Учебное пособие

ПИТЕР

СТАНДАРТ ТРЕТЬЕГО ПОКОЛЕНИЯ



Е. Баранова Н. Васильева В. Федотов

Практическое пособие по высшей математике

Типовые расчеты

2-е издание

ДЛЯ БАКАЛАВРОВ
МАГИСТРОВ
И СПЕЦИАЛИСТОВ

ДОПУЩЕНО НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИМ СОВЕТОМ



Е. Баранова, Н. Васильева, В. Федотов

Практическое пособие по высшей математике

Типовые расчеты

2-е издание

Допущено Научно-методическим советом по математике вузов Северо-Запада
в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся
по направлениям 550000 «Технические науки»,
650000 «Техника и технологии»

ПИТЕР®

Москва · Санкт-Петербург · Нижний Новгород · Воронеж
Ростов-на-Дону · Екатеринбург · Самара · Новосибирск
Киев · Харьков · Минск
2013

Баранова Е., Васильева Н., Федотов В.

Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчеты

Учебное пособие. 2-е издание

Заведующий редакцией	*А. Кривцов*
Руководитель проекта	*А. Юрченко*
Ведущий редактор	*Ю. Сергиенко*
Литературный редактор	*Н. Рощина*
Художник	*Л. Адуевская*
Корректор	*Д. Абрамова*
Верстка	*П. Быстров, Л. Егорова*

ББК 22.1я7
УДК 51(075)

Баранова Е., Васильева Н., Федотов В.

Б24 Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчеты: Учебное пособие. 2-е изд. — СПб.: Питер, 2013. — 400 с.: ил.

ISBN 978-5-496-00012-3

Учебное пособие по высшей математике для студентов и преподавателей технических и экономических вузов. Содержит справочный материал по разделам высшей математики, методические рекомендации по решению задач, типовые задания с подробными решениями и разбором характерных ошибок, варианты типовых заданий (типовых расчетов) по курсу высшей математики технического университета, выполнение которых является требованием образовательного стандарта. Студентам эта книга вполне заменит репетитора, а преподавателю сэкономит время на подготовку практических и домашних заданий. Второе издание учебного пособия дополнено материалами по числовым рядам, а также кратным, криволинейным и поверхностным интегралам.

Допущено научно-методическим советом по математике вузов Северо-Запада в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по направлениям 550000 «Технические науки», 650000 «Техника и технологии».

ISBN 978-5-496-00012-3

© ООО Издательство «Питер», 2013

Все права защищены. Никакая часть данной книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме без письменного разрешения владельцев авторских прав.

Информация, содержащаяся в данной книге, получена из источников, рассматриваемых издательством как надежные. Тем не менее, имея в виду возможные человеческие или технические ошибки, издательство не может гарантировать абсолютную точность и полноту приводимых сведений и не несет ответственности за возможные ошибки, связанные с использованием книги.

ООО «Питер Пресс», 192102, Санкт-Петербург, ул. Андреевская (д. Волкова), 3, литер А, пом. 7Н.

Налоговая льгота — общероссийский классификатор продукции ОК 005-93, том 2; 95 3005 — литература учебная.

Подписано в печать 21.11.12. Формат 70×100/16. Усл. п. л. 32,250. Тираж 2000. Заказ 6822.

Отпечатано по технологии CtP в ИПК ООО «Ленинградское издательство»
194044, Санкт-Петербург, ул.Менделеевская, д. 9
Телефон/факс: (812) 495-56-10.

Оглавление

Предисловие 8
От издательства 8

Глава 1. Матрицы и определители 9

Матрицы. Действия с матрицами 9
Определители 11
Обратная матрица 14
Задачи для типовых расчетов 15

Глава 2. Системы линейных алгебраических уравнений 25

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений 25
Ранг матрицы. Теорема Кронекера–Капелли 30
Однородные системы 32
Задачи для типовых расчетов 34

Глава 3. Элементы линейной алгебры 39

Линейные пространства 39
Базис и размерность линейного пространства 40
Линейные операторы. Матрица линейного оператора 42
Собственные числа и собственные векторы матрицы 45
Евклидово пространство 48
Квадратичные формы 50
Задачи для типовых расчетов 55

Глава 4. Векторная алгебра 63

Геометрическое изображение векторов в линейном пространстве R^3 63

Линейные операции с направленными отрезками (векторами) 64
Компланарные векторы. Правая и левая тройки векторов 64
Модуль вектора. Направляющие косинусы 65
Коллинеарные векторы 66
Скалярное произведение векторов и его свойства 67
Векторное произведение векторов и его свойства 72
Смешанное произведение векторов и его свойства 76
Задачи для типовых расчетов 79

Глава 5. Аналитическая геометрия на плоскости 87

Метод координат на плоскости 87
Линии на плоскости. Прямая на плоскости 87
Кривые второго порядка 93
Кривые в полярной системе координат 101
Кривые на плоскости, заданные в параметрическом виде 104
Задачи для типовых расчетов 106

Глава 6. Аналитическая геометрия в пространстве 116

Метод координат в пространстве 116
Поверхности в пространстве. Плоскость 116
Исследование общего уравнения плоскости 121
Линии в пространстве 122
Параметрические и канонические уравнения прямой в пространстве 123
Взаимное расположение прямых. Приведение общего уравнения прямой к параметрическим и каноническим уравнениям 125
Взаимное расположение прямой и плоскости 127
Поверхности второго порядка 130
Задачи для типовых расчетов 133

Глава 7. Предел и непрерывность функций одной переменной 147

Окрестность точки 147
Определение предела функции 148
Односторонние пределы 150
Теоремы о пределах функции. Неопределенности 151
Вычисление пределов с помощью алгебраических преобразований 153
Два замечательных предела 157
Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Главная часть 158
Вычисление пределов с помощью эквивалентных функций 161

Непрерывность и точки разрыва функции 163
Задачи для типовых расчетов 167

Глава 8. Дифференциальное исчисление функций одной переменной 181

Производная. Геометрический смысл производной 181
Дифференцируемая функция 182
Правила дифференцирования 184
Производные основных элементарных функций 185
Примеры вычисления производных 185
Уравнение касательной к кривой. Угол между кривыми 187
Дифференциал 188
Производные функций, заданных параметрически 191
Дифференцирование функций, заданных неявно 191
Вычисление дифференциала. Приближенные вычисления с помощью дифференциала 192
Производные высших порядков 193
Дифференциалы высших порядков 196
Правило Лопиталя 197
Монотонные функции. Признаки монотонности 198
Исследование функций с помощью первой производной 199
Исследование функций с помощью второй производной. Точки перегиба . . 202
Асимптоты графика функции 204
Построение графиков функций 206
Наибольшее и наименьшее значения непрерывной на замкнутом промежутке функции. 208
Исследование функций с помощью производных высших порядков 209
Задачи для типовых расчетов 210

Глава 9. Интегральное исчисление функций одной переменной . . . 230

Первообразная и неопределенный интеграл 230
Интегрирование методом замены переменной 232
Интегрирование по частям 233
Интегрирование простейших рациональных дробей 235
Интегрирование рациональных дробей 239
Интегрирование некоторых иррациональных выражений 241
Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций 243
Определенный интеграл 246
Геометрические приложения определенного интеграла. 249

Несобственные интегралы 256
Задачи для типовых расчетов 260

Глава 10. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных 278
Метрическое пространство R^n. 278
Окрестности точек в пространстве R^n. Классификация точек. Открытые и замкнутые множества 279
Функции n переменных. Предел и непрерывность функции n переменных . . 280
Частные производные функции n переменных 282
Дифференцируемая функция n переменных. Условия дифференцируемости. Дифференциал 286
Производная сложной функции. Полная производная 288
Геометрический смысл дифференциала функции двух переменных. Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности 290
Приближенные вычисления и оценка погрешностей 291
Частные производные и дифференциалы высших порядков функций нескольких переменных 293
Дифференцирование неявных функций 297
Дифференцирование неявных функций, заданных системой уравнений 299
Экстремум функции двух переменных 301
Экстремум функций n переменных 303
Условный экстремум 304
Наименьшее и наибольшее значения функции нескольких переменных 305
Задачи для типовых расчетов 309

Глава 11. Ряды 322
Числовой ряд. Сходимость числового ряда 322
Необходимый признак сходимости рядов. Свойства сходящихся рядов 323
Достаточные признаки сходимости положительных рядов 324
Знакопеременный ряд 328
Функциональный ряд и его область сходимости 331
Степенные ряды 332
Ряд Тейлора и ряд Маклорена 338
Задачи для типовых расчетов 341

Глава 12. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы . . . 353
Двойной интеграл в прямоугольных координатах 353
Двойной интеграл в полярных координатах 359

Механические приложения двойных интегралов 361
Тройной интеграл в прямоугольных координатах 362
Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах 364
Приложения тройных интегралов 367
Криволинейный интеграл по длине дуги (I рода) 369
Криволинейный интеграл по координатам (II рода) 371
Формула Грина 373
Приложения криволинейных интегралов. 375
Поверхностный интеграл по площади поверхности (I рода) 377
Поверхностный интеграл по координатам (II рода) 378
Формула Стокса 383
Формула Остроградского — Гаусса 384
Приложения поверхностных интегралов 385
Задачи для типовых расчетов 387
Список рекомендуемой и использованной литературы 400

Предисловие

Под типовыми расчетами в вузовском курсе высшей математики принято понимать индивидуальные домашние задания большого объема, рассчитанные на выполнение в течение нескольких недель (как правило, на протяжении семестра студент выполняет 2–3 типовых расчета по каждой математической дисциплине). Обычно в них нет случайных задач, и каждое упражнение предназначено для закрепления стандартного вычислительного навыка. Каждый типовой расчет готовится преподавателем примерно в 30 вариантах, из-за чего их составление представляет собой трудоемкую методическую работу. Поэтому в большинстве старых вузов варианты типовых расчетов накапливаются десятилетиями и передаются из поколения в поколение. Массовыми тиражами они публикуются крайне редко.

В начале каждой главы приводятся методические указания по решению задач. Их ни в коем случае не следует воспринимать как учебный материал и использовать вместо лекционного курса. Скорее это справочник, в котором без доказательств даны формулировки изложенных на лекциях теорем и образцы типовых задач, при решении которых эти сведения уместно использовать.

В конце глав приводятся задачи для типовых расчетов по всему курсу высшей математики технического университета. За основу были взяты варианты задач, предлагаемых студентам Санкт-Петербургского государственного морского технического университета (больше известного как «Корабелка»), объем и глубина курса высшей математики в котором соответствуют среднероссийскому уровню технического университета.

Авторы надеются, что наша книга окажется весьма полезной для студента любого технического университета. Найдя нужный образец, по аналогии с ним студент сможет решить и задачу из своего домашнего задания.

Еще более эффективно сможет использовать нашу книгу преподаватель. Так как каждая задача дана в тридцати вариантах, то достаточно закрепить за студентами номера вариантов и перечислить список задач очередного типового расчета.

Чтобы не порождать списывание, мы намеренно не стали помещать в книге ответы к вариантам задач. Однако они у авторов есть. По договоренности с вузами, которые будут использовать нашу книгу, мы сможем передать ответы на соответствующие кафедры.

От издательства

Ваши замечания, предложения и вопросы отправляйте по адресу электронной почты comp@piter.com (издательство «Питер», компьютерная редакция).

Мы будем рады узнать ваше мнение!

Подробную информацию о наших книгах вы найдете на веб-сайте издательства: http://www.piter.com.

ГЛАВА 1 Матрицы и определители

Матрицы. Действия с матрицами

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел. Если она содержит m строк и n столбцов, то таблица называется матрицей *размерностью* $m \times n$. Матрицы записывают в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

обозначая через a_{ij} ее элемент, находящийся в i-й строке и в j-м столбце. Если это важно, то размерность матрицы указывают в ее названии: $A_{m \times n}$. Иногда для матриц используют обозначение $A = \{a_{ij}\}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов ($m = n$), то она называется *квадратной матрицей n-го порядка*. Элементы квадратной матрицы, для которых $i = j$, называются *диагональными, а диагональ матрицы, на которой они находятся, — главной диагональю этой матрицы.*

Виды квадратных матриц

Приведем примеры квадратных матриц различных видов:

1. Верхняя треугольная

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

2. Нижняя треугольная

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

3. Диагональная

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

4. Единичная

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Операция транспонирование матриц

Замена каждой строки матрицы A ее столбцом называется *транспонированием*. Транспонированная по отношению к матрице A матрица обозначается A^{T}.

Если задана матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

то ее транспонированная матрица имеет вид

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Линейные операции над матрицами

Суммой матриц $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\ i=1,\ 2,\ \dots,\ m,\ j=1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

Для суммы матриц используют обозначение $A+B=C$.

Произведением матрицы $A_{m\times n}$ *на число* α называется матрица $C_{m\times n}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij}=\alpha a_{ij},\ i=1,\ 2,\ \dots,\ m,\ j=1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

Для произведения матрицы на число используют обозначение $\alpha A=C$.

Пример 1.1. Вычислить линейную комбинацию $2A+B$ матриц

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$2A+B=2\cdot\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 2 & 0 & -8 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц

Произведением матрицы $A_{m\times l}$ *на матрицу* $B_{l\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj},\ i=1,\ 2,\ \dots,\ m,\ j=1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

Для произведения матриц используют обозначение $A\cdot B=C$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1 Произведение матриц определено только в том случае, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. Произведение матриц содержит столько строк, сколько имеет первая матрица, и столько столбцов, сколько имеет вторая матрица.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2 Из определения умножения матриц следует, что элемент c_{ij} в матрице C является суммой произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B. На рис. 1.1 схематично показано получение элемента c_{11} в произведении матриц.

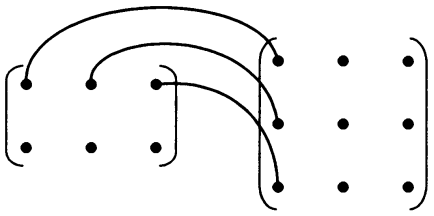


Рис. 1.1

Пример 1.2. Найти произведение матриц

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -2\\ 3 & -5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}$$

в том порядке, в котором оно определено.

Решение: для заданных матриц определено только произведение $A \cdot B$:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -2\\ 3 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot(-2)+0\cdot 4 & 2\cdot 3+0\cdot(-1)\\ -1\cdot(-2)+(-2)\cdot 4 & -1\cdot 3-2\cdot(-1)\\ 3\cdot(-2)-5\cdot 4 & 3\cdot 3-5\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 6\\ -6 & -1\\ -26 & 14\end{pmatrix}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3 В общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$, даже если оба произведения матриц, $A \cdot B$ и $B \cdot A$, определены. Матрицы, для которых выполняется условие $A \cdot B = B \cdot A$, называются *коммутативными*.

Определители

Каждой квадратной матрице A можно поставить в соответствие число, которое называется ее *определителем* и обозначается $|A|$ или $\det A$. Определитель матрицы второго порядка

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

(определитель второго порядка) вычисляется по правилу, показанному на рис. 1.2.

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Рис. 1.2

Определитель квадратной матрицы третьего порядка (определитель третьего порядка)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

вычисляется через ее элементы по следующей формуле:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Схематично правило вычисления определителя третьего порядка показано на рис. 1.3.

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

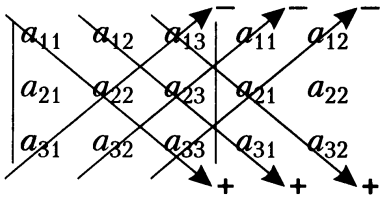


Рис. 1.3

Определитель квадратной матрицы n-го порядка ($n \geq 4$) вычисляется с использованием свойств определителей.

