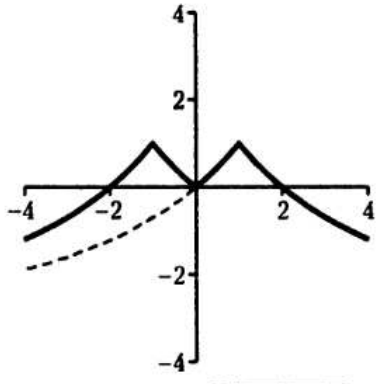
712 $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - 1$



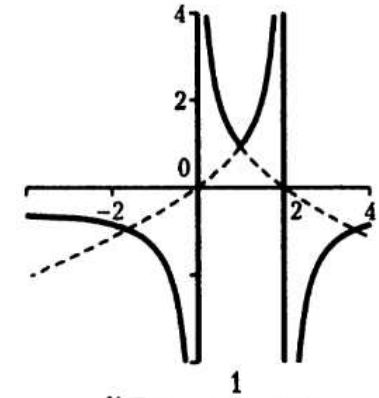
713 $y = 1 - \sqrt[3]{(x+1)^2}$



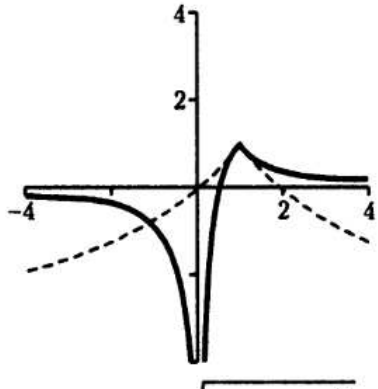
714 $y = \left|1 - \sqrt[3]{(x-1)^2}\right|$



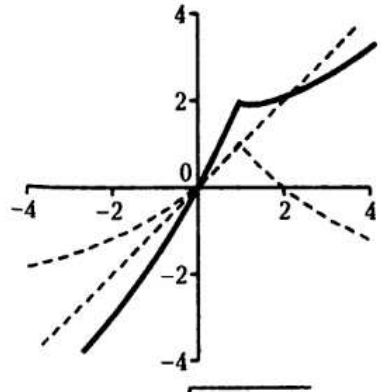
715 $y = 1 - \sqrt[3]{(|x|-1)^2}$



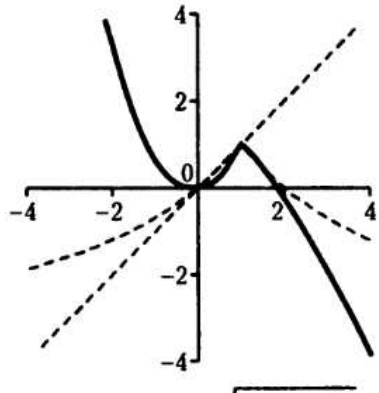
716 $y = \dfrac{1}{1 - \sqrt[3]{(x-1)^2}}$



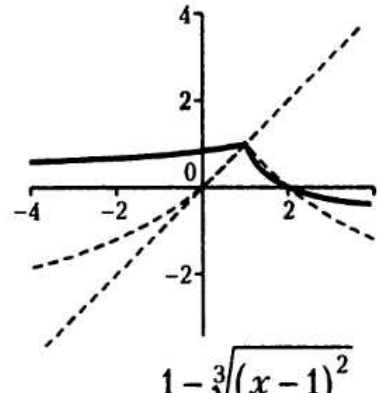
717 $y = 1 - \sqrt[3]{(x^{-1}-1)^2}$



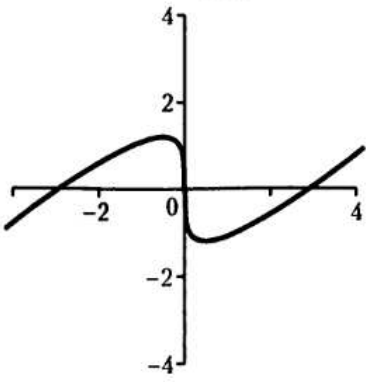
718 $y = 1 - \sqrt[3]{(x-1)^2} + x$



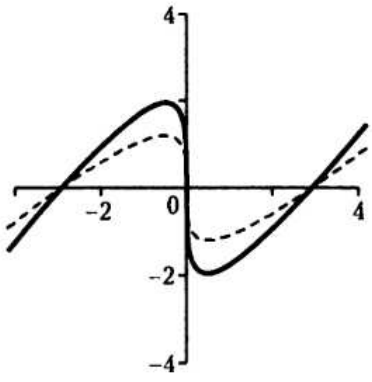
719 $y = x - x\sqrt[3]{(x-1)^2}$



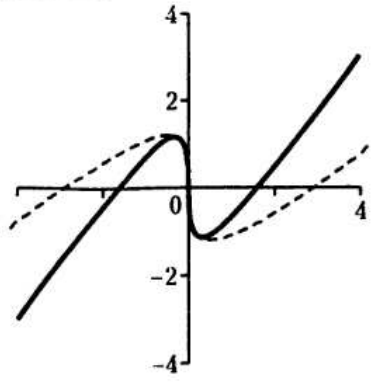
720 $y = \dfrac{1 - \sqrt[3]{(x-1)^2}}{x}$



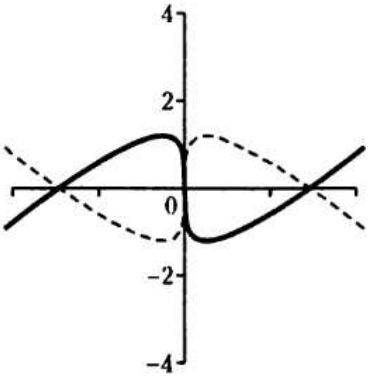
721 $y = x - 2\sqrt[3]{x}$



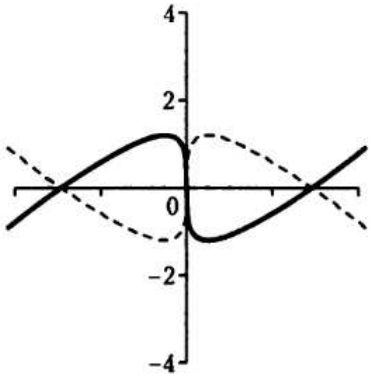
722 $y = 2x - 4\sqrt[3]{x}$



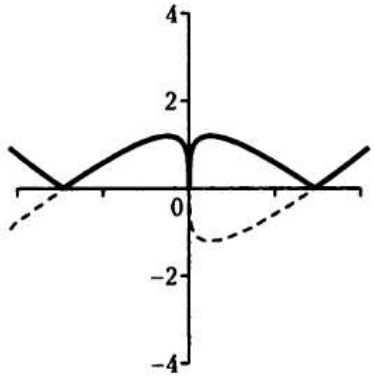
723 $y = 2x - 2\sqrt[3]{2x}$



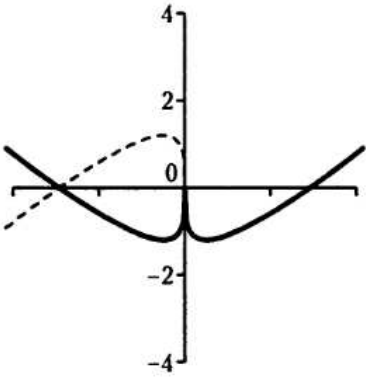
724 $y = -\left(x - 2\sqrt[3]{x}\right)$



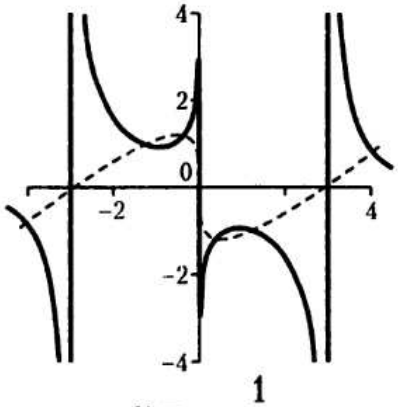
725 $y = -x + 2\sqrt[3]{x}$



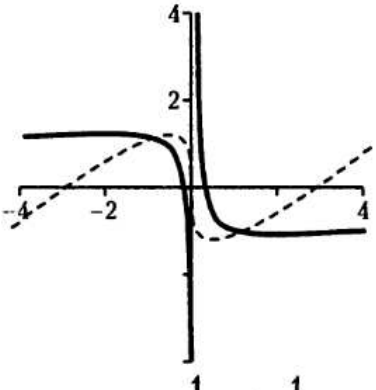
726 $y = \left|x - 2\sqrt[3]{x}\right|$



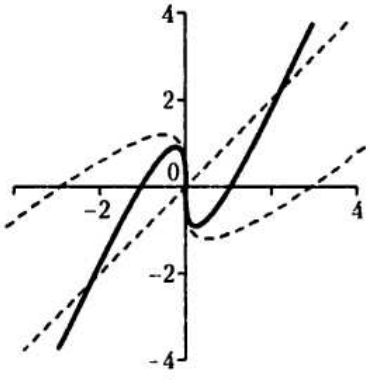
727 $y = |x| - 2\sqrt[3]{|x|}$



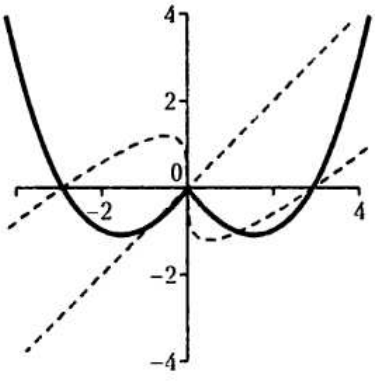
728 $y = \dfrac{1}{x - 2\sqrt[3]{x}}$



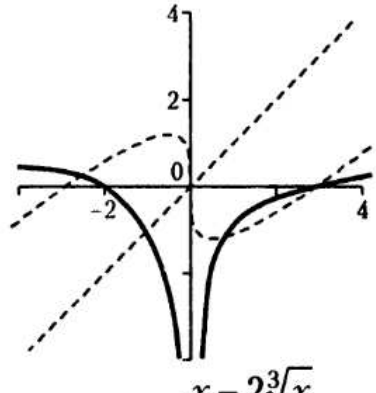
729 $y = \dfrac{1}{x} - 2\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$



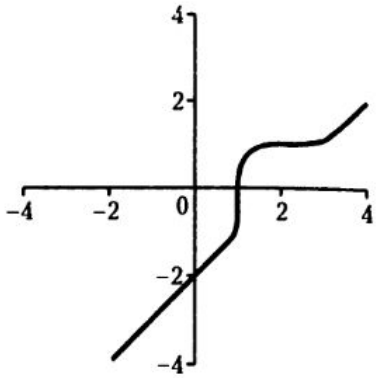
730 $y = 2x - 2\sqrt[3]{x}$



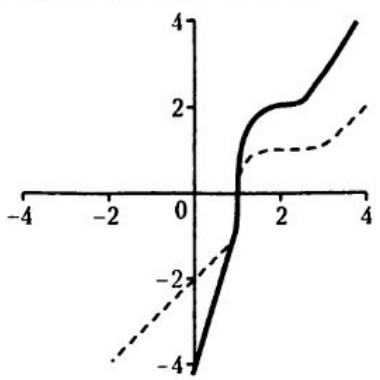
731 $y = x^2 - 2x\sqrt[3]{x}$



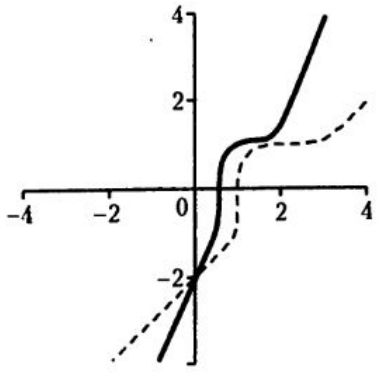
732 $y = \dfrac{x - 2\sqrt[3]{x}}{x}$



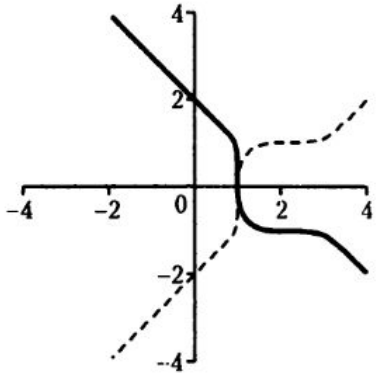
733 $y = \sqrt[3]{1+(x-2)^3}$



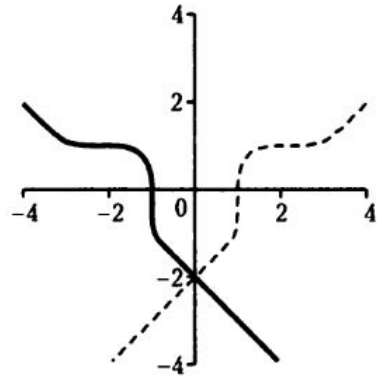
734 $y = 2\sqrt[3]{1+(x-2)^3}$



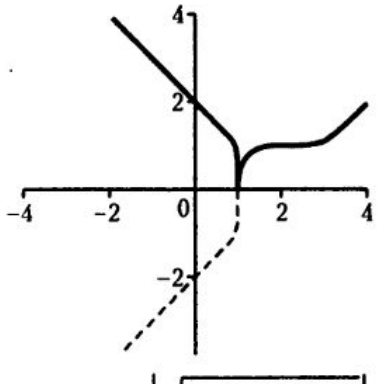
735 $y = \sqrt[3]{1+(2x-2)^3}$



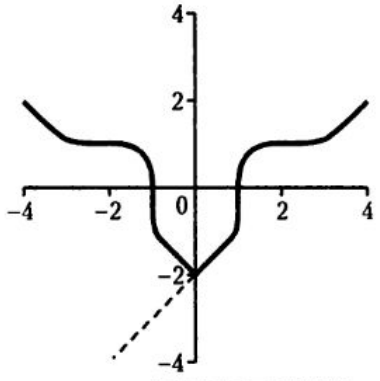
736 $y = -\sqrt[3]{1+(x-2)^3}$



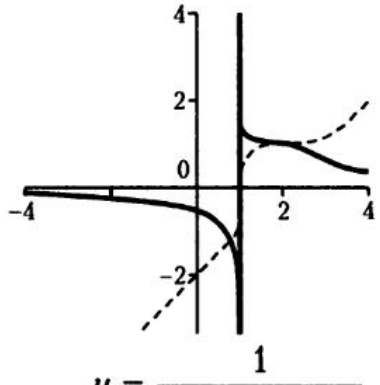
737 $y = \sqrt[3]{1-(x+2)^3}$



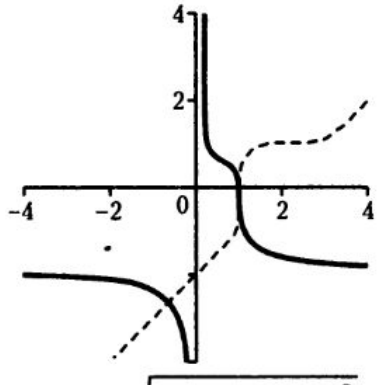
738 $y = \left|\sqrt[3]{1+(x-2)^3}\right|$



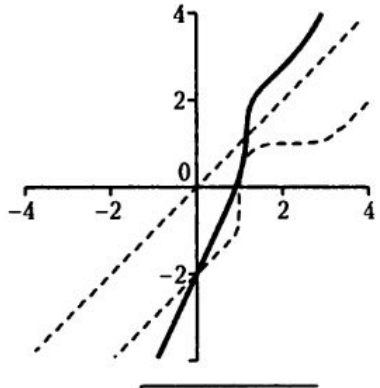
739 $y = \sqrt[3]{1+(|x|-2)^3}$



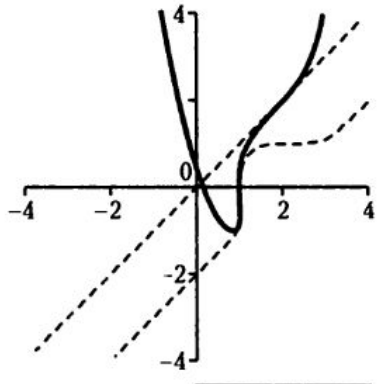
740 $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+(x-2)^3}}$



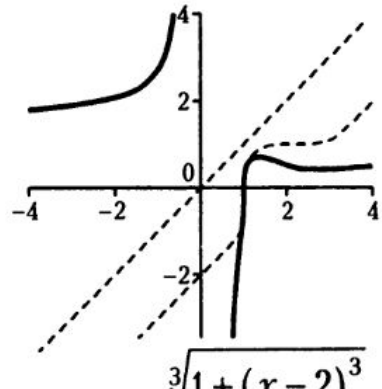
741 $y = \sqrt[3]{1+(x^{-1}-2)^3}$



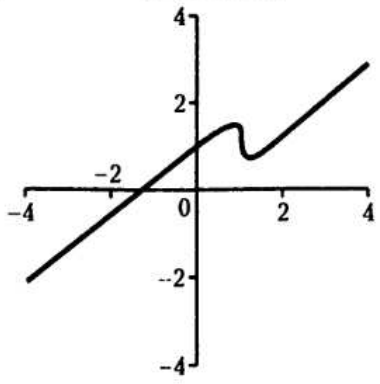
742 $y = \sqrt[3]{1+(x-2)^3}+x$



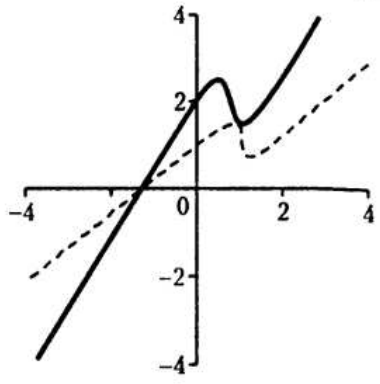
743 $y = x\sqrt[3]{1+(x-2)^3}$



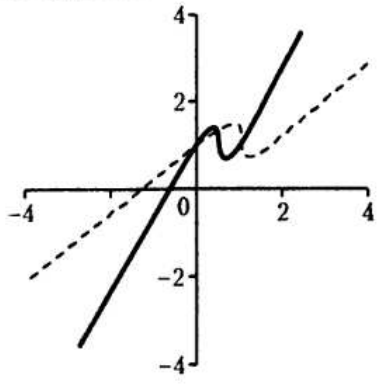
744 $y = \dfrac{\sqrt[3]{1+(x-2)^3}}{x}$



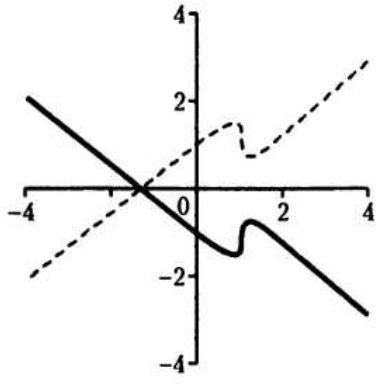
745 $y = x + \sqrt[3]{1-x}$



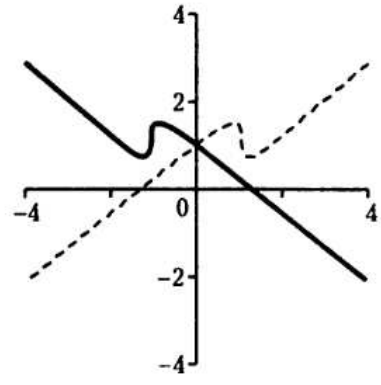
746 $y = 2x + 2\sqrt[3]{1-x}$



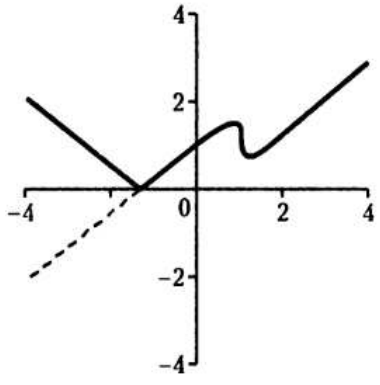
747 $y = 2x + \sqrt[3]{1-2x}$



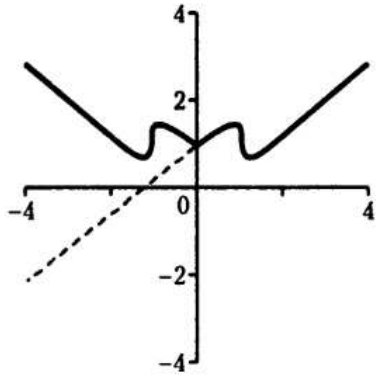
748 $y = -x - \sqrt[3]{1-x}$



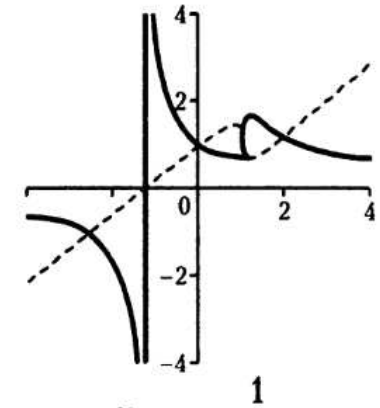
749 $y = -x + \sqrt[3]{1+x}$



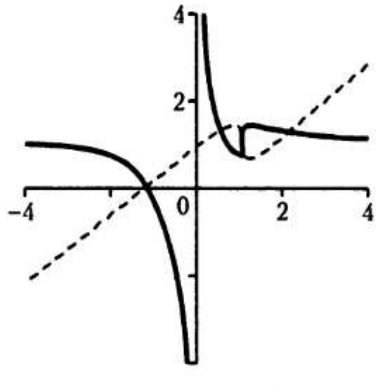
750 $y = \left|x + \sqrt[3]{1-x}\right|$



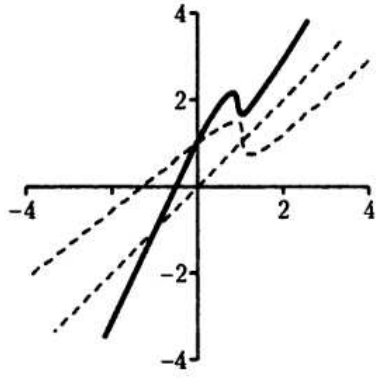
751 $y = |x| + \sqrt[3]{1-|x|}$



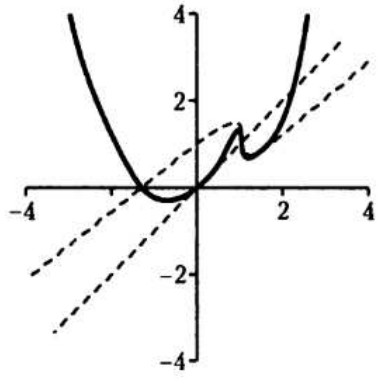
752 $y = \dfrac{1}{x + \sqrt[3]{1-x}}$



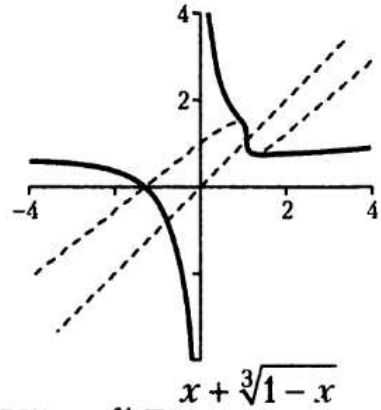
753 $y = x^{-1} + \sqrt[3]{1-x^{-1}}$



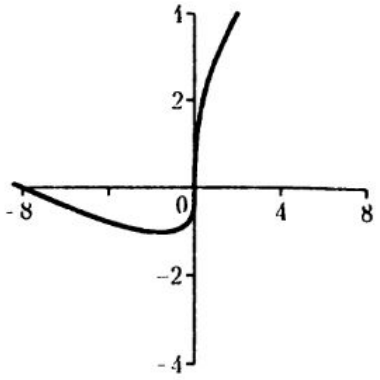
754 $y = 2x + \sqrt[3]{1-x}$



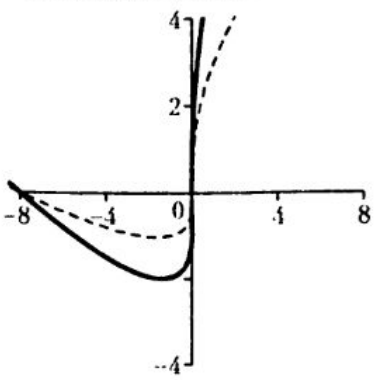
755 $y = x^2 + x\sqrt[3]{1-x}$



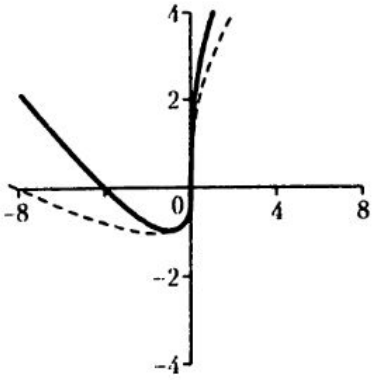
756 $y = \dfrac{x + \sqrt[3]{1-x}}{x}$



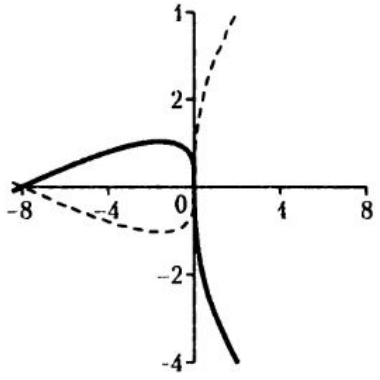
757 $y = 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}$



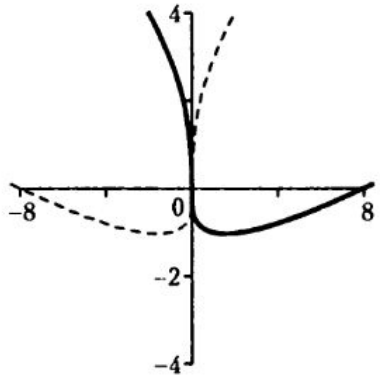
758 $y = 4\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x^2}$



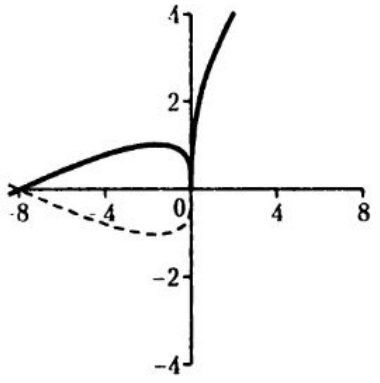
759 $y = 2\sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4x^2}$



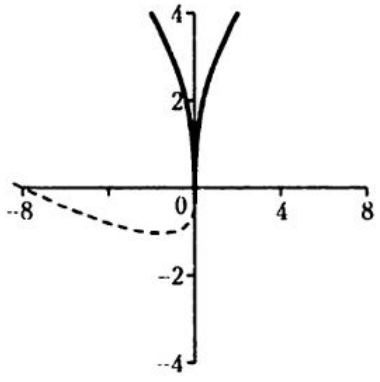
760 $y = -2\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2}$



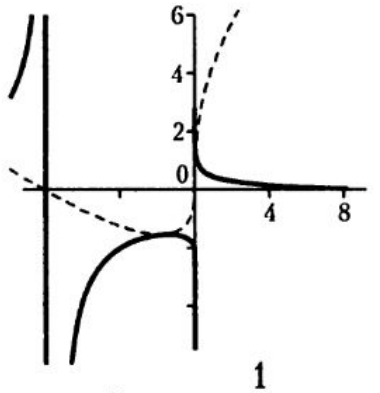
761 $y = -2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}$



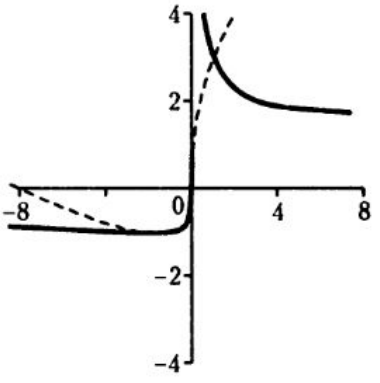
762 $y = \left|2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}\right|$



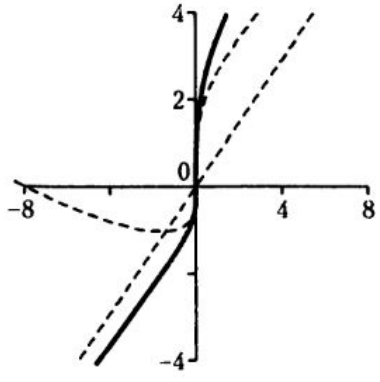
763 $y = 2\sqrt[3]{|x|} + \sqrt[3]{|x|^2}$



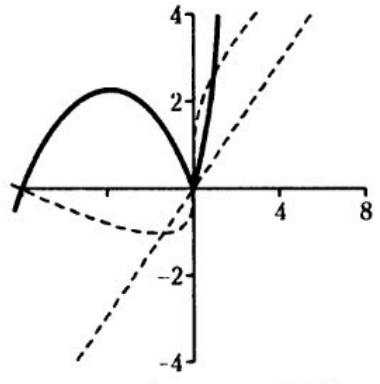
764 $y = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}$



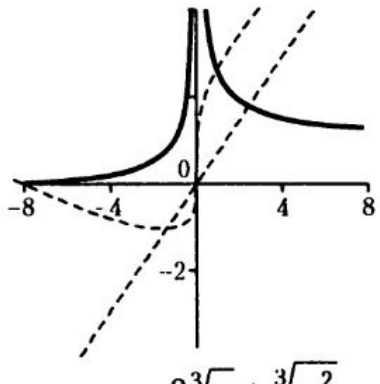
765 $y = 2\sqrt[3]{x^{-1}} + \sqrt[3]{x^{-2}}$



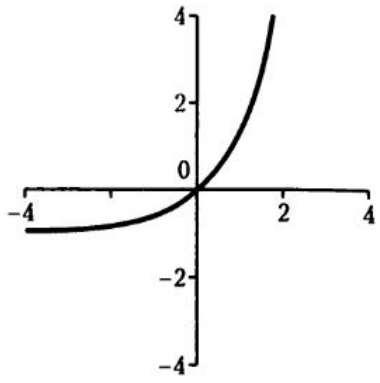
766 $y = 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2} + x$



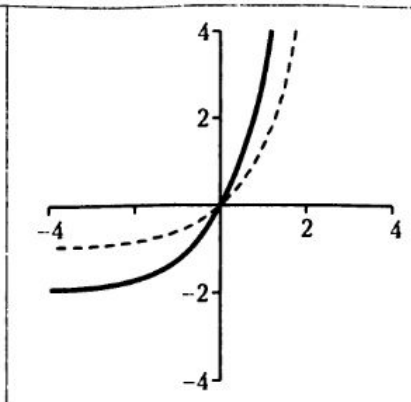
767 $y = \left(2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}\right)x$



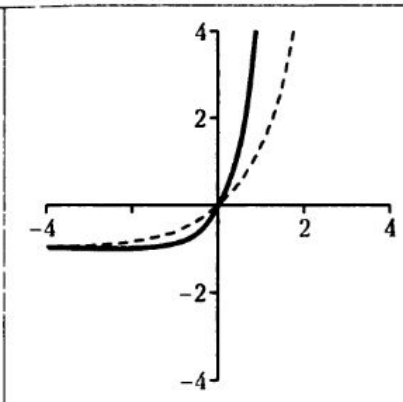
768 $y = \dfrac{2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{x}$