Основные свойства определителей

Определители матриц имеют следующие основные свойства:

1. Определитель не меняется при транспонировании матрицы.
2. Если в определителе поменять местами две строки (или столбца), то определитель поменяет знак.
3. Определитель с двумя пропорциональными (в частности, равными) строками (столбцами) равен нулю.
4. Если в определителе строка (или столбец) состоит из нулей, то определитель равен нулю.
5. Общий множитель у элементов какой-либо строки (или столбца) можно вынести за знак определителя.
6. Определитель не изменится, если ко всем элементам одной строки (или столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число.
7. Определитель диагональной и треугольной (верхней и нижней) матриц равен произведению диагональных элементов.
8. Определитель произведения квадратных матриц равен произведению их определителей.

Минором элемента a_{ij} определителя называется определитель, который получится из данного вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Для минора используют обозначение Δ_{ij}.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} в определителе называется число, которое вычисляется по правилу $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, где Δ_{ij} — соответствующий минор.

Например, в определителе

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

минором и алгебраическим дополнением для элемента a_{21} будут числа

$$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6 \text{ и } A_{21} = (-1)^{2+1}(-6) = 6.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4 При выборе знака перед минором в алгебраическом дополнении нужно руководствоваться следующим правилом:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

Теорема разложения. Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Теорема разложения позволяет вычислять определитель любого порядка. Особенно удобно пользоваться ею, если предварительно преобразовать определитель так, чтобы в каких-то строке или столбце все элементы, кроме одного, равнялись нулю. Такой определитель будет равен ненулевому элементу этих строки или столбца, умноженному на его алгебраическое дополнение.

Пример 1.3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & -3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Решение: прибавим ко второй строке первую, умноженную на (–2), к третьей — первую, к четвертой — первую, умноженную на (–3). После этого все элементы первого столбца, кроме первого элемента, будут равны нулю. Применяя теорему разложения к этому столбцу, понизим порядок определителя:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & -3 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (-2) \\ \\ (-3) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 6 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 6 \\ -10 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Применяя теорему разложения к последней строке полученного определителя третьего порядка, получим:

$$\begin{vmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 6 \\ -10 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -10 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = -10 \cdot (18 - 3) = -150.$$

Обратная матрица

Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля.

Пусть A — квадратная невырожденная матрица n-го порядка. *Обратной матрицей* A^{-1} для матрицы A называется матрица, для которой справедливо равенство

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

где E — единичная матрица.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5 Матрицы A и A^{-1} — коммутативные.

Обратная матрица A^{-1} определена только для квадратных невырожденных матриц и вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot C^{\mathrm{T}},$$

где $|A|$ — определитель матрицы A, а матрица C (*союзная матрица*) получается из матрицы A заменой всех ее элементов соответствующими им алгебраическими дополнениями.

Пример 1.4. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение: определитель матрицы $|A| = -1 \neq 0$. Вычислим алгебраические дополнения для ее элементов и составим союзную матрицу:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

Составим союзную матрицу:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}; \quad C^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица будет равна

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$

Задачи для типовых расчетов

Задача 1.1. Вычислите определитель.

1. $\begin{vmatrix} -1 & 6 & 5 & 1 \\ -2 & 8 & 6 & 2 \\ 2 & 16 & 7 & 3 \\ -3 & 9 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 5 & 62 & -79 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 183 & 201 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} -5 & 6 & 10 & 6 \\ -9 & 8 & 8 & 5 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ -11 & 7 & 7 & 4 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 9 & 7 \\ 8 & 6 & 8 & 6 \\ -9 & -7 & 9 & 7 \\ -8 & -6 & 8 & 6 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 6 & 8 & -9 & -12 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ -2 & -3 & 4 & 6 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

11. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

14. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

15. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

17. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

18. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.

19. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

20. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 & -3 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ -5 & -7 & 10 & 14 \end{vmatrix}$.

21. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} 6 & 6 & 10 & -5 \\ 5 & 8 & 8 & -9 \\ 5 & 5 & 9 & -8 \\ 4 & 7 & 7 & -11 \end{vmatrix}$.

23. $\begin{vmatrix} 1 & 22 & 12 & 4 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 16 & 7 & 3 \\ -3 & 9 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

24. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$.

25. $\begin{vmatrix} 5 & -9 & 2 & 7 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

26. $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 9 & 7 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 9 & 7 & -9 & -7 \\ -8 & -6 & 8 & 6 \end{vmatrix}$.

27. $\begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 7 & 6 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

28. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

29. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$. 30. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 7 & 8 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

Задача 1.2. Даны матрицы A и B. Найдите матрицу C.

1. $A=\begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 10 & -5 \\ 3 & 16 \end{pmatrix}$, $C=B-2A^{\mathrm{T}}$.

2. $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C=(3A)^{\mathrm{T}}-B$.

3. $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $C=A+B^{\mathrm{T}}$.

4. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C=2A+3B$.

5. $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=A^{\mathrm{T}}-B^{\mathrm{T}}$.

6. $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 7 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $C=2A-B^{\mathrm{T}}$.

7. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$, $C=(2B)^{\mathrm{T}}+A$.

8. $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $C=A-B^{\mathrm{T}}$.

9. $A=\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, $C=3B-2A$.

10. $A=\begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$.

11. $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -5\\ 4 & 3 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 3 & 0\\ -4 & -2\end{pmatrix}$, $C=2B-A^{\mathrm{T}}$.

12. $A=\begin{pmatrix}-4 & 2 & -1\\ -1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 5 & 1 & 3\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $C=(2A)^{\mathrm{T}}-B$.

13. $A=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-7 & 1 & -2\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $C=3A+B^{\mathrm{T}}$.

14. $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 4\\ -1 & 2 & -5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=2A-3B$.

15. $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 5 & -7\\ 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 1\\ -2 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$, $C=2A^{\mathrm{T}}-B^{\mathrm{T}}$.

16. $A=\begin{pmatrix}4 & -3 & 2\\ 1 & 0 & 3\\ 9 & 7 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 1 & -2\\ 4 & 3 & 2\\ -8 & -3 & 2\end{pmatrix}$, $C=AE+B^{\mathrm{T}}$.

17. $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 6 & 8\\ -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -7 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $C=A-2B^{\mathrm{T}}$.

18. $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -3\\ 2 & 0 & 5\\ 0 & -4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-7 & 8 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $C=3A-B$.

19. $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 4\\ -3 & 7 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 1\\ -3 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}$, $C=2A+B^{\mathrm{T}}$.

20. $A=\begin{pmatrix}9 & -11\\ 7 & -3\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & -2\\ 1 & -3\\ 8 & -1\end{pmatrix}$, $C=A-3B$.

21. $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ -4 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}9 & -8 & 7\\ -6 & 5 & -4\end{pmatrix}$, $C=A^{\mathrm{T}}+2B^{\mathrm{T}}$.

22. $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -2\\ 1 & 0 & -3\\ -7 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 1 & 2\\ -3 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$, $C=A-BE$.

23. $A=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 5\\ -6 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & -1\\ 3 & 2\\ 4 & -3\end{pmatrix}$, $C=3B-A^{\mathrm{T}}$.

24. $A=\begin{pmatrix}7 & -3 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ -4 & 5 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 1 & 3\\ 4 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $C=A+(2B)^{\mathrm{T}}$.

25. $A=\begin{pmatrix}-6 & 1\\ 0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 1 & -3\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=4A+B^{\mathrm{T}}$.

26. $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ -4 & -2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & -3 & 1\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $C=3A+2B$.

27. $A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 5 & -7\\ 3 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 7\\ -1 & -2\\ 4 & 0\end{pmatrix}$, $C=A^{\mathrm{T}}-2B^{\mathrm{T}}$.

28. $A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 0\\ -2 & 0 & 1\\ 6 & 7 & -5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & -3\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $C=A^{\mathrm{T}}+BE$.

29. $A=\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 7 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 4\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=A^{\mathrm{T}}-3B$.

30. $A=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 2\\ -6 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 1 & 3\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix}$, $C=2A+B$.

Задача 1.3. Найдите произведение матриц $A\cdot B$. Существует ли произведение $B\cdot A$? Почему?

1. $A=(1\ \ -1\ \ 2\ \ 3)$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\\ 5 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 5 & 7 & 1\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 5 & 4\end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\\ -1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 5 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

6. $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\\ -1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & -2\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

8. $A=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

9. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 5 & 3\\ 6 & 8 & 2\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 5 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

11. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\\ 1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

12. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

13. $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 0 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -4\\ 3 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

14. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

15. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 3 & 1\\ 4 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -2 & 3\\ -2 & -1 & 5 & -2\end{pmatrix}$.

16. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & 5\\ 3 & -5\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

17. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$.

18. $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

19. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 2\\ 3 & 1 & -3 & 1\end{pmatrix}$.

20. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -4\\ -1 & -2 & -4\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$.

21. $A=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\\ 5\\ 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 0 & -2 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

22. $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

23. $A=\begin{pmatrix}5&0&2&3\\4&1&5&3\\3&1&-1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6\\-2\\7\\4\end{pmatrix}$.

24. $A=\begin{pmatrix}-1&2&0&3\\1&1&-2&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&4\\0&1\\1&-1\\1&1\end{pmatrix}$.

25. $A=\begin{pmatrix}1&2\\-3&4\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1&2\\-1&3&0\end{pmatrix}$.

26. $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\4\\1\\-1\end{pmatrix}$.

27. $A=\begin{pmatrix}-1&2&0&3\\1&2&-1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&4&2\\0&-1&1\\6&1&-1\\2&1&1\end{pmatrix}$.

28. $A=\begin{pmatrix}3&4\\2&1\\1&1\\2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&2&1&2\\4&1&1&3\end{pmatrix}$.

29. $A=\begin{pmatrix}-7&2&3&-1\\3&1&4&2\\4&-2&5&-3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-2&4\\1&2&-3\\-4&3&2\\5&2&1\end{pmatrix}$.

30. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\3&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-5\\1&2\\3&-4\end{pmatrix}$.

Задача 1.4. Найдите обратную матрицу для матрицы A. Сделайте проверку.

1. $A=\begin{pmatrix}-2&3&1\\3&6&2\\1&2&1\end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix}1&-3&-1\\-2&7&2\\3&2&-4\end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\3&1&-2\\1&0&1\end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$.

6. $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&2\\1&0&4\end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix}4&-8&-5\\-4&7&-1\\-3&5&1\end{pmatrix}$.

8. $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\4&3&-2\\-5&-4&-1\end{pmatrix}$.

9. $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-3&1\\4&1&-5\end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\5&3&-6\\-1&-2&3\end{pmatrix}$.

11. $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$.

12. $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&2&1\\3&1&2\end{pmatrix}$.

13. $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\4&5&1\\3&1&1\end{pmatrix}$.

14. $A=\begin{pmatrix}3&-4&5\\2&-3&1\\3&-5&-1\end{pmatrix}$.

15. $A=\begin{pmatrix}4&-8&-5\\-4&7&-1\\-3&5&1\end{pmatrix}$.

16. $A=\begin{pmatrix}2&7&3\\3&9&4\\1&5&3\end{pmatrix}$.

17. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{pmatrix}$.

18. $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&-2&1\\2&2&3\end{pmatrix}$.

19. $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\-3&7&2\\-1&2&-4\end{pmatrix}$.

20. $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&4\end{pmatrix}$.

21. $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&1&-2\\2&1&-1\end{pmatrix}$.

22. $A=\begin{pmatrix}5&3&-6\\2&-1&0\\-1&-2&3\end{pmatrix}$.

23. $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&-1&2\\3&0&1\end{pmatrix}$.

24. $A=\begin{pmatrix}4&-4&-3\\-8&7&5\\-5&-1&1\end{pmatrix}$.

25. $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&0&1\\1&2&2\end{pmatrix}$.

26. $A=\begin{pmatrix}4&5&1\\1&2&0\\3&1&1\end{pmatrix}$.

27. $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\7&9&5\\3&4&3\end{pmatrix}$.

28. $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&4\\3&4&3\end{pmatrix}$.

29. $A=\begin{pmatrix}3&1&2\\2&-2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$.

30. $A=\begin{pmatrix}3&2&3\\-4&-3&-5\\5&1&-1\end{pmatrix}$.

Задача 1.5. Найдите ранг матрицы.

1. $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&2\\3&1&3&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix}2&-1&3&-2&4\\4&-2&5&1&7\\2&-1&1&8&2\end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix}2&1&4&5\\1&0&1&2\\1&2&4&0\end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix}1&3&5&-1\\2&-1&-3&4\\5&1&-1&7\\7&7&9&1\end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 8 & 13 & 16 \\ 1 & 0 & -7 & -14 & -17 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & -5 & -6 \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -34 & 0 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

18. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \\ 1 & 9 & 8 & -2 \\ 1 & -12 & -7 & -2 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 & 1 & -7 \\ 0 & 11 & -5 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -11 & -1 & 19 \\ 1 & 12 & 2 & -16 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 6 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -10 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

24. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

26. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 13 & 16 \\ 1 & -3 & 9 & 11 \end{pmatrix}$.

27. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 4 & -9 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 11 & 2 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

29. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & -12 & 3 & -7 & -8 \\ -3 & 7 & 9 & 4 & 15 \end{pmatrix}$.

30. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

ГЛАВА 2 Системы линейных алгебраических уравнений

Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными записывается в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где через a_{ij} обозначен коэффициент при неизвестном x_j в i-м уравнении системы ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$); $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — неизвестные; а числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$ называются свободными членами.

Таблица коэффициентов при неизвестных называется *матрицей системы*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

столбец $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ — *столбцом неизвестных*, а столбец $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ — *столбцом свободных членов*. Если $m = n$, то определитель матрицы системы A обозначается чаще всего через $\Delta = |A| = \det A$ и называется определителем системы.

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Основными методами решения систем линейных алгебраических уравнений являются метод Крамера, матричный метод и метод Гаусса. Первые два метода применимы только для решения систем с квадратной невырожденной матрицей. Методом Гаусса можно решать любую систему линейных алгебраических уравнений.

Формулы Крамера

Если определитель Δ системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta};\quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

— определитель системы, а Δ_j — вспомогательные определители, которые получаются из определителя Δ заменой столбца из коэффициентов при x_j столбцом свободных членов:

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Эти формулы называются *формулами Крамера.*

Пример 2.1. Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

используя формулы Крамера.

Решение: определитель системы равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-2) \\ \cdot(3) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -7.$$

Вычислим вспомогательные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -7.$$

По формулам Крамера найдем: $x_1 = \frac{-7}{-7} = 1$, $x_2 = \frac{-7}{-7} = 1$, $x_3 = \frac{-7}{-7} = 1$.

Матричный метод

Систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными можно записать в виде матричного уравнения:

$$A \cdot X = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— матрица системы;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ — столбец неизвестных; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ — столбец свободных членов.

Если матрица A невырожденная, то решение системы линейных алгебраических уравнений определяется по формуле

$$X = A^{-1} \cdot B,$$

где A^{-1} — обратная матрица.

Пример 2.2. Решить матричным методом систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2; \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение: матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

столбец неизвестных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ и столбец свободных членов $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Определитель матрицы A равен $|A| = -6 \neq 0$. Обратная матрица

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 9 & -6 & -3 \\ -13 & 6 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно получить решение системы в матричном виде:

$$X = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 9 & -6 & -3 \\ -13 & 6 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1$.

Решение матричных уравнений

Иногда требуется решить матричное уравнение вида

$$X \cdot A = B.$$

Если A — квадратная невырожденная матрица, то решение этого уравнения имеет вид

$$X = B \cdot A^{-1},$$

где A^{-1} — обратная к A матрица.

Пример 2.3. Решить матричное уравнение $X \cdot A = B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение: решением этого матричного уравнения является матрица $X_{2\times 2}$, которая определяется по формуле $X = B \cdot A^{-1}$.

Поскольку $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, то $X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -11 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Проверка: $\begin{pmatrix} -16 & -11 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Метод Гаусса

Рассмотрим систему m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Матрица системы, к которой присоединен столбец свободных членов, называется *расширенной матрицей* системы:

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & & x_n & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \end{array}.$$

Элементарными преобразованиями в расширенной матрице называются преобразования, которые не меняют множество решений системы. Для обозначения элементарного преобразования используют знак ~.

Элементарные преобразования в расширенной матрице

Элементарными преобразованиями в расширенной матрице являются:

1) перемена местами строк;
2) перемена местами столбцов с запоминанием, какому неизвестному соответствует каждый столбец;
3) умножение (деление) строки на число, отличное от нуля;
4) прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число;
5) вычеркивание одной из двух пропорциональных (равных) строк;
6) вычеркивание нулевой строки.

Пример 2.4. Решить методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 = 8; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение:

1-й шаг — формирование первого столбца.

Первую строку расширенной матрицы умножим на 2 и прибавим ко второй строке, также первую строку умножим на (−3) и прибавим к третьей строке расширенной матрицы. После этого все элементы первого столбца матрицы, кроме первого, окажутся равными нулю:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ -2 & -1 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \end{array} \begin{matrix} \\ (2)(-3) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \end{array}\right) \end{array}.$$

2-й шаг — формирование второго столбца.

Вторую строку, умноженную на −1, прибавим к первой строке, вторую строку прибавим к третьей строке расширенной матрицы. После этого все элементы второго столбца матрицы, кроме диагонального, окажутся равными нулю:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ (1)(-1) \\ \\ \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -14 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right) \end{array}.$$

3-й шаг — формирование третьего столбца.

Третью строку разделим на 2, чтобы ее диагональный элемент равнялся единице. После этого третью строку, умноженную на −6, прибавим ко второй и третью строку, умноженную на 5, прибавим к первой строке:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -14 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -14 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ :(2) \\ \\ \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -14 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ (-6)(5) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \end{array}.$$

Система, которая соответствует полученной расширенной матрице, имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = 1; \\ x_2 = 2; \\ x_3 = 3, \end{cases}$$

и решение ее очевидно.

Ранг матрицы. Теорема Кронекера–Капелли

Минором k-го порядка матрицы называется определитель, который состоит из элементов матрицы, расположенных на пересечении k ее строк и k столбцов.

Например, в матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

определитель $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ является ее минором второго порядка, а определитель

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

— минором третьего порядка.

Рангом матрицы называется наивысший порядок ее минора, отличного от нуля. Для ранга матрицы A используют обозначение $r(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1 Если ранг матрицы равен k, то из этого следует, что среди миноров k-го порядка хотя бы один отличен от нуля, а все миноры более высокого порядка равны нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2 Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы, поэтому их используют при определении ее ранга.

Пример 2.5. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -6 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -6 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 5 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-2)(1) \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -10 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -10 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку в полученной матрице две строки, ее ранг не может быть больше двух. Среди миноров второго порядка можно указать минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. Следовательно, $r(A) = 2$.

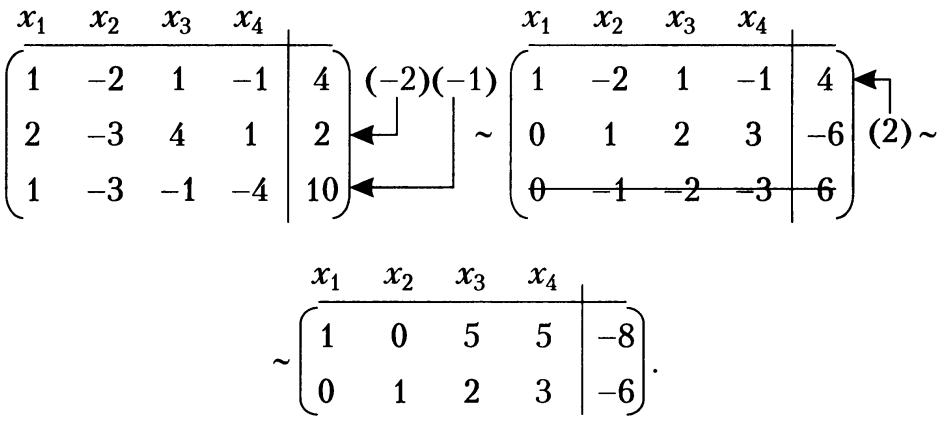
Теорема Кронекера–Капелли. Для того чтобы система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными была совместной (имела решения), необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы $r(A)$ был равен рангу расширенной матрицы системы $r(B)$.

Если $r(A) = r(B) = n$, то система имеет единственное решение. Если $r(A) = r(B) < n$, то система имеет бесконечно много решений.

Пример 2.6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 4; \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2; \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 10. \end{cases}$$

Решение: для решения системы используем метод Гаусса:



Ранг матрицы системы $r(A) = 2$, ранг расширенной матрицы $r(B) = 2$, число неизвестных $n = 4$. Так как $r(A) = r(B) < n$, то, согласно теореме Кронекера–Капелли, система имеет бесконечно много решений. Найдем все эти решения. Для этого запишем систему линейных алгебраических уравнений, которая соответствует полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_3 + 5x_4 = -8; \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -6; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -5x_3 - 5x_4 - 8; \\ x_2 = -2x_3 - 3x_4 - 6. \end{cases}$$

Неизвестные x_3 и x_4 являются свободными. Их значения задаются произвольно. Пусть $x_3 = t$, $x_4 = z$, где t, z — любые вещественные числа. Число свободных неизвестных k определяется по формуле $k = n - r(A)$. Неизвестные x_1 и x_2 называются базисными. Множество всех решений системы записывается в виде формул, выражающих базисные неизвестные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = -5t - 5z - 8; \\ x_2 = -2t - 3z - 6; \\ x_3 = t; \\ x_4 = z, \end{cases}$$

где $t,\ z \in R$.

Однородные системы

Однородная система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными записывается в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однородная система линейных алгебраических уравнений всегда имеет нулевое (тривиальное) решение:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0.$$

У любой однородной системы $r(A) = r(B)$, так как расширенная матрица B отличается от матрицы A только нулевым столбцом.

Если у однородной системы $r(A) = r(B) = n$, то она имеет только нулевое решение.

Если у однородной системы $r(A) = r(B) < n$, то она имеет ненулевые решения.

Если матрица A однородной системы — квадратная, то однородная система имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда $|A| = 0$.

Пусть однородная система линейных алгебраических уравнений имеет k ненулевых линейно независимых решений (ни одно из них нельзя выразить линейно через остальные) $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_k$. Эти решения образуют *фундаментальную систему*, если любое решение системы X можно представить в виде $X = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_nX_k$.

Число решений k в фундаментальной системе равно числу свободных неизвестных и определяется по формуле $k = n - r(A)$, где n — число неизвестных, а $r(A)$ — ранг матрицы системы.

Пример 2.7. Имеет ли однородная система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

ненулевые решения? Если да, то найти их, выписав фундаментальную систему решений.

Решение: выпишем расширенную матрицу системы и преобразуем ее по методу Гаусса:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ & 2 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ & 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{array} \begin{array}{c} \\ (-2) \\ (-1) \end{array} \sim \begin{array}{c|cccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c|cccc|c} & x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ (-1) \end{array} \sim \begin{array}{c|cccc|c} & x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & -8 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \end{array}.$$

Число неизвестных $n = 4$, $r(A) = r(B) = 2$. Поскольку $r(A) = r(B) < n$, то однородная система имеет ненулевые решения. Выпишем систему, которая соответствует полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 8x_2 = 0; \\ x_4 + 5x_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 8x_2 + x_3; \\ x_4 = -5x_2. \end{cases}$$

Неизвестные x_2 и x_3 — свободные, их можно задавать произвольно. Обозначим $x_2 = C_1$ и $x_3 = C_2$, где C_1, C_2 — любые вещественные числа. Выпишем решение системы X в матричном виде:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8C_1 + C_2 \\ C_1 + 0 \cdot C_2 \\ 0 \cdot C_1 + C_2 \\ -5C_1 + 0 \cdot C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 X_1 + C_2 X_2.$$

Решения

$$X_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ и } X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений.

Задачи для типовых расчетов

Задача 2.1. Решите систему линейных уравнений тремя способами: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

1. $\begin{cases} 2x - y - z = 4; \\ 3x + 4y - 2z = 11; \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y + 2z = -1; \\ 2x - y + 2z = -4; \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5; \\ 2x + 3y + z = 1; \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 2y + 4z = 31; \\ 5x + y + 2z = 29; \\ 3x - y + z = 10. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + 5y - 4z + 5 = 0; \\ 2x - 3y + z - 2 = 0; \\ 4x + y - 3z + 4 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x - 2y + 4z = 3; \\ 2x - 4y + 3z = 1; \\ 3x - y + 5z = 2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x - y + z = 2; \\ 3x + 2y + 2z = -2; \\ x - 2y + z = 1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x + 3y + 4z = 6; \\ 2x - y - z = 1; \\ x + 2y + 3z = 5. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0; \\ 2x + 3y - z = 0; \\ x - y + 3z - 7 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28; \\ 7x + 3y - 6z = -1; \\ 7x + 9y - 9z = 5. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0; \\ 2x + y - 2z - 1 = 0; \\ x + y - 3z + 1 = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 6; \\ x + 2y + 3z = 1; \\ x + 3y + 6z = 2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x-4y+z=3; \\ x-5y+3z=-1; \\ x-y+z=1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x-y+z=6; \\ 2x+y+z=3; \\ x+y+2z=5. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x+y+z=6; \\ x-y+z=5; \\ x+y+2z=4. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x+y+z-1=0; \\ x+2y+3z-2=0; \\ x+3y+6z-1=0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x-2z-4=0; \\ 2y+z-3=0; \\ x-z=6. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x-y+z=4; \\ -x+3y-2z=-3; \\ 3x+2y-z=3. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x+y-2z=-2; \\ x+y+z=0; \\ x-2y+3z=-3. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x+2y-z=1; \\ -2x-3y+2z=0; \\ x+5y+z=-5. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x-3y+z=-3; \\ x-5y-2z=6; \\ -2x-y+3z=-9. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x+y+z=4; \\ x+2y+2z=3; \\ x+4y-z=-2. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 4x-y-z+3=0; \\ x+3y+3z=-4; \\ -x+2y-z=5. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x-y=7; \\ 5x+3y-6z=-5; \\ -x-2y+3z=7. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x-y+z=12; \\ x+2y-z=12; \\ 2x-y+3z=9. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x+3y-2z=-4; \\ x-y+4z=4; \\ 3x+2y-z=-9. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x+y+z=6; \\ 2y+z=13; \\ 3x+y+2z=8. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x-y+3z=8; \\ x+y-2z=5; \\ 3x-2y+z=7. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x+3y-z=4; \\ -x+2y+3z=12; \\ 2x+y-z=1. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 5x-y+z=-17; \\ x-3y+2z=-11; \\ 2x+y+z=0. \end{cases}$

Задача 2.2. Решите матричное уравнение.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

2. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

6. $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 11 & -19 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-8 & -5\\ 5 & 3\end{pmatrix}$.

8. $X\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -12\\ -4 & 7\end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}4 & -5\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

10. $X\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 9\\ 3 & 0\end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-2 & -10\\ 1 & -7\end{pmatrix}$.

12. $X\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 11 & 16\end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$.

14. $X\cdot\begin{pmatrix}5 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 6\\ -1 & -2\end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 6 & 9\end{pmatrix}$.

16. $X\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ -5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14 & 9\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}7 & -4\\ -6 & 2\end{pmatrix}$.

18. $X\cdot\begin{pmatrix}6 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ -28 & -6\end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3 & -9\\ -2 & 5\end{pmatrix}$.

20. $X\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 7\\ 6 & 4\end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -1 & 24\end{pmatrix}$.

22. $X\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -6 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & -8\\ -20 & 13\end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-1 & -8\\ 4 & 7\end{pmatrix}$.

24. $X\cdot\begin{pmatrix}5 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}19 & 1\\ 32 & 1\end{pmatrix}$.

26. $X\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 21\\ -2 & -1\end{pmatrix}$.

27. $\begin{pmatrix}2 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}11 & 8\\ -6 & -4\end{pmatrix}$.

28. $X\cdot\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 7\\ 6 & -10\end{pmatrix}$.

29. $\begin{pmatrix}5 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}6 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

30. $X\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -5 & -5\end{pmatrix}$.

Задача 2.3. Найдите общее решение, построив фундаментальную систему для однородной системы линейных алгебраических уравнений.

1. $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0;\\ 2x_1-4x_2+5x_3+7x_4=0;\\ 6x_1-12x_2+17x_3-9x_4=0;\\ 7x_1-14x_2+18x_3+17x_4=0.\end{cases}$

2. $\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3-5x_4=0;\\ 4x_1+6x_2+2x_3-x_4=0;\\ 2x_1+3x_2-5x_3-14x_4=0;\\ 10x_1+15x_2+3x_3-7x_4=0.\end{cases}$

3. $\begin{cases}14x_1+35x_2-7x_3-63x_4=0;\\ -10x_1-25x_2+5x_3+45x_4=0;\\ 26x_1+65x_2-13x_3-117x_4=0.\end{cases}$

4. $\begin{cases}9x_1+21x_2-15x_3+5x_4=0;\\ 12x_1+28x_2-20x_3+7x_4=0.\end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0; \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0; \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0; \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0; \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0; \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0; \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0; \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0; \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0; \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0; \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0; \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0; \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0; \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0; \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0; \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0; \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0; \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0; \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0; \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0; \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0; \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0; \\ 9x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0; \\ 5x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0; \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 0; \\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 0; \\ 5x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0; \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0; \\ x_1 + 8x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0; \\ -4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 + 8x_5 = 0; \\ -6x_1 + 7x_2 - 10x_3 - 9x_4 + 3x_5 = 0; \\ 8x_1 - 9x_2 + 13x_3 + 15x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0; \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0; \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 5x_5 = 0; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0; \\ 6x_1 + 10x_2 + 17x_3 + 7x_4 - 3x_5 = 0; \\ 9x_1 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0; \\ 12x_1 - 2x_2 + x_3 + 8x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 6x_5 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 6x_4 - 18x_5 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 9x_4 - 27x_5 = 0; \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 - 6x_5 = 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0; \\ 4x_1 - 9x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 0; \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 0; \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0; \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0; \\ x_2 + x_3 + x_6 = 0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0; \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = 0; \\ 4x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

ГЛАВА 3 Элементы линейной алгебры

Линейные пространства

Множество X называется *линейным* (*векторным*) *пространством*, если выполняются три условия:

1. Любым двум элементам x и y этого множества ставится в соответствие третий элемент z этого множества, который называется суммой элементов x и y и обозначается $z = x + y$.
2. Любому элементу x множества X и любому вещественному числу α ставится в соответствие элемент u этого множества, который называется произведением элемента x на число α и обозначается $u = \alpha x$.
3. Указанные операции сложения и умножения на число подчинены следующим аксиомам:
   1) $x + y = y + x$ для любых элементов x и y;
   2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ для любых элементов x, y и z;
   3) существует нулевой элемент 0, такой, что $x + 0 = x$ для любого элемента x;
   4) для любого элемента x существует противоположный элемент $(-x)$, такой, что $x + (-x) = 0$;
   5) $1 \cdot x = x$ для любого элемента x;
   6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ для любого элемента x и любых чисел α и β;
   7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ для любого элемента x и любых чисел α и β;
   8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ для любых элементов x и y и для любого числа α.