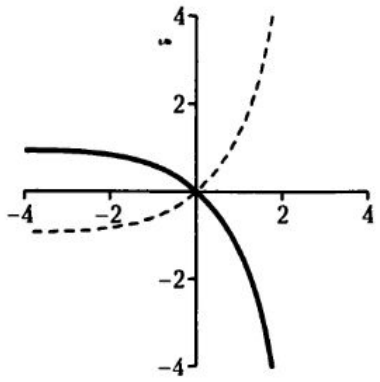
769 $y = e^x - 1$



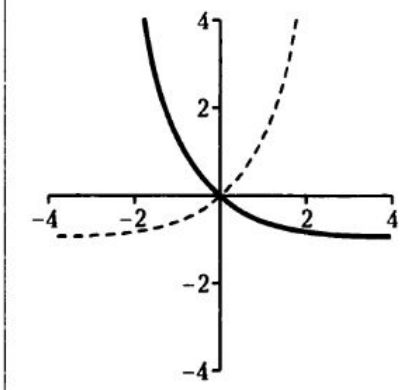
770 $y = 2e^x - 2$



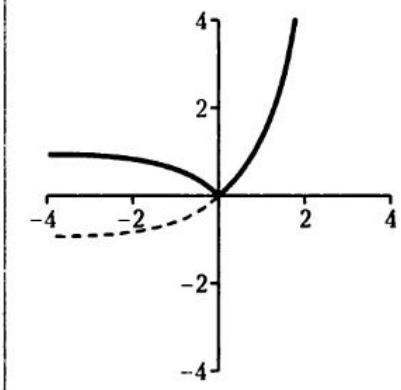
771 $y = e^{2x} - 1$



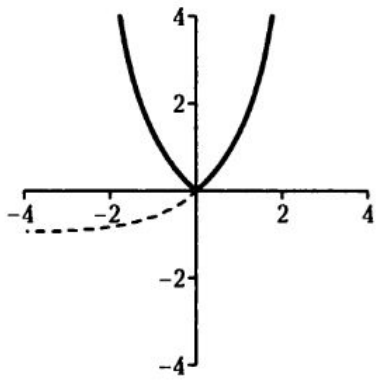
772 $y = -\left(e^x - 1\right)$



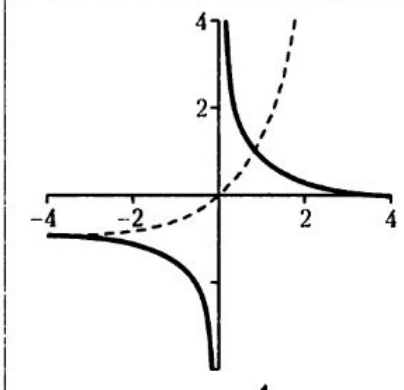
773 $y = e^{-x} - 1$



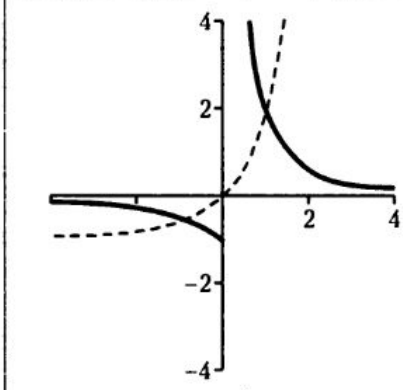
774 $y = \left|e^x - 1\right|$



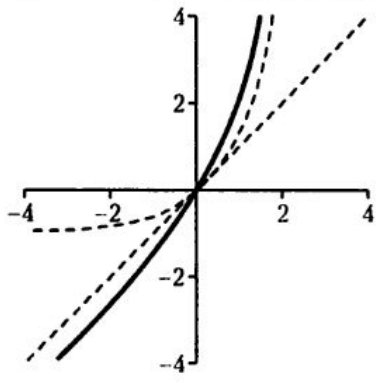
775 $y = e^{|x|} - 1$



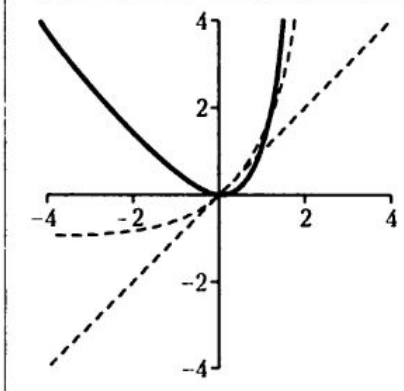
776 $y = \dfrac{1}{e^x - 1}$



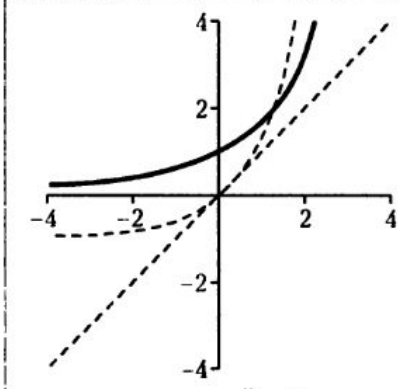
777 $y = e^{\frac{1}{x}} - 1$



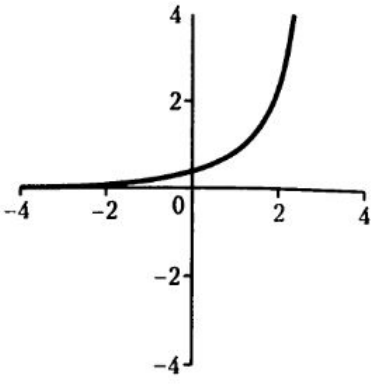
778 $y = e^x + x - 1$



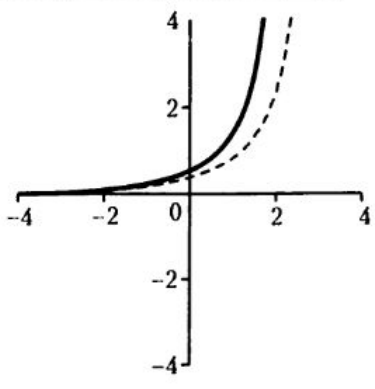
779 $y = x\left(e^x - 1\right)$



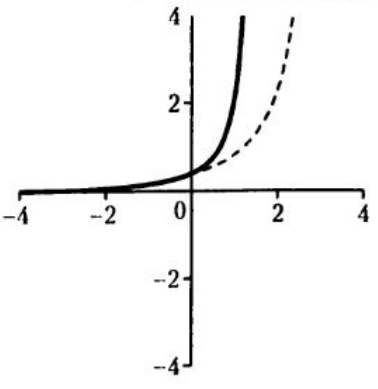
780 $y = \dfrac{e^x - 1}{x}$



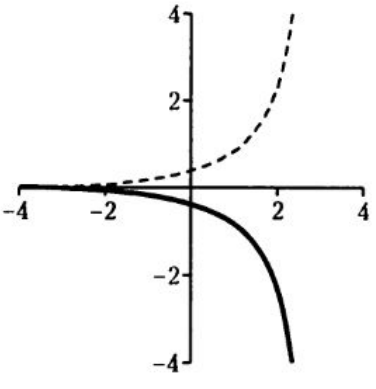
781 $y = e^{x-1}$



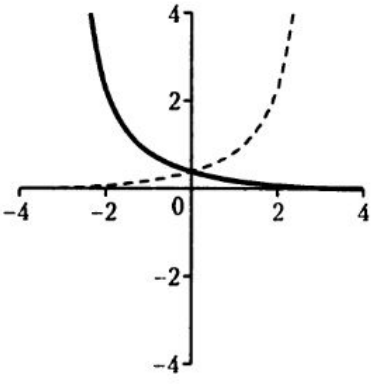
782 $y = 2e^{x-1}$



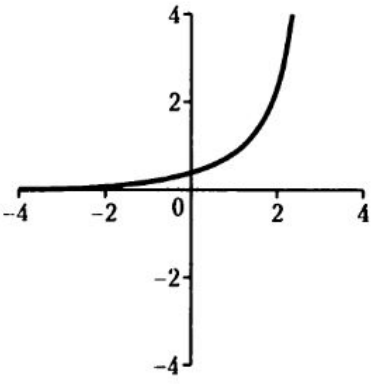
783 $y = e^{2x-1}$



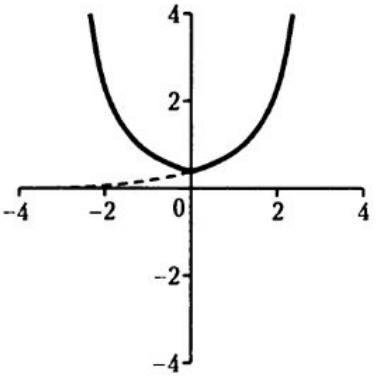
784 $y = -e^{x-1}$



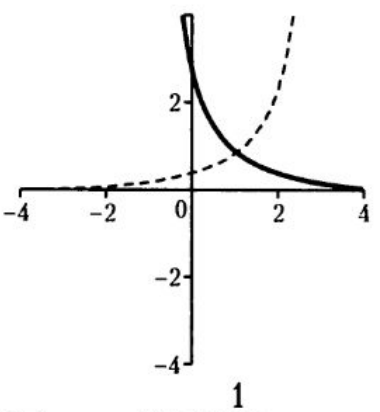
785 $y = e^{-x-1}$



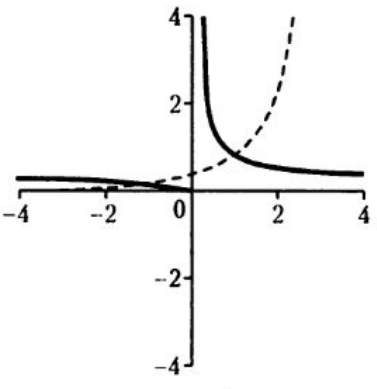
786 $y = \left|e^{x-1}\right|$



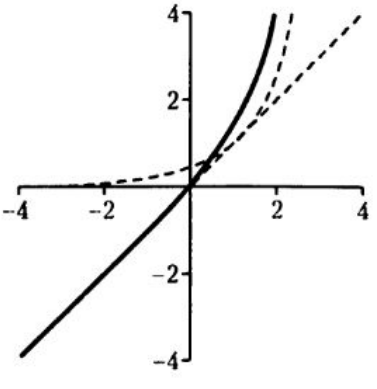
787 $y = e^{|x|-1}$



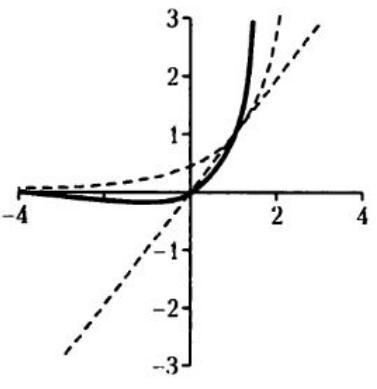
788 $y = \dfrac{1}{e^{x-1}}$



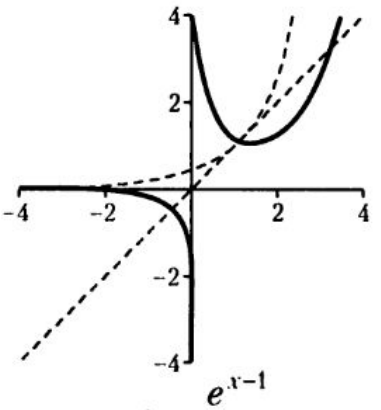
789 $y = e^{\frac{1}{x}-1}$



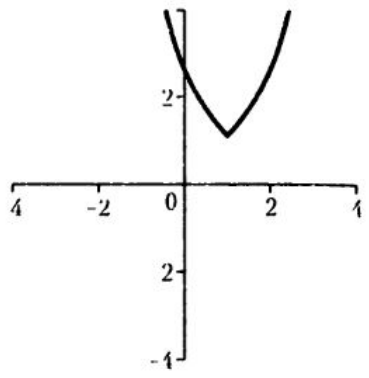
790 $y = e^{x-1} + x$



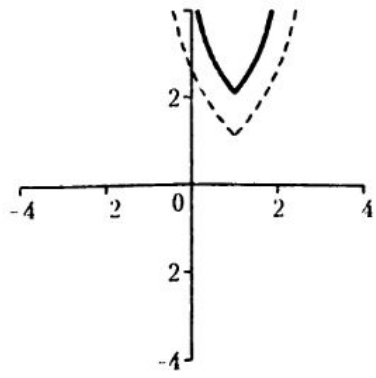
791 $y = xe^{x-1}$



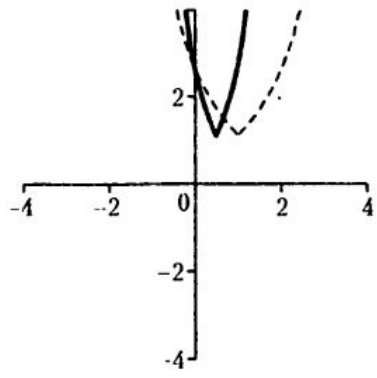
792 $y = \dfrac{e^{x-1}}{x}$



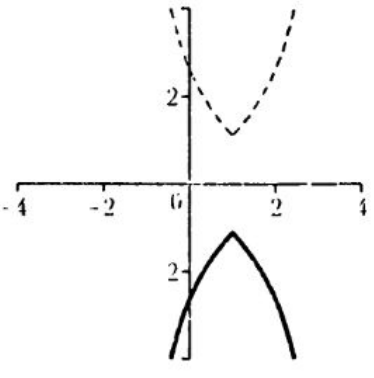
793 $y = e^{|x-1|}$



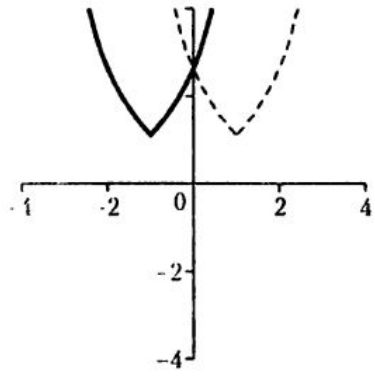
794 $y = 2e^{|x-1|}$



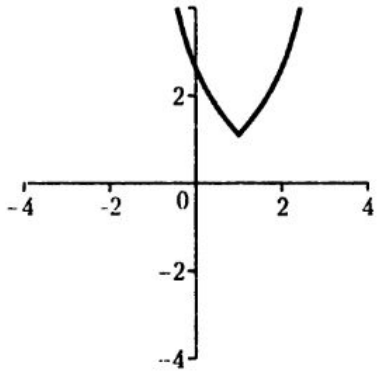
795 $y = e^{|2x-1|}$



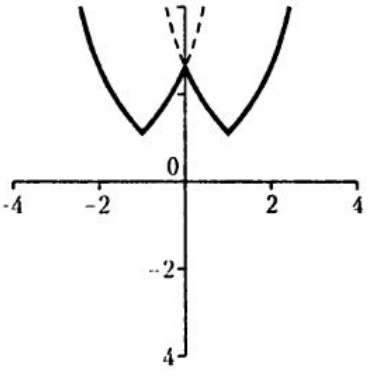
796 $y = -e^{|x-1|}$



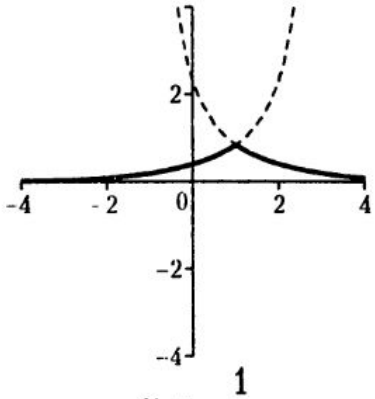
797 $y = e^{|x+1|}$



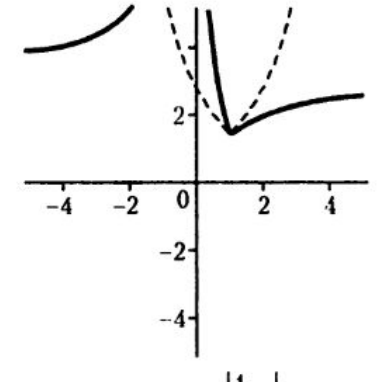
798 $y = \left|e^{|x-1|}\right|$



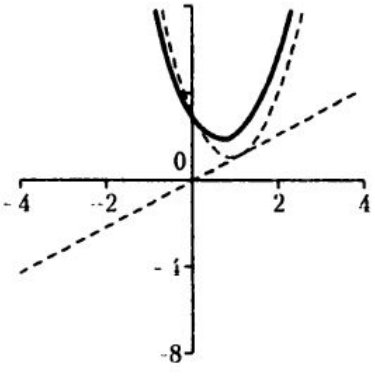
799 $y = e^{||x|-1|}$



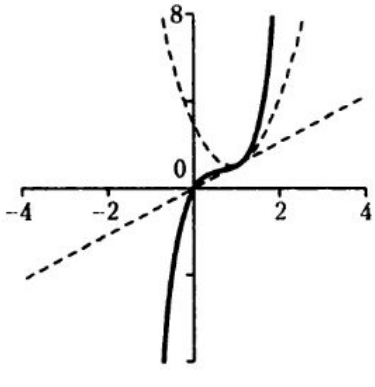
800 $y = \dfrac{1}{e^{|x-1|}}$



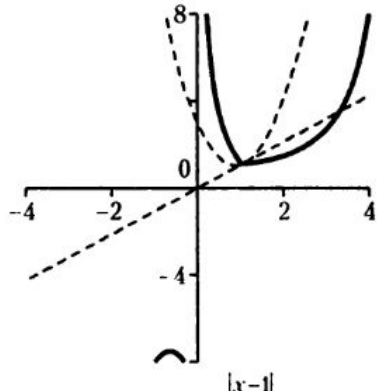
801 $y = e^{\left|\frac{1}{x}-1\right|}$



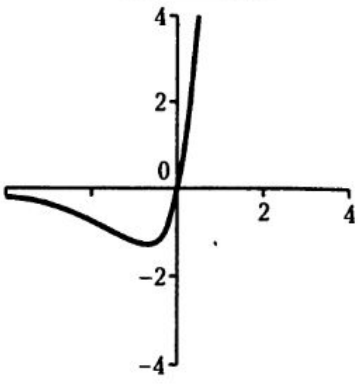
802 $y = e^{|x-1|} + x$



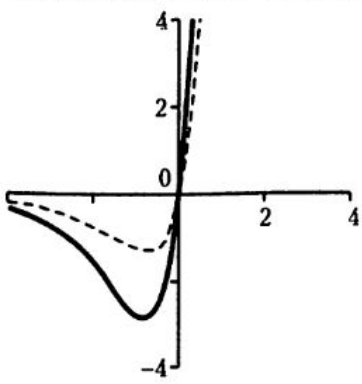
803 $y = xe^{|x-1|}$



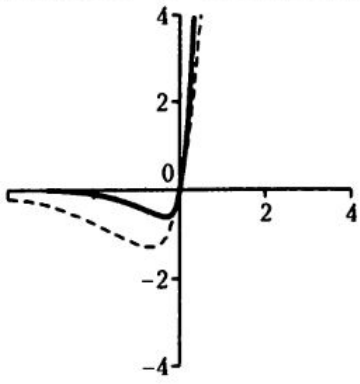
804 $y = \dfrac{e^{|x-1|}}{x}$



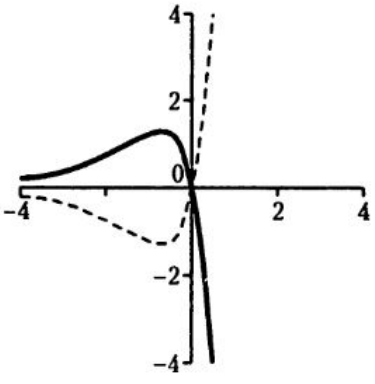
805 $y = 4xe^x$



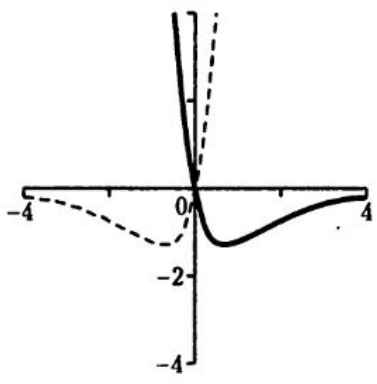
806 $y = 8xe^x$



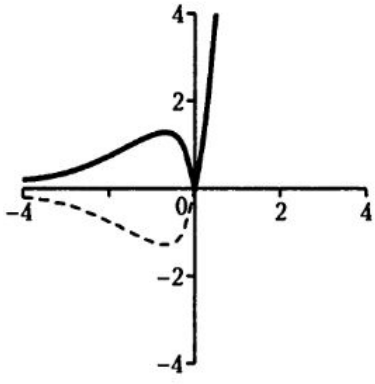
807 $y = 8xe^{2x}$



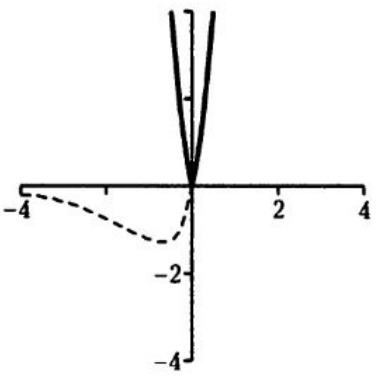
808 $y = -4xe^x$



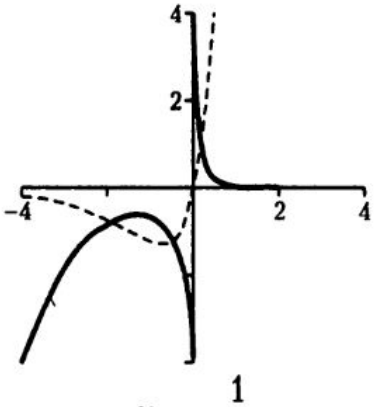
809 $y = -4xe^{-x}$



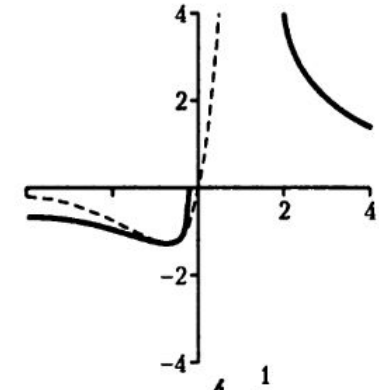
810 $y = 4\left|xe^x\right|$



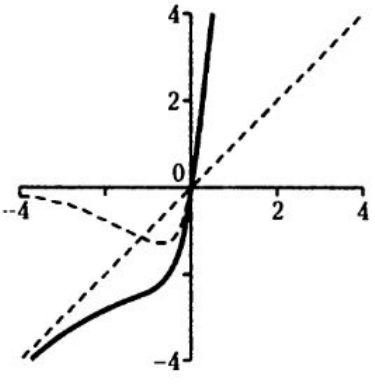
811 $y = 4|x|e^{|x|}$



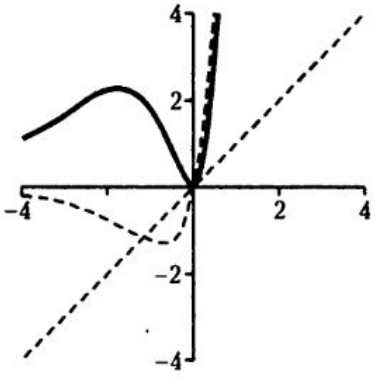
812 $y = \dfrac{1}{4xe^x}$



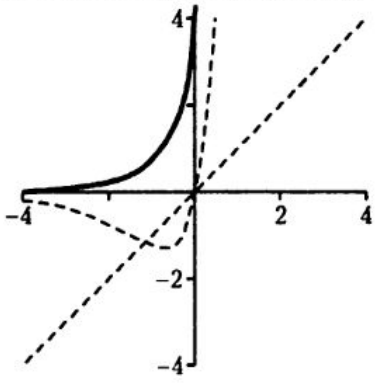
813 $y = \dfrac{4}{x}e^{\frac{1}{x}}$



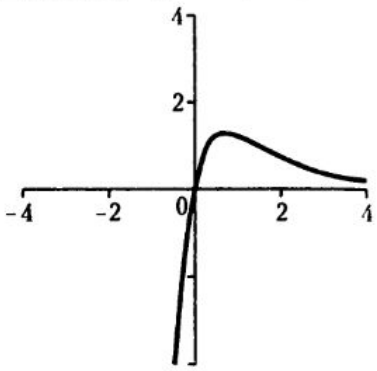
814 $y = 4xe^x + x$



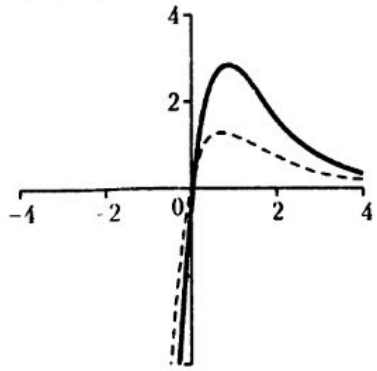
815 $y = 4x^2e^x$



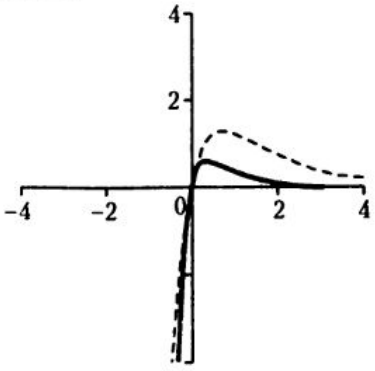
816 $y = 4e^x$



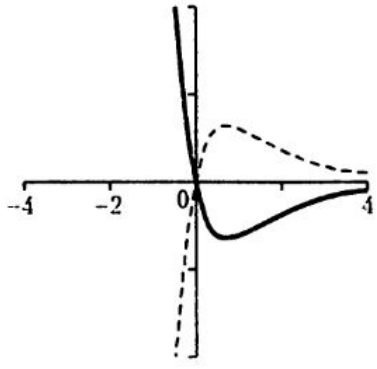
817 $y = 4xe^{-x}$



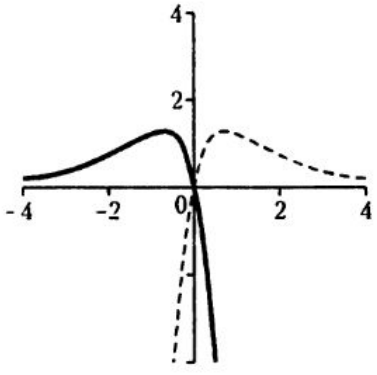
818 $y = 8xe^{-x}$



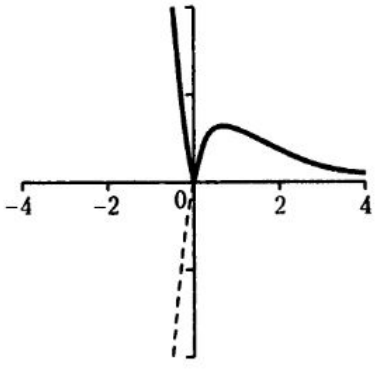
819 $y = 8xe^{-2x}$



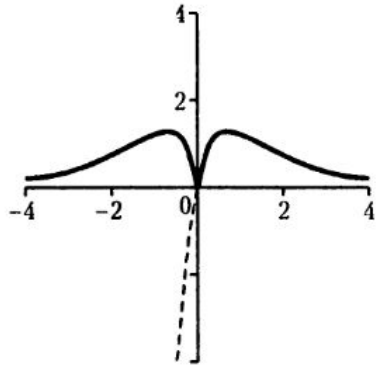
820 $y = -4xe^{-x}$



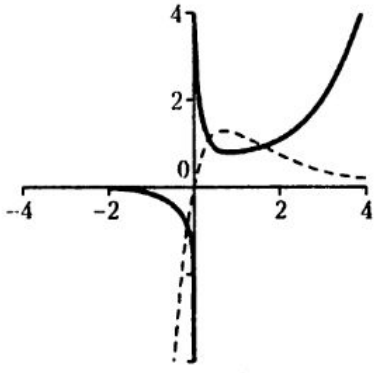
821 $y = -4xe^{x}$



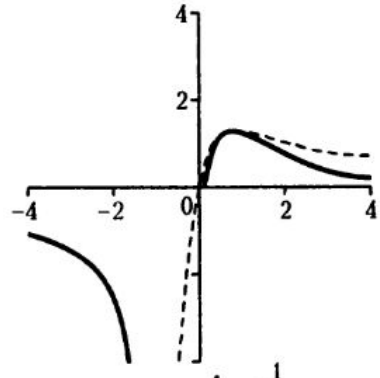
822 $y = 4\left|xe^{-x}\right|$



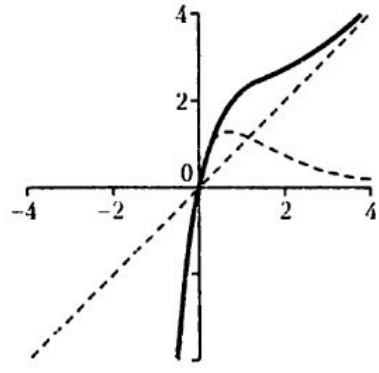
823 $y = 4|x|e^{-|x|}$



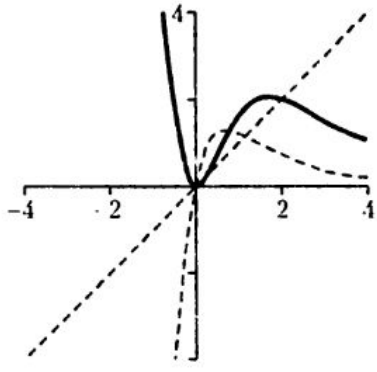
824 $y = \dfrac{1}{4xe^{-x}}$



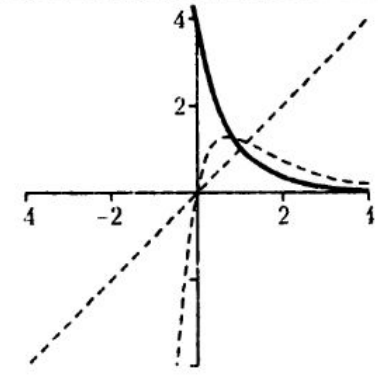
825 $y = \dfrac{4}{x}e^{-\frac{1}{x}}$



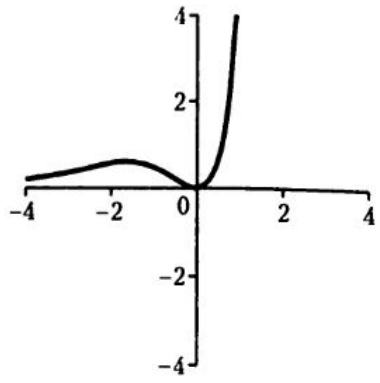
826 $y = 4xe^{-x} + x$



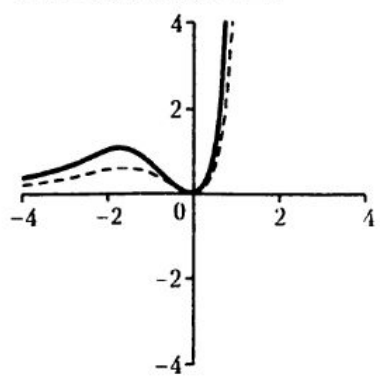
827 $y = 4x^2e^{-x}$



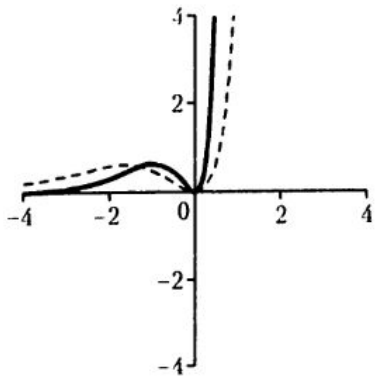
828 $y = 4e^{-x}$



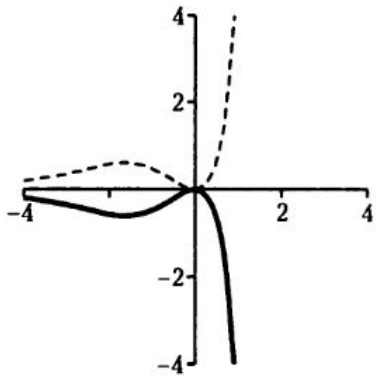
829 $y = x^2e^x$



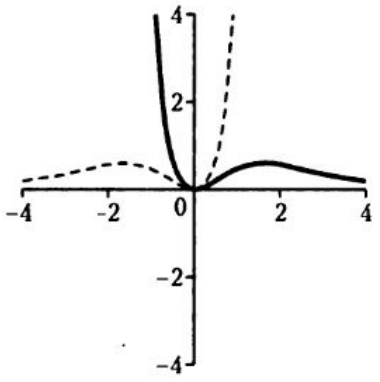
830 $y = 2x^2e^x$



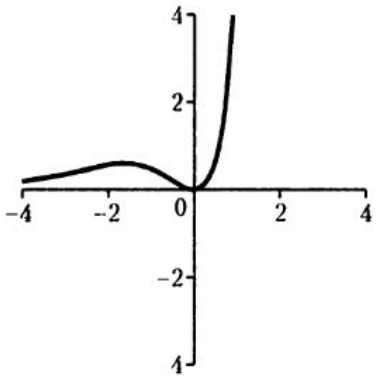
831 $y = 4x^2e^{2x}$



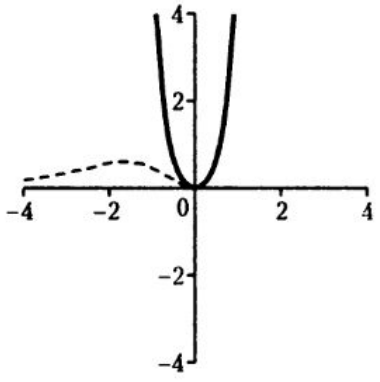
832 $y = -x^2e^x$



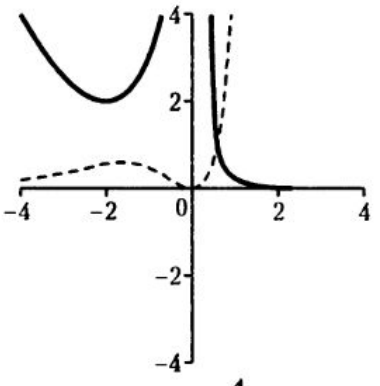
833 $y = x^2e^{-x}$



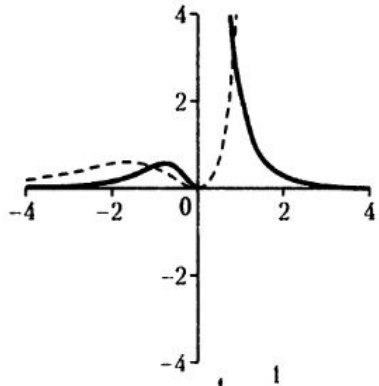
834 $y = \left|x^2e^x\right|$



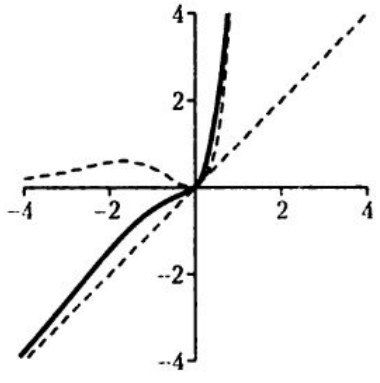
835 $y = x^2e^{|x|}$



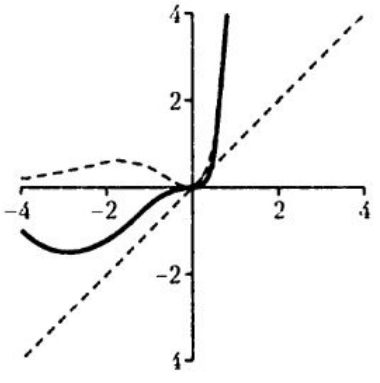
836 $y = \dfrac{1}{x^2e^x}$



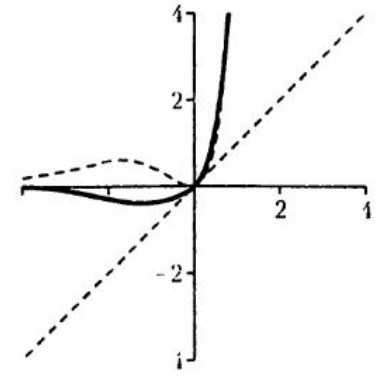
837 $y = \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$