Элементы линейного пространства называют *векторами*.

Линейное пространство образует множество вещественных чисел R.

Одним из важных примеров линейного пространства является множество одностолбцовых матриц с n строками. Это пространство обозначают R^n, а его элементы обозначают

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

и также называют векторами.

Базис и размерность линейного пространства

Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ линейного пространства называются *линейно независимыми*, если $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n = 0$ только при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ называются *линейно зависимыми*, если найдутся числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ не равные нулю одновременно и такие, что $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n = 0$.

Базисом в линейном пространстве называется набор векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, такой, что любой вектор $\vec{x}$ этого пространства можно представить в виде

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — некоторые числа.

Последняя формула называется разложением вектора $\vec{x}$ по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, а числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — *координатами* $\vec{x}$ в этом базисе.

Максимальное число линейно независимых векторов в некотором линейном пространстве называется *размерностью* этого пространства. Это означает, что если размерность линейного пространства равна n, то в нем можно указать n линейно независимых векторов, а любые $n + 1$ векторов этого пространства линейно зависимы.

Например, в пространстве R^n базис образуют n линейно независимых векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Таким образом, пространство R^n является n-мерным.

Координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ любого вектора

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n$$

— это координаты его в некотором заданной базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, то есть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$.

Преобразование координат вектора при переходе к новому базису

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — координаты вектора $\vec{x} \in R^n$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ и пусть векторы $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n$ также образуют базис. Если заданы координаты векторов $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n$ в старом базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, то есть

$$\vec{e}'_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ \ldots \\ e_{n1} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}'_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \\ \ldots \\ e_{n2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{e}'_n = \begin{pmatrix} e_{1n} \\ e_{2n} \\ \ldots \\ e_{nn} \end{pmatrix},$$

и если требуется найти координаты вектора $\vec{x}$ в этом базисе, то следует:

1) составить *матрицу перехода*

$$H = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots & e_{nn} \end{pmatrix},$$

столбцами которой являются координаты векторов нового базиса;

2) найти координаты x'_1, x'_2, ..., x'_n вектора $\vec{x}$ в новом базисе из матричного уравнения

$$\vec{x} = H \cdot \vec{x}',$$

решение которого при невырожденной матрице H имеет вид

$$\vec{x}' = H^{-1} \cdot \vec{x}.$$

Тогда в новом базисе $\vec{e}'_1$, $\vec{e}'_2$, ..., $\vec{e}'_n$ вектор $\vec{x}$ будет иметь координаты x'_1, x'_2, ..., x'_n, и его можно записать в виде

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Пример 3.1. Разложить вектор

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

по базису векторов

$$\vec{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}'_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{e}'_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Решение: матрица перехода будет иметь вид

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обратная к ней матрица

$$H^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тогда вектор в новом базисе имеет вид

$$\vec{x}' = H^{-1} \cdot \vec{x} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -11 \\ -11 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Это значит, что $\vec{x} = \vec{e}_1' + \vec{e}_2' + \vec{e}_3'$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1 Если матрицей перехода является единичная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

то $\vec{x}' = E \cdot \vec{x} = \vec{x}$. Это означает, что координаты вектора $\vec{x} \in R^n$ не меняются при переходе к базису

$$\vec{e}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{e}_n' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Этот базис называют каноническим.

Линейные операторы. Матрица линейного оператора

Линейным оператором (линейным преобразованием) в линейном пространстве называется отображение $\tilde{A}$ этого пространства на себя, при котором для любых элементов (векторов) x, y этого пространства справедливо следующее:

1) $\tilde{A}(x + y) = \tilde{A}x + \tilde{A}y$;

2) $\tilde{A}(\alpha x) = \alpha\tilde{A}x$,

где $\tilde{A}x$ и $\tilde{A}y$ называются образами элементов (векторов) x и y, а α — вещественное число.

Если линейный оператор $\tilde{A}: R^n \to R^n$ и если вектор $\vec{x} \in R^n$, а вектор $\vec{y} \in R^n$ есть образ $\vec{x}$ при заданном отображении, это обозначают так: $\vec{y} = \tilde{A}\vec{x}$. Если при этом в линейном пространстве R^n задан базис $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ..., $\vec{e}_n$, то соответствие между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$ можно записать в виде матричного уравнения

$$\vec{x} = A \cdot \vec{y},$$

где координаты векторов

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

заданы в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ..., $\vec{e}_n$, а матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей оператора* $\tilde{A}$. Ее элементы вычисляются по формуле $a_{ij} = \tilde{A}e_{ij}$, в которой e_{ij} является i-й координатой базисного вектора $\vec{e}_j$.

Пример 3.2. Выписать матрицу оператора подобия $\tilde{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, если $\vec{x} \in R^n$.

Решение: пусть координаты вектора

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

заданы в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ..., $\vec{e}_n$. Согласно определению оператора подобия, можно записать:

$$\begin{cases} \tilde{A}\vec{e}_1 = \lambda\vec{e}_1 = \lambda\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + \dots + 0\vec{e}_n; \\ \tilde{A}\vec{e}_2 = \lambda\vec{e}_2 = 0\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2 + \dots + 0\vec{e}_n; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \tilde{A}\vec{e}_n = \lambda\vec{e}_n = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + \dots + \lambda\vec{e}_n. \end{cases}$$

Матрицей оператора подобия будет матрица

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

— матрица коэффициентов при базисных векторах в полученной системе. Действительно,

$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \dots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda\vec{x}.$$

Если A — матрица линейного преобразования $\vec{y} = A\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, а матрица A' — матрица этого же преобразования $\vec{y}' = A'\vec{x}'$ в новом базисе $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n$, то справедливо соотношение

$$A' = H^{-1}AH,$$

где H — матрица перехода.

Пример 3.3. Найти матрицу линейного оператора в R^3, который производит проецирование в координатную плоскость $x0z$ в базисе

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а также в базисе

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Решение: рассмотрим вектор $\vec{x} \in R^3$ в каноническом базисе

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и определим образы базисных векторов при заданном линейном преобразовании (рис. 3.1):

$$\begin{cases} \tilde{A}\vec{i} = \vec{i} = 1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}; \\ \tilde{A}\vec{j} = 0 = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}; \\ \tilde{A}\vec{k} = \vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k}. \end{cases}$$

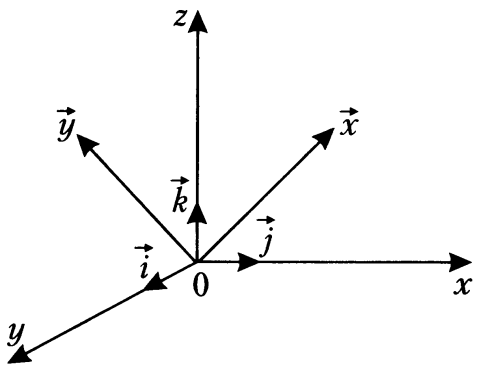


Рис. 3.1

Следовательно, матрицей заданного оператора является матрица

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Перейдем к базису векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Матрица перехода имеет вид

$$H=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}.$$

Найдем обратную к ней матрицу:

$$H^{-1}=\begin{pmatrix}-6 & 2 & 1\\ -5 & 1 & 1\\ 7 & -2 & -1\end{pmatrix}.$$

Применяя формулу $A'=H^{-1}AH$, получим:

$$A'=\begin{pmatrix}-6 & 2 & 1\\ -5 & 1 & 1\\ 7 & -2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 0 & 1\\ -5 & 0 & 1\\ 7 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -2\\ -2 & 2 & -1\\ 4 & -2 & 3\end{pmatrix}.$$

Собственные числа и собственные векторы матрицы

Пусть квадратная матрица

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

— матрица линейного оператора $\tilde{A}$ в линейном пространстве R^n. Ненулевой вектор $\vec{x}$ называется *собственным вектором* матрицы A и оператора $\tilde{A}$, если выполняется одно из равенств:

$$\tilde{A}\vec{x}=\lambda\vec{x};\quad A\vec{x}=\lambda\vec{x}, \tag{3.1}$$

где λ — некоторое вещественное число, называемое *собственным числом* матрицы и оператора.

Векторное равенство (3.1) может быть записано в виде

$$(A-\lambda E)\cdot\vec{x}=0, \tag{3.2}$$

где E — единичная матрица той же размерности, что и матрица A. Следовательно, собственный вектор $\vec{x}$ является ненулевым решением однородной системы (3.2), а собственные числа определяются из условия равенства нулю определителя этой системы: $|A-\lambda E|=0$.

Пример 3.4. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A=\begin{pmatrix}7 & -12 & 6\\ 10 & -19 & 10\\ 12 & -24 & 13\end{pmatrix}.$$

Решение: для собственных чисел справедливо равенство

$$\begin{vmatrix}7-\lambda & -12 & 6\\ 10 & -19-\lambda & 10\\ 12 & -24 & 13-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Прибавим ко второму столбцу первый, умноженный на 2. Получим:

$$\begin{vmatrix}7-\lambda & 2-2\lambda & 6\\ 10 & 1-\lambda & 10\\ 12 & 0 & 13-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Из второго столбца можно вынести множитель $1-\lambda$:

$$(1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix}7-\lambda & 2 & 6\\ 10 & 1 & 10\\ 12 & 0 & 13-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Прибавим к первой строке вторую, умноженную на -2, и используем теорему разложения:

$$(1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix}-\lambda-13 & 0 & -14\\ 10 & 1 & 10\\ 12 & 0 & 13-\lambda\end{vmatrix}=0;\quad (1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix}-\lambda-13 & -14\\ 12 & 13-\lambda\end{vmatrix}=0;$$

$$(1-\lambda)((13-\lambda)(-13-\lambda)+168)=0;\quad (1-\lambda)(\lambda^2-169+168)=0.$$

Следовательно, $(1-\lambda)(\lambda^2-1)=0$, то есть собственные числа $\lambda_{1,2}=1$, $\lambda_3=-1$.

Найдем собственные векторы, соответствующие найденным собственным числам:

1. $\lambda_{1,2}=1$. Матрица однородной системы

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}6 & -12 & 6\\ 10 & -20 & 10\\ 12 & -24 & 12\end{pmatrix}.$$

Решение однородной системы:

$$\begin{array}{ccc|c} x'_1 & x'_2 & x'_3 & \\ \hline 6 & -12 & 6 & 0 \\ \cancel{10} & \cancel{-20} & \cancel{10} & \cancel{0} \\ \cancel{12} & \cancel{-24} & \cancel{12} & \cancel{0} \end{array} : 6 \quad \begin{array}{ccc|c} x'_1 & x'_2 & x'_3 & \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}.$$

Для координат собственного вектора

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

справедливо уравнение $x_1' - 2x_2' + x_3' = 0$. Если x_2', x_3' — свободные неизвестные, то собственный вектор

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2x_2' - x_3' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

— фундаментальная система решений, C_1, C_2 — любые вещественные числа, не равные нулю одновременно.

2. $\lambda_3 = -1$. Матрица однородной системы

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 10 & -18 & 10 \\ 12 & -24 & 14 \end{pmatrix}.$$

Решение однородной системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_1' & x_2' & x_3' & \\ \hline 8 & -12 & 6 & 0 \\ 10 & -18 & 10 & 0 \\ 12 & -24 & 14 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} x_1' & x_2' & x_3' & \\ \hline 4 & -6 & 3 & 0 \\ 5 & -9 & 5 & 0 \\ 6 & -12 & 7 & 0 \end{array}\right) \cdot (-2) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} x_1' & x_2' & x_3' & \\ \hline -6 & 12 & -7 & 0 \\ 5 & -9 & 5 & 0 \\ 6 & -12 & 7 & 0 \end{array}\right) : (-6) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} x_1' & x_2' & x_3' & \\ \hline 1 & -2 & \frac{7}{6} & 0 \\ 5 & -9 & 5 & 0 \end{array}\right) \cdot (-5) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} x_1' & x_2' & x_3' & \\ \hline 1 & -2 & \frac{7}{6} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & 0 \end{array}\right) \cdot (2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} x_1' & x_2' & x_3' & \\ \hline 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & 0 \end{array}\right).$$

Отсюда

$$\begin{cases} x_1' = \frac{1}{2}x_3'; \\ x_2' = \frac{5}{6}x_3'. \end{cases}$$

Собственный вектор

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix},$$

где $C \neq 0$.

Евклидово пространство

Линейное пространство называется *евклидовым*, если любым двум его элементам x и y ставится в соответствие вещественное число, которое обозначается (x, y) и называется *скалярным произведением* и которое подчинено следующим аксиомам:

1) $(x, y) = (y, x)$;
2) $(x + z, y) = (x, z) + (y, z)$, где z — элемент линейного пространства;
3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$, где λ — вещественное число;
4) $(x, x) \geq 0$, при этом $(x, x) = 0$, если x — нулевой элемент.

Примером евклидова пространства является n-мерное векторное пространство R^n, в котором скалярное произведение двух векторов

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

определяется соотношением

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Несложно проверить, что введенное таким образом скалярное произведение удовлетворяет всем четырем аксиомам.

Для скалярного произведения элементов x и y любого евклидова пространства выполняется неравенство

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y),$$

которое называется *неравенством Коши—Буняковского.*

Нормой элемента x в линейном пространстве называется вещественное число $\|x\|$ которое ставится в соответствие этому элементу и подчинено следующим аксиомам:

1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$, если x — нулевой элемент;
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, где λ — вещественное число;
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*неравенство Минковского*), где y — элемент линейного пространства.

Если линейное пространство является евклидовым, то определенная равенством $\|x\| = \sqrt{(x,\ x)}$ норма удовлетворяет всем требуемым аксиомам.

В n-мерном векторном пространстве R^n норма вектора

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

определяется соотношением $||x|| = \sqrt{(x,\ x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$.

Пример 3.5. Скалярное произведение векторов

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

пространства R^3 равно $(\vec{x},\ \vec{y}) = 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) = -16$. Скалярное произведение векторов

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

пространства R^4 равно $(\vec{x},\ \vec{y}) = 0 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) - 1 \cdot (-2) = 9$.

Пример 3.6. Норма вектора

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

пространства R^3 равна $||x|| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{29}$. Норма вектора

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

пространства R^4 равна $\|x\| = \sqrt{(-1)^2 + 0 + 1^2 + 4^2} = 3\sqrt{2}$.

Два элемента евклидова пространства, x и y, называются *ортогональными*, если их скалярное произведение (x, y) равно нулю. Например, векторы $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ортогональны, так как $(\vec{i}, \vec{j}) = 0$.

Если норма элемента (вектора) евклидова пространства $\|x\| = 1$, то x называется *нормированным*.

Базис векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ n-мерного векторного евклидова пространства R^n называется *ортонормированным*, если

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Примером ортонормированного базиса является базис векторов

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Если в евклидовом пространстве задан базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, который не является ортогональным, то можно построить ортогональный базис $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n$ по формулам (процесс ортогонализации Шмидта)

$$\vec{e}'_1 = \vec{e}_1; \quad \vec{e}'_k = \vec{e}_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_i \vec{e}'_i; \quad k = 2, 3, \ldots, n, \quad c_i = \frac{(\vec{e}_k, \vec{e}'_i)}{(\vec{e}'_i, \vec{e}'_i)}.$$

Квадратичные формы

Пусть

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

— вектор n-мерного линейного пространства R^n, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — координаты этого вектора в некотором базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. *Квадратичной формой* в пространстве R^n называется функция $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которая определяется по правилу $f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, где $a_{ij} = a_{ji}$.

Матрица $A = \{a_{ij}\}_{n \times n}$ называется матрицей квадратичной формы в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

Квадратичная форма называется невырожденной, если $r(A) = n$ или $\det(A) \neq 0$.