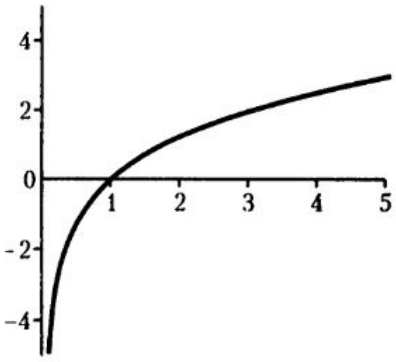
838 $y = x^2e^x + x$



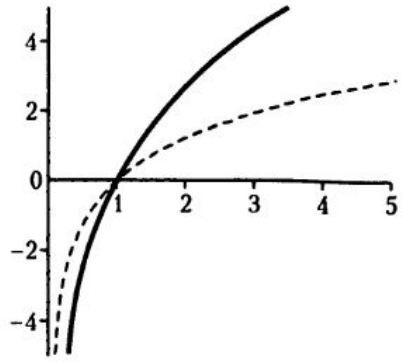
839 $y = x^3e^x$



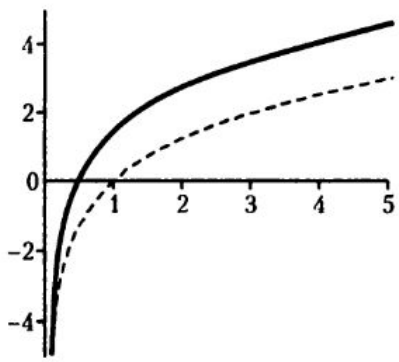
840 $y = xe^{\frac{1}{x}}$



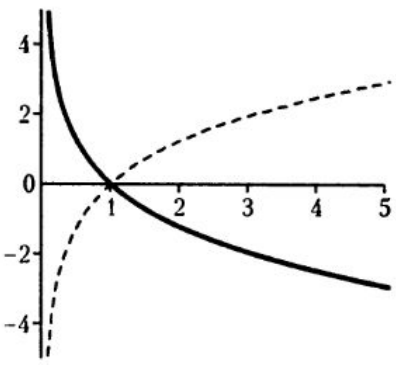
841 $y = 2\ln x$



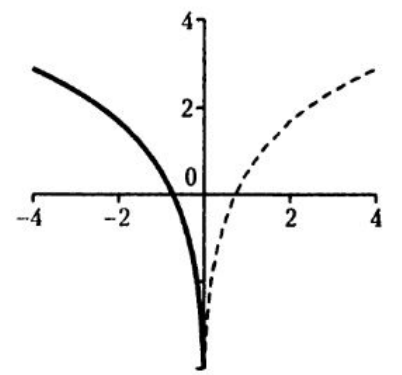
842 $y = 4\ln x$



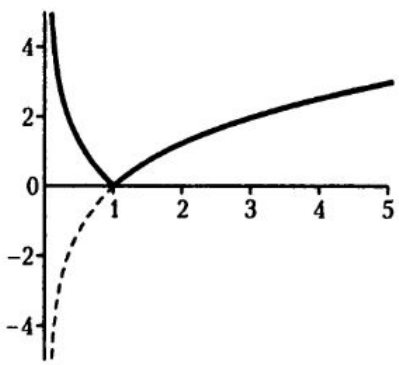
843 $y = 2\ln 2x$



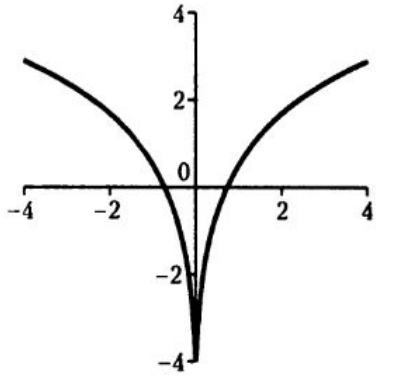
844 $y = -2\ln x$



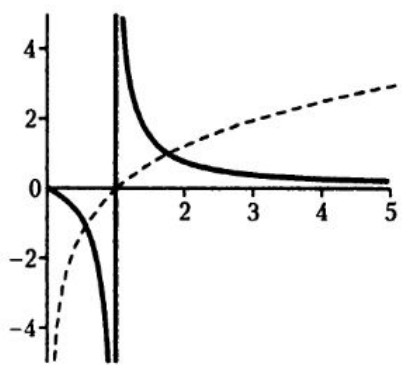
845 $y = 2\ln(-x)$



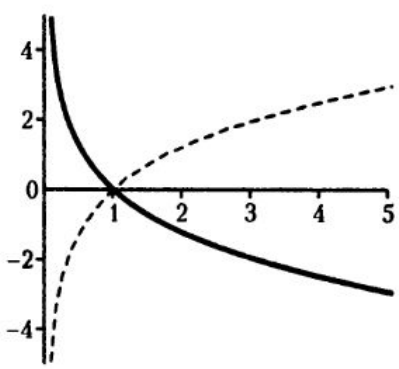
846 $y = 2|\ln x|$



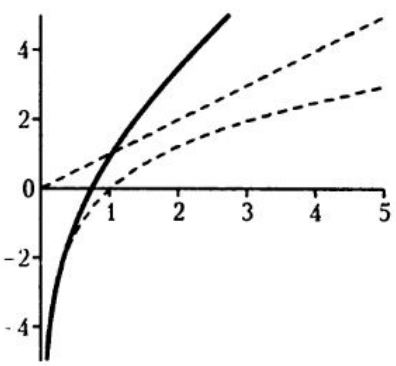
847 $y = 2\ln|x|$



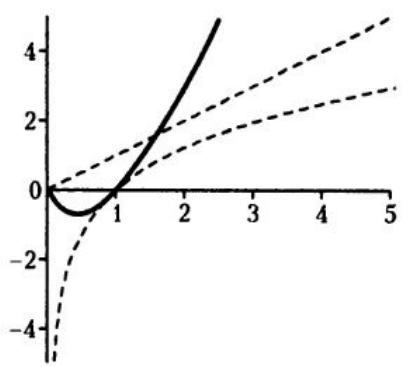
848 $y = \dfrac{1}{2\ln x}$



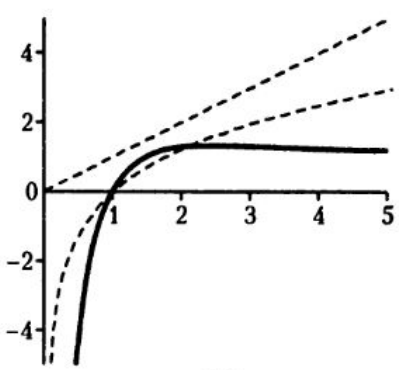
849 $y = 2\ln\dfrac{1}{x}$



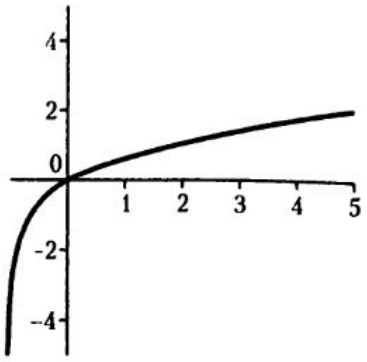
850 $y = 2\ln x + x$



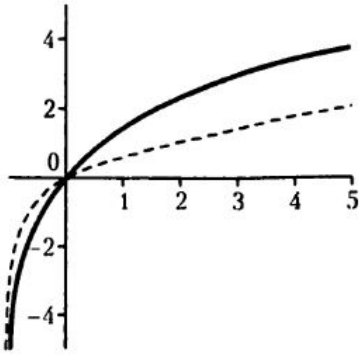
851 $y = 2x\ln x$



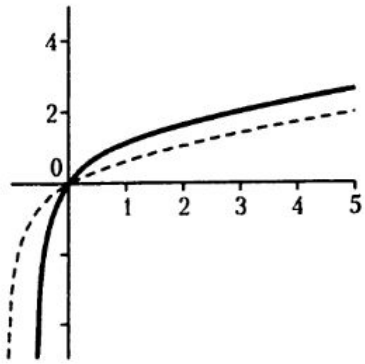
852 $y = \dfrac{2\ln x}{x}$



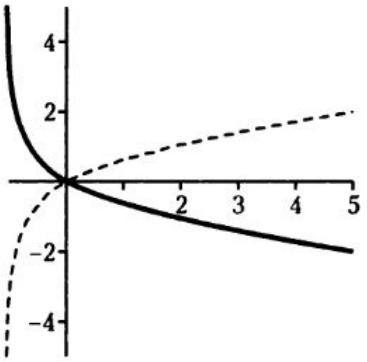
853 $y = \ln(x+1)$



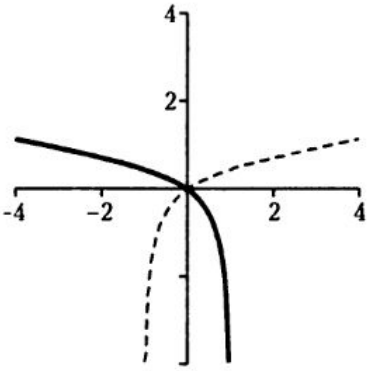
854 $y = 2\ln(x+1)$



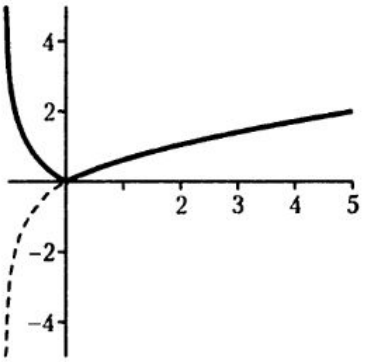
855 $y = \ln(2x+1)$



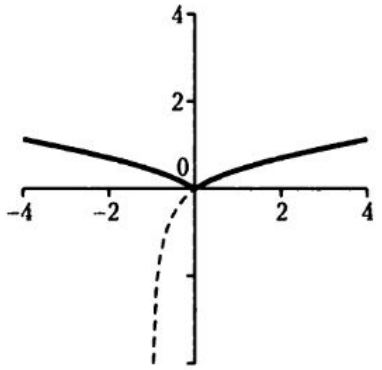
856 $y = -\ln(x+1)$



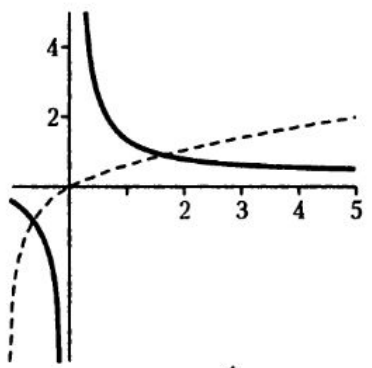
857 $y = \ln(1-x)$



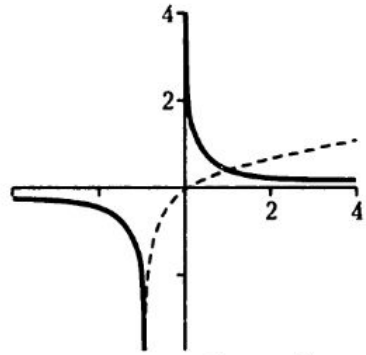
858 $y = |\ln(x+1)|$



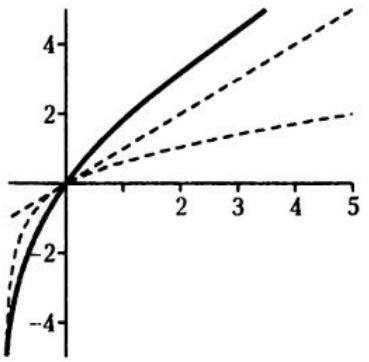
859 $y = \ln(|x|+1)$



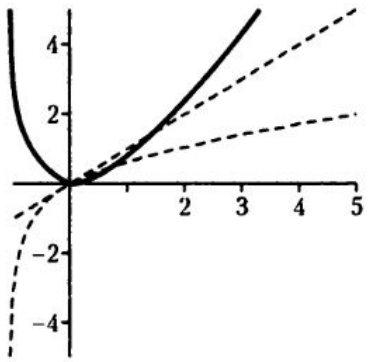
860 $y = \dfrac{1}{\ln(x+1)}$



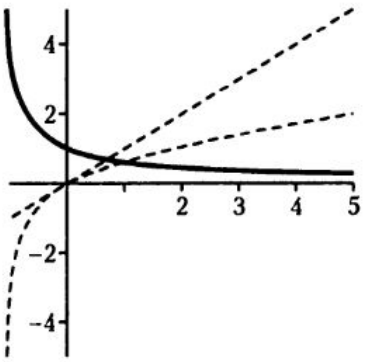
861 $y = \ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$



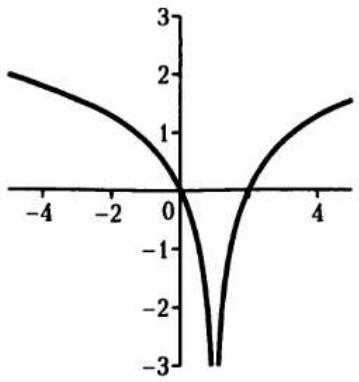
862 $y = \ln(x+1)+x$



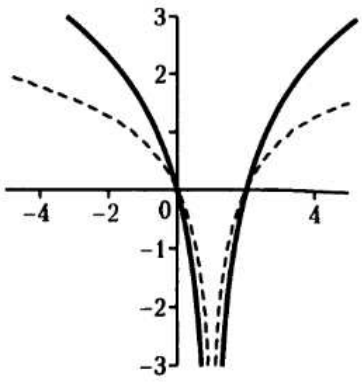
863 $y = x\ln(x+1)$



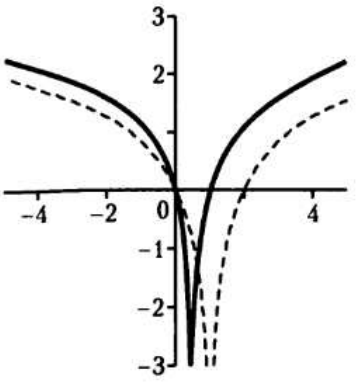
864 $y = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$



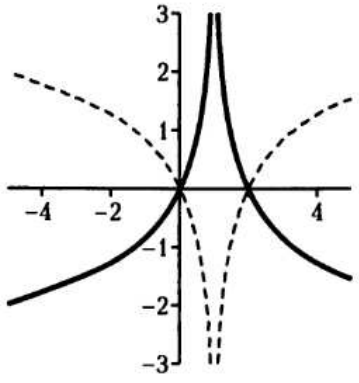
865 $y = \ln|x-1|$



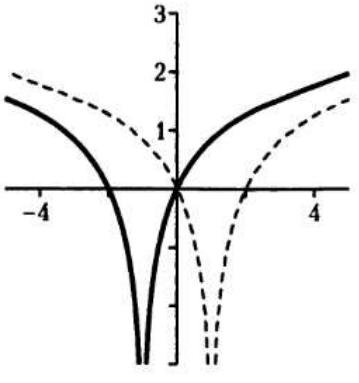
866 $y = 2\ln|x-1|$



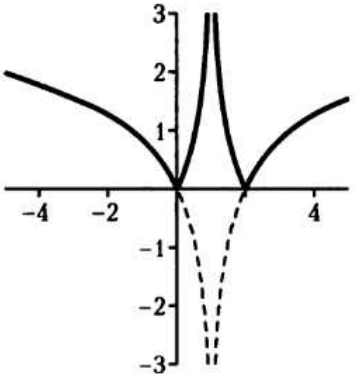
867 $y = \ln|2x-1|$



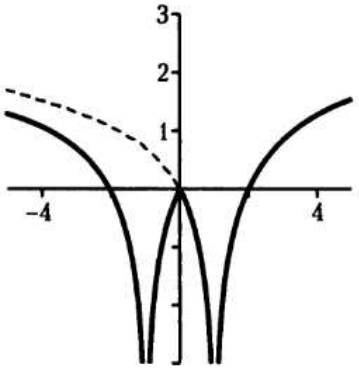
868 $y = -\ln|x-1|$



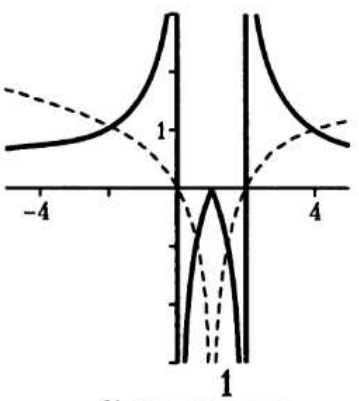
869 $y = \ln|x+1|$



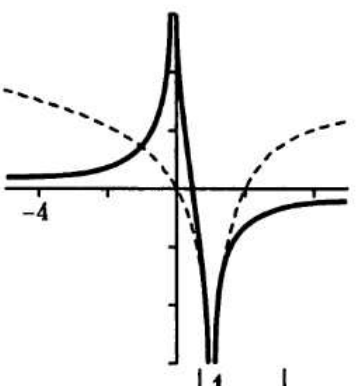
870 $y = |\ln|x-1||$



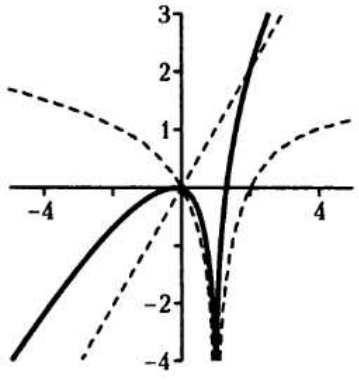
871 $y = \ln||x|-1|$



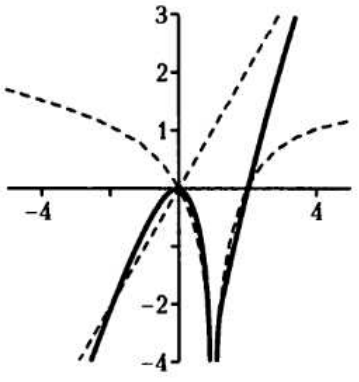
872 $y = \dfrac{1}{\ln|x-1|}$



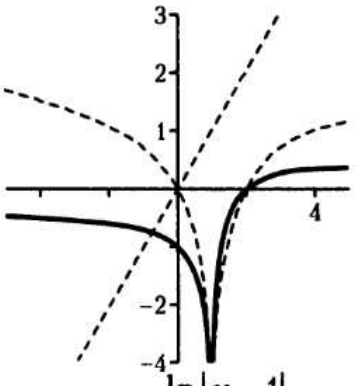
873 $y = \ln\left|\dfrac{1}{x}-1\right|$



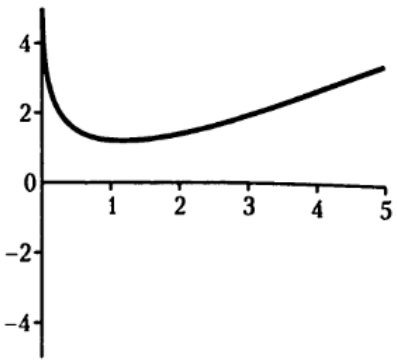
874 $y = \ln|x-1| + x$



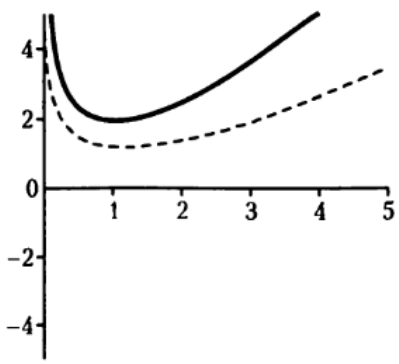
875 $y = x\ln|x-1|$



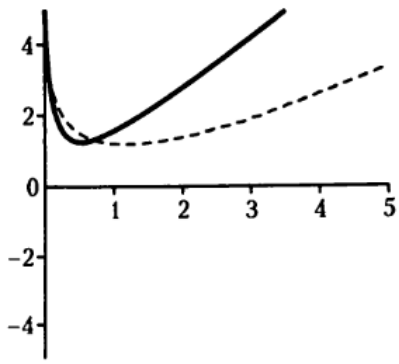
876 $y = \dfrac{\ln|x-1|}{x}$



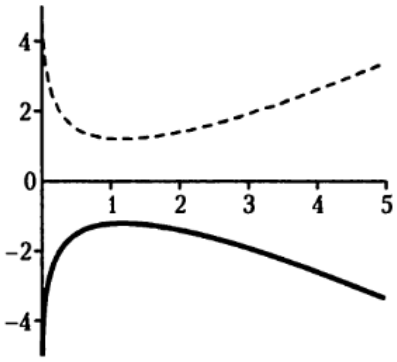
877 $y = x - \ln x$



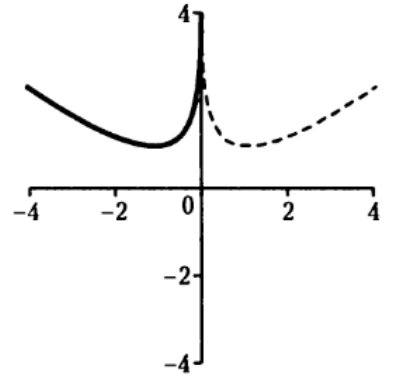
878 $y = 2x - 2\ln x$



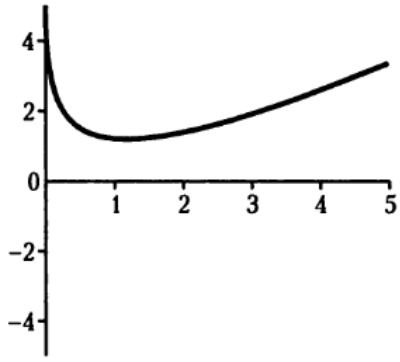
879 $y = 2x - \ln 2x$



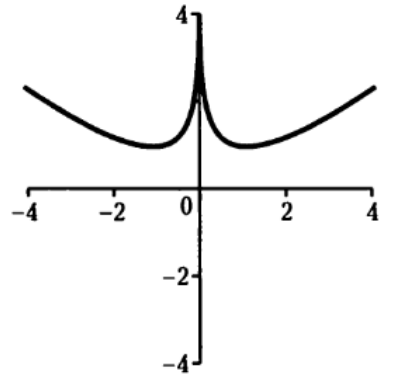
880 $y = -(x - \ln x)$



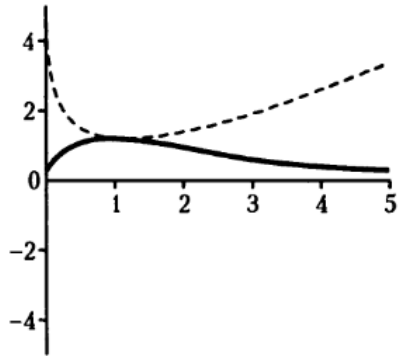
881 $y = -x - \ln(-x)$



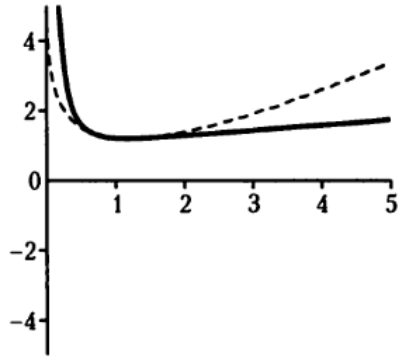
882 $y = |x - \ln x|$



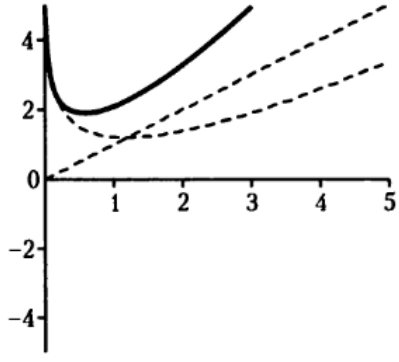
883 $y = |x| - \ln|x|$



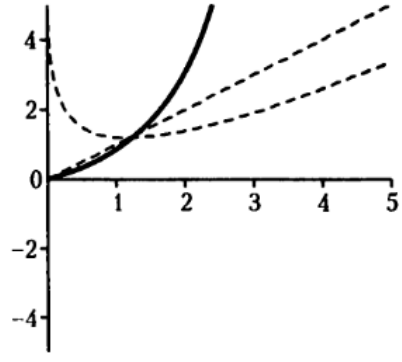
884 $y = \dfrac{1}{x - \ln x}$



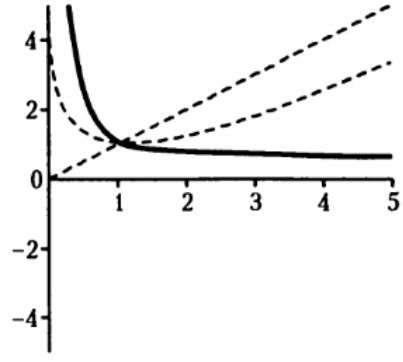
885 $y = \dfrac{1}{x} - \ln\dfrac{1}{x}$