Рангом квадратичной формы называется ранг матрицы A.

Например, матрица квадратичной формы $f(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ в пространстве R^2 имеет вид $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Если $\det(A) \neq 0$, то квадратичная форма невырожденная и ее ранг равен 2.

Вид матрицы квадратичной формы определяется базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, в котором задан вектор $\vec{x}$, и меняется при переходе к другому базису по формуле $A' = H^{-1}AH$, где H — матрица перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ к новому базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$.

Если в линейном пространстве введено скалярное произведение, квадратичная форма может быть записана в виде скалярного произведения $f(\vec{x}) = (A\vec{x}, \vec{x})$, где A — матрица квадратичной формы.

Квадратичная форма вида $f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2$ называется *канонической*. Матрица канонической формы является диагональной. Чтобы привести квадратичную форму к каноническому виду, следует перейти к базису собственных векторов матрицы квадратичной формы A.

Матрица квадратичной формы симметричная ($a_{ij} = a_{ji}$). Собственные числа такой матрицы вещественные, а собственные векторы, соответствующие различным собственным числам, — ортогональны.

Если собственные числа матрицы A различные, то соответствующие собственные векторы $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$ образуют ортогональный базис, который можно нормировать. В этом ортонормированном базисе матрица квадратичной формы будет иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные числа.

Линейное преобразование, которое приводит матрицу квадратичной формы к каноническому виду, имеет вид $\vec{x} = H\vec{x}'$, где H — матрица перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ к ортонормированному базису собственных векторов $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2 Матрица H, столбцами которой являются координаты векторов ортонормированного базиса, называется ортогональной, а линейное преобразование с такой матрицей — ортогональным преобразованием. Легко доказывается, что для ортогональной матрицы выполняется соотношение

$$H^{\mathrm{T}}H = HH^{\mathrm{T}} = E,$$

что означает $H^{-1} = H^{\mathrm{T}}$.

Пример 3.7. Привести квадратичную форму

$$x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$$

к каноническому виду.

Решение: матрица квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнение для нахождения собственных чисел имеет вид $|A - \lambda E| = 0$. Преобразуем определитель

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

Вычитая из третьего столбца первый, а затем прибавляя к первой строке третью, получим:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & \lambda+2 \\ 1 & 5-\lambda & 0 \\ 3 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 5-\lambda & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Вычисляя последний определитель, для собственных чисел получим уравнение

$$-(\lambda+2)\big((4-\lambda)(5-\lambda)-2\big) = 0$$

или

$$(\lambda+2)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0.$$

Здесь собственные числа $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 3$. Теперь вычислим собственные векторы:

1. $\lambda_1 = -2$. Матрица однородной системы для первого собственного вектора

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Линейно зависимы первая и третья строки, поэтому координаты соответствующего собственного вектора

$$\vec{e}_1' = \begin{pmatrix} e_{11}' \\ e_{21}' \\ e_{31}' \end{pmatrix}$$

определяются из однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 3e'_{11} + e'_{21} + 3e'_{31} = 0; \\ e'_{11} + 7e'_{21} + e'_{31} = 0. \end{cases}$$

Выпишем ее расширенную матрицу и проведем в ней элементарные преобразования:

$$\begin{array}{c} e'_{11}\ e'_{21}\ e'_{31} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} e'_{11}\ e'_{21}\ e'_{31} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \end{array} (-3) \sim \begin{array}{c} e'_{11}\ e'_{21}\ e'_{31} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} : (-20) \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} e'_{11}\ e'_{21}\ e'_{31} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} : (-7) \sim \begin{array}{c} e'_{11}\ e'_{21}\ e'_{31} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Тогда $\begin{cases} e'_{11} = -e'_{31}; \\ e'_{21} = 0, \end{cases}$ и первый собственный вектор

$$\vec{e}'_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Аналогично определяются собственные векторы для собственных чисел $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 3$:

$$\vec{e}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{e}'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

соответственно. Нормируем собственные векторы:

$$\vec{e}''_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}''_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}''_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

В этом базисе квадратичная форма имеет вид $-2\left(\vec{x}''_1\right)^2 + 6\left(\vec{x}''_2\right)^2 + 3\left(\vec{x}''_3\right)^2$.

Если среди собственных чисел матрицы квадратичной формы есть равные, то среди собственных векторов, соответствующих одному собственному числу, нужно выбрать необходимый набор линейно независимых векторов и провести их ортогонализацию.

Пример 3.8. Привести квадратичную форму

$$17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

к каноническому виду и указать соответствующее ортогональное преобразование.

Решение: матрица квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные числа $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 18$. Собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_1 = 9$,

$$\vec{e}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda = \lambda_2 = 18$ матрица однородной системы для собственных векторов имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & -4 \\ -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вторая и третья строки линейно зависимы от первой. Следовательно, координаты собственного вектора связаны одним уравнением $e_{12} + 2e_{22} + 2e_{32} = 0$. Фундаментальная система линейно независимых решений:

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Проводя ортогонализацию базиса, получим:

$$\vec{e}_2' = \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_3' = \vec{e}_3 - \vec{e}_2' \cdot \frac{(\vec{e}_3, \vec{e}_2')}{(\vec{e}_2', \vec{e}_2')} = \vec{e}_3 - \vec{e}_2' \cdot \frac{4}{5} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нормируя базисные векторы и делая ортогональное преобразование

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_1' - \frac{2}{\sqrt{5}}x_2' - \frac{2}{3\sqrt{5}}x_3'; \\ x_2 = \frac{2}{3}x_1' + \frac{1}{\sqrt{5}}x_2' - \frac{4}{3\sqrt{5}}x_3'; \\ x_3 = \frac{2}{3}x_1' + \frac{5}{3\sqrt{5}}x_3', \end{cases}$$

получим в ортонормированном базисе $\vec{e}_1''$, $\vec{e}_2''$, $\vec{e}_3''$ квадратичную форму следующего вида: $9(x_1'')^2 + +18(x_2'')^2 + 18(x_3'')^2$.

Задачи для типовых расчетов

Задача 3.1. Выясните, образуют ли векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ базис. Если образуют, то разложите вектор $\vec{x}$ по этому базису.

1. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

2. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

4. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

5. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

6. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

7. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}$.

8. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

9. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$.

10. $\vec{p}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\7\\-4\end{pmatrix}$.

11. $\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\5\\1\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}-15\\5\\6\end{pmatrix}$.

12. $\vec{p}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}23\\-14\\30\end{pmatrix}$.

13. $\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\7\\0\end{pmatrix}$.

14. $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}-13\\2\\18\end{pmatrix}$.

15. $\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-8\\9\end{pmatrix}$.

16. $\vec{p}=\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}11\\-1\\4\end{pmatrix}$.

17. $\vec{p}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}$.

18. $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}8\\9\\4\end{pmatrix}$.

19. $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\5\\-14\end{pmatrix}$.

20. $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\-1\\7\end{pmatrix}$.

21. $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\11\end{pmatrix}$.

22. $\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}-5\\9\\-13\end{pmatrix}$.

23. $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}8\\1\\12\end{pmatrix}$.

24. $\vec{p}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}8\\0\\5\end{pmatrix}$.

25. $\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}-19\\-1\\7\end{pmatrix}$.

26. $\vec{p}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}-5\\-5\\5\end{pmatrix}$.

27. $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\7\\5\end{pmatrix}$.

28. $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\5\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}11\\5\\-3\end{pmatrix}$.

29. $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\12\\-1\end{pmatrix}$.

30. $\vec{p}=\begin{pmatrix}5\\-1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}$.

Задача 3.2. Задана матрица A линейного оператора в некотором базисе e_1, e_2, e_3. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$.

1. $A=\begin{pmatrix}5 & -20 & 33\\7 & -24 & 38\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$; $\vec{e}_1'=5\vec{e}_1+3\vec{e}_2+\vec{e}_3$; $\vec{e}_2'=\vec{e}_1-3\vec{e}_2-2\vec{e}_3$; $\vec{e}_3'=\vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_3$.

2. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$; $\vec{e}_1'=\vec{e}_1+\vec{e}_3$; $\vec{e}_2'=2\vec{e}_1-\vec{e}_3$; $\vec{e}_3'=\vec{e}_1+\vec{e}_2$.

3. $A=\begin{pmatrix}0&2&3\\4&1&0\\2&-1&-2\end{pmatrix}$; $\vec{e}_1'=\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3$; $\vec{e}_2'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2-2\vec{e}_3$; $\vec{e}_3'=-\vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_3$.

4. $A=\begin{pmatrix}15&-11&5\\20&-15&8\\8&-7&6\end{pmatrix}$; $\vec{e}_1'=2\vec{e}_1+3\vec{e}_2+\vec{e}_3$; $\vec{e}_2'=3\vec{e}_1+4\vec{e}_2+\vec{e}_3$; $\vec{e}_3'=\vec{e}_1+2\vec{e}_2+2\vec{e}_3$.

5. $A=\begin{pmatrix}1&-1&5\\2&-5&0\\0&1&0\end{pmatrix}$; $\vec{e}_1'=\vec{e}_2$; $\vec{e}_2'=\vec{e}_1$; $\vec{e}_3'=\vec{e}_3$.

6. $A=\begin{pmatrix}1&0&5\\0&5&1\\5&1&0\end{pmatrix}$; $\vec{e}_1'=\vec{e}_1$; $\vec{e}_2'=\vec{e}_3$; $\vec{e}_3'=\vec{e}_2$.

7. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$; $\vec{e}_1'=\vec{e}_1$; $\vec{e}_2'=\vec{e}_2$; $\vec{e}_3'=\vec{e}_3-\frac{1}{3}\vec{e}_1$.

8. $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$; $\vec{e}_1'=2\vec{e}_2+3\vec{e}_3$; $\vec{e}_2'=\vec{e}_1+3\vec{e}_2+5\vec{e}_3$; $\vec{e}_3'=3\vec{e}_1+5\vec{e}_2+7\vec{e}_3$.

9. $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&-1\\0&0&3\end{pmatrix}$; $\vec{e}_1'=\vec{e}_1$; $\vec{e}_2'=-2\vec{e}_1+\vec{e}_2$; $\vec{e}_3'=-\vec{e}_1+3\vec{e}_3$.

10. $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&-1\\0&0&3\end{pmatrix}$; $\vec{e}_1'=2\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3$; $\vec{e}_2'=-\vec{e}_2$; $\vec{e}_3'=\vec{e}_1+\vec{e}_3$.

11. $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&-1&1\\-1&2&1\end{pmatrix}$; $\vec{e}_1'=\vec{e}_2-\vec{e}_3$; $\vec{e}_2'=\vec{e}_2$; $\vec{e}_3'=\vec{e}_1-\vec{e}_3$.

12. $A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\2&1&-2\\1&1&2\end{pmatrix}$; $\vec{e}_1'=\vec{e}_1$; $\vec{e}_2'=\vec{e}_1+\vec{e}_2$; $\vec{e}_3'=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$.

13. $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$; $\vec{e}_1'=\vec{e}_2$; $\vec{e}_2'=\vec{e}_1$; $\vec{e}_3'=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$.

14. $A=\begin{pmatrix}1 & -18 & 15\\ -1 & -22 & 20\\ 1 & -25 & 22\end{pmatrix}$; $\vec{e}_1'=\vec{e}_1$; $\vec{e}_2'=\vec{e}_3$; $\vec{e}_3'=\vec{e}_2$.

15. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$; $\vec{e}_1'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2-2\vec{e}_3$; $\vec{e}_2'=-\vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_3$; $\vec{e}_3'=\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3$.

16. $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ -2 & -1 & 1\end{pmatrix}$; $\vec{e}_1'=\vec{e}_1+\vec{e}_2$; $\vec{e}_2'=\vec{e}_2-\vec{e}_3$; $\vec{e}_3'=\vec{e}_1-\vec{e}_3$.

17. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$; $\vec{e}_1'=\vec{e}_1+\vec{e}_2$; $\vec{e}_2'=2\vec{e}_1-\vec{e}_3$; $\vec{e}_3'=\vec{e}_1+\vec{e}_3$.

18. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$; $\vec{e}_1'=-\vec{e}_1+3\vec{e}_3$; $\vec{e}_2'=-2\vec{e}_1+\vec{e}_2$; $\vec{e}_3'=\vec{e}_1$.

19. $A=\begin{pmatrix}15 & -11 & 5\\ 20 & -15 & 8\\ 8 & -7 & 6\end{pmatrix}$; $\vec{e}_1'=\vec{e}_1+2\vec{e}_2+2\vec{e}_3$; $\vec{e}_2'=3\vec{e}_1+4\vec{e}_2+\vec{e}_3$; $\vec{e}_3'=2\vec{e}_1+3\vec{e}_2+\vec{e}_3$.

20. $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 0\\ 2 & -1 & -2\end{pmatrix}$; $\vec{e}_1'=\vec{e}_1-\vec{e}_3$; $\vec{e}_2'=\vec{e}_2-\vec{e}_3$; $\vec{e}_3'=\vec{e}_1+\vec{e}_2$.

21. $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ -2 & -1 & 1\end{pmatrix}$; $\vec{e}_1'=-\vec{e}_1+2\vec{e}_2'+\vec{e}_3$; $\vec{e}_2'=-\vec{e}_1'+\vec{e}_2-2\vec{e}_3$; $\vec{e}_3'=\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3$.

22. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$; $\vec{e}_1'=-\vec{e}_1+2\vec{e}_2'+\vec{e}_3$; $\vec{e}_2'=\vec{e}_1'-\vec{e}_2+\vec{e}_3$; $\vec{e}_3'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2-2\vec{e}_3$.

23. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$; $\vec{e}_1'=5\vec{e}_1+3\vec{e}_2+\vec{e}_3$; $\vec{e}_2'=\vec{e}_1-3\vec{e}_2-2\vec{e}_3$; $\vec{e}_3'=\vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_3$.

24. $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&1&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$; $\vec{e}_1'=\vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_3$; $\vec{e}_2'=\vec{e}_1-3\vec{e}_2-2\vec{e}_3$; $\vec{e}_3'=5\vec{e}_1+3\vec{e}_2+\vec{e}_3$.

25. $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&1\\-2&-1&1\end{pmatrix}$; $\vec{e}_1'=\vec{e}_2-\vec{e}_3$; $\vec{e}_2'=\vec{e}_1+\vec{e}_2$; $\vec{e}_3'=\vec{e}_1-\vec{e}_3$.

26. $A=\begin{pmatrix}2&-3&0\\0&1&1\\-1&2&0\end{pmatrix}$; $\vec{e}_1'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2-2\vec{e}_3$; $\vec{e}_2'=-\vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_3$; $\vec{e}_3'=\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3$.

27. $A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&2&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$; $\vec{e}_1'=\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3$; $\vec{e}_2'=-\vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_3$; $\vec{e}_3'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2-2\vec{e}_3$.

28. $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&3\\1&2&-3\end{pmatrix}$; $\vec{e}_1'=\vec{e}_2-\vec{e}_3$; $\vec{e}_2'=\vec{e}_2$; $\vec{e}_3'=\vec{e}_1-\vec{e}_3$.

29. $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\2&2&3\\1&-1&-2\end{pmatrix}$; $\vec{e}_1'=\vec{e}_2$; $\vec{e}_2'=\vec{e}_2-\vec{e}_3$; $\vec{e}_3'=\vec{e}_1-\vec{e}_3$.

30. $A=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-2&-3&-3\\3&2&1\end{pmatrix}$; $\vec{e}_1'=-\vec{e}_2$; $\vec{e}_2'=-\vec{e}_1$; $\vec{e}_3'=-\vec{e}_3$.

Задача 3.3. Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы A.

1. $A=\begin{pmatrix}4&-5&2\\5&-7&3\\6&-9&4\end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&-2\end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix}1&2&-4\\2&-2&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix}4&-1&-2\\2&1&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-2&-6&13\\-1&-4&8\end{pmatrix}$.

6. $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix}1&-3&4\\4&-7&8\\6&-7&7\end{pmatrix}$.

8. $A=\begin{pmatrix}4&1&1\\2&4&1\\0&1&4\end{pmatrix}$.

9. $A=\begin{pmatrix}7 & -12 & 6\\ 10 & -19 & 10\\ 12 & -24 & 13\end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

11. $A=\begin{pmatrix}2 & -5 & -3\\ -1 & -2 & -3\\ 3 & 15 & 12\end{pmatrix}$.

12. $A=\begin{pmatrix}4 & -4 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ -4 & 4 & -2\end{pmatrix}$.

13. $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

14. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

15. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

16. $A=\begin{pmatrix}7 & -2 & 0\\ -2 & 6 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}$.

17. $A=\begin{pmatrix}5 & 6 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

18. $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

19. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

20. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

21. $A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{pmatrix}$.

22. $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{pmatrix}$.

23. $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ -2 & -6 & 13\\ -1 & -4 & 8\end{pmatrix}$.

24. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

25. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

26. $A=\begin{pmatrix}7 & -4 & -2\\ -2 & 5 & -2\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$.

27. $A=\begin{pmatrix}4 & -3 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$.

28. $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

29. $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ -1 & -2 & 1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$.

30. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$.

Задача 3.4. Приведите квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием, укажите ее тип и линейное преобразование, приводящее ее к каноническому виду.

1. $x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.
2. $x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$.
3. $x_1x_2 + x_2x_3$.
4. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.
5. $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.
6. $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3$.
7. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.
8. $3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.
9. $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.
10. $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3$.
11. $3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.
12. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
13. $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$.
14. $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 6x_2x_3$.
15. $4x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_2x_3$.
16. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
17. $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$.
18. $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$.
19. $8x_1x_3 + 2x_2x_3$.
20. $x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3 - 8x_2x_3$.
21. $x_1^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$.
22. $x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.
23. $-2x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.
24. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.
25. $11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$.
26. $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 + 6x_2x_3$.
27. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$.
28. $-4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
29. $2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.
30. $x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2_1x_3$.

ГЛАВА 4 Векторная алгебра

Геометрическое изображение векторов в линейном пространстве R^3

Векторы линейного пространства R^3 изображаются направленными отрезками. Если задать прямоугольную декартову систему координат, то векторы

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

образующие в R^3 ортонормированный базис, изображаются взаимно перпендикулярными отрезками единичной длины, сонаправленными с координатными осями $0x$, $0y$ и $0z$ соответственно. Тогда вектор $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ пространства R^3, разложенный по этому базису, можно изображать отрезком $0\vec{M}$ с началом в начале координат и с концом в точке $M(x;\ y;\ z)$ (рис. 4.1). Координаты вектора $\vec{a}$ являются проекциями вектора $0\vec{M}$ или точки M на координатные оси.

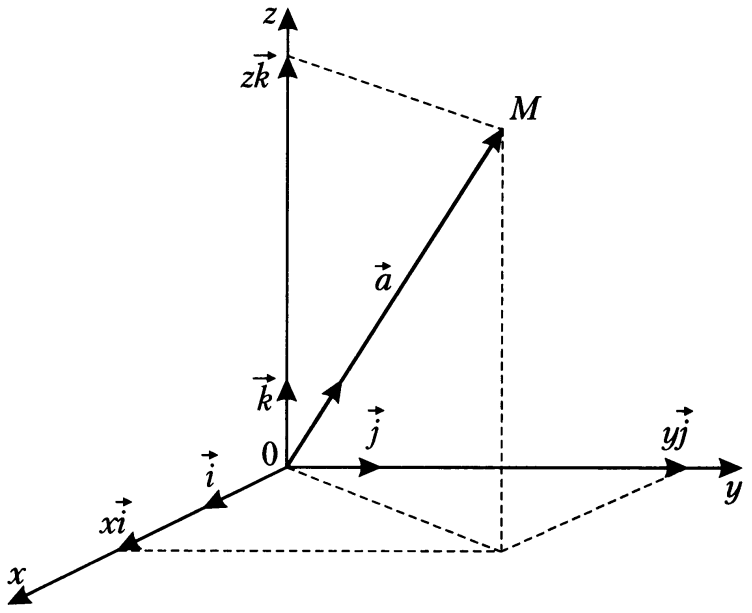


Рис. 4.1

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1 Для векторов из пространства R^3 часто используют обозначение $\vec{a} = \{x;\ y;\ z\}$, где x, y, z — координаты вектора.

Начало направленного отрезка, являющегося изображением вектора $\vec{a}$, может параллельным переносом помещаться в любую точку пространства. Проекции вектора на координатные оси при этом не изменятся. Если началом направленного отрезка является точка $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, а концом — точка $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то вектор $\vec{a} = \vec{AB}$ имеет координаты

$$\vec{a} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}.$$

Линейные операции с направленными отрезками (векторами)

Линейными операциями с направленными отрезками (векторами) являются следующие:

- Сложение (рис. 4.2):

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}.$$

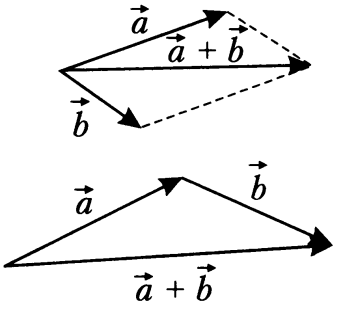


Рис. 4.2

- Вычитание (рис. 4.3):

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix}.$$

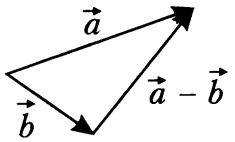


Рис. 4.3

- Умножение на число (рис. 4.4):

$$k\vec{a} = k\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \\ kz_1 \end{pmatrix}.$$

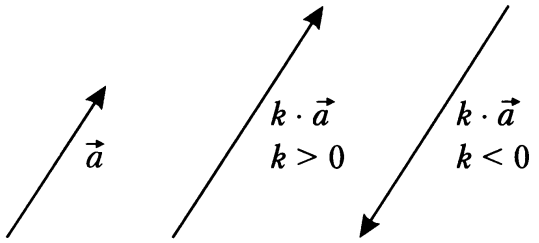


Рис. 4.4

Компланарные векторы. Правая и левая тройки векторов

Векторы

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{c} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

называются *линейно независимыми*, если $c_1\vec{a} + c_2\vec{b} + c_3\vec{c} = 0 \Leftrightarrow\ c_1 = c_2 = c_3 = 0$. В противном случае они линейно зависимы.

Три линейно зависимых вектора в пространстве R^3 называются *компланарными*. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда один из них, например $\vec{a}$, можно представить в виде $\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$, где α и β — числа.

Геометрически три линейно зависимых вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ изображаются направленными отрезками, параллельными одной плоскости.

Пример 4.1. Являются ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a} + \vec{b}$ компланарными?

Решение: из правила сложения направленных отрезков следует, что эти векторы параллельны одной плоскости. Следовательно, они компланарны.

Базис в R^3 образуют любые три линейно независимых (некомпланарных) вектора.

Тройка некомпланарных векторов называется *правой* (базисом с правой ориентацией), если кратчайший поворот от первого вектора ко второму происходит против часовой стрелки, когда смотришь из конца третьего вектора. Если же кратчайший поворот от первого вектора ко второму происходит по часовой стрелке, то тройка некомпланарных векторов называется *левой* (базисом с левой ориентацией). На рис. 4.5, *а* тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ правая, а на рис. 4.5, *б* — левая.

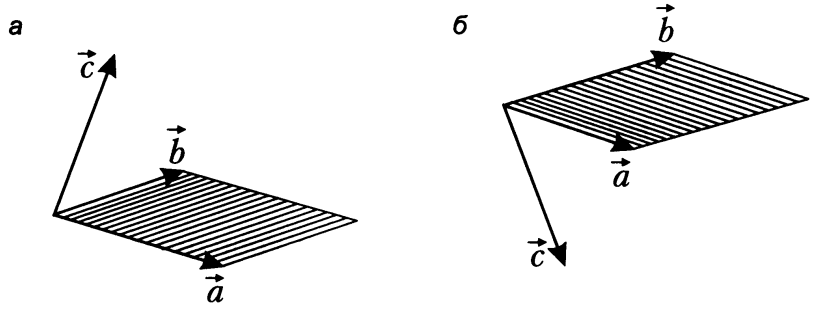


Рис. 4.5

Модуль вектора. Направляющие косинусы

Норма вектора

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

которая выражается через координаты вектора по формуле $\|\vec{a}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, равна длине направленного отрезка, являющегося изображением вектора.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2 Норму вектора пространства R^3 чаще называют *модулем вектора*. Для модуля вектора $\vec{a}$ используют обозначение $|\vec{a}|$.

Ориентация направленного отрезка в пространстве определяется углами α, β и γ, которые он образует с координатными осями $0x$, $0y$, $0z$ соответственно (рис. 4.6).

Косинусы этих углов $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими*. Направляющие косинусы вектора $\vec{a}$ определяются через его координаты по следующим формулам:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

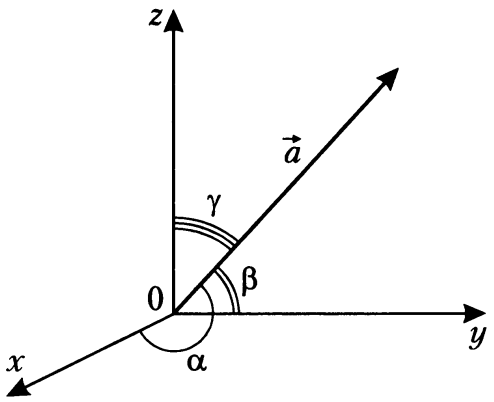


Рис. 4.6

Из формул для направляющих косинусов ясно, что если вектор образует с координатной осью острый угол, то соответствующая его координата положительна, а если этот угол больше 90°, то соответствующая координата отрицательна. Например, вектор

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2,7 \\ 5,2 \\ 1,25 \end{pmatrix}$$

образует с осями $0y$ и $0z$ острые углы, а с осью $0x$ — тупой.

Направляющие косинусы удовлетворяют соотношению

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Пример 4.2. Может ли вектор образовывать с координатными осями углы 60, 120 и 135°?

Решение: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2} = 1$. Да, может.

Коллинеарные векторы

Два линейно зависимых вектора в пространстве R^3 называются *коллинеарными*. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то один из них, например $\vec{a}$, можно представить в виде $\vec{a} = \alpha\vec{b}$, где α — число.

Коллинеарные векторы изображаются параллельными направленными отрезками. Для коллинеарных векторов используется такое же обозначение, как и для параллельных отрезков, $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Если заданы координаты векторов

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

то условие их коллинеарности можно записать в виде

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Пример 4.3. Выяснить, при каких значениях p и q векторы

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ q \\ -1 \end{pmatrix}$$

коллинеарны.

Решение: из условия коллинеарности векторов следует $\frac{p}{2} = \frac{1}{q} = \frac{-2}{-1} = 2$, или $\frac{p}{2} = 2$, $\frac{1}{q} = 2$, а тогда $p = 4$, $q = \frac{1}{2}$.

Ортом вектора называется вектор, сонаправленный с данным, модуль которого равен 1. Ортом вектора $\vec{a}$ будет вектор

$$\vec{e} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}.$$

Пример 4.4. Найти орт вектора

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Решение: поскольку модуль вектора $|\vec{a}| = \sqrt{1+4+4} = 3$, его орт имеет вид

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Скалярное произведение векторов и его свойства

Если

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

— векторы пространства R^3, то их скалярное произведение вычисляется по формуле

$$(\vec{a},\ \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

и подчиняется следующим законам:

1) $(\vec{a},\ \vec{b}) = (\vec{b},\ \vec{a})$;

2) $(\vec{a}+\vec{b},\ \vec{c}) = (\vec{a},\ \vec{c}) + (\vec{b},\ \vec{c})$;

3) $(\alpha\vec{a},\ \vec{b}) = (\vec{a},\ \alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a},\ \vec{b})$, α — число;

4) $(\vec{a},\ \vec{a}) \geq 0$;

5) если для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ скалярное произведение $(\vec{a},\ \vec{b}) = 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — ортогональные.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3 Для скалярного произведения в пространстве R^3 наряду с обозначением $(\vec{a},\ \vec{b})$ используется обозначение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Геометрический смысл скалярного произведения

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно вычислить по формуле

$$(\vec{a},\ \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha,$$

где α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Для скалярного умножения векторов справедливы формулы сокращенного умножения, например:

1. $(\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}-\vec{b}) = (\vec{a},\ \vec{a}) - (\vec{b},\ \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$.

2. $(\vec{a}\pm\vec{b},\ \vec{a}\pm\vec{b}) = (\vec{a},\ \vec{a}) \pm 2(\vec{a},\ \vec{b}) + (\vec{b},\ \vec{b}) = |\vec{a}|^2 \pm 2(\vec{a},\ \vec{b}) + |\vec{b}|^2$.

Пример 4.5. Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ и $\vec{c}_2 = -4\vec{a} + \vec{b}$, если

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -1 \\ -2{,}4 \end{pmatrix}.$$

Решение: $\vec{c}_1 = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -1 \\ -2{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8{,}5 \\ -9 \\ -5{,}2 \end{pmatrix}$; $\vec{c}_2 = -4\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -1 \\ -2{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6{,}5 \\ 11 \\ -6{,}4 \end{pmatrix}$;

$$(\vec{c}_1,\ \vec{c}_2) = 8{,}5 \cdot (-6{,}5) + (-9) \cdot 11 + (-5{,}2) \cdot (-6{,}4) = -120{,}97.$$

Пример 4.6. При каком значении m векторы $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} m \\ 4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ ортогональны?

Решение: $(\vec{a},\ \vec{b}) = 3\cdot m + (-2)\cdot 4 + 1\cdot 0{,}5 = 3m - 7{,}5$. Из условия ортогональности векторов $(\vec{a},\ \vec{b}) = 0$ следует: $3m - 7{,}5 = 0$, или $m = 2{,}5$.

Пример 4.7. Найти $|2\vec{a} + 3\vec{b}|$, если $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}8 \\ 4{,}1 \end{pmatrix}$.

Решение: $2\vec{a} + 3\vec{b} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}8 \\ 4{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + 3\cdot 0{,}6 \\ 2(-2) + 3\cdot 0{,}8 \\ 2\cdot 0{,}5 + 3\cdot 4{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}8 \\ -1{,}6 \\ 13{,}3 \end{pmatrix}$;

$$|2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{7{,}8^2 + 1{,}6^2 + 13{,}3^2} = \sqrt{240{,}29}.$$

Пример 4.8. Найти $(\vec{c}_1,\ \vec{c}_2)$, если $\vec{c}_1 = 5\vec{a} + \vec{b}$; $\vec{c}_2 = 4\vec{a} - \vec{b}$; $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, угол между векторами $\vec{a}\ \hat{}\ \vec{b} = 120^\circ$.

Решение:

$$(\vec{c}_1,\ \vec{c}_2) = (5\vec{a} + \vec{b},\ 4\vec{a} - \vec{b}) = 20(\vec{a},\ \vec{a}) + 4(\vec{b},\ \vec{a}) - 5(\vec{a},\ \vec{b}) - (\vec{b},\ \vec{b}) =$$

$$= 20|\vec{a}|^2 - (\vec{a},\ \vec{b}) - |\vec{b}|^2 = 20|\vec{a}|^2 - |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 120^\circ - |\vec{b}|^2 = 80 - 2\cdot 3\cdot(-0{,}5) - 9 = 74.$$

Пример 4.9. Вычислить $|\vec{c}|$, если $\vec{c} = 5\vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 4$, $\vec{p}\ \hat{}\ \vec{q} = 60^\circ$.