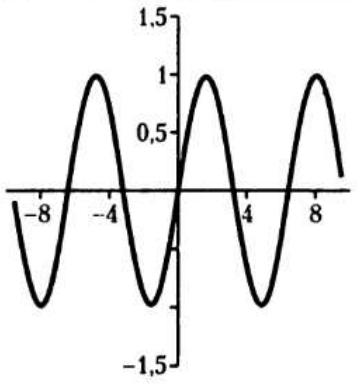
886 $y = 2x - \ln x$



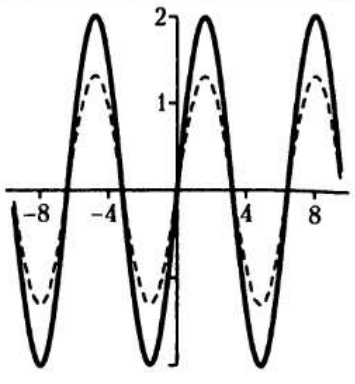
887 $y = x^2 - x\ln x$



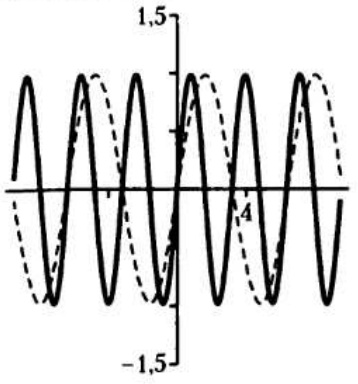
888 $y = \dfrac{x - \ln x}{x}$



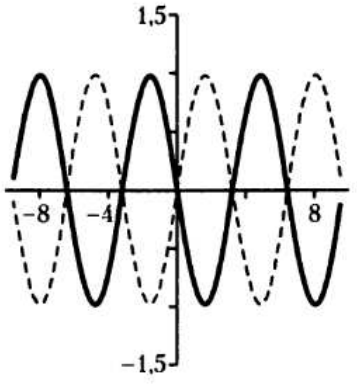
889 $y = \sin x$



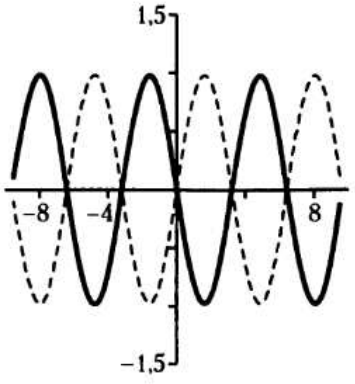
890 $y = 2\sin x$



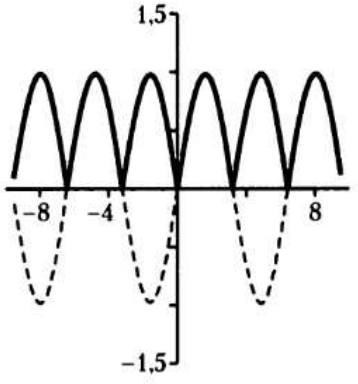
891 $y = \sin 2x$



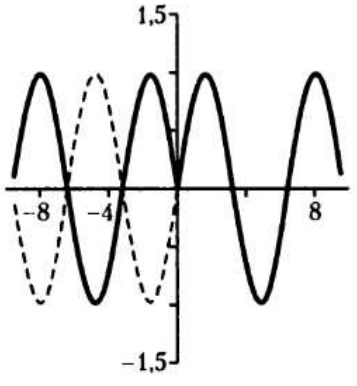
892 $y = -\sin x$



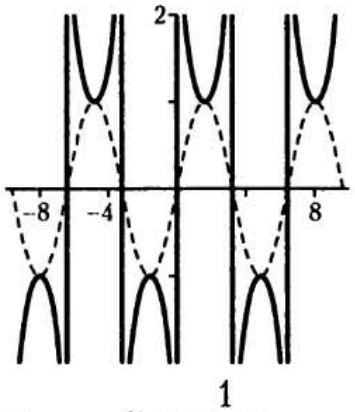
893 $y = \sin(-x)$



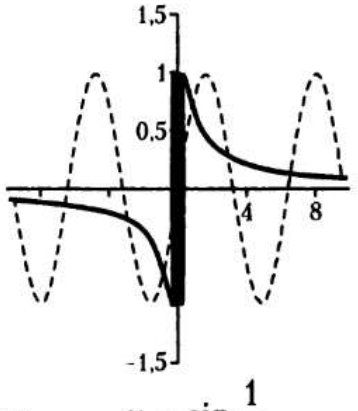
894 $y = |\sin x|$



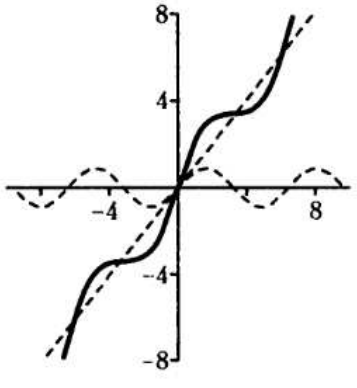
895 $y = \sin|x|$



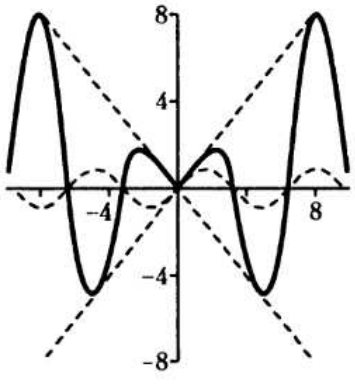
896 $y = \dfrac{1}{\sin x}$



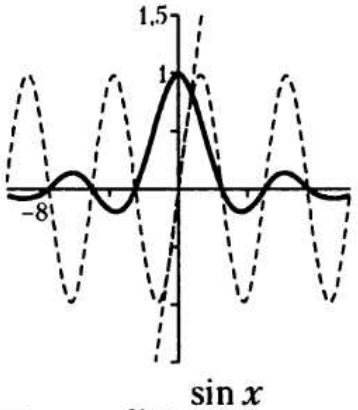
897 $y = \sin\dfrac{1}{x}$



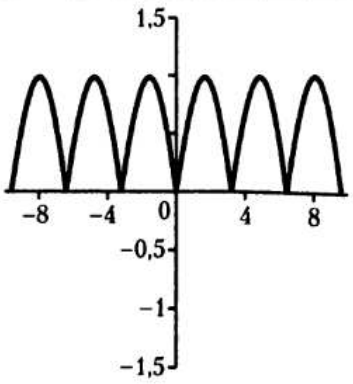
898 $y = x + \sin x$



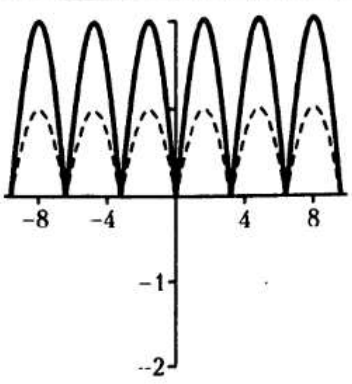
899 $y = x\sin x$



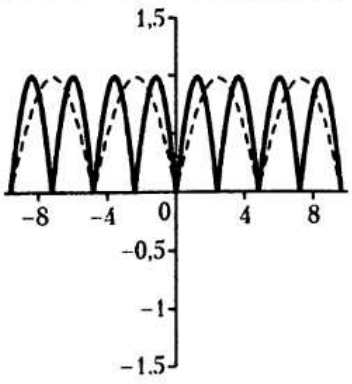
900 $y = \dfrac{\sin x}{x}$



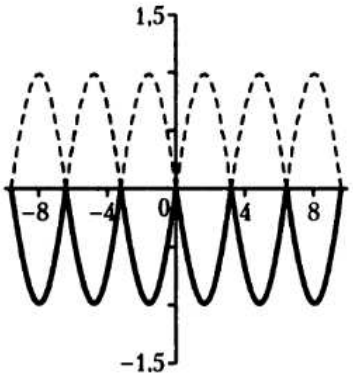
901 $y = |\sin x|$



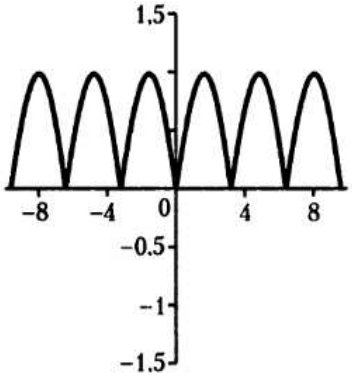
902 $y = 2|\sin x|$



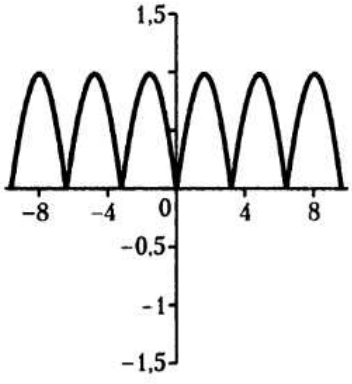
903 $y = |\sin 2x|$



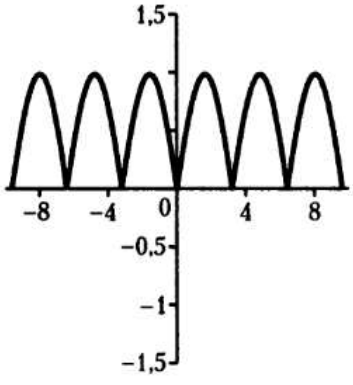
904 $y = -|\sin x|$



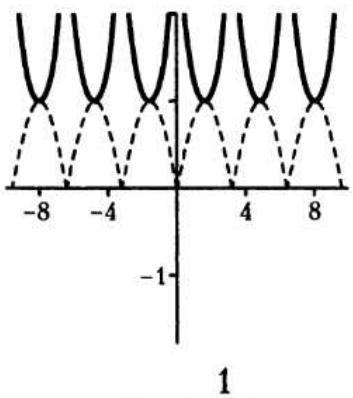
905 $y = |\sin(-x)|$



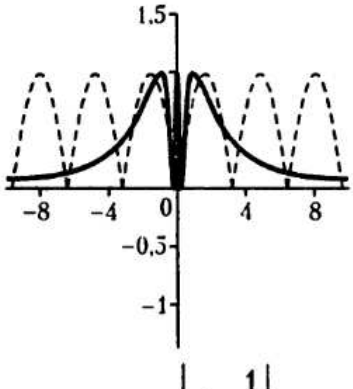
906 $y = \|\sin x\|$



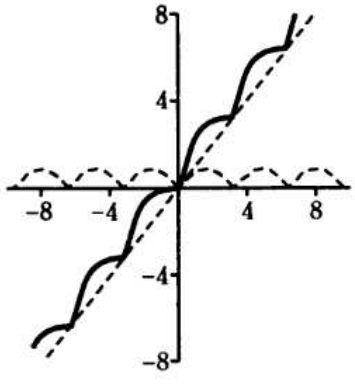
907 $y = |\sin|x||$



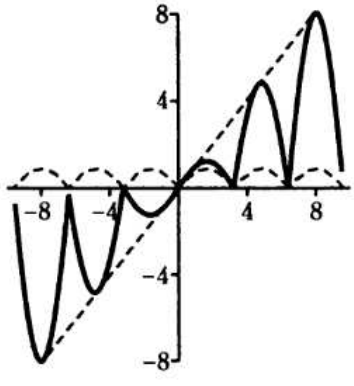
908 $y = \dfrac{1}{|\sin x|}$



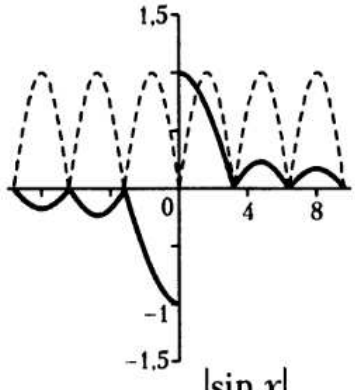
909 $y = \left|\sin\dfrac{1}{x}\right|$



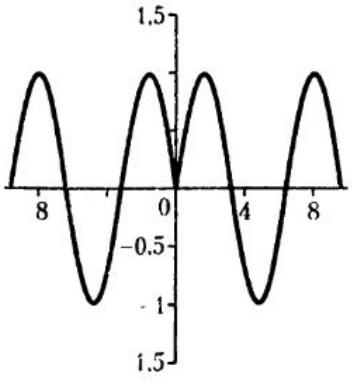
910 $y = x + |\sin x|$



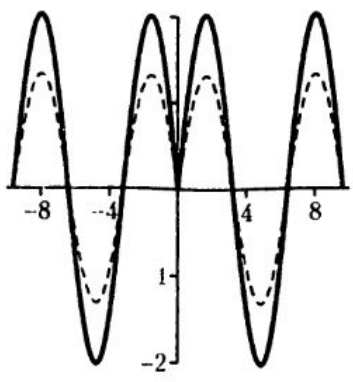
911 $y = x|\sin x|$



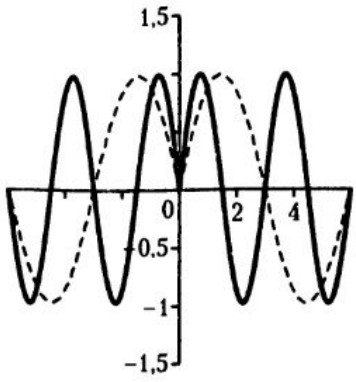
912 $y = \dfrac{|\sin x|}{x}$



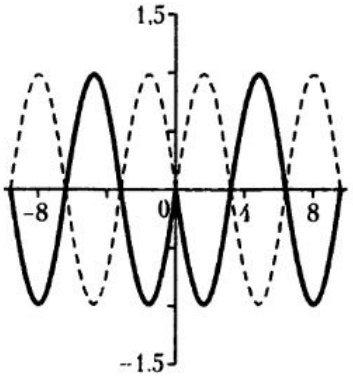
913 $y = \sin|x|$



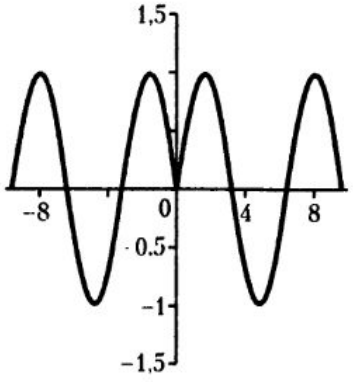
914 $y = 2\sin|x|$



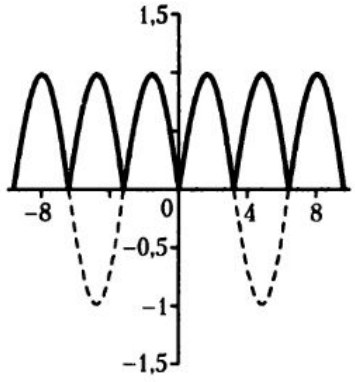
915 $y = \sin|2x|$



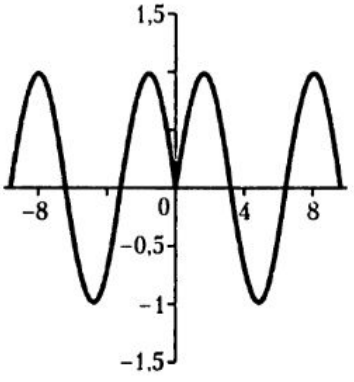
916 $y = -\sin|x|$



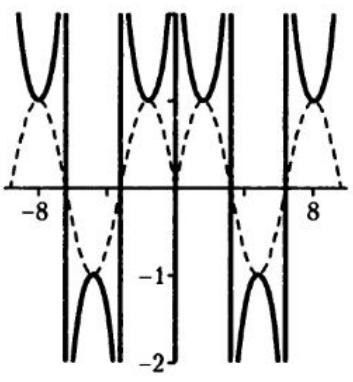
917 $y = \sin|-x|$



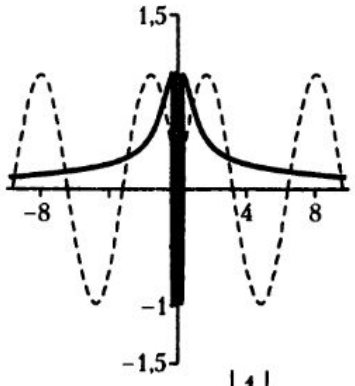
918 $y = |\sin|x||$



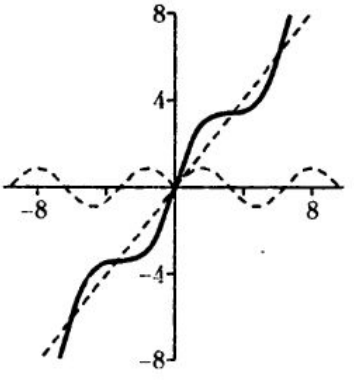
919 $y = \sin\|x\|$



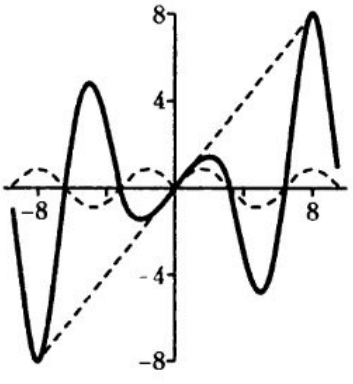
920 $y = 1/(\sin|x|)$



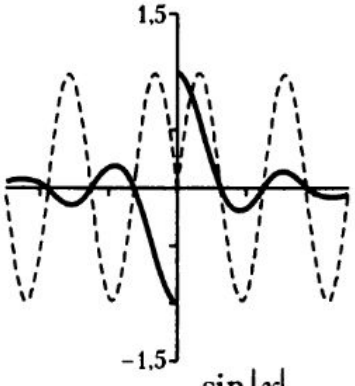
921 $y = \sin\left|\frac{1}{x}\right|$



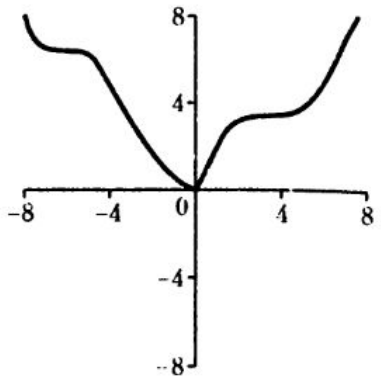
922 $y = x + \sin|x|$



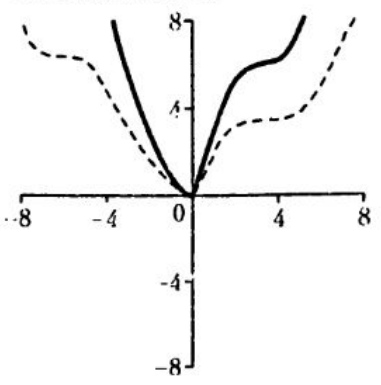
923 $y = x\sin|x|$



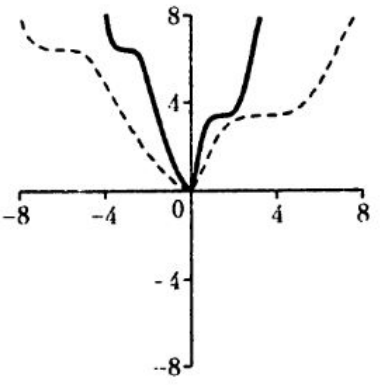
924 $y = \dfrac{\sin|x|}{x}$



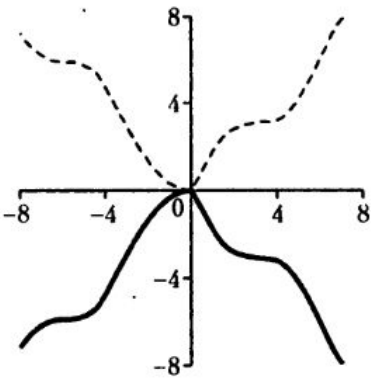
925 $y = |x| + \sin x$



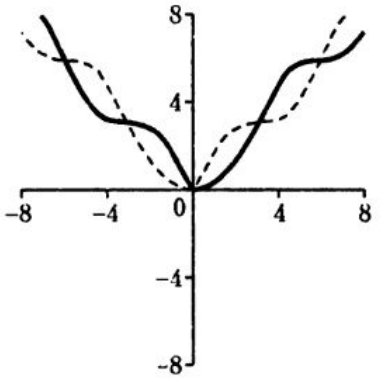
926 $y = 2|x| + 2\sin x$



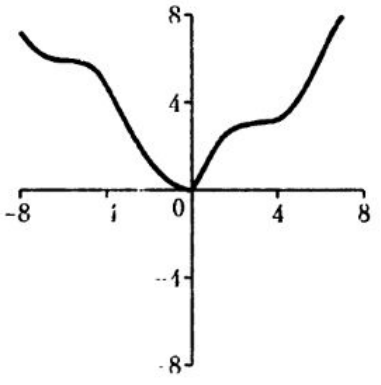
927 $y = 2|x| + \sin 2x$



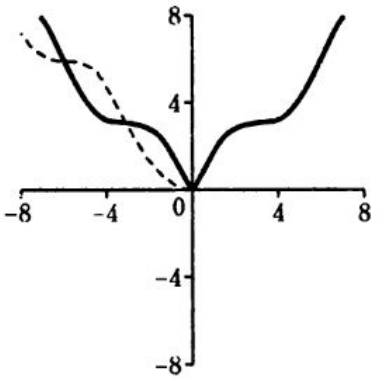
928 $y = -|x| - \sin x$



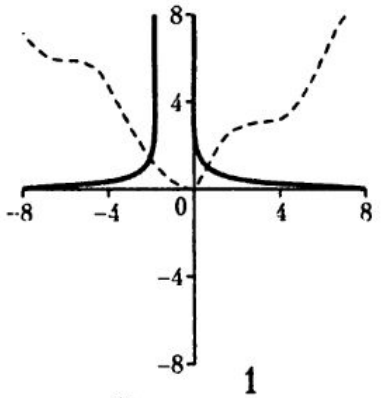
929 $y = |x| - \sin x$



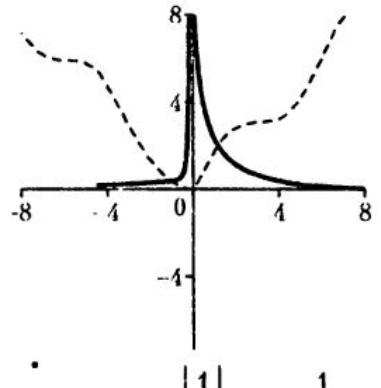
930 $y = \big||x| + \sin x\big|$



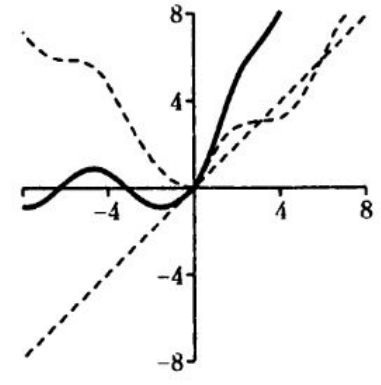
931 $y = |x| + \sin|x|$



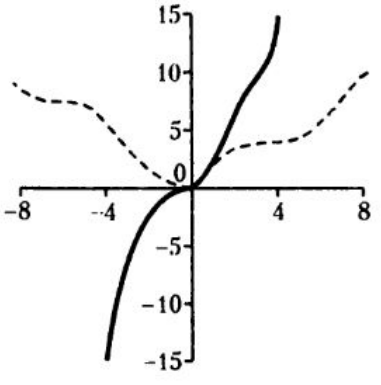
932 $y = \dfrac{1}{|x| + \sin x}$



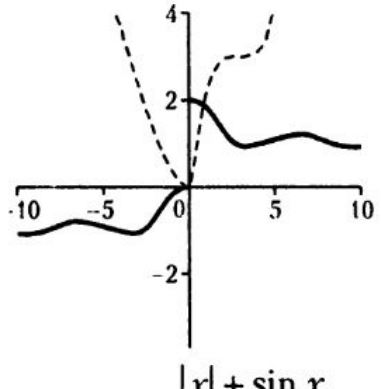
933 $y = \left|\dfrac{1}{x}\right| + \sin\dfrac{1}{x}$



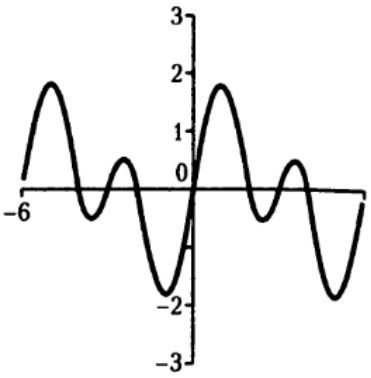
934 $y = x + |x| + \sin x$



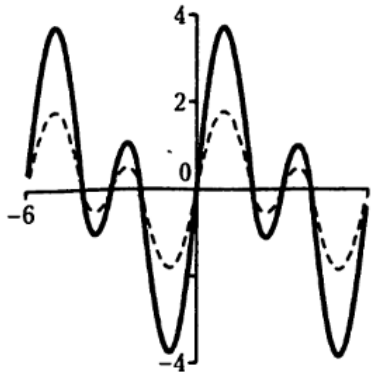
935 $y = x|x| + x\sin x$



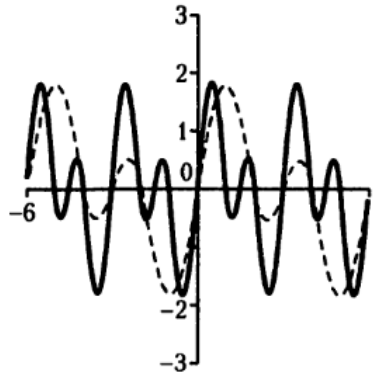
936 $y = \dfrac{|x| + \sin x}{x}$



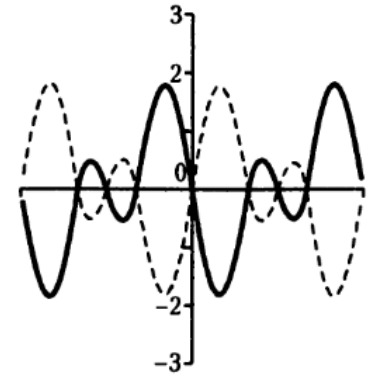
937 $y = \sin x + \sin 2x$



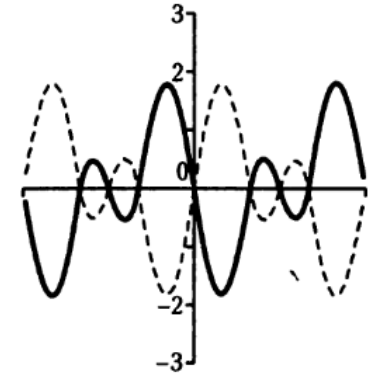
938 $y = 2\sin x + 2\sin 2x$



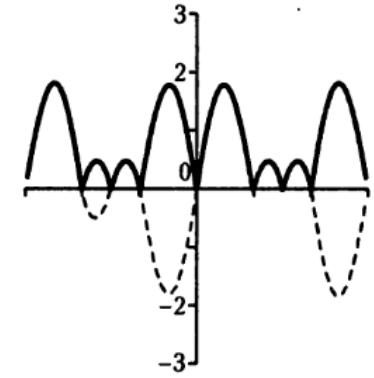
939 $y = \sin 2x + \sin 4x$



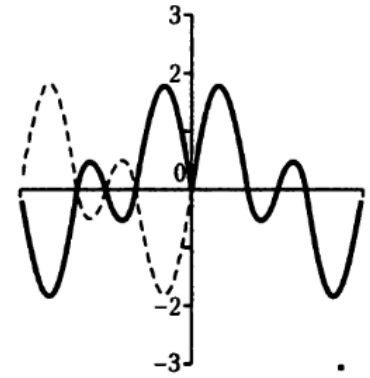
940 $y = -(\sin x + \sin 2x)$



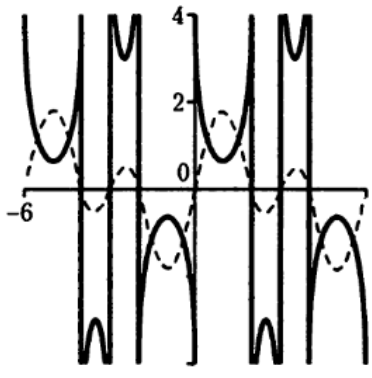
941 $y = -\sin x - \sin 2x$



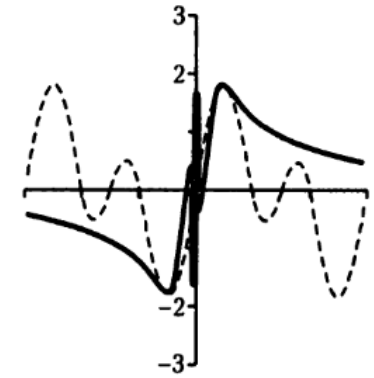
942 $y = |\sin x + \sin 2x|$



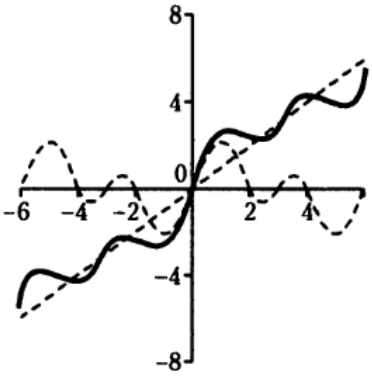
943 $y = \sin|x| + \sin 2|x|$



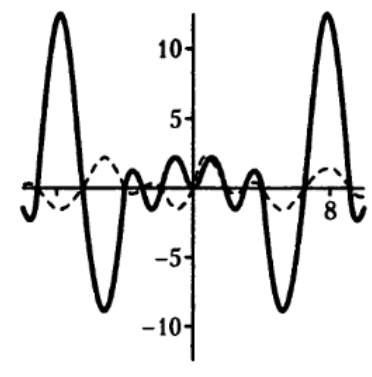
944 $y = \dfrac{1}{\sin x + \sin 2x}$



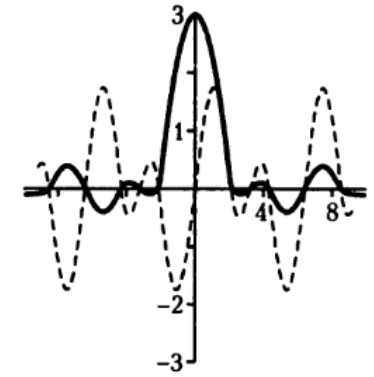
945 $y = \sin\dfrac{1}{x} + \sin\dfrac{2}{x}$



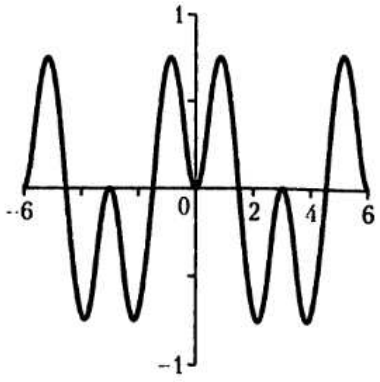
946 $y = x + \sin x + \sin 2x$



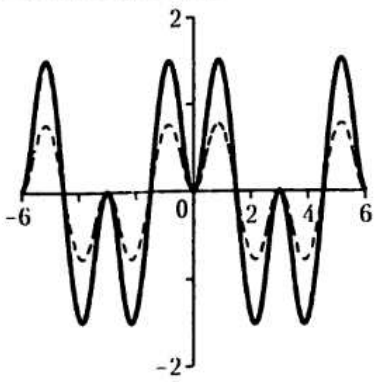
947 $y = x\sin x + x\sin 2x$



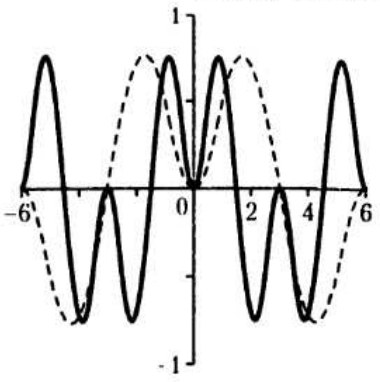
948 $y = \dfrac{\sin x + \sin 2x}{x}$



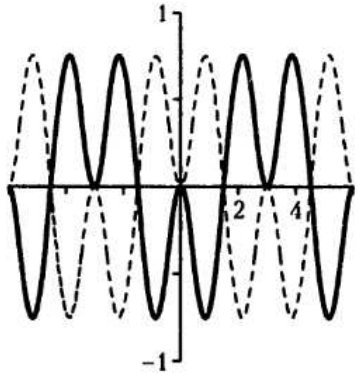
949 $y = \sin x \sin 2x$



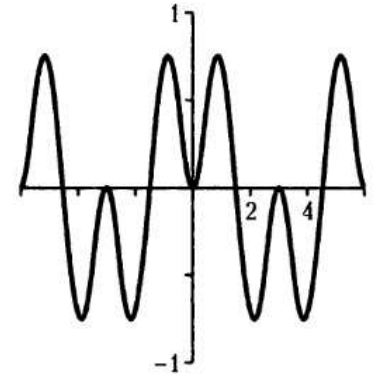
950 $y = 2\sin x \sin 2x$



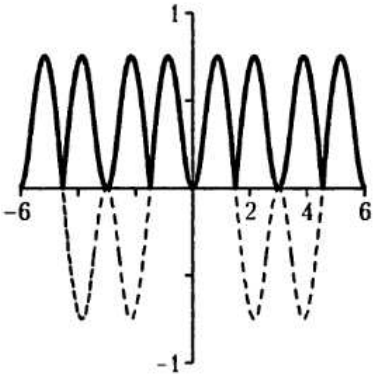
951 $y = \sin 2x \sin 4x$



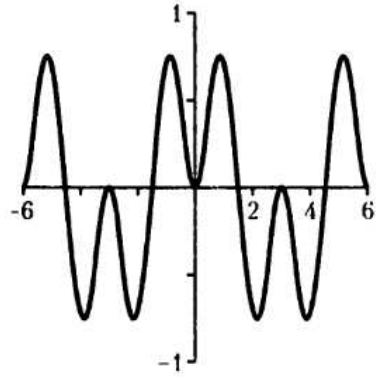
952 $y = -(\sin x \sin 2x)$



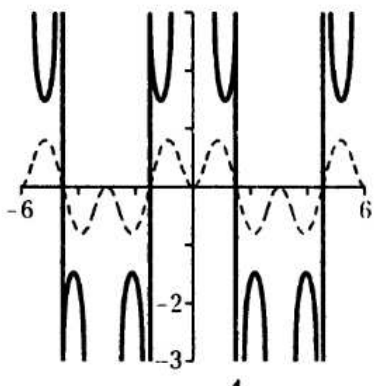
953 $y = \sin(-x)\sin 2(-x)$



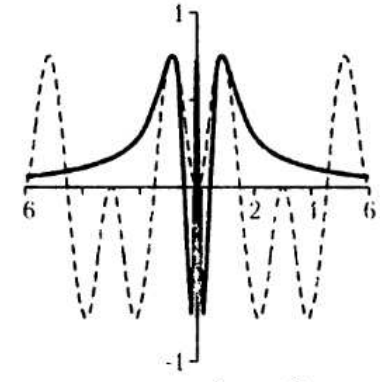
954 $y = |\sin x \sin 2x|$



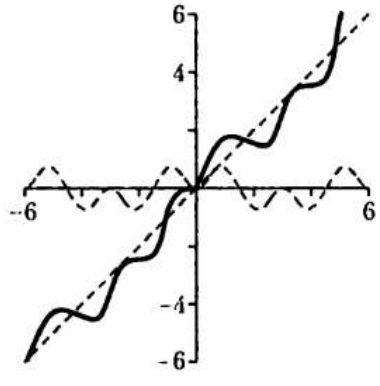
955 $y = \sin|x|\sin 2|x|$



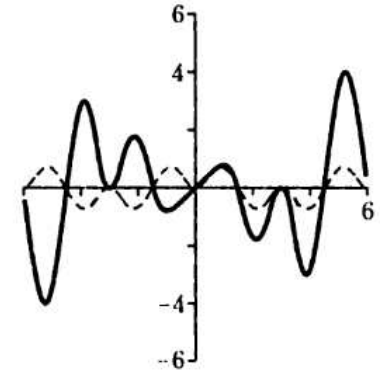
956 $y = \dfrac{1}{\sin x \sin 2x}$



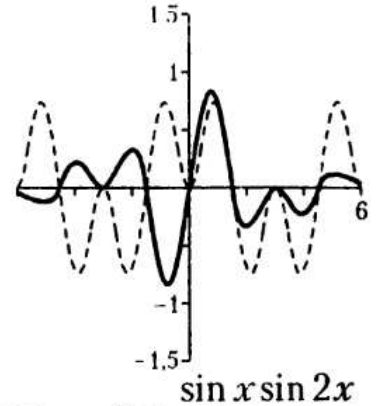
957 $y = \sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{2}{x}$



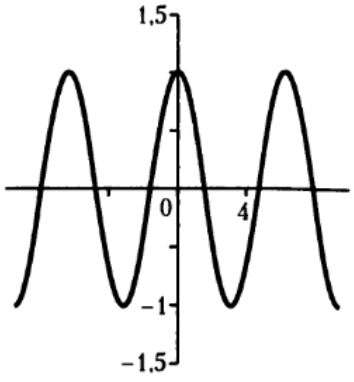
958 $y = x + \sin x \sin 2x$



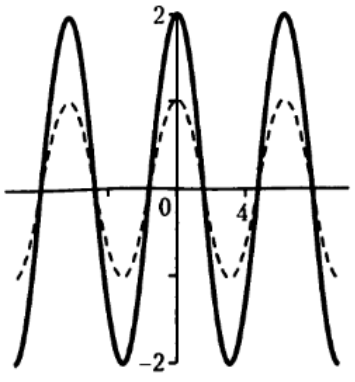
959 $y = x \sin x \sin 2x$



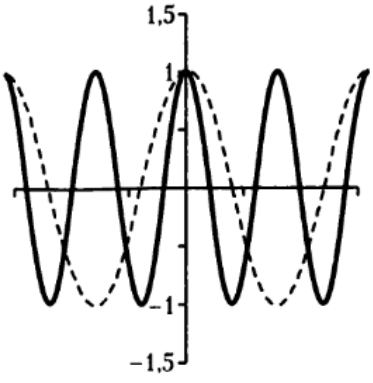
960 $y = \dfrac{\sin x \sin 2x}{x}$



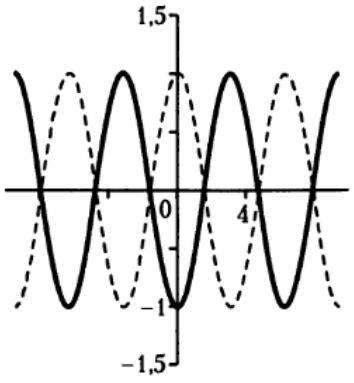
961 $y = \cos x$



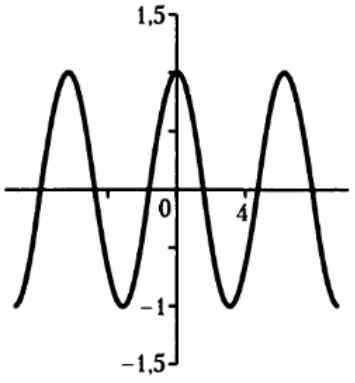
962 $y = 2\cos x$



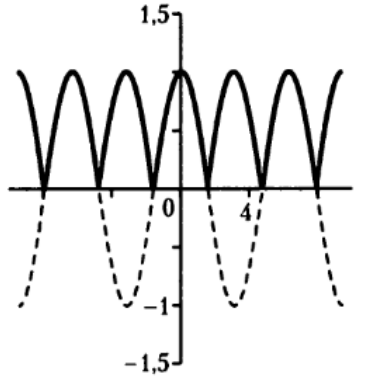
963 $y = \cos 2x$



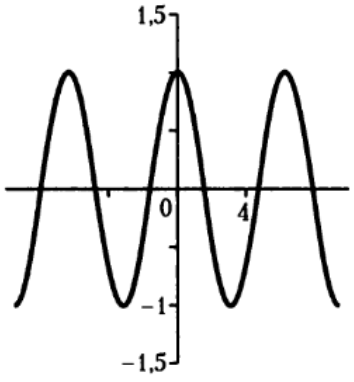
964 $y = -\cos x$



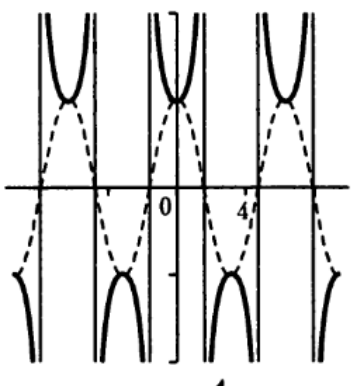
965 $y = \cos(-x)$



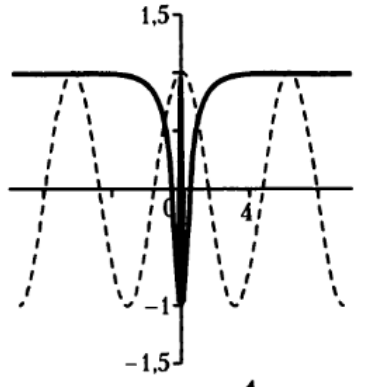
966 $y = |\cos x|$



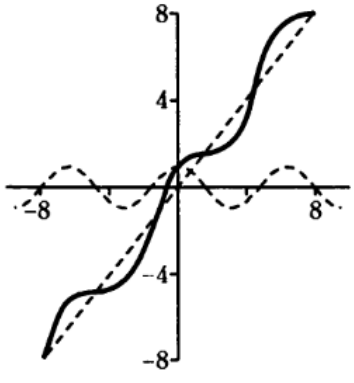
967 $y = \cos|x|$



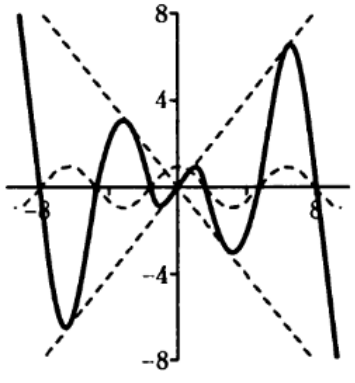
968 $y = \dfrac{1}{\cos x}$



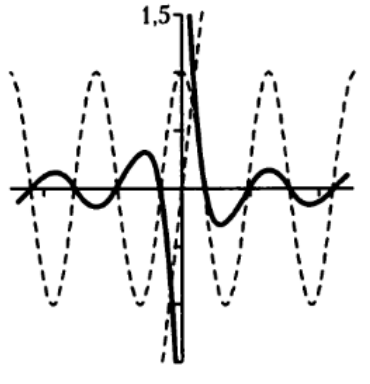
969 $y = \cos\dfrac{1}{x}$



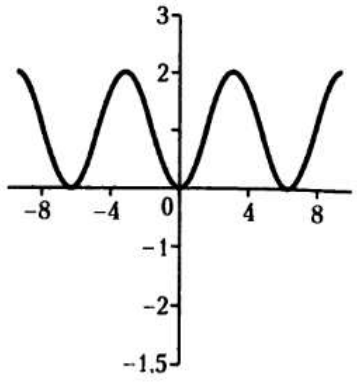
970 $y = x + \cos x$



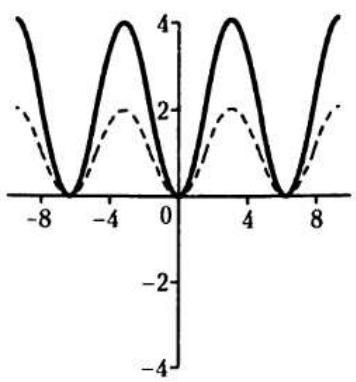
971 $y = x\cos x$



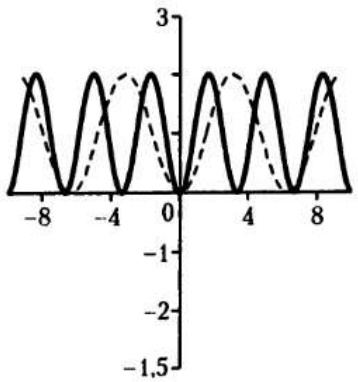
972 $y = \dfrac{\cos x}{x}$



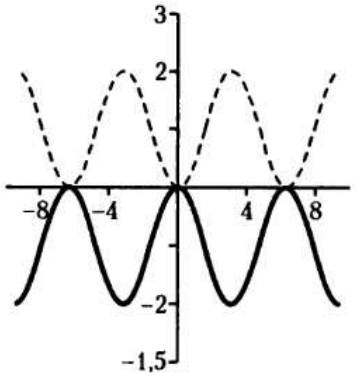
973 $y = 1 - \cos x$



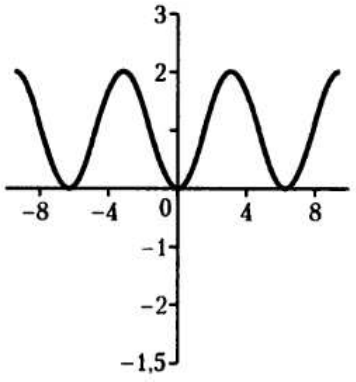
974 $y = 2 - 2\cos x$



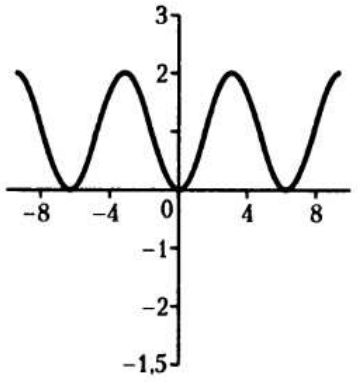
975 $y = 1 - \cos 2x$



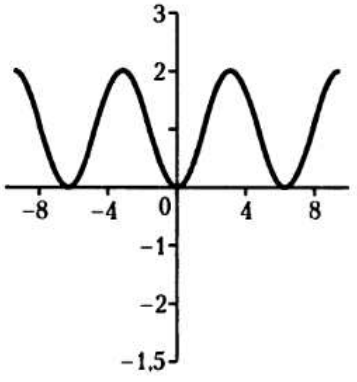
976 $y = -1 + \cos x$



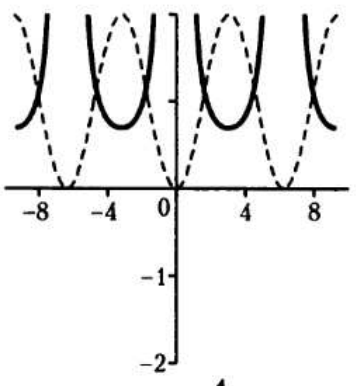
977 $y = 1 - \cos(-x)$



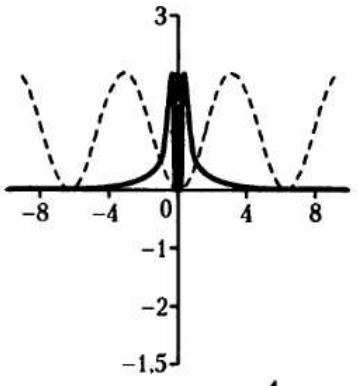
978 $y = |1 - \cos x|$



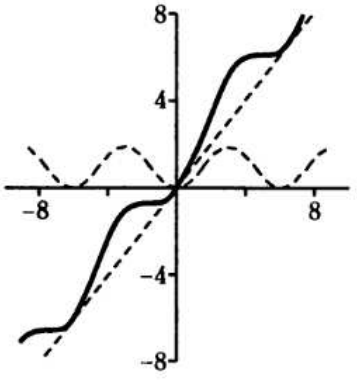
979 $y = 1 - \cos|x|$



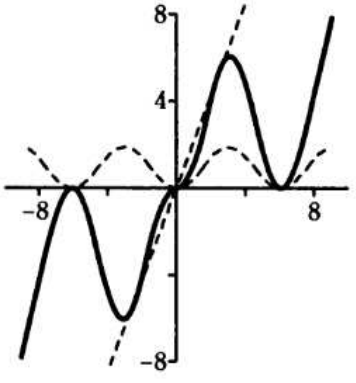
980 $y = \dfrac{1}{1 - \cos x}$



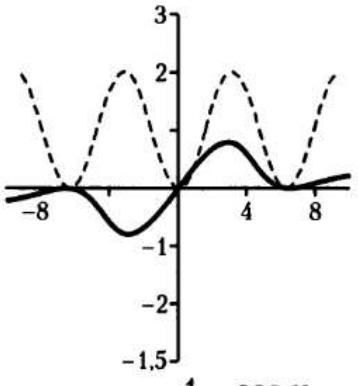
981 $y = 1 - \cos\dfrac{1}{x}$



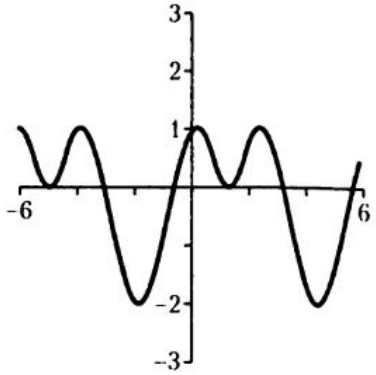
982 $y = x + 1 - \cos x$



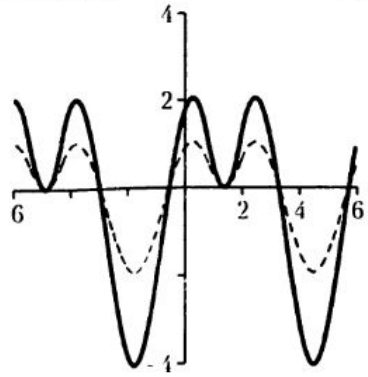
983 $y = x - x\cos x$



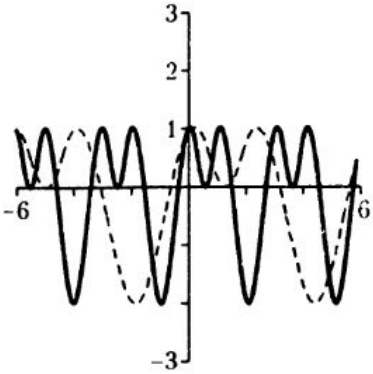
984 $y = \dfrac{1 - \cos x}{x}$



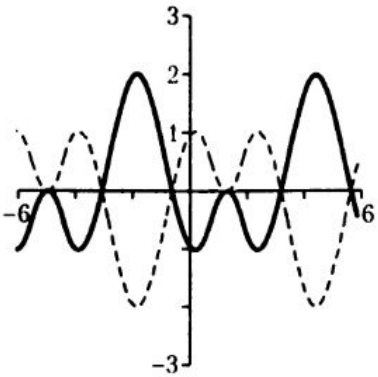
985 $y = \sin x + \cos 2x$



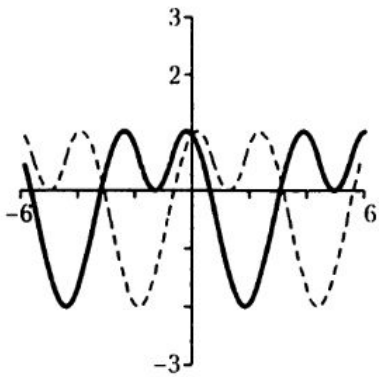
986 $y = 2\sin x + 2\cos 2x$



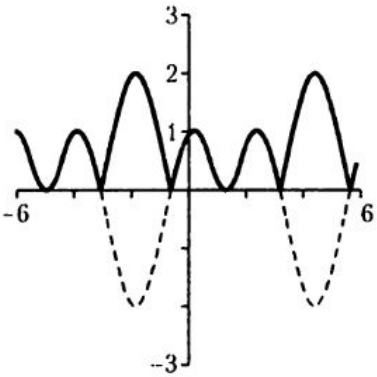
987 $y = \sin 2x + \cos 4x$



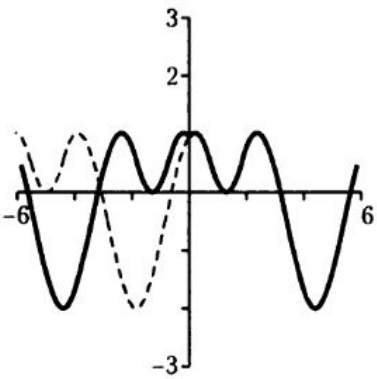
988 $y = -(\sin x + \cos 2x)$



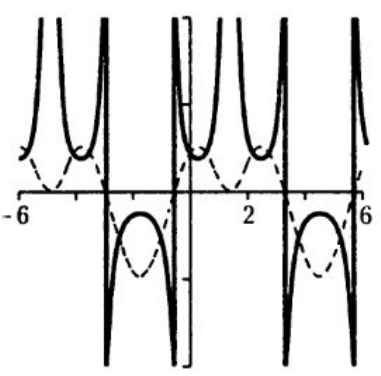
989 $y = -\sin x + \cos 2x$



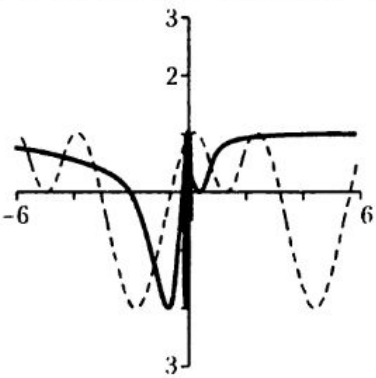
990 $y = |\sin x + \cos 2x|$



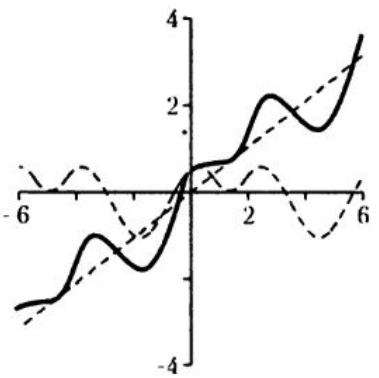
991 $y = \sin|x| + \cos 2|x|$



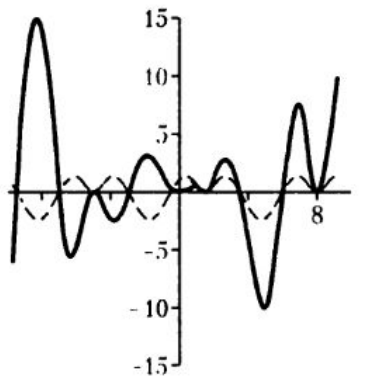
992 $y = \dfrac{1}{\sin x + \cos 2x}$



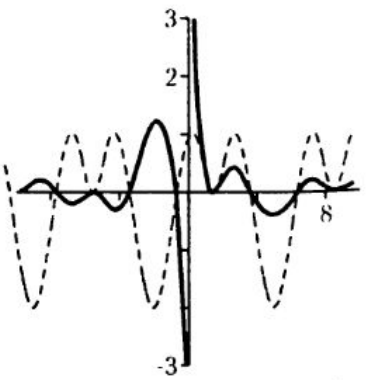
993 $y = \sin\dfrac{1}{x} + \cos\dfrac{2}{x}$



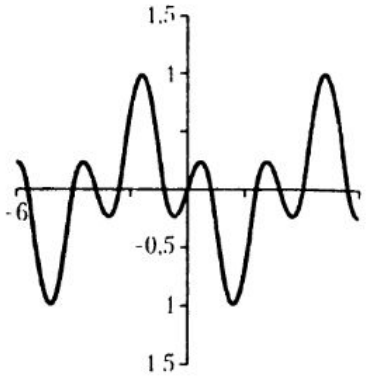
994 $y = x + \sin x + \cos 2x$



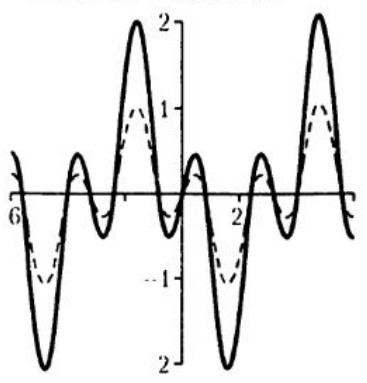
995 $y = x\sin x + x\cos 2x$



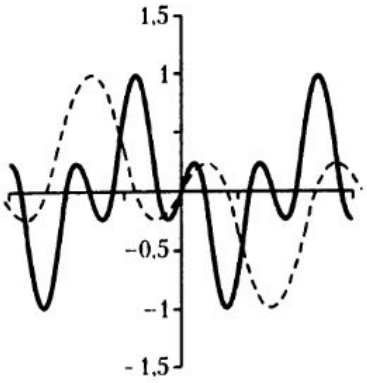
996 $y = \dfrac{\sin x + \cos 2x}{x}$



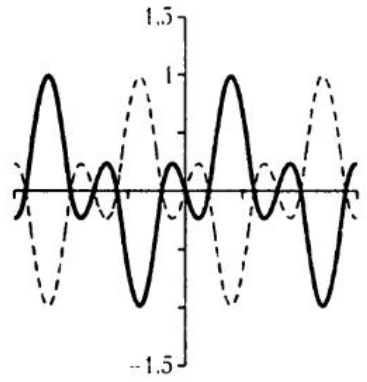
997 $y = \sin x \cos 2x$



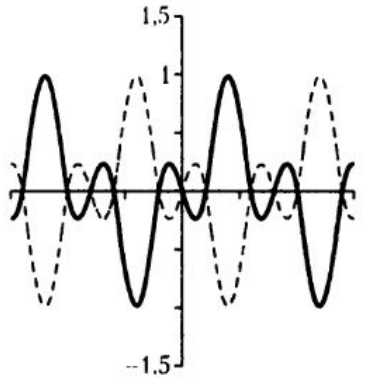
998 $y = 2\sin x \cos 2x$



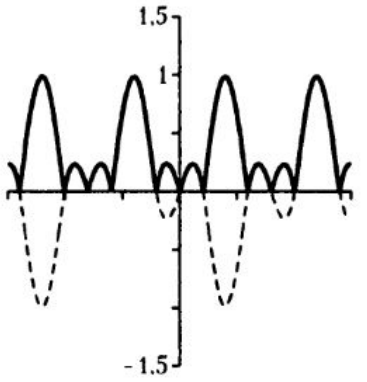
999 $y = \sin 2x \cos 4x$



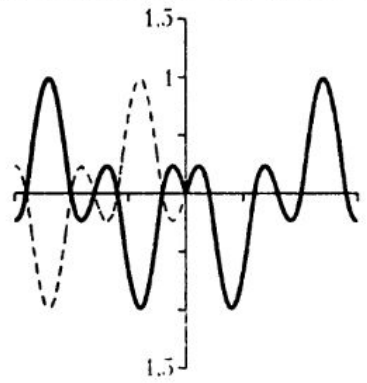
1000 $y = -\sin x \cos 2x$



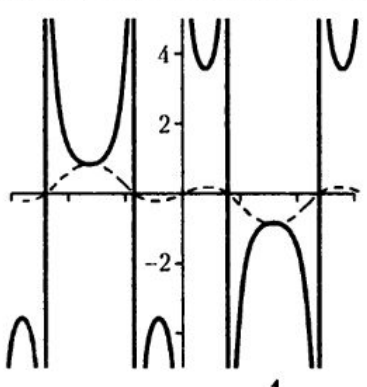
1001 $y = \sin(-x)\cos 2x$



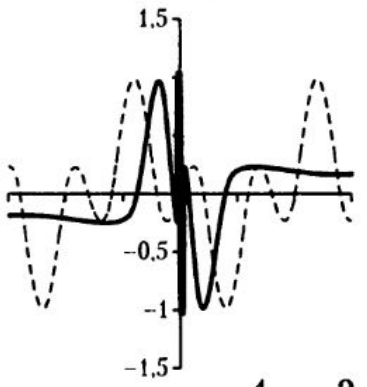
1002 $y = |\sin x \cos 2x|$



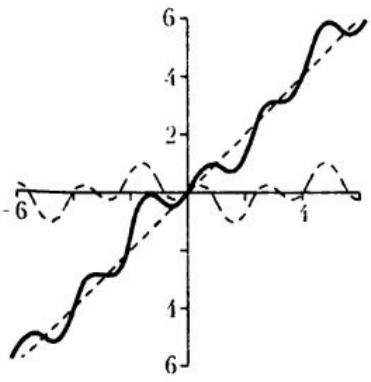
1003 $y = \sin|x|\cos 2|x|$



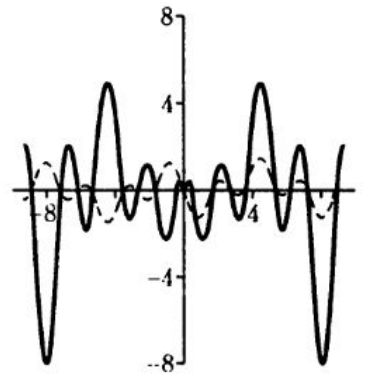
1004 $y = \dfrac{1}{\sin x \cos 2x}$



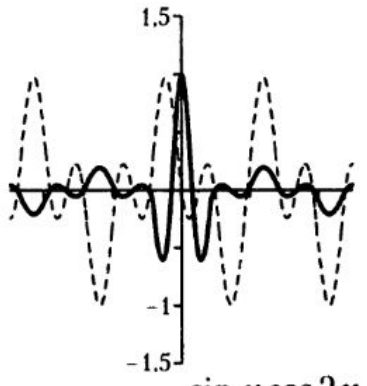
1005 $y = \sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{2}{x}$



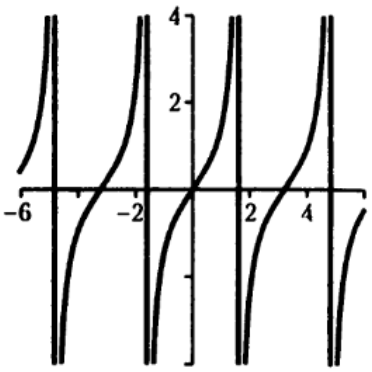
1006 $y = x + \sin x \cos 2x$



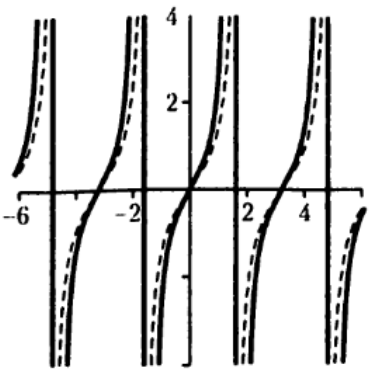
1007 $y = x \sin x \cos 2x$



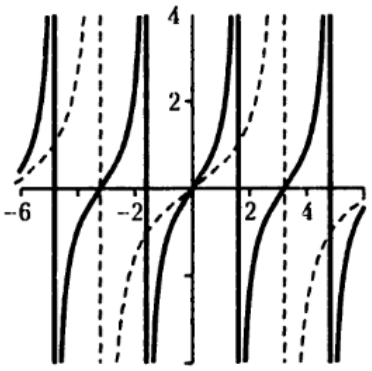
1008 $y = \dfrac{\sin x \cos 2x}{x}$



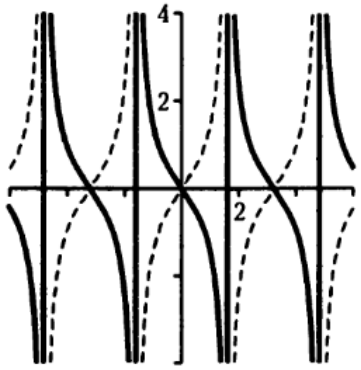
1009 $y = \operatorname{tg} x$



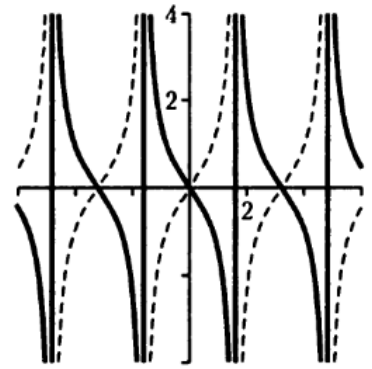
1010 $y = 2\operatorname{tg} x$



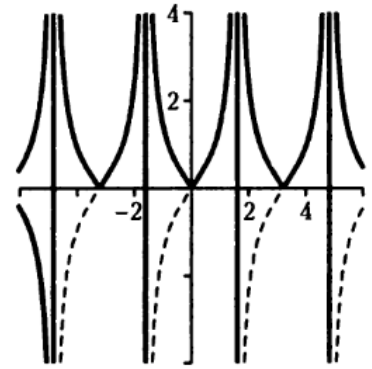
1011 $y = \operatorname{tg} 2x$



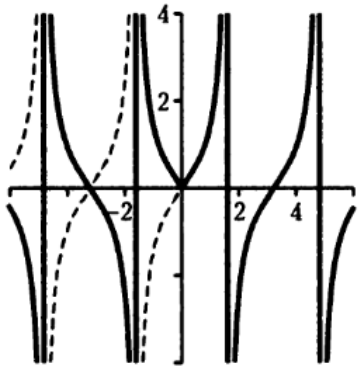
1012 $y = -\operatorname{tg} x$



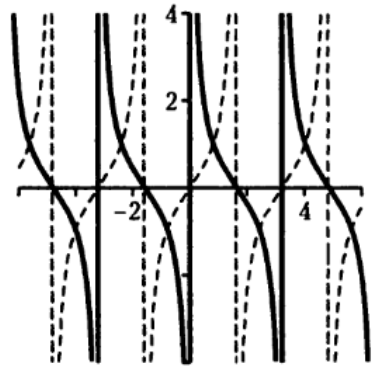
1013 $y = \operatorname{tg}(-x)$



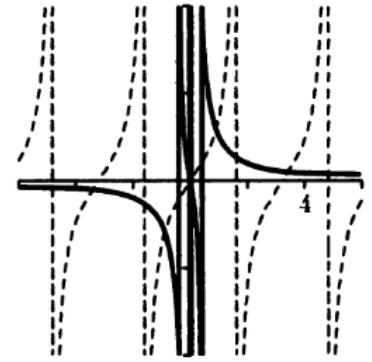
1014 $y = |\operatorname{tg} x|$



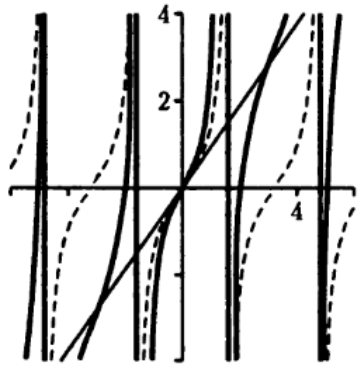
1015 $y = \operatorname{tg}|x|$



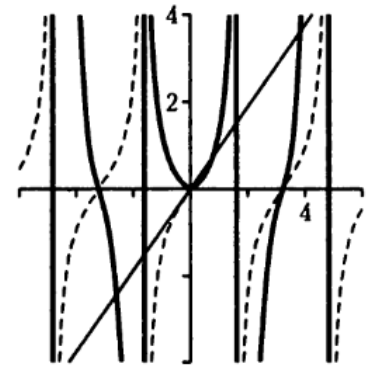
1016 $y = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$



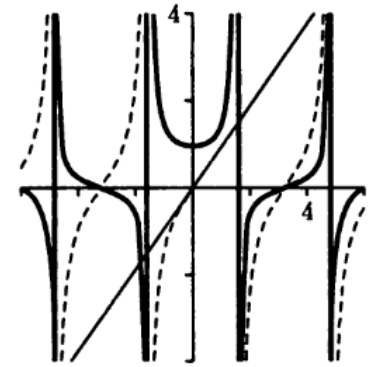
1017 $y = \operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$



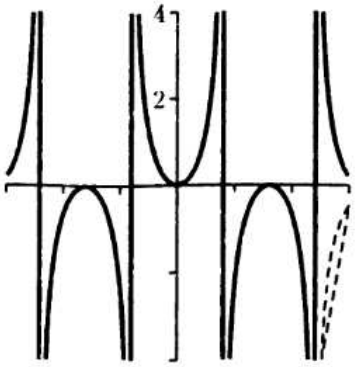
1018 $y = x + \operatorname{tg} x$



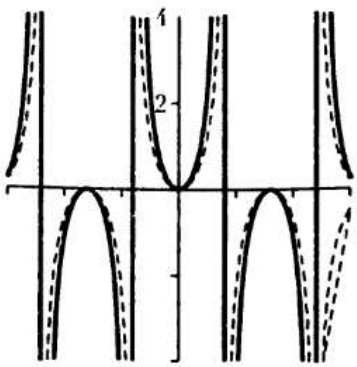
1019 $y = x\operatorname{tg} x$



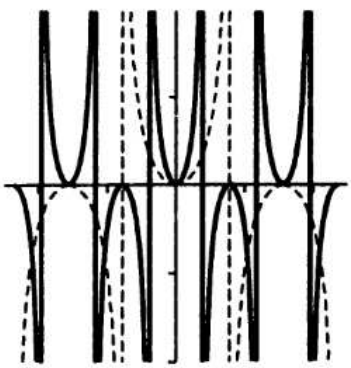
1020 $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$



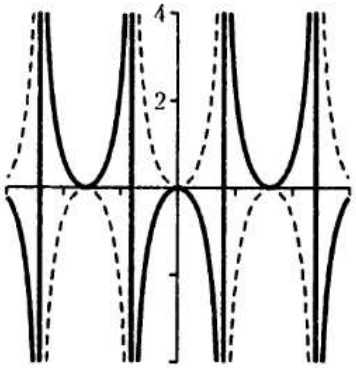
1021 $y = \operatorname{tg} x \sin x$



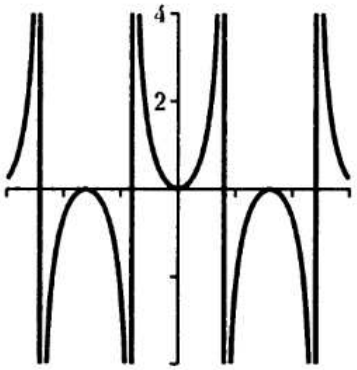
1022 $y = 2 \operatorname{tg} x \sin x$



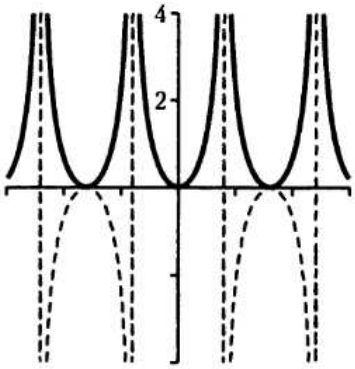
1023 $y = \operatorname{tg} 2x \sin 2x$



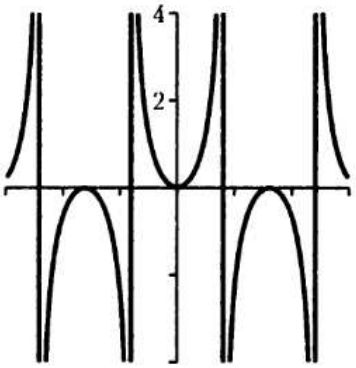
1024 $y = -\operatorname{tg} x \sin x$



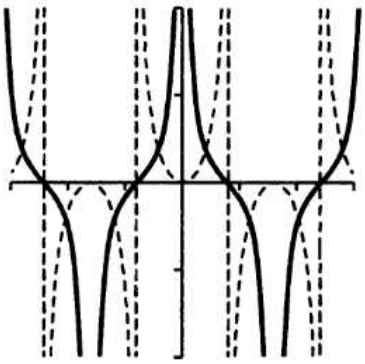
1025 $y = \operatorname{tg}(-x)\sin(-x)$