Решение:

$$|\vec{c}|^2 = (\vec{c},\ \vec{c}) = (5\vec{p} - 2\vec{q},\ 5\vec{p} - 2\vec{q}) = 25(\vec{p},\ \vec{p}) - 20(\vec{p},\ \vec{q}) + 4(\vec{q},\ \vec{q}) =$$

$$= 25|\vec{p}|^2 - 20|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cdot\cos(\vec{p}\ \hat{}\ \vec{q}) + 4|\vec{q}|^2 = 25\cdot 9 - 20\cdot 3\cdot 4\cdot\cos 60^\circ + 4\cdot 16 = 169.$$

Тогда $|\vec{c}| = \sqrt{169} = 13$.

Угол между векторами

Косинус угла α между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычисляется по формуле

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{a},\ \vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Пример 4.10. Найти внутренний угол A и внешний угол B в треугольнике ABC, если $A(2;\ -1{,}4)$, $B(4;\ 0{,}2)$ и $C(2;\ -3{,}1)$.

Решение: внутренний угол A в треугольнике ABC — это угол между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$. Внешний угол B в треугольнике ABC — это угол между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{BC}$ (рис. 4.7).

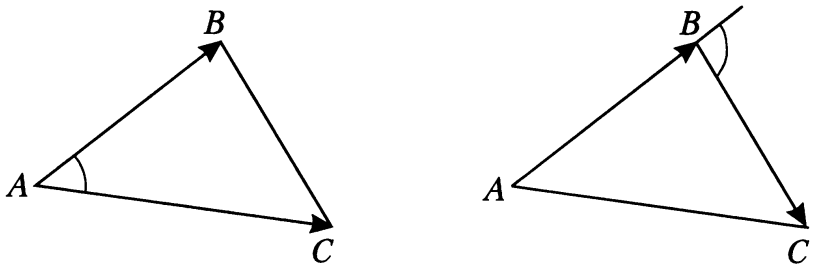


Рис. 4.7

Здесь

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 0+1 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ -3+1 \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ -3-0 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Считается, что угол определен, если найдена любая из тригонометрических функций этого угла, например косинус. Поэтому

$$\cos\angle A = \frac{(\vec{AB},\ \vec{AC})}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|} = \frac{2\cdot 0+1\cdot(-2)+(-2)\cdot(-3)}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{0^2+(-2)^2+(-3)^2}} =$$

$$= \frac{0-2+6}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{0+4+9}} = \frac{4}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{13}} = \frac{4}{3\sqrt{13}};$$

$$\cos\angle B = \frac{(\vec{AB},\ \vec{BC})}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{BC}|} = \frac{2\cdot(-2)+1\cdot(-3)+(-2)\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+(-1)^2}} =$$

$$= \frac{-4-3+2}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{4+9+1}} = \frac{-5}{3\sqrt{14}}.$$

Пример 4.11. Найти угол между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, если $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=6$, $\alpha = \vec{a}\ \hat{}\ \vec{b} = 60^\circ$.

Решение:

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{a}-\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2}{\sqrt{|\vec{a}|^2+2(\vec{a},\ \vec{b})+|\vec{b}|^2}\cdot\sqrt{|\vec{a}|^2-2(\vec{a},\ \vec{b})+|\vec{b}|^2}} =$$

$$= \frac{1^2-6^2}{\sqrt{1^2+2\cdot1\cdot6\cdot\cos 60^\circ+6^2}\cdot\sqrt{1^2-2\cdot1\cdot6\cdot\cos 60^\circ+6^2}} = \frac{-35}{\sqrt{43}\cdot\sqrt{31}}.$$

Проекция вектора на направление другого вектора

Проекция $\mathrm{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$ (рис. 4.8) вычисляется по формуле

$$\mathrm{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\cos\alpha = \frac{(\vec{a},\ \vec{b})}{|\vec{b}|}.$$

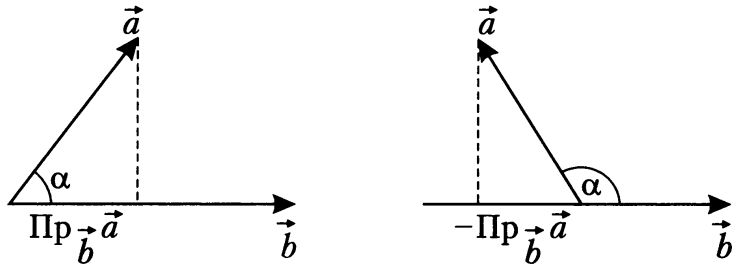


Рис. 4.8

Пример 4.12. Найти проекцию вектора $\vec{a}+2\vec{b}$ на вектор $\vec{MN}$, если

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}-4\\3\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-6\\2\end{pmatrix},\quad M(3;\ -2;\ -5),\quad N(3;\ 4;\ 3).$$

Решение: найдем векторы

$$\vec{a}+2\vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\3\\-1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\-6\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4+4\\3-12\\-1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-9\\3\end{pmatrix};\quad \vec{MN}=\begin{pmatrix}3-3\\4+2\\3+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\\8\end{pmatrix}.$$

Тогда $\text{Пр}_{\vec{MN}}(\vec{a}+2\vec{b})=\dfrac{(\vec{a}+2\vec{b},\ \vec{MN})}{|\vec{MN}|}=\dfrac{0\cdot 0+(-9)\cdot 6+3\cdot 8}{\sqrt{0^2+6^2+8^2}}=\dfrac{-30}{10}=-3.$

Работа, производимая силой по перемещению материальной точки

Пусть сила $\vec{f}$ приложена к точке M. Если ввести вектор перемещения $\vec{s}=\vec{MN}$ (рис. 4.9), то работа A, производимая силой $\vec{f}$ по перемещению точки M в положение N, вычисляется по формуле

$$A=(\vec{f},\ \vec{s}).$$

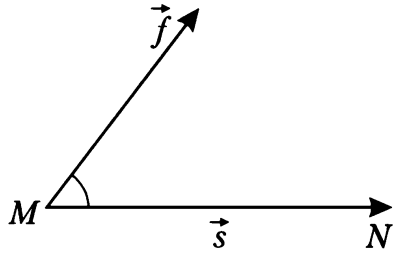


Рис. 4.9

Пример 4.13. Вычислить работу равнодействующей трех сил $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$, приложенных к точке $M(1;\ 1;\ 3)$, если точка под действием этих сил переходит в положение точки $N(1;\ 2;\ -3)$ и векторы сил равны:

$$\vec{f}_1=\begin{pmatrix}0{,}3\\-2{,}2\\-1{,}5\end{pmatrix};\quad \vec{f}_2=\begin{pmatrix}0{,}5\\4{,}4\\-2{,}1\end{pmatrix};\quad \vec{f}_3=\begin{pmatrix}0{,}7\\0{,}8\\3{,}6\end{pmatrix}.$$

Решение: вектор перемещения

$$\vec{s} = \vec{MN} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 2-1 \\ -3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Равнодействующей трех сил является их сумма:

$$\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 0{,}3+0{,}5+0{,}7 \\ -2{,}2+4{,}4+0{,}8 \\ -1{,}5-2{,}1+3{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда работа A, производимая силой $\vec{f}$, равна

$$A = (\vec{f},\ \vec{s}) = 1{,}5 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-6) = 3.$$

Векторное произведение векторов и его свойства

Векторным произведением векторов

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

пространства R^3 называется вектор, который обозначается $[\vec{a},\ \vec{b}]$ и координаты которого можно найти по формуле

$$[\vec{a},\ \vec{b}] = (y_1 z_2 - y_2 z_1)\vec{i} - (x_1 z_2 - x_2 z_1)\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}.$$

Правило вычисления координат векторного произведения можно записать в виде определителя, который следует вычислять, раскладывая его по элементам первой строки:

$$[\vec{a},\ \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Свойства векторного произведения

Векторное произведение подчиняется следующим свойствам:

1) $[\vec{a},\ \vec{b}] = -[\vec{b},\ \vec{a}]$;

2) $[\vec{a} + \vec{b},\ \vec{c}] = [\vec{a},\ \vec{c}] + [\vec{b},\ \vec{c}]$;

3) $[\alpha\vec{a},\ \vec{b}]=[\vec{a},\ \alpha\vec{b}]=\alpha[\vec{a},\ \vec{b}]$;

4) если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ ненулевые, то $[\vec{a},\ \vec{b}]=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}\|\vec{b}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4 Для векторного произведения наряду с обозначением $[\vec{a},\ \vec{b}]$ используется обозначение $\vec{a}\times\vec{b}$.

Пример 4.14. Вычислить $[\vec{c}_1,\ \vec{c}_2]$, если $\vec{c}_1=\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c}_2=-2\vec{a}+\vec{b}$,

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}\ \text{и}\ \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Решение:

$$\vec{c}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-3\\-3\end{pmatrix};\quad \vec{c}_2=-2\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix};$$

$$[\vec{a},\ \vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-4&-3&-3\\3&1&-4\end{vmatrix}=(12+3)\vec{i}-(16+9)\vec{j}+(-4+9)\vec{k}=\begin{pmatrix}15\\-25\\5\end{pmatrix}.$$

Геометрический смысл векторного произведения

Для вектора $\vec{c}=[\vec{a},\ \vec{b}]$ (рис. 4.10) справедливо следующее:

1) $\vec{c}\perp\vec{a}$; $\vec{c}\perp\vec{b}$;

2) $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha$, где α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — правая тройка векторов.

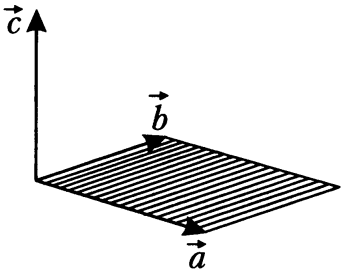


Рис. 4.10

Пример 4.15. Найти $|[\vec{c}_1,\ \vec{c}_2]|$, если

$$\vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b},\ \vec{c}_2=-\vec{a}+3\vec{b},\ |\vec{a}|=|\vec{b}|=2,\ \vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}=30^\circ.$$

Решение: в соответствии со свойствами векторного произведения

$$[\vec{c}_1,\ \vec{c}_2]=[4\vec{a}-2\vec{b},\ -\vec{a}+3\vec{b}]=-4[\vec{a},\ \vec{a}]+2[\vec{b},\ \vec{a}]+12[\vec{a},\ \vec{b}]-6[\vec{b},\ \vec{b}].$$

Так как $[\vec{a},\ \vec{a}]=0$, $[\vec{b},\ \vec{b}]=0$ и $[\vec{b},\ \vec{a}]=-[\vec{a},\ \vec{b}]$, получим:

$$\left|[\vec{c}_1,\ \vec{c}_2]\right|=\left|-2[\vec{a},\ \vec{b}]+12[\vec{a},\ \vec{b}]\right|=10\left|[\vec{a},\ \vec{b}]\right|=$$

$$=10|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})=10\cdot2\cdot2\cdot\sin30^\circ=20.$$

Вычисление площадей параллелограмма и треугольника

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна

$$S_{\text{пар}} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\alpha = |[\vec{a},\ \vec{b}]|.$$

Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна

$$S_{\text{тр}} = \frac{1}{2}|[\vec{a},\ \vec{b}]|.$$

Пример 4.16. Вычислить площадь треугольника ABC, если $A(2; -2; 3)$, $B(-3; -6; 0)$, $C(4; -3; -1)$.

Решение: треугольник ABC образован векторами

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим их векторное произведение:

$$\left[\vec{AB},\ \vec{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 13\vec{i} - 26\vec{j} + 13\vec{k} = \begin{pmatrix} 13 \\ -26 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Тогда площадь треугольника вычисляется по формуле

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\vec{AB},\ \vec{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{13^2 + 26^2 + 13^2} = \frac{13}{2}\sqrt{6}.$$

Вычисление момента силы

Если вектор силы $\vec{f}$ приложен к точке A, то момент $\vec{M}$ этой силы относительно точки O (рис. 4.11)

$$\vec{M} = \left[\vec{OA},\ \vec{f}\right].$$

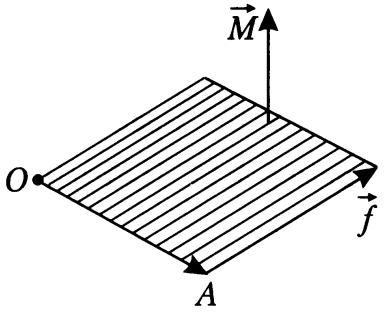


Рис. 4.11

Пример 4.17. Вычислить момент силы

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix},$$

приложенной к точке $A(3; -2; 7)$ относительно точки $O(-1; 2; 1)$.

Решение: определим координаты вектора

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

и вычислим момент силы, используя приведенную формулу:

$$\vec{M} = \left[\vec{OA},\ \vec{f}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -4 & 6 \\ -1 & 2 & 1{,}5 \end{vmatrix} = -18\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Нахождение вектора, ортогонального двум данным

Иногда в задачах требуется найти вектор, ортогональный двум данным. Если вектор $\vec{c}$ ортогонален двум векторам ($\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$), то этот вектор коллинеарен их векторному произведению, то есть $\vec{c} \,||\, [\vec{a},\ \vec{b}]$ (рис. 4.12).

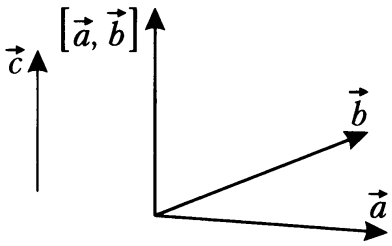


Рис. 4.12

Пример 4.18. Найти вектор $\vec{p}$, ортогональный векторам

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

для которого $(\vec{p},\ \vec{c}) = 3$, где

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение: вектор $\vec{p}$ коллинеарен векторному произведению $[\vec{a},\ \vec{b}]$, следовательно, $\vec{p} = \alpha \cdot [\vec{a},\ \vec{b}]$. Поскольку

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 23\vec{j} + 14\vec{k} = \begin{pmatrix} 4 \\ -23 \\ 14 \end{pmatrix},$$

то

$$\vec{p} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -23 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha \\ -23\alpha \\ 14\alpha \end{pmatrix}.$$

Так как $(\vec{p},\ \vec{c}) = 3$, то $4\alpha \cdot 1 - 23\alpha \cdot 1 + 14\alpha \cdot 1 = 3$, или $-5\alpha = 3$, $\alpha = -\frac{3}{5} = -0{,}6$. Теперь можно определить координаты вектора $\vec{p}$:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} -2{,}4 \\ 13{,}8 \\ -8{,}4 \end{pmatrix}.$$

Смешанное произведение векторов и его свойства

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ пространства R^3 называется число, которое обозначают $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ и которое вычисляется по формуле

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

где

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ представляет собой скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $[\vec{b}, \vec{c}]$ или скалярное произведение векторов $[\vec{a}, \vec{b}]$ и $\vec{c}$, то есть $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$.

Свойства смешанного произведения

Для смешанного произведения справедливы следующие свойства:

1. Смешанное произведение меняет знак, если меняются местами любые два вектора: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b} = -\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c} = -\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}$.
2. Смешанное произведение не меняется при круговой перестановке векторов: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}$.
3. Если векторы $\vec{a}$,$\vec{b}$ и $\vec{c}$ ненулевые, то $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0$ тогда и только тогда, когда векторы линейно зависимы (компланарны).
4. Если $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} > 0$, то тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — правая; если $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} < 0$, то тройка векторов $\vec{a}$,$\vec{b}$, $\vec{c}$ — левая.