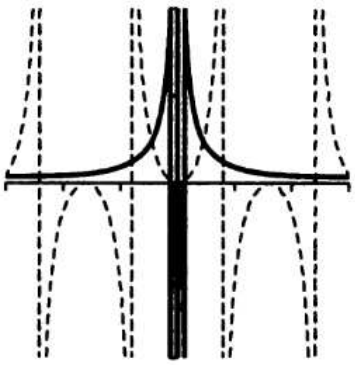
1026 $y = |\operatorname{tg} x \sin x|$



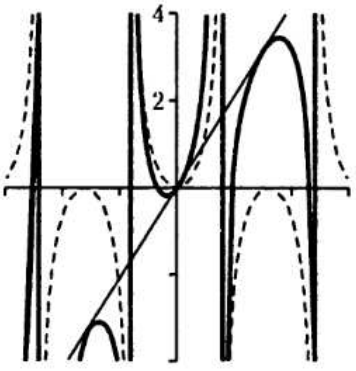
1027 $y = \operatorname{tg}|x| \sin|x|$



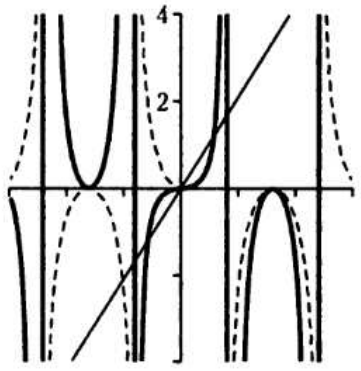
1028 $y = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x \sin x}$



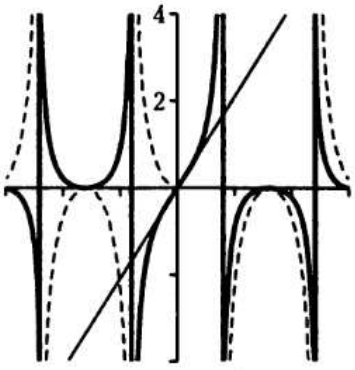
1029 $y = \operatorname{tg}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$



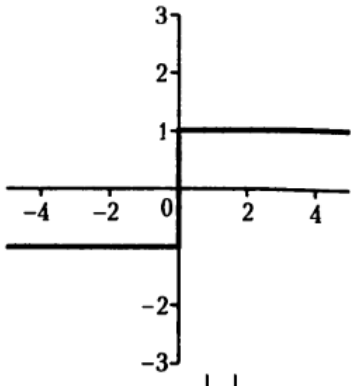
1030 $y = x + \operatorname{tg} x \sin x$



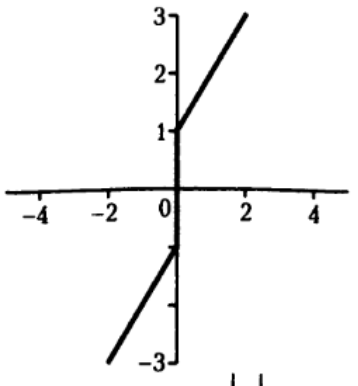
1031 $y = x \operatorname{tg} x \sin x$



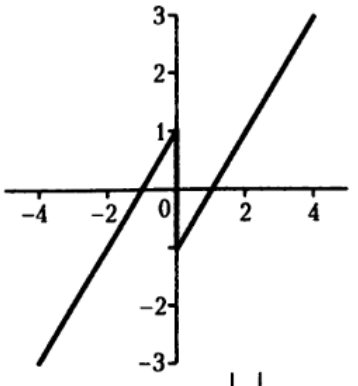
1032 $y = \dfrac{\operatorname{tg} x \sin x}{x}$



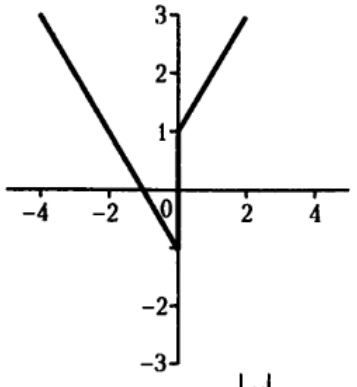
1033 $y = \dfrac{|x|}{x}$



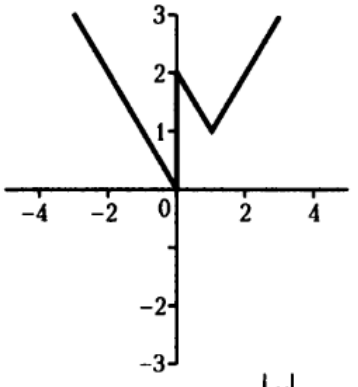
1034 $y = x + \dfrac{|x|}{x}$



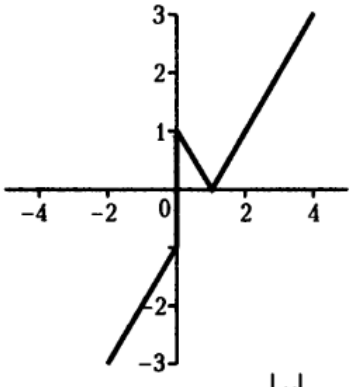
1035 $y = x - \dfrac{|x|}{x}$



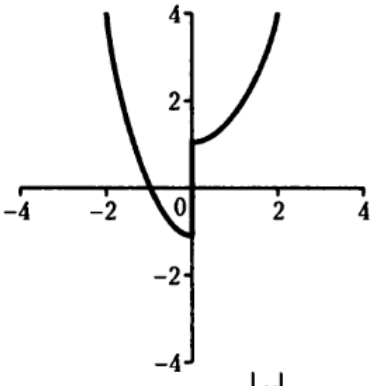
1036 $y = |x| + \dfrac{|x|}{x}$



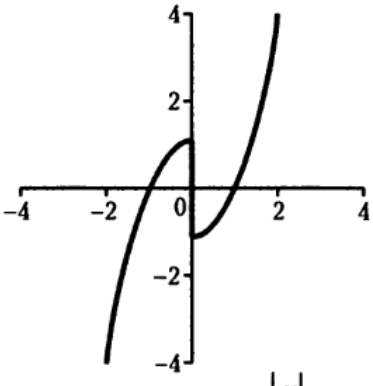
1037 $y = |x-1| + \dfrac{|x|}{x}$



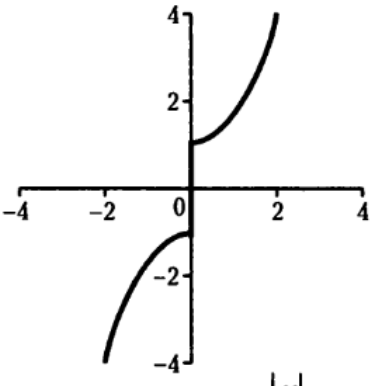
1038 $y = |x-1|\dfrac{|x|}{x}$



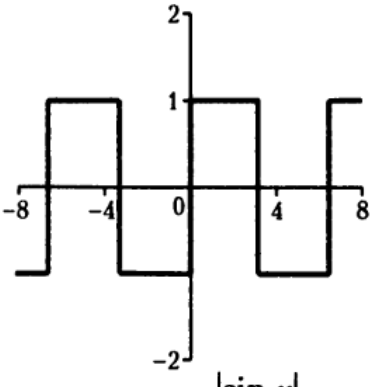
1039 $y = x^2 + \dfrac{|x|}{x}$



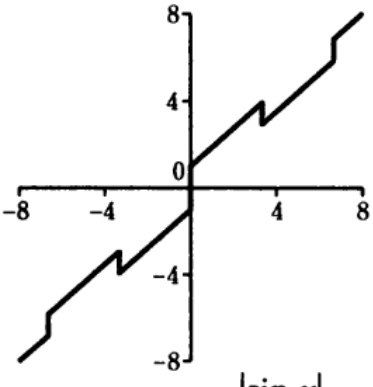
1040 $y = \left(x^2 - 1\right)\dfrac{|x|}{x}$



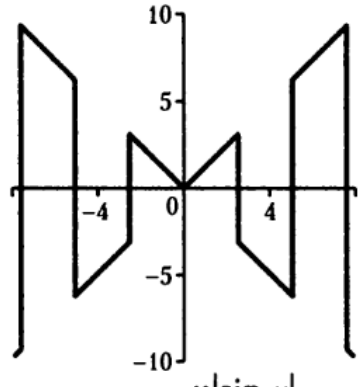
1041 $y = \left(x^2 + 1\right)\dfrac{|x|}{x}$



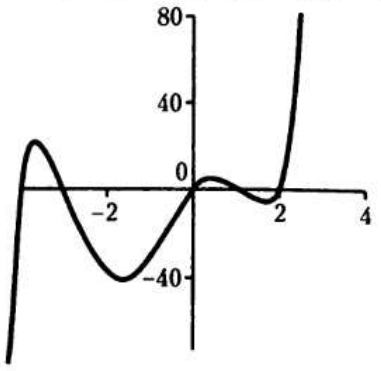
1042 $y = \dfrac{|\sin x|}{\sin x}$



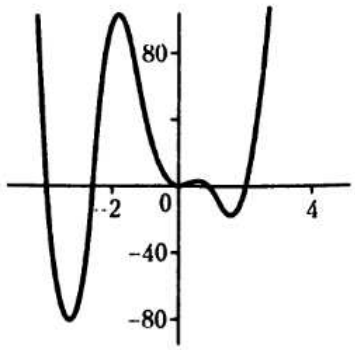
1043 $y = x + \dfrac{|\sin x|}{\sin x}$



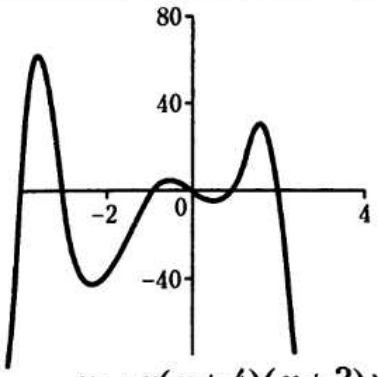
1044 $y = \dfrac{x|\sin x|}{\sin x}$



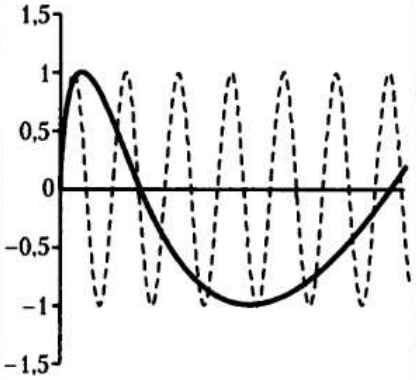
1045 $y = x(x+4)(x+3)\times$ $\times(x-1)(x-2)$



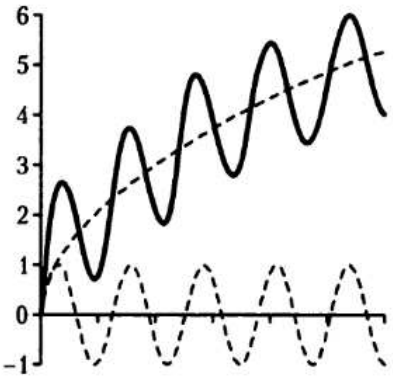
1046 $y = x^2(x+4)(x+3)\times$ $\times(x-1)(x-2)$



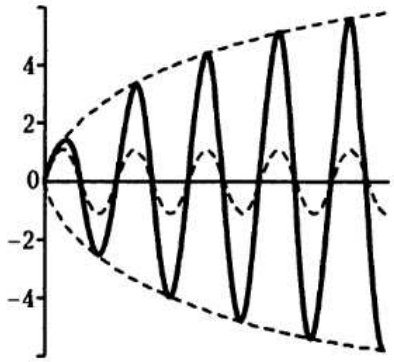
1047 $y = x(x+4)(x+3)\times$ $\times(x^2-1)(2-x)$



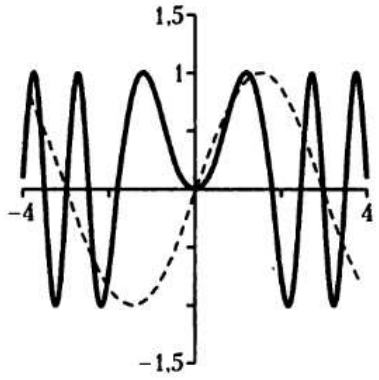
1048 $y = \sin\sqrt{x}$



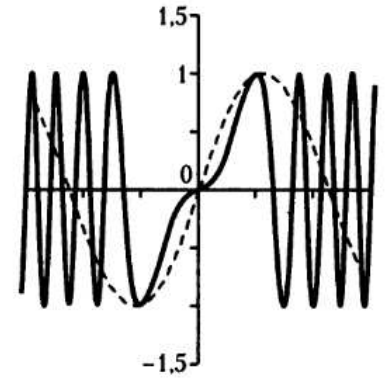
1049 $y = \sqrt{x} + \sin x$



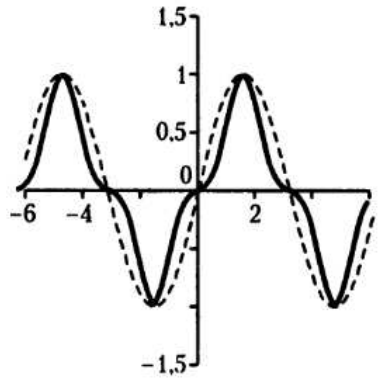
1050 $y = \sqrt{x}\sin x$



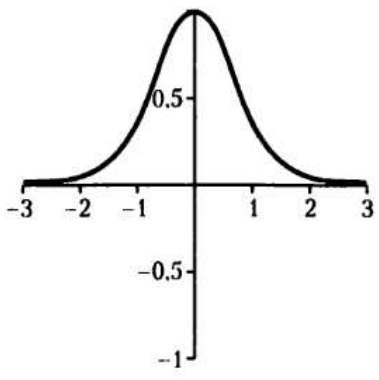
1051 $y = \sin\left(x^2\right)$



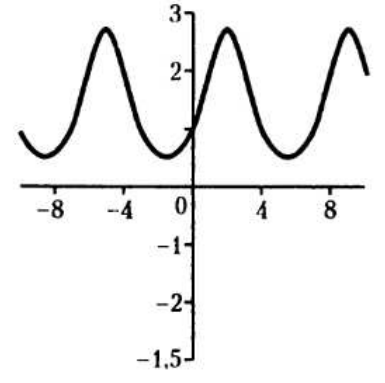
1052 $y = \sin\left(x^3\right)$



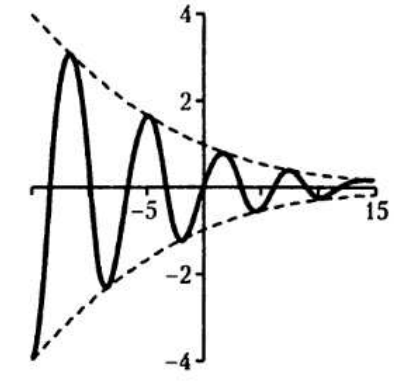
1053 $y = \sin^3 x$



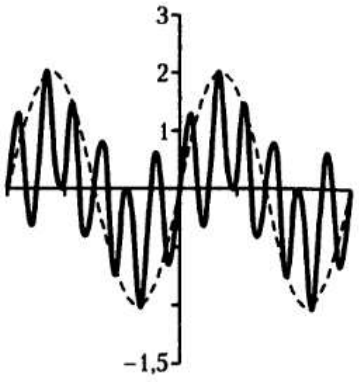
1054 $y = e^{-x^2}$



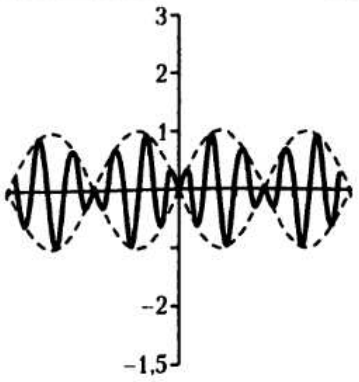
1055 $y = e^{\sin x}$



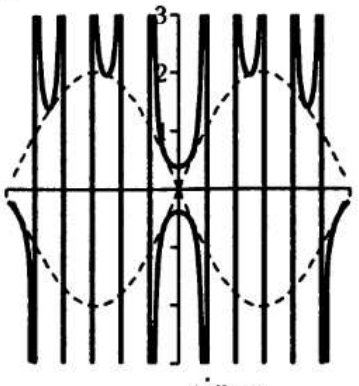
1056 $y = e^{-|k|x}\sin x$



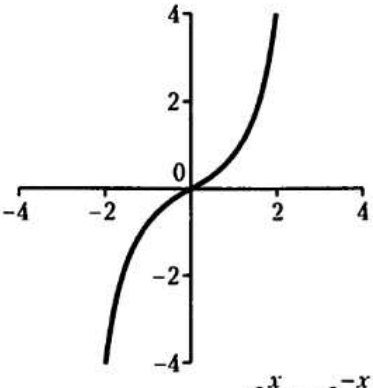
1057 $y = \sin x + \sin 6x$



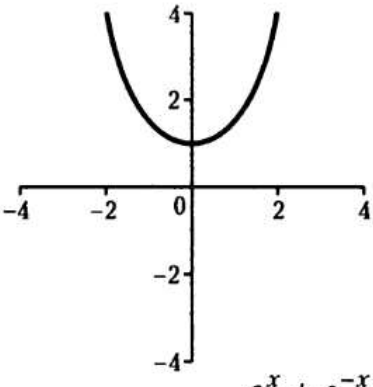
1058 $y = \sin x \sin 6x$



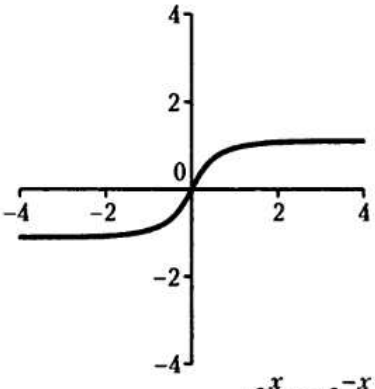
1059 $y = \dfrac{\sin x}{\sin 6x}$



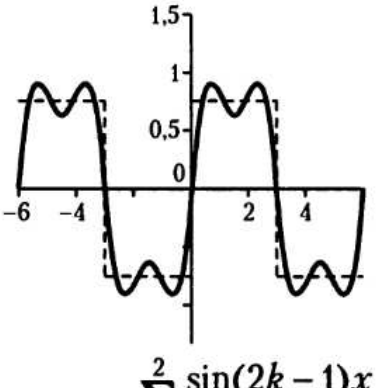
1060 $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$



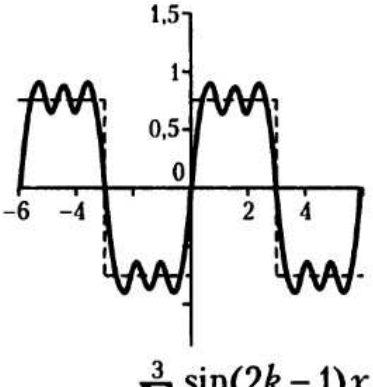
1061 $y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$



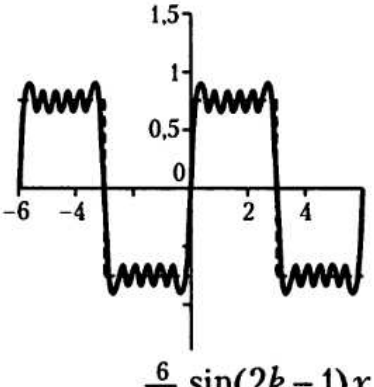
1062 $y = \operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$



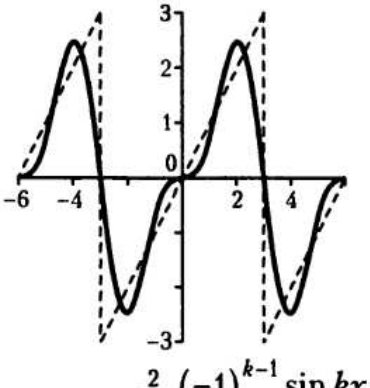
1063 $y = \sum_{k=1}^{2} \dfrac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$



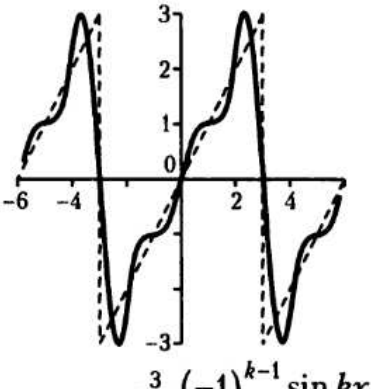
1064 $y = \sum_{k=1}^{3} \dfrac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$



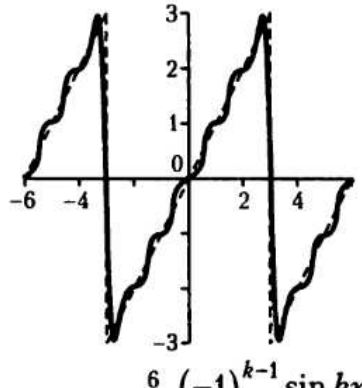
1065 $y = \sum_{k=1}^{6} \dfrac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$



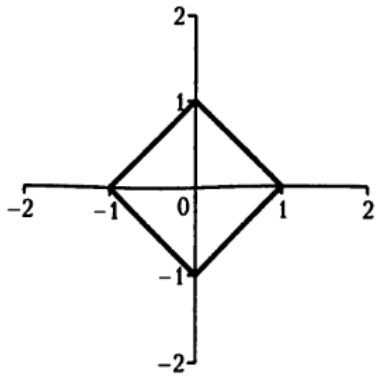
1066 $y = 2\sum_{k=1}^{2} \dfrac{(-1)^{k-1} \sin kx}{k}$



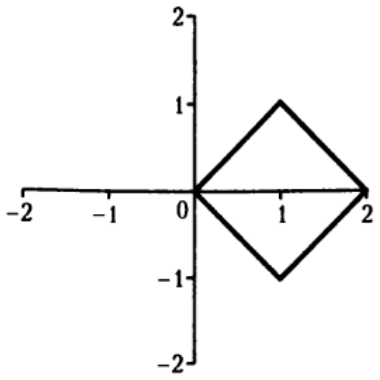
1067 $y = 2\sum_{k=1}^{3} \dfrac{(-1)^{k-1} \sin kx}{k}$



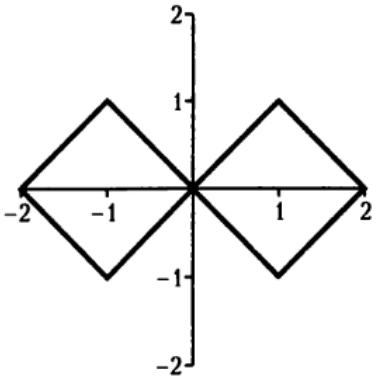
1068 $y = 2\sum_{k=1}^{6} \dfrac{(-1)^{k-1} \sin kx}{k}$



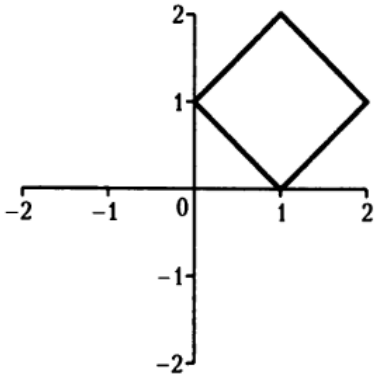
1069 $|x| + |y| = 1$



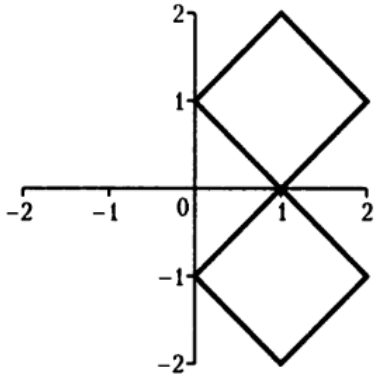
1070 $|x-1| + |y| = 1$



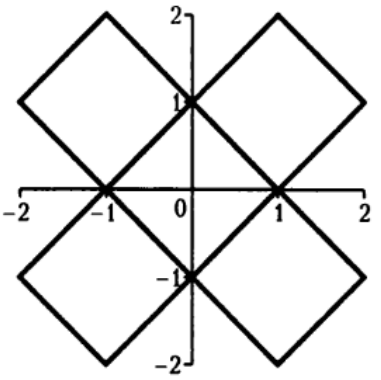
1071 $||x|-1| + |y| = 1$



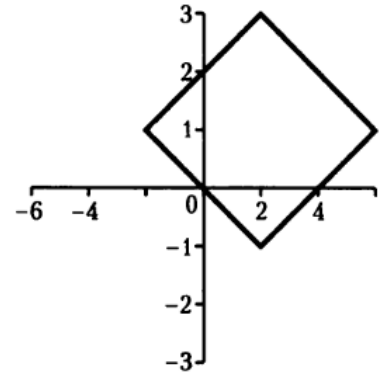
1072 $|x-1| + |y-1| = 1$



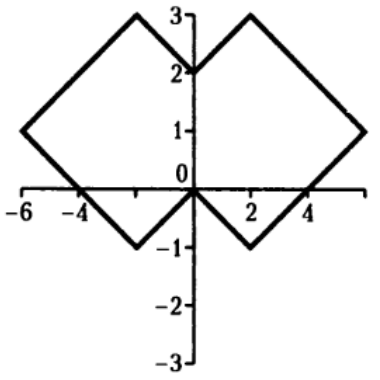
1073 $|x-1| + ||y|-1| = 1$



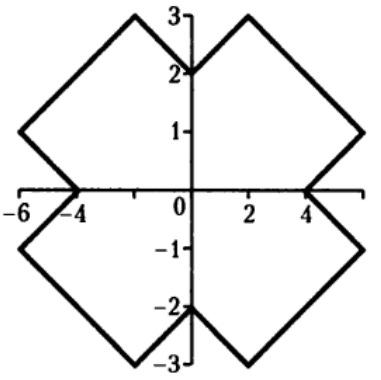
1074 $||x|-1| + ||y|-1| = 1$



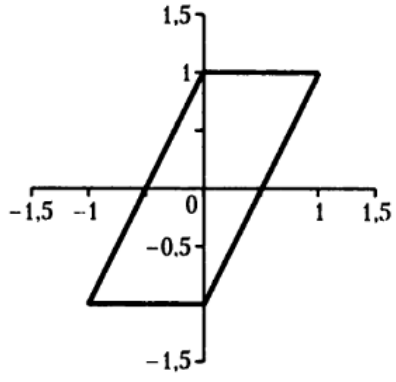
1075 $|x-1| + |y-1| = 2$



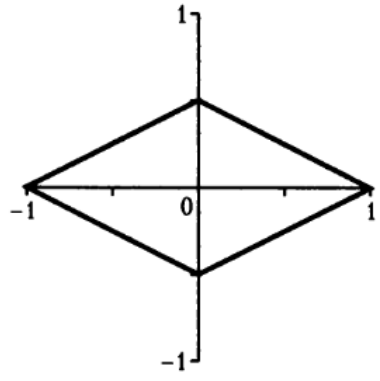
1076 $||x|-1| + |y-1| = 2$



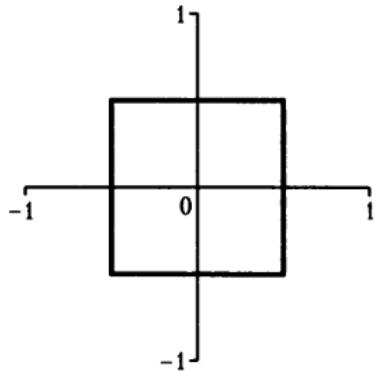
1077 $||x|-1| + ||y|-1| = 2$



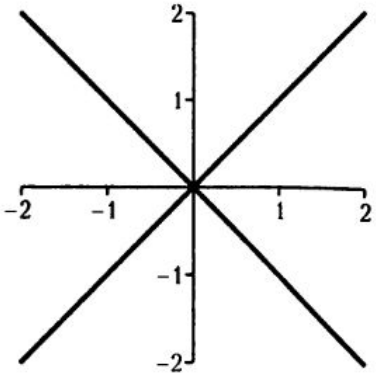
1078 $|x| + |x-y| = 1$



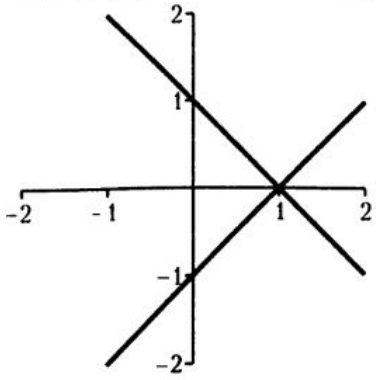
1079 $|x| + 2|y| = 1$



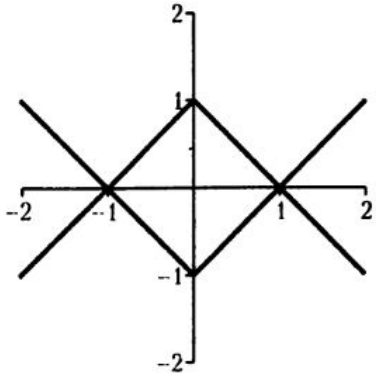
1080 $|x+y| + |x-y| = 1$



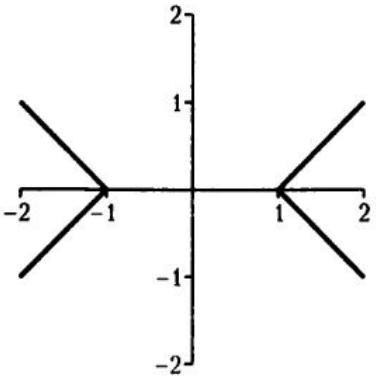
1081 $|x| - |y| = 0$



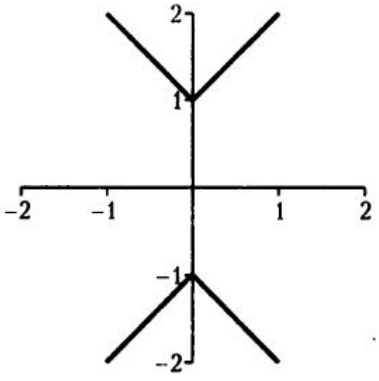
1082 $|x-1| - |y| = 0$



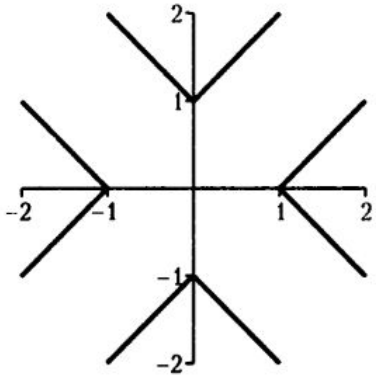
1083 $\big||x| - 1\big| - |y| = 0$



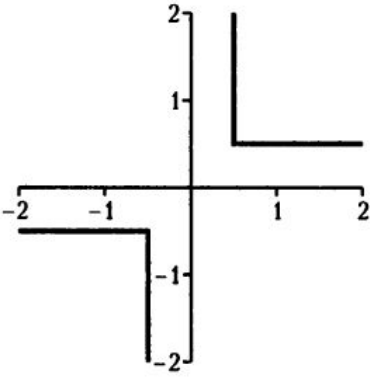
1084 $|x| - |y| = 1$



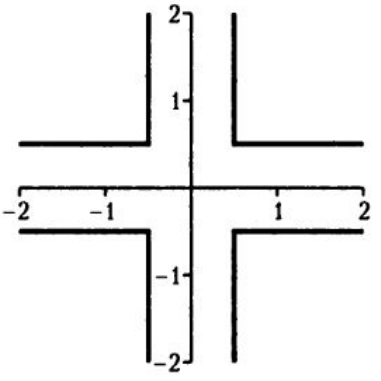
1085 $|y| - |x| = 1$



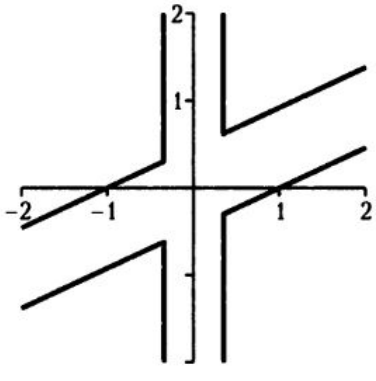
1086 $\big||x| - |y|\big| = 1$



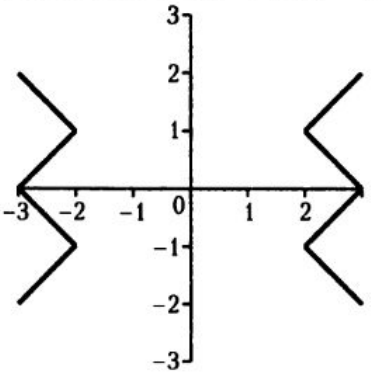
1087 $|x+y| - |x-y| = 1$



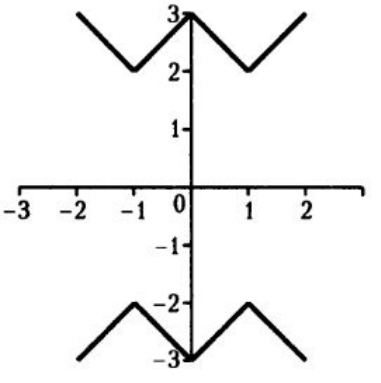
1088 $\big||x+y| - |x-y|\big| = 1$



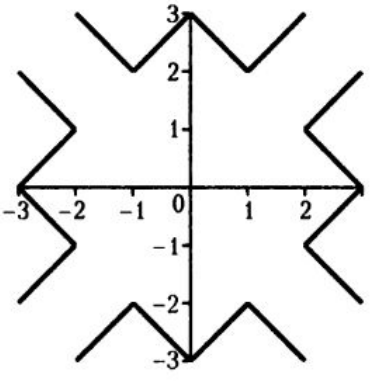
1089 $\big||x+y| - |2x-y|\big| = 1$



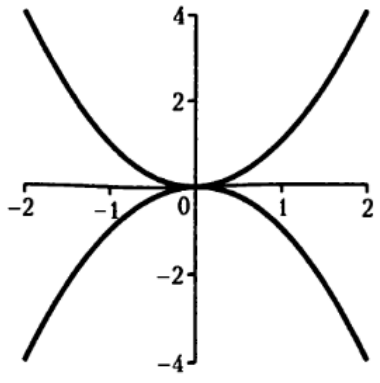
1090 $\big||x| - 1\big| - \big||y| - 1\big| = 1$



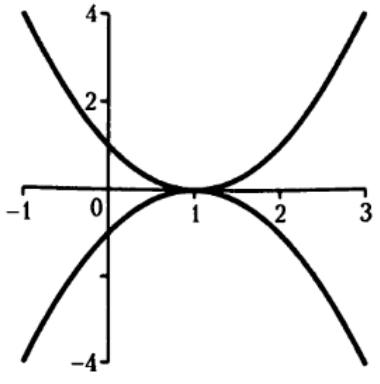
1091 $\big||y| - 1\big| - \big||x| - 1\big| = 1$



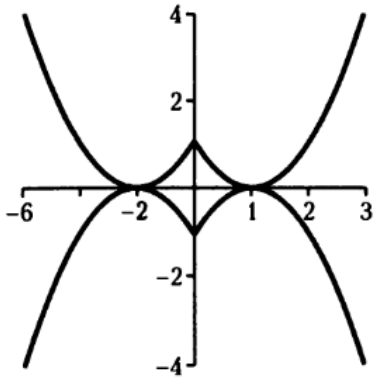
1092 $\Big|\big||x| - 1\big| - \big||y| - 1\big|\Big| = 1$



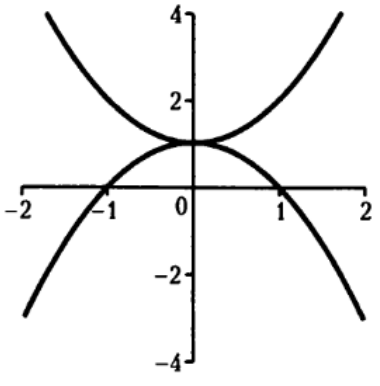
1093 $|y| - x^2 = 0$



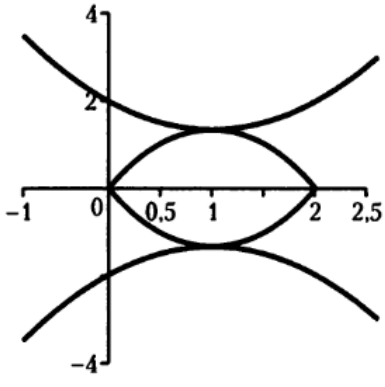
1094 $|y| - (x-1)^2 = 0$



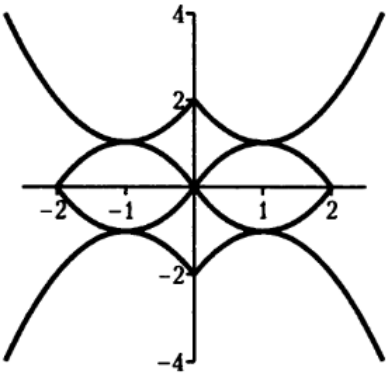
1095 $|y| - (|x|-1)^2 = 0$



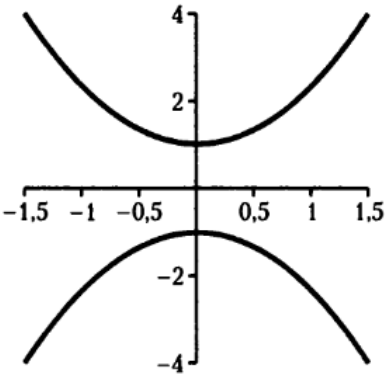
1096 $|y-1| - x^2 = 0$



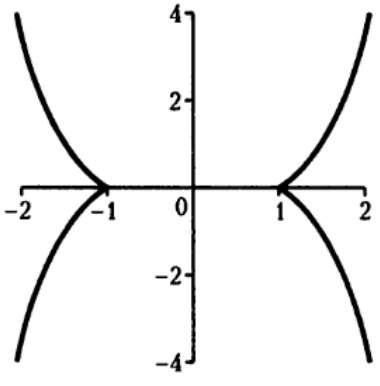
1097 $||y|-1| - (x-1)^2 = 0$



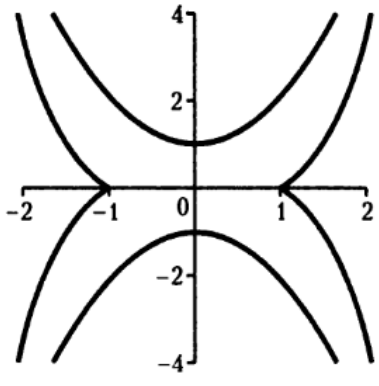
1098 $|y|-1| - (|x|-1)^2 = 0$



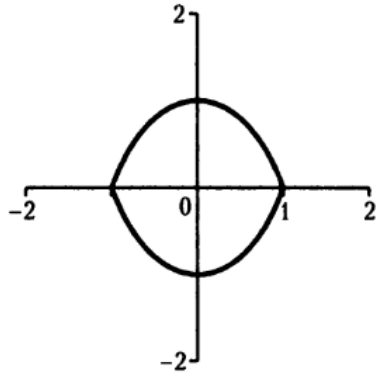
1099 $|y| - x^2 = 1$



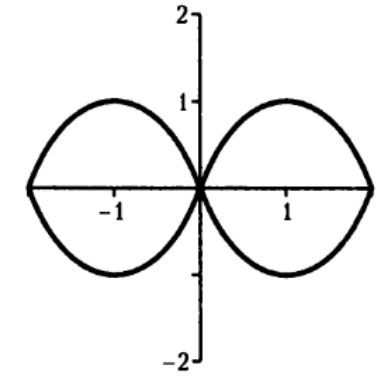
1100 $|y| - x^2 = -1$



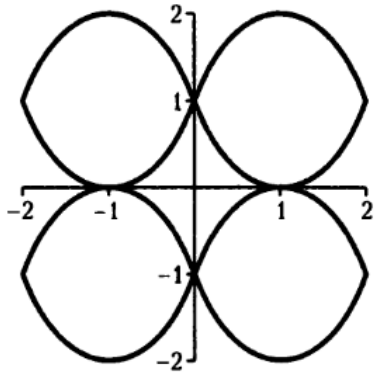
1101 $||y| - x^2| = 1$



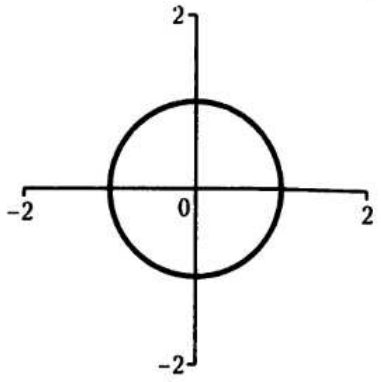
1102 $|y| + x^2 = 1$



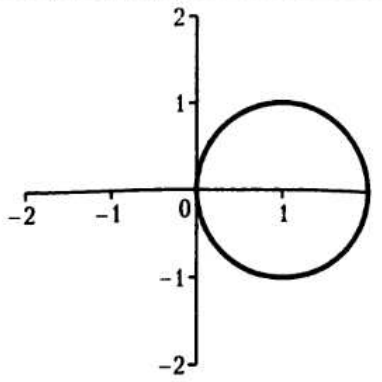
1103 $|y| + (|x|-1)^2 = 1$



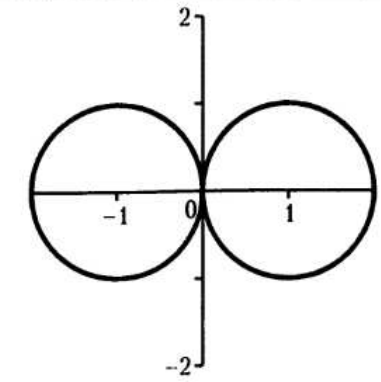
1104 $||y|-1| + (|x|-1)^2 = 1$



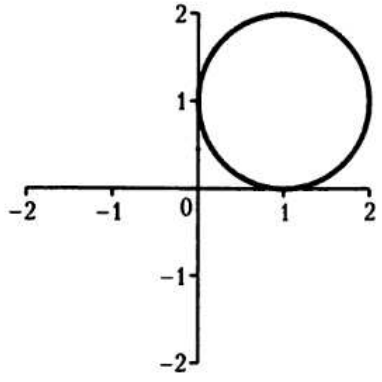
1105 $x^2 + y^2 = 1$



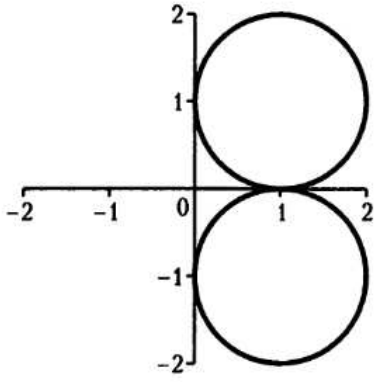
1106 $(x-1)^2 + y^2 = 1$



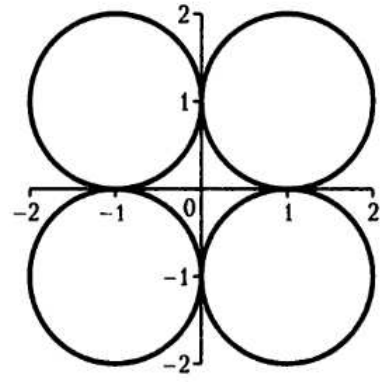
1107 $(|x|-1)^2 + y^2 = 1$



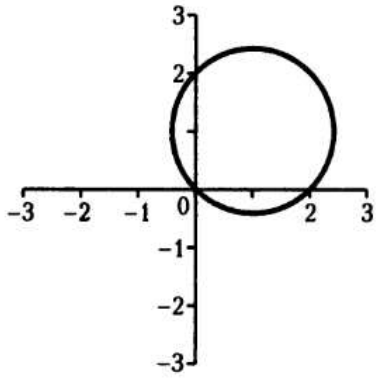
1108 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$



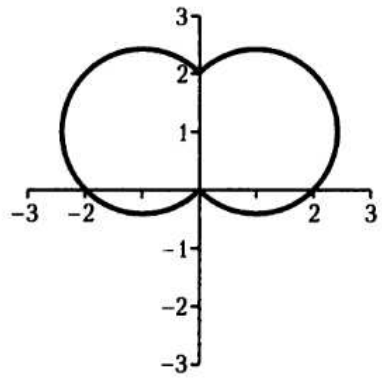
1109 $(x-1)^2 + (|y|-1)^2 = 1$



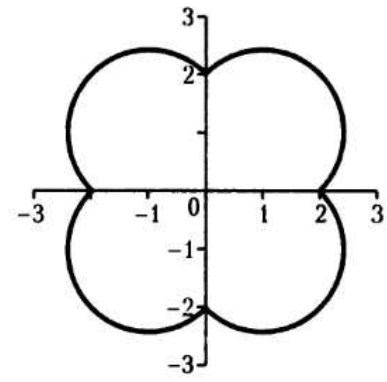
1110 $(|x|-1)^2 + (|y|-1)^2 = 1$



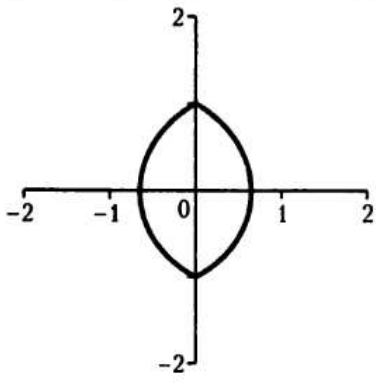
1111 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$



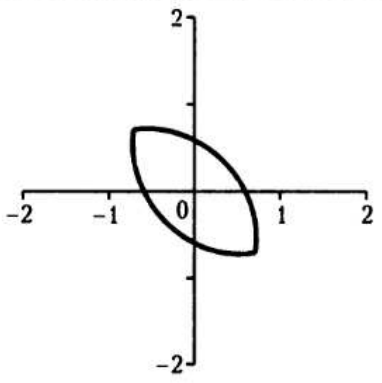
1112 $(|x|-1)^2 + (y-1)^2 = 2$



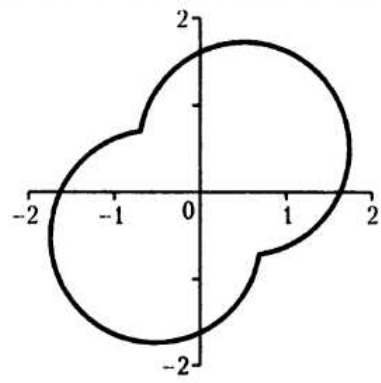
1113 $(|x|-1)^2 + (|y|-1)^2 = 2$



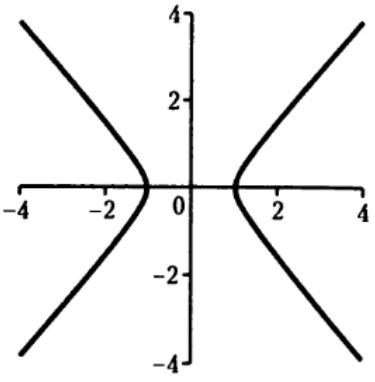
1114 $x^2 + y^2 = 1 - |x|$



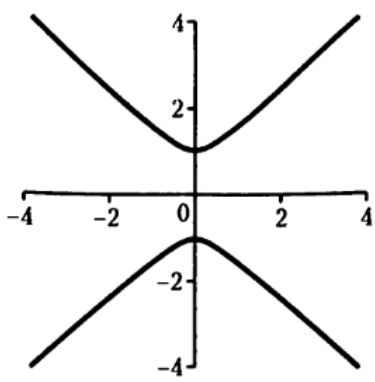
1115 $x^2 + y^2 = 1 - |x + y|$



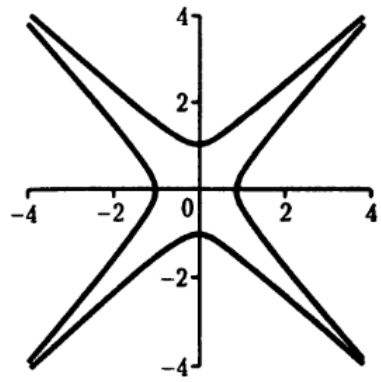
1116 $x^2 + y^2 = 1 + |x + y|$



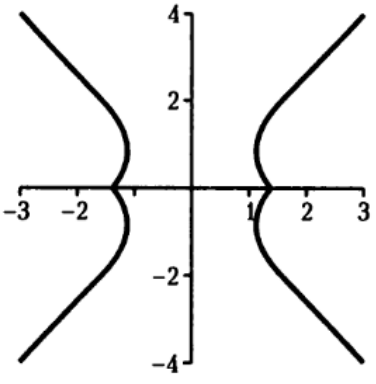
1117 $x^2 - y^2 = 1$



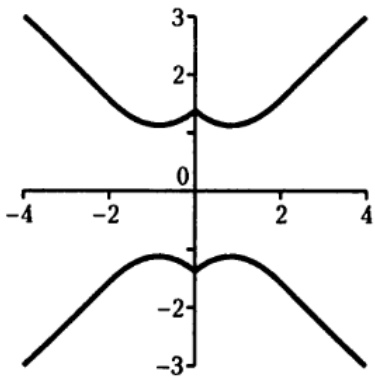
1118 $x^2 - y^2 = -1$



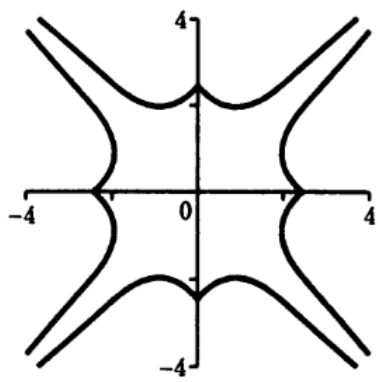
1119 $\left|x^2 - y^2\right| = 1$



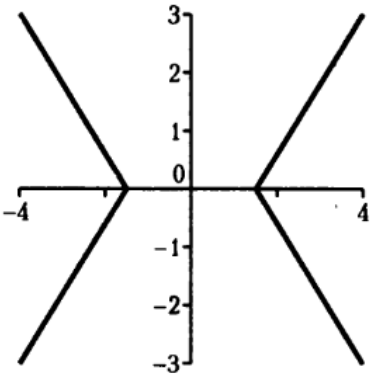
1120 $x^2 - \left(|y| - 1\right)^2 = 1$



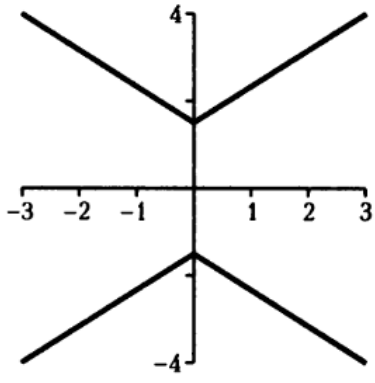
1121 $\left(|x| - 1\right)^2 - y^2 = -1$



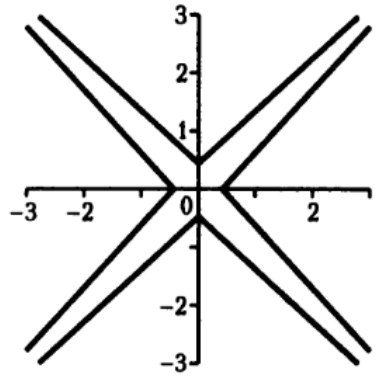
1122 $\left|\left(|x| - 1\right)^2 - \left(|y| - 1\right)^2\right| = 1$



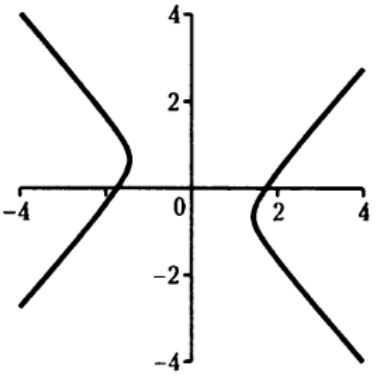
1123 $x^2 - \left(|y| + 1\right)^2 = 1$



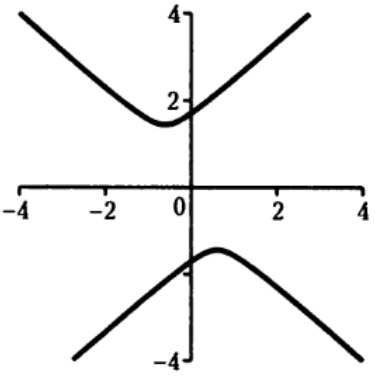
1124 $\left(|x| + 1\right)^2 - y^2 = -1$



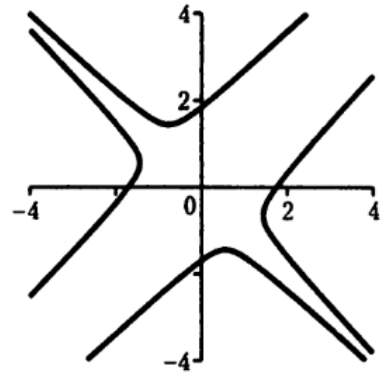
1125 $\left|\left(|x| + 1\right)^2 - \left(|y| + 1\right)^2\right| = 1$



1126 $x^2 - y^2 = 1 + |x + y|$

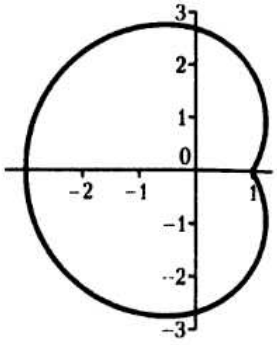


1127 $y^2 - x^2 = 1 + |x + y|$

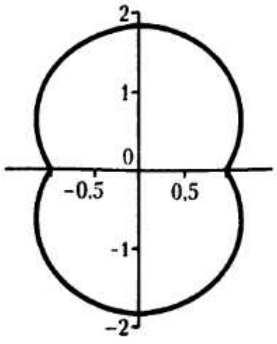


1128 $\left|x^2 - y^2\right| = 1 + |x + y|$

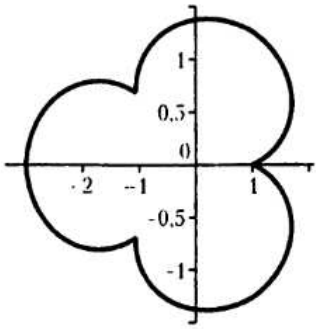
$$x=(R+r)\cos\frac{r}{R}t-r\cos\left(t+\frac{r}{R}t\right);\ y=(R+r)\sin\frac{r}{R}t-r\sin\left(t+\frac{r}{R}t\right)$$



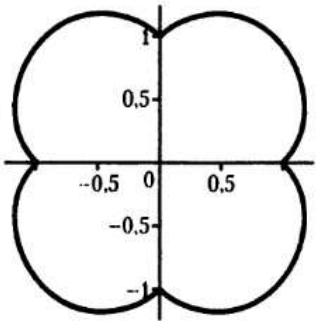
1129 $R=1;\ r=1$



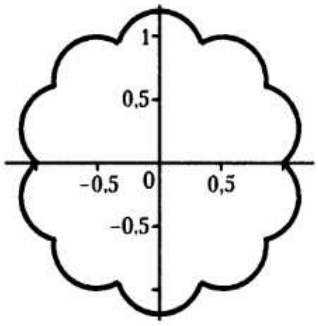
1130 $R=1;\ r=\frac{1}{2}$



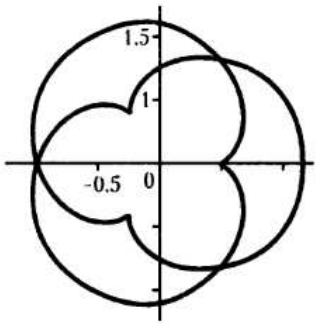
1131 $R=1;\ r=\frac{1}{3}$



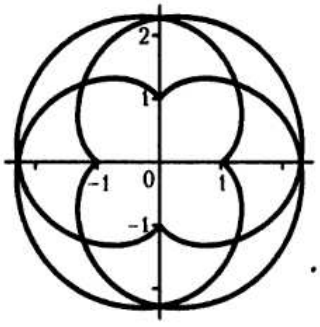
1132 $R=1;\ r=\frac{1}{4}$



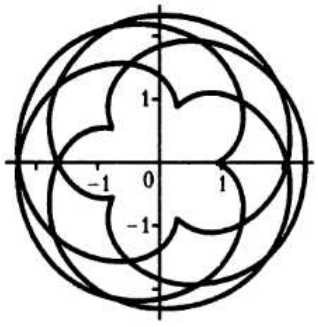
1133 $R=1;\ r=\frac{1}{10}$



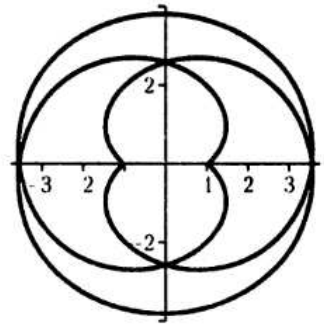
1134 $R=1;\ r=\frac{2}{3}$



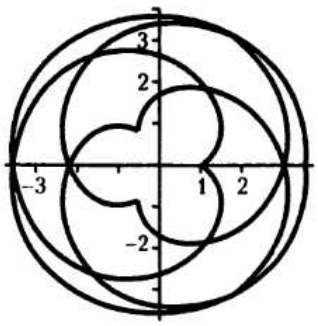
1135 $R=1;\ r=\frac{3}{4}$



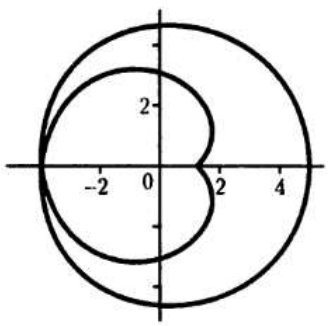
1136 $R=1;\ r=\frac{4}{5}$



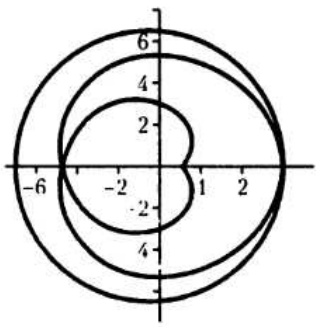
1137 $R=1;\ r=\frac{3}{2}$



1138 $R=1;\ r=\frac{4}{3}$

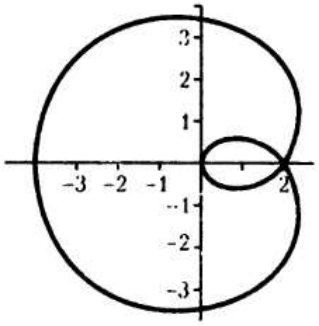


1139 $R=1;\ r=2$

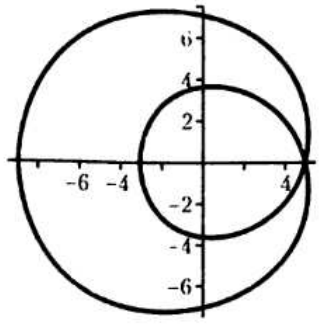


1140 $R=1;\ r=3$

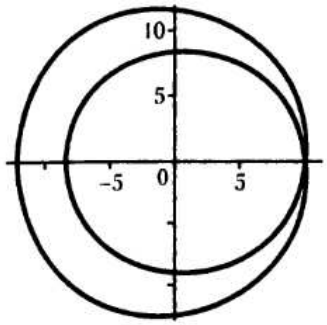
$$x = (R+r)\cos\frac{r}{R}t - h\cos\left(t + \frac{r}{R}t\right);\ y = (R+r)\sin\frac{r}{R}t - h\sin\left(t + \frac{r}{R}t\right)$$



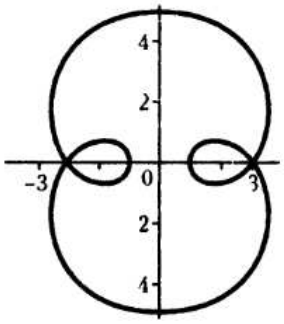
1141 $R = 1;\ r = 1;\ h = 2$



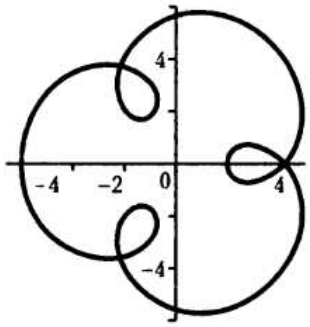
1142 $R = 1;\ r = 1;\ h = 5$



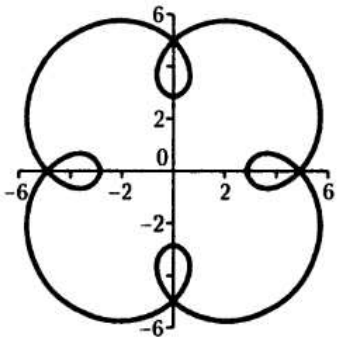
1143 $R = 1;\ r = 1;\ h = 10$



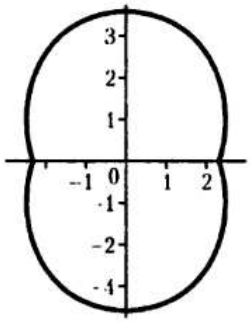
1144 $R = 2;\ r = 1;\ h = 2$



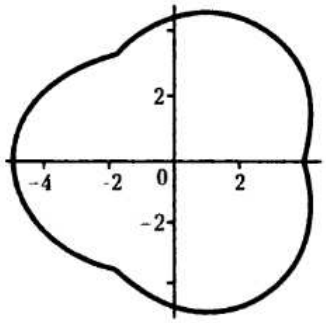
1145 $R = 3;\ r = 1;\ h = 2$



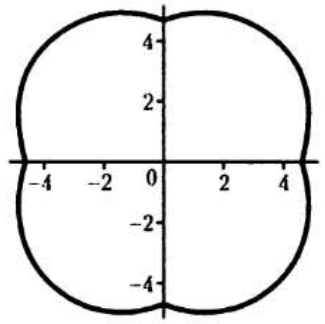
1146 $R = 4;\ r = 1;\ h = 2$



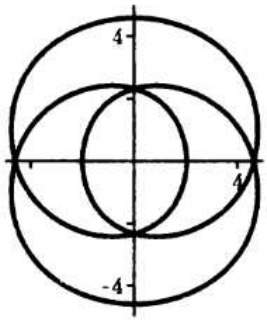
1147 $R = 2;\ r = 1;\ h = \frac{1}{2}$



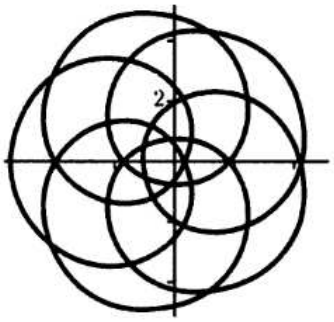
1148 $R = 3;\ r = 1;\ h = \frac{1}{2}$



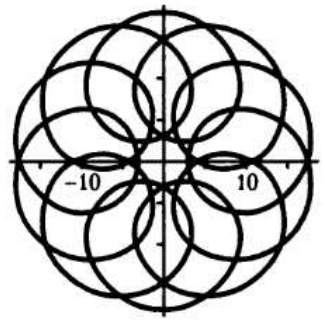
1149 $R = 4;\ r = 1;\ h = \frac{1}{2}$



1150 $R = 2;\ r = 1;\ h = 8$

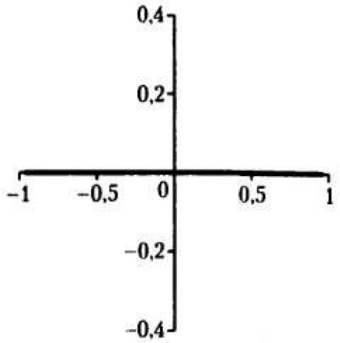


1151 $R = 5;\ r = 1;\ h = 8$

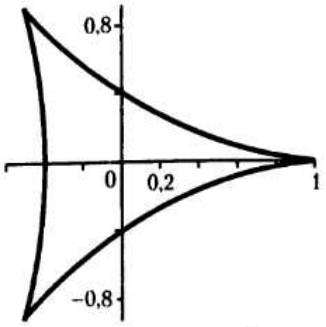


1152 $R = 10;\ r = 1;\ h = 8$

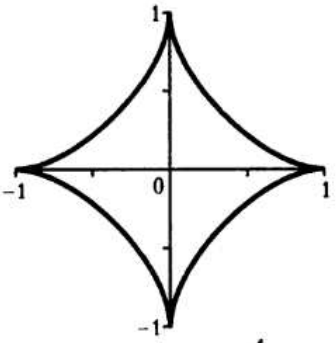
$$x=(R-r)\cos\frac{r}{R}t+r\cos\left(t-\frac{r}{R}t\right);\ y=(R-r)\sin\frac{r}{R}t-r\sin\left(t-\frac{r}{R}t\right)$$



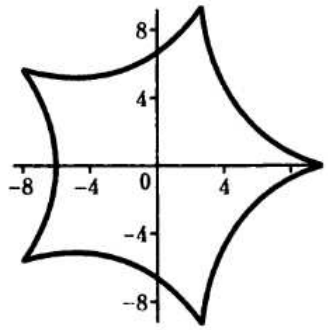
1153 $R=1;\ r=\frac{1}{2}$



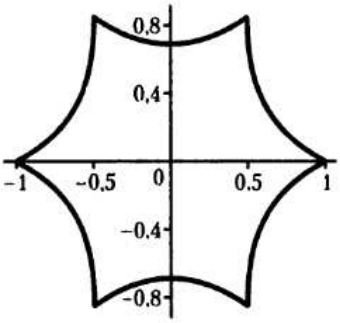
1154 $R=1;\ r=\frac{1}{3}$



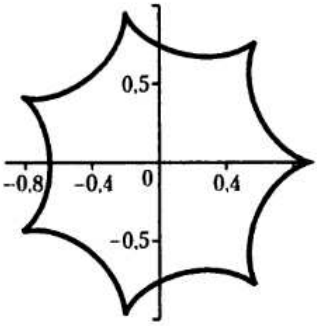
1155 $R=1;\ r=\frac{1}{4}$



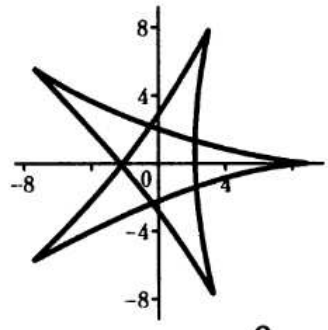
1156 $R=1;\ r=\frac{1}{5}$



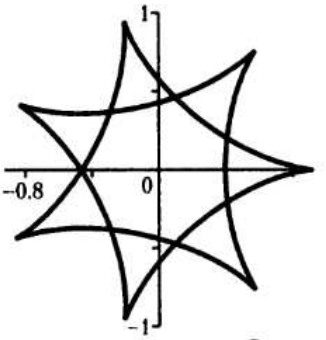
1157 $R=1;\ r=\frac{1}{6}$



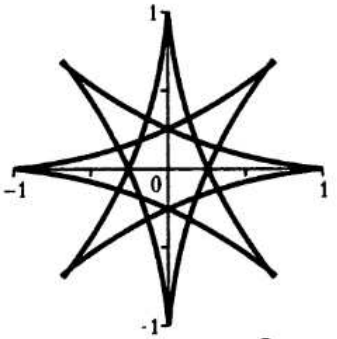
1158 $R=1;\ r=\frac{1}{7}$



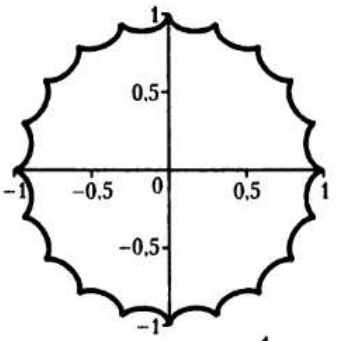
1159 $R=1;\ r=\frac{2}{5}$



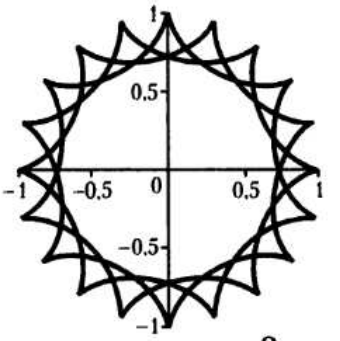
1160 $R=1;\ r=\frac{2}{7}$



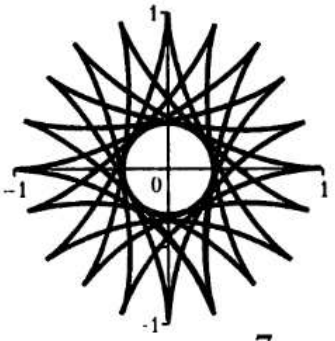
1161 $R=1;\ r=\frac{3}{8}$



1162 $R=1;\ r=\frac{1}{20}$

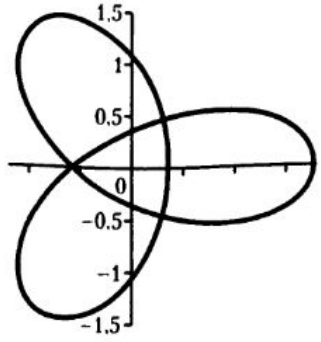


1163 $R=1;\ r=\frac{3}{20}$

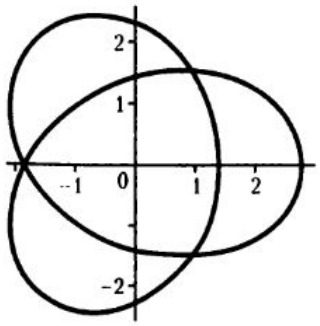


1164 $R=1;\ r=\frac{7}{20}$

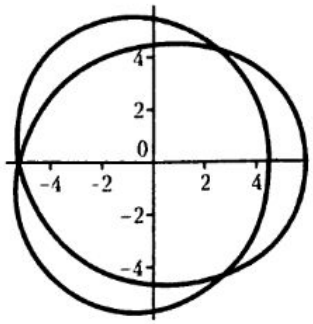
$$x=(R-r)\cos\frac{r}{R}t+h\cos\left(t-\frac{r}{R}t\right);\ y=(R-r)\sin\frac{r}{R}t-h\sin\left(t-\frac{r}{R}t\right);\ R=1$$



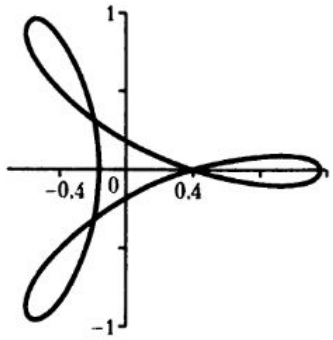
1165 $r=\frac{1}{3};\ h=1$



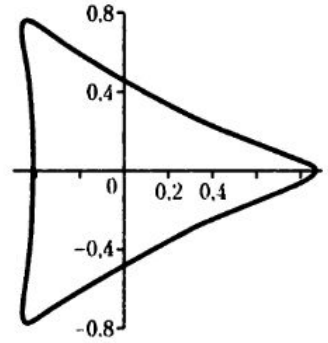
1166 $r=\frac{1}{3};\ h=2$



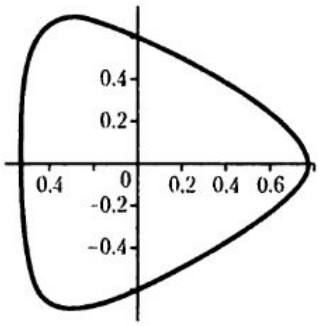
1167 $r=\frac{1}{3};\ h=5$



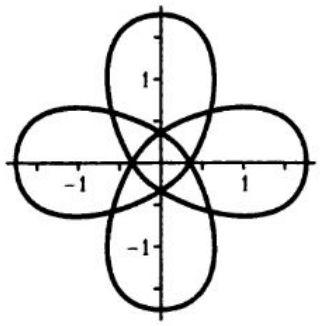
1168 $r=\frac{1}{3};\ h=\frac{1}{2}$



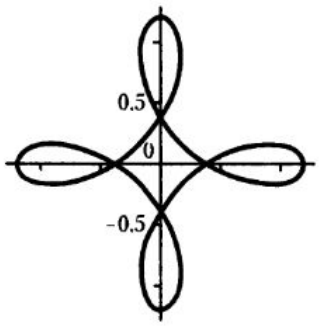
1169 $r=\frac{1}{3};\ h=\frac{1}{4}$



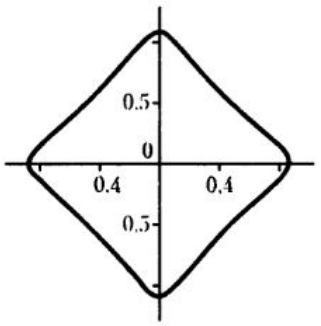
1170 $r=\frac{1}{3};\ h=\frac{1}{8}$



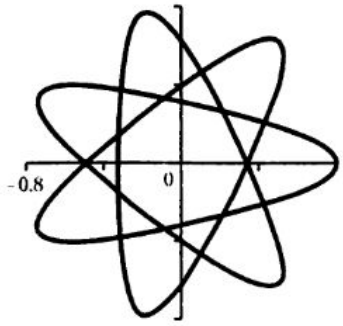
1171 $r=\frac{1}{4};\ h=1$



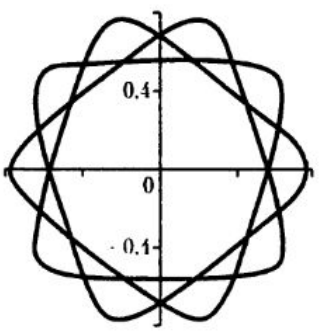
1172 $r=\frac{1}{4};\ h=\frac{1}{2}$



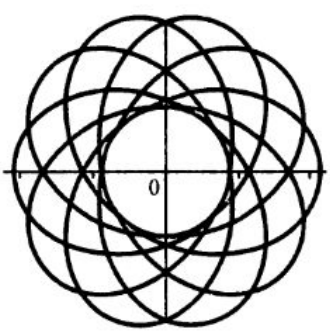
1173 $r=\frac{1}{4};\ h=\frac{1}{8}$



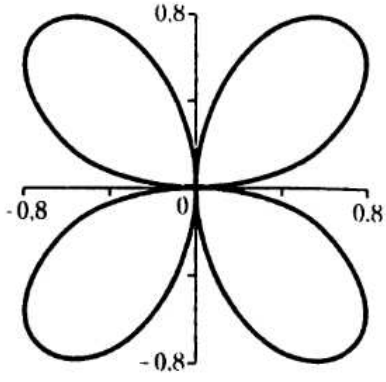
1174 $r=\frac{3}{7};\ h=\frac{1}{4}$



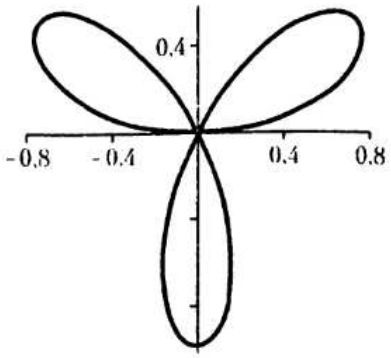
1175 $r=\frac{3}{10};\ h=\frac{1}{8}$



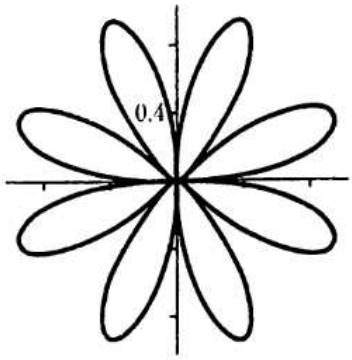
1176 $r=\frac{7}{10};\ h=\frac{1}{8}$



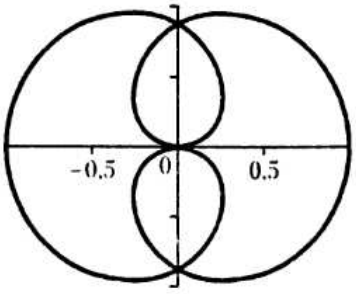
1177 $r = \sin 2\varphi$



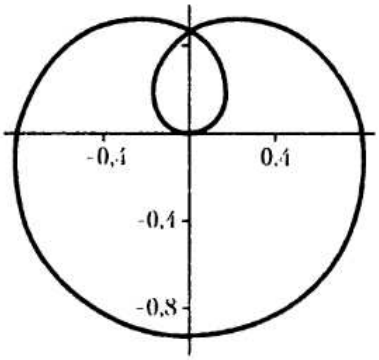
1178 $r = \sin 3\varphi$



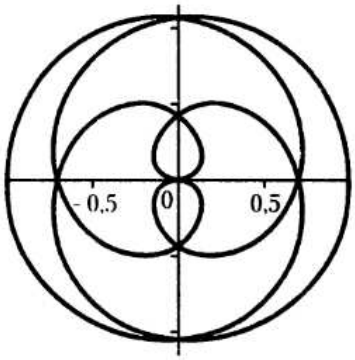
1179 $r = \sin 4\varphi$



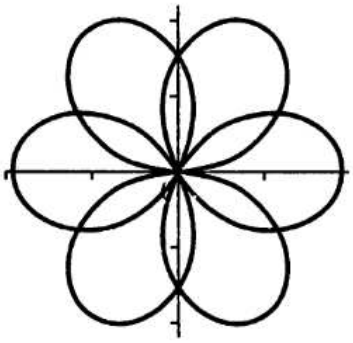
1180 $r = \sin\dfrac{\varphi}{2}$



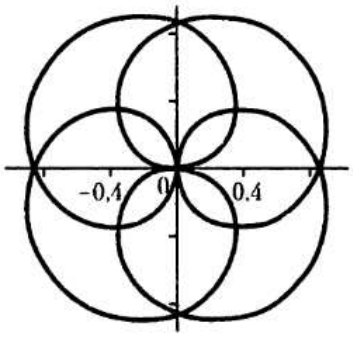
1181 $r = \sin\dfrac{\varphi}{3}$



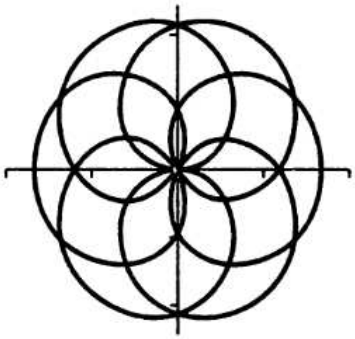
1182 $r = \sin\dfrac{\varphi}{4}$



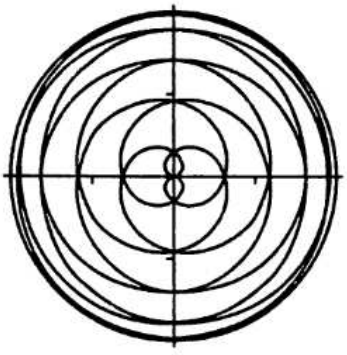
1183 $r = \sin\dfrac{3\varphi}{2}$



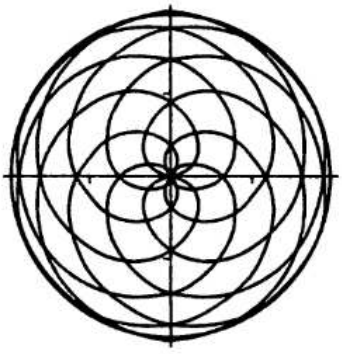
1184 $r = \sin\dfrac{2\varphi}{3}$



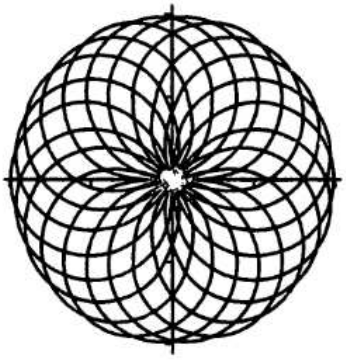
1185 $r = \sin\dfrac{3\varphi}{4}$



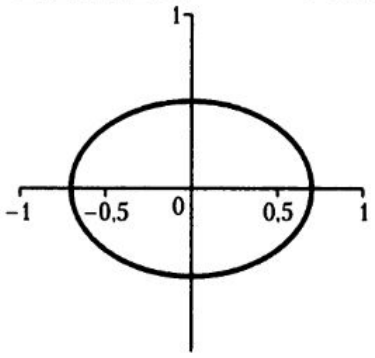
1186 $r = \sin\dfrac{\varphi}{10}$



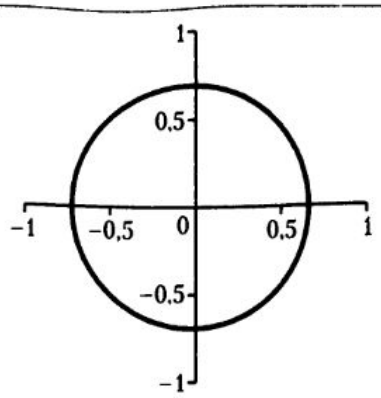
1187 $r = \sin\dfrac{3\varphi}{10}$



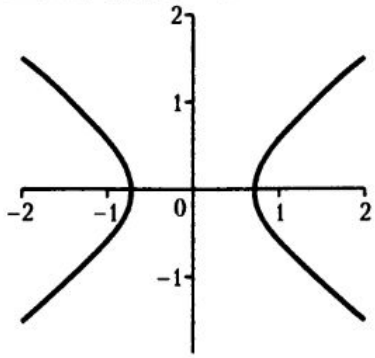
1188 $r = \sin\dfrac{11\varphi}{10}$



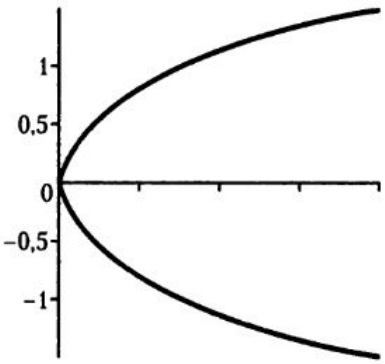
1189 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$



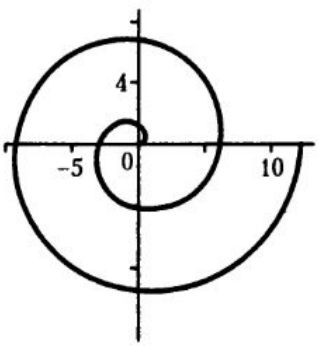
1190 $x^2+y^2=R^2$



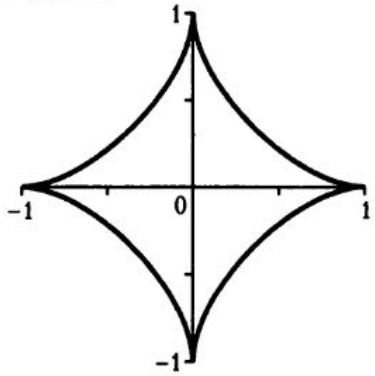
1191 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$



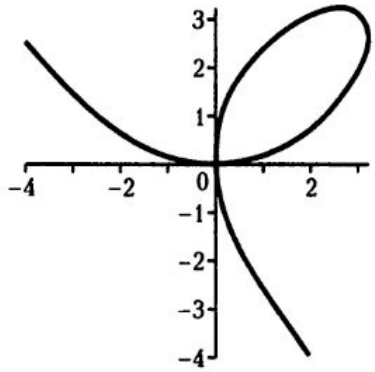
1192 $y^2=2px$



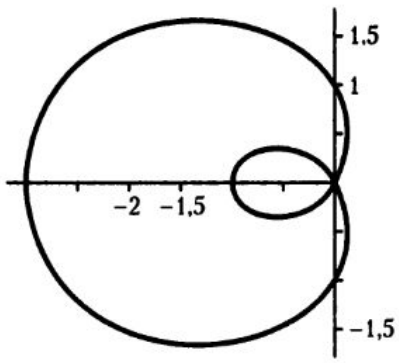
1193 $r=a\varphi$



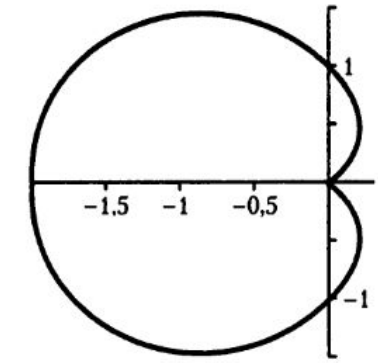
1194 $x^{2/3}+y^{2/3}=R^{2/3}$



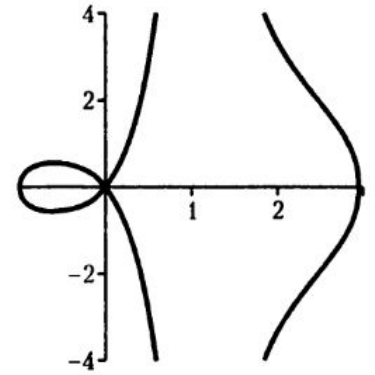
1195 $x^3+y^3=3axy$



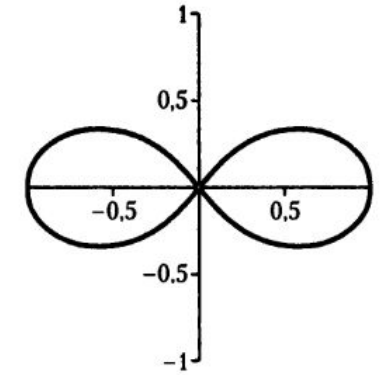
1196 $r=2a\cos\varphi\pm l$



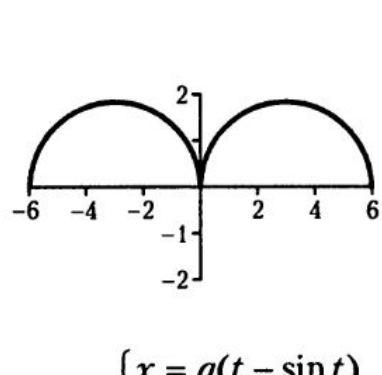
1197 $r=2a(1-\cos\varphi)$



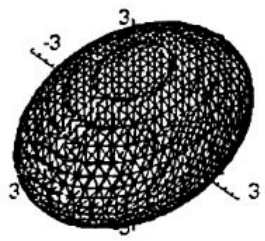
1198 $(x^2+y^2)(y-a)^2=l^2y^2$



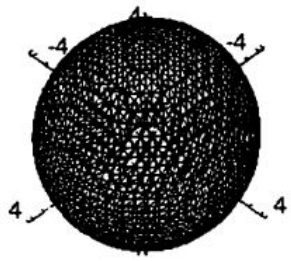
1199 $r^2=2a^2\cos 2\varphi$



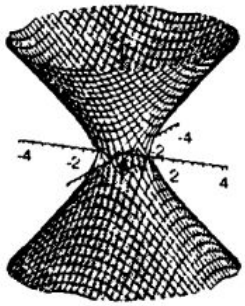
1200 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$



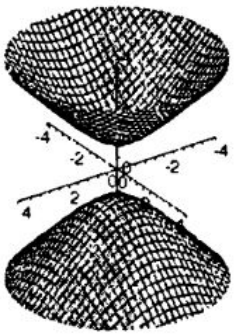
1201 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$



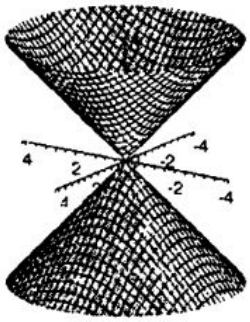
1202 $x^2+y^2+z^2=R^2$



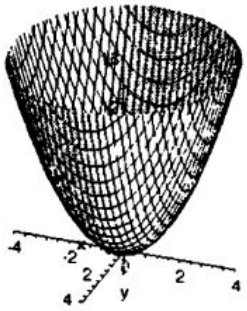
1203 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$



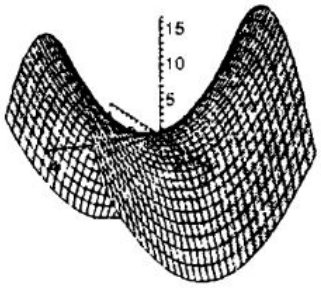
1204 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$



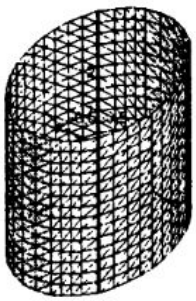
1205 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$



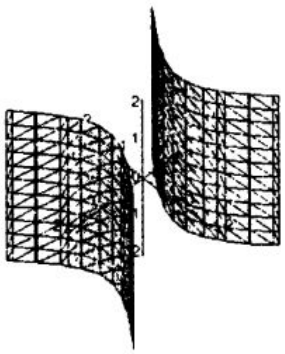
1206 $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$



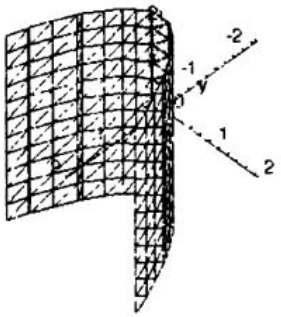
1207 $z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$



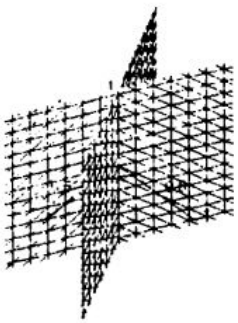
1208 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$



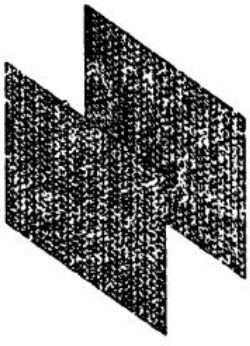
1209 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$



1210 $y^2=2px$



1211 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$



1212 $\dfrac{x^2}{a^2}=1$

Литература

1. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике. Для инженеров и учащихся вузов. М.: Наука, 1964.
2. *Бугров Я. С.* Высшая математика. В 3 т.: учеб для вузов/ Я. С. Бугров, С. М. Никольский; под ред. В. А. Садовничего. Т. 2: Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Дрофа, 2005.
3. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.
4. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория вероятностей. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1973.
5. *Вирченко Н. А., Ляшко И. И., Швецов К. И.* Графики функций: Справочник. Киев: Наукова думка, 1979.
6. *Воднев В. Т.* Математический словарь высшей школы: Общая часть/ В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович; Под редакцией Ю. С. Богданова. М.: Изд-во МПИ, 1988.
7. *Выгодский М. Я.* Справочник по высшей математике. М.: АСТ: Астрель, 2006.
8. *Выгодский М. Я.* Справочник по элементарной математике. М.: Астрель, 2003.
9. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1978.
10. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Аналитическая геометрия. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.
11. *Кожухов И. Б., Прокофьев А. А.* Математика. Школьникам и абитуриентам. М.: Махаон, 2005.
12. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1976.

13. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1974.

14. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа: Учебник для вузов. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1989.

15. *Рыбасенко В. Д., Рыбасенко И. Д.* Элементарные функции: Формулы, таблицы, графики. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1987.

16. *Савелов А. А.* Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. (Справочное руководство). М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960.

17. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. 1, т. 2. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1974.

18. *Старков С. Н.* Математические формулы и графики функций. СПб: Питер, 2006.

19. *Цикунов А. Е.* Сборник математических формул. СПб: Питер, 2006.

20. *Цыпкин А. Г., Цыпкин Г. Г.* Математические формулы. Алгебра. Геометрия. Математический анализ. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985.

21. *Шипачев В. С.* Высшая математика. Учеб. для вузов/В. С. Шипачев. М.: Высшая школа, 2002.

Алфавитный указатель основных формул

А

Абсолютная величина (5.1) – (5.16)
Абсолютная и условная сходимость (29.16)
Алгебра вероятностей (34.23) – (34.35)
Алгебра событий (34.12) – (34.22)
Аргумент комплексного числа – (32.20)
Арифметическая прогрессия (7.1) – (7.9)
Арифметический корень (6.6), (6.15) – (6.19)

Б

Биномиальное распределение (34.58) – (34.59)

В

Векторное произведение (13.53) – (13.62)
Векторы (13.1) – (13.68)
Вычеты (33.40)
Вычисление объемов и площадей поверхности (12.23) – (12.30)

Г

Гамма-функция (24.11) – (24.13)
Геометрическая прогрессия (7.10) – (7.15)
Гиперболические функции (21.24) – (21.27), (33.14) – (33.17)
Градиент (28.2)

Д

Двойной интеграл (26.1) – (26.10)
Действия с дробями (3.1) – (3.14)
Дивергенция (28.4)
Дисперсия (34.52) – (34.53), (34.55) – (34.56)
Дифференциал (21.65) – (21.79), (25.9) – (25.14)
Дифференциальные уравнения 1-го порядка (31.1) – (31.14)
Длина вектора (13.11)

Е

Единичный вектор (13.14)
Единичная матрица (19.7), (19.23) – (19.25)

З

Замечательные пределы (20.31) – (20.39)

К

Комплексные числа (32.1) – (32.61)
Криволинейные интегралы (27.1) – (27.7)
Кривые на плоскости (16.1) – (16.43)

Л

Линейная комбинация векторов (13.30)
Линейная независимость системы векторов (13.31)
Линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка (31.15) – (31.19)
Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка (31.20) – (31.26)
Логарифмы (6.25) – (6.34)

М

Математическое ожидание (34.51), (34.54)
Матрицы (19.1) – (19.34)
Модуль (5.1) – (5.16)
Модуль вектора (13.11)
Модуль комплексного числа (32.18)

Н

Направляющие косинусы вектора (13.12)
Неопределенный интеграл (22.1) – (22.102)
Непрерывность функции (20.66) – (20.73)
Неравенство Чебышева (34.77) – (34.78)
Несобственные интегралы (24.1) – (24.10)
Нормальное распределение (34.66) – (34.76)

О

Обратные тригонометрические функции (10.44) – (10.57)
Окружность и круг (12.19) – (12.22), (32.59), (16.5) – (16.14)
Оператор Гамильтона (28.1)
Оператор Лапласа (28.6) – (28.7)
Определители (18.1) – (18.17)
Определенный интеграл (23.1) – (23.31)
Орт вектора (13.27)
Основное тригонометрическое тождество (10.1)
Основные функции комплексной переменной (33.2) – (33.17)
Особые точки (33.36) – (33.39)

П

Перестановки (34.7) – (34.8)
Плоскость (15.1) – (15.23)
Плотность распределения (34.46) – (34.50)
Поверхности 2-го порядка (17.1) – (17.12)
Поверхностные интегралы (27.8) – (27.9)
Полярные координаты (13.1) – (13.3)
Правило Лопиталя (21.62)
Правило сложения вероятностей (34.27) – (34.30)
Правило трех сигм (34.76)
Правило умножения вероятностей (34.33) – (34.35)
Предел числовой последовательности (20.1) – (20.15)
Предел функции (20.16) – (20.65)
Преобразование координат (13.38) – (13.39)
Признак коллинеарности двух векторов (13.29)
Производная (21.1) – (21.55)
Производная по направлению (28.3)
Пропорции (4.5) – (4.14)
Проценты (4.15) – (4.17)
Прямая в пространстве (15.24) – (15.31)
Прямая на плоскости (14.1) – (14.38), (32.58)

Р

Равномерное распределение (34.62) – (34.65)
Разложение вектора по базису (13.35)
Разложение многочлена на множители (2.19) – (2.20)
Размещения (34.5) – (34.6), (34.9)
Распределение Пуассона (34.60) – (34.61)
Расстояние между точками (13.10), (32.57)
Расстояние от точки до плоскости (15.19) – (15.20)
Расстояние от точки до прямой (14.31) – (14.32)
Решение неравенств (9.1) – (9.60)
Решение уравнений (8.1) – (8.37)
Ротор (28.5)

Ряд Лорана (33.34)
Ряд Тейлора (29.29) – (29.44), (33.27) – (33.33)

С

Связь радианной и градусной меры угла (10.69) – (10.71)
Скалярное произведение (13.40) – (13.52)
Сложение и вычитание векторов (13.18) – (13.21)
Смешанное произведение векторов (13.63) – (13.68)
Сочетания (34.1) – (34.4)
Среднее арифметическое (4.1)
Среднее гармоническое (4.3)
Среднее геометрическое (4.2)
Степени (6.1) – (6.24)
Степенные ряды (29.22) – (29.44)
Сферические координаты (13.5) – (13.6)
Схема Горнера (2.16) – (2.17)

Т

Таблица значений тригонометрических функций (10.72)
Таблица интегралов (22.9) – (22.32)
Таблица производных (21.7) – (21.23)
Таблица эквивалентных бесконечно малых (20.44) – (20.65)
Теорема косинусов (12.11)
Теорема Кронекера – Капелли (19.32) – (19.34)
Теорема Коши (21.61), (33.24)
Теорема Лагранжа (21.60)
Теорема о подборе корней многочлена (2.18)
Теорема Пифагора (12.9)
Теорема Ролля (21.59)
Теорема синусов (12.10)
Теорема Ферма (21.58)
Типовые способы замены переменной (11.1) – (11.12)
Точки разрыва (20.69) – (20.70)
Треугольники (12.1) – (12.11)
Тригонометрические ряды Фурье (30.1) – (30.7)
Тригонометрические формулы (10.1) – (10.72)
Тройной интеграл (26.11) – (26.20)

У

Умножение вектора на число (13.22) – (13.26)
Условие коллинеарности двух векторов (13.61)
Условие компланарности трех векторов (13.67)
Условие перпендикулярности двух векторов (13.51)
Условия Коши-Римана (33.19)
Условная вероятность (34.31)

Ф

Формула Байеса (34.37)
Формула Бернулли (34.38) – (34.39)
Формула бинома Ньютона (1.23)
Формула Гаусса-Остроградского (27.12)
Формула Грина (27.7)
Формула Маклорена (21.57)
Формула Муавра (32.42)
Формула Ньютона–Лейбница (23.3), (33.23)
Формула полной вероятности (34.36)
Формула Стирлинга (34.10)
Формула Стокса (27.10)
Формула Тейлора (21.56)
Формулы Крамера (18.16) – (18.17)
Формулы комбинаторики (34.1) – (34.9)
Формулы Эйлера (32.51)
Функция распределения (34.40) – (34.44)

Ц

Цилиндрические координаты (13.4)

Ч

Частные производные (25.1) – (25.19)

Четырехугольники (12.12) – (12.18)

Числовые ряды (29.1) – (29.21),
(29.45) – (29.53)

Старков Сергей Николаевич

Справочник по математическим формулам и графикам функций для студентов

Заведующий редакцией	*А. Сандрыкин*
Руководитель проекта	*А. Юрченко*
Ведущий редактор	*Ю. Сергиенко*
Технический редактор	*С. Романов*
Литературный редактор	*А. Пасечник*
Корректоры	*Н. Солнцева*
Верстка	*С. Романов*

Подписано в печать 31.10.08. Формат 60x90/16. Усл. п. л. 15. Доп. тираж 3000. Заказ
ООО «Питер Пресс», 198206, Санкт-Петербург, Петергофское шоссе, д. 73, лит. А29.
Налоговая льгота — общероссийский классификатор продукции ОК 005-93,
том 2; 95 3005 — литература учебная.
Отпечатано в ОАО «Техническая книга».
190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., д. 29.