Геометрический смысл смешанного произведения

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$,$\vec{b}$, $\vec{c}$, равен

$$V_{\text{пар}} = |\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|.$$

Объем тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a}$,$\vec{b}$, $\vec{c}$, равен

$$V_{\text{т}} = \frac{1}{6}|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|.$$

Пример 4.19. Лежат ли точки $A(2;\ -1;\ -3)$, $B(-4;\ 1;\ -2)$, $C(0;\ -6;\ 3)$ и $D(-12;\ -2;\ 5)$ в одной плоскости?

Решение: точки A, B, C и D лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ компланарны (рис. 4.13). Поэтому необходимо проверить, равно ли нулю смешанное произведение $\vec{AB}\,\vec{AC}\,\vec{AD}$:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad \vec{AD} = \begin{pmatrix} -14 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix};$$

$$\vec{AB}\,\vec{AC}\,\vec{AD} = \begin{vmatrix} -6 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 6 \\ -14 & -1 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (-6)(-8) \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 34 & -17 & 0 \\ 34 & -17 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, точки лежат в одной плоскости.

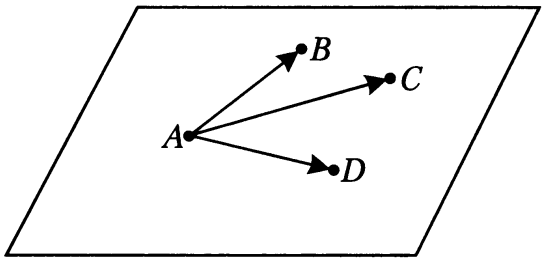


Рис. 4.13

Пример 4.20. Какую тройку образуют векторы $2\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$? Векторы $\vec{j}$, $\vec{i}$, $\vec{k}$?

Решение: так как тройка векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — правая, то смешанное произведение $\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k} > 0$. Значит, смешанное произведение $2\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k} = 2(\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}) > 0$, и тройка векторов $2\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — тоже правая. Тройка векторов $\vec{j}$, $\vec{i}$, $\vec{k}$ отличается от правой тройки $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ только порядком двух векторов. Следовательно, она левая.

Пример 4.21. Какую тройку образуют векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, если

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

Решение: вычислим смешанное произведение заданных векторов:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-5) = 10.$$

Смешанное произведение векторов положительно. Следовательно, векторы образуют правую тройку.

Пример 4.22. Найти объем тетраэдра $ABCD$ и высоту, проведенную из вершины B, если $A(1;\ -3;\ -5)$, $B(-1;\ 2;\ -4)$, $C(0;\ 0;\ -2)$, $D(-6;\ -1;\ -2)$.

Решение: тетраэдр $ABCD$ (рис. 4.14) построен на векторах

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix};\quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix};\quad \vec{AD} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

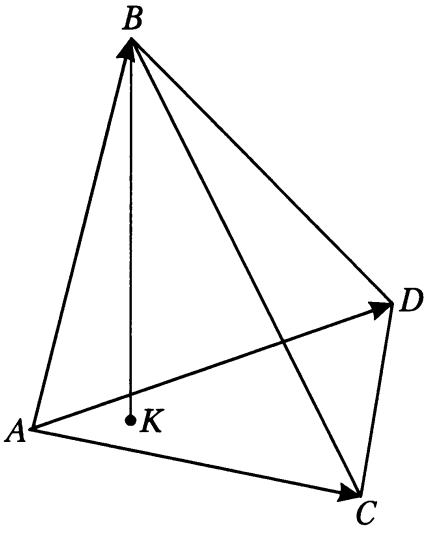


Рис. 4.14

Вычислим

$$\vec{AB}\,\vec{AC}\,\vec{AD} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ -7 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (-3) \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 5 & -12 & 0 \\ -1 & -13 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & -12 \\ -1 & -13 \end{vmatrix} = -65 - 12 = -77;$$

$$V_{\text{т}} = \frac{1}{6}\left|\vec{AB}\,\vec{AC}\,\vec{AD}\right| = \frac{77}{6}.$$

Чтобы найти высоту BK, воспользуемся формулой объема пирамиды

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_0 H,$$

где S_0 — площадь основания, то есть треугольника ACD, а $H = BK$ — высота, проведенная из вершины B на основание ACD.

Объем пирамиды вычислен: $V_{\text{пир}} = \frac{77}{6}$. Площадь основания $S_0 = \left|[\vec{AD},\ \vec{AC}]\right|$:

$$\left[\vec{AD},\ \vec{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -7 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 18\vec{j} - 19\vec{k}.$$

Поскольку $S_0 = \frac{1}{2}\left|[\vec{AD},\ \vec{AC}]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{9 + 324 + 361} = \frac{\sqrt{694}}{2}$, то высота BK равна $H = \frac{3V_{\text{пир}}}{S_0} = \frac{77}{\sqrt{694}}$.

Задачи для типовых расчетов

Задача 4.1. Найдите координаты, модуль и направляющие косинусы вектора $\vec{AB}$.

1. $A(1;1;3)$, $B(2;2;3)$.
2. $A(0;1;3)$, $B(1;2;3)$.
3. $A(0;1;-1)$, $B(1;2;0)$.
4. $A(2;2;3)$, $B(3;2;4)$.
5. $A(2;1;2)$, $B(3;2;2)$.
6. $A(0;1;1)$, $B(1;2;2)$.
7. $A(0;1;4)$, $B(1;2;4)$.
8. $A(1;1;1)$, $B(1;2;2)$.
9. $A(0;-4;3)$, $B(1;-3;4)$.
10. $A(1;2;1)$, $B(0;1;2)$.
11. $A(2;1;3)$, $B(3;2;4)$.
12. $A(0;1;1)$, $B(1;2;2)$.
13. $A(2;1;3)$, $B(3;2;4)$.
14. $A(2;0;7)$, $B(0;2;4)$.
15. $A(8;2;-5)$, $B(7;1;4)$.
16. $A(-2;1;3)$, $B(5;1;2)$.
17. $A(2;-1;4)$, $B(5;2;3)$.
18. $A(3;1;3)$, $B(2;2;-1)$.
19. $A(2;2;3)$, $B(3;1;3)$.
20. $A(0;7;3)$, $B(4;7;-5)$.
21. $A(4;-3;2)$, $B(1;2;3)$.
22. $A(5;1;1)$, $B(6;2;1)$.
23. $A(0;4;2)$, $B(3;6;-4)$.
24. $A(1;3;2)$, $B(4;6;5)$.
25. $A(0;-2;1)$, $B(2;0;3)$.
26. $A(2;-2;3)$, $B(2;1;7)$.
27. $A(1;3;3)$, $B(2;4;2)$.
28. $A(2;0;-1)$, $B(4;2;0)$.
29. $A(1;3;-2)$, $B(3;2;0)$.
30. $A(1;3;-1)$, $B(3;1;0)$.

Задача 4.2. Вычислите скалярное и векторное произведения векторов $\vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{c}_2 = -\vec{a} + 3\vec{b}$.

1. $\vec{a}\{-2;1;1\}$, $\vec{b}\{3;-2;4\}$.
2. $\vec{a}\{0;1;1\}$, $\vec{b}\{-1;-3;0\}$.
3. $\vec{a}\{-2;1;1\}$, $\vec{b}\{0;-2;-5\}$.
4. $\vec{a}\{0;1;1\}$, $\vec{b}\{3;-1;0\}$.
5. $\vec{a}\{0;-1;-1\}$, $\vec{b}\{1;-3;8\}$.
6. $\vec{a}\{0;-1;-1\}$, $\vec{b}\{2;0;2\}$.
7. $\vec{a}\{0;-1;-1\}$, $\vec{b}\{1;2;-1\}$.
8. $\vec{a}\{1;-1;0\}$, $\vec{b}\{-2;1;0\}$.
9. $\vec{a}\{-2;1;2\}$, $\vec{b}\{1;0;-1\}$.
10. $\vec{a}\{0;1;1\}$, $\vec{b}\{-3;-1;1\}$.
11. $\vec{a}\{-2;1;-2\}$, $\vec{b}\{-1;0;3\}$.
12. $\vec{a}\{1;-1;-1\}$, $\vec{b}\{-2;3;-1\}$.
13. $\vec{a}\{-1;0;-3\}$, $\vec{b}\left\{1;0;-\frac{2}{3}\right\}$.
14. $\vec{a}\{2;-1;3\}$, $\vec{b}\{0;1;1\}$.
15. $\vec{a}\{2;1;-2\}$, $\vec{b}\{-1;0;-2\}$.
16. $\vec{a}\{2;0;0\}$, $\vec{b}\{-3;1;1\}$.
17. $\vec{a}\{2;1;0\}$, $\vec{b}\{1;1;3\}$.
18. $\vec{a}\{1;-1;0\}$, $\vec{b}\{0;3;2\}$.
19. $\vec{a}\{2;1;-2\}$, $\vec{b}\{0;1;1\}$.
20. $\vec{a}\{1;0;-1\}$, $\vec{b}\{0;3;-1\}$.
21. $\vec{a}\{2;-1;4\}$, $\vec{b}\{-1;0;0\}$.
22. $\vec{a}\{-1;-1;-1\}$, $\vec{b}\{0;0;-1\}$.

23. $\vec{a}\left\{\frac{1}{2}; 1; -2\right\}, \vec{b}\left\{1; -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right\}$.
24. $\vec{a}\{1; 0; -1\}, \vec{b}\{-1; -3; 0\}$.
25. $\vec{a}\{1; 0; -1\}, \vec{b}\{-1; -3; 0\}$.
26. $\vec{a}\{5; 2; -2\}, \vec{b}\{3; 3; 4\}$.
27. $\vec{a}\{-1; -1; -1\}, \vec{b}\{0; 0; -1\}$.
28. $\vec{a}\{2; 2; 1\}, \vec{b}\{-2; -3; 0\}$.
29. $\vec{a}\{2; -4; 1\}, \vec{b}\{3; 1; -2\}$.
30. $\vec{a}\{0; 2; 1\}, \vec{b}\{2; 1; -3\}$.

Задача 4.3. Заданы вершины треугольника ABC. Вычислите его площадь и косинус внутреннего угла B.

1. $A(-1; 3; 3)$, $B(2; 2; 1)$, $C(0; 3; -2)$.
2. $A(2; 3; -1)$, $B(0; 4; 5)$, $C(-2; -2; 4)$.
3. $A(2; 1; 0)$, $B(3; 0; 3)$, $C(2; -3; 7)$.
4. $A(-3; 1; 3)$, $B(1; 7; 2)$, $C(7; 3; 3)$.
5. $A(0; 2; 1)$, $B(4; 0; 1)$, $C(3; -4; 2)$.
6. $A(0; -2; 1)$, $B(-2; 0; 2)$, $C(0; 1; 0)$.
7. $A(-1; 2; 1)$, $B(-4; -3; 1)$, $C(5; 4; 2)$.
8. $A(2; 3; -1)$, $B(-3; 4; 1)$, $C(-2; 2; -4)$.
9. $A(3; -4; 6)$, $B(1; -2; 6)$, $C(-3; 5; 1)$.
10. $A(4; -3; 2)$, $B(-1; 4; 3)$, $C(6; 3; -2)$.
11. $A(0; -3; 4)$, $B(1; 1; -2)$, $C(5; 0; 4)$.
12. $A(2; -1; 0)$, $B(-2; 1; 1)$, $C(2; 2; -1)$.
13. $A(-1; 7; 1)$, $B(3; -1; -2)$, $C(-5; 3; 1)$.
14. $A(1; 1; 0)$, $B(-2; 1; -3)$, $C(-2; -2; 0)$.
15. $A(2; 3; 4)$, $B(-4; 3; 0)$, $C(2; 6; 2)$.
16. $A(3; -2; 2)$, $B(0; -1; 3)$, $C(1; 2; 2)$.
17. $A(3; 4; -2)$, $B(2; 1; 5)$, $C(5; 2; -2)$.
18. $A(5; 0; 4)$, $B(4; -1; 1)$, $C(7; 0; 2)$.
19. $A(2; -2; 2)$, $B(3; 5; -7)$, $C(4; 8; 0)$.
20. $A(2; 2; 1)$, $B(1; 1; -2)$, $C(4; 0; -1)$.
21. $A(-1; 2; 7)$, $B(3; 1; 4)$, $C(4; 5; 1)$.
22. $A(2; 1; 0)$, $B(1; 1; -3)$, $C(4; 1; -2)$.
23. $A(2; 6; -4)$, $B(1; 3; -3)$, $C(4; 4; -4)$.
24. $A(-1; 2; 0)$, $B(1; 4; 5)$, $C(-4; 6; 3)$.
25. $A(2; -5; 2)$, $B(1; -3; 2)$, $C(2; -3; 0)$.
26. $A(-3; 1; -2)$, $B(2; 3; 2)$, $C(4; -1; 7)$.
27. $A(-6; 2; 2)$, $B(1; 3; -1)$, $C(0; -4; 2)$.
28. $A(2; 1; 7)$, $B(-3; 0; 3)$, $C(2; 4; 2)$.
29. $A(1; -1; 4)$, $B(3; 1; 2)$, $C(3; 2; 1)$.
30. $A(2; 1; 5)$, $B(1; 3; 2)$, $C(4; 5; 3)$.

Задача 4.4. Выясните, компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Если они не компланарны, то какую тройку (правую или левую) они образуют?

1. $\vec{a}\{-2; 1; 1\}$, $\vec{b}\{0; -2; -5\}$, $\vec{c}\{2; -1; -1\}$.
2. $\vec{a}\{0; 1; 1\}$, $\vec{b}\{0; 4; -2\}$, $\vec{c}\{2; 1; 0\}$.
3. $\vec{a}\{2; 0; 1\}$, $\vec{b}\{2; 0; -1\}$, $\vec{c}\{-2; -1; 4\}$.
4. $\vec{a}\{1; -1; -1\}$, $\vec{b}\{-2; 3; -1\}$, $\vec{c}\{0; 1; 0\}$.
5. $\vec{a}\{1; 1; 1\}$, $\vec{b}\{2; 3; 0\}$, $\vec{c}\{3; -1; -1\}$.
6. $\vec{a}\{-1; 0; -2\}$, $\vec{b}\{-3; 2; -1\}$, $\vec{c}\{2; 0; -2\}$.
7. $\vec{a}\{1; 0; 3\}$, $\vec{b}\{0; 1; 1\}$, $\vec{c}\{2; -1; 3\}$.
8. $\vec{a}\{-3; 1; 4\}$, $\vec{b}\{2; 0; 0\}$, $\vec{c}\{-3; 1; 1\}$.
9. $\vec{a}\{1; 0; -1\}$, $\vec{b}\{0; -1; -1\}$, $\vec{c}\{0; 0; -2\}$.
10. $\vec{a}\{-1; 0; -2\}$, $\vec{b}\{0; 0; -1\}$, $\vec{c}\{-1; 0; 3\}$.
11. $\vec{a}\{-1; 0; -2\}$, $\vec{b}\{1; 0; -4\}$, $\vec{c}\{2; 0; -2\}$.
12. $\vec{a}\{1; 0; -2\}$, $\vec{b}\{-3; 2; -1\}$, $\vec{c}\{4; 2; -3\}$.
13. $\vec{a}\{1; 2; 4\}$, $\vec{b}\{-3; 6; 4\}$, $\vec{c}\{3; -6; 4\}$.
14. $\vec{a}\{1; -1; 1\}$, $\vec{b}\{1; 1; 1\}$, $\vec{c}\{2; 3; 4\}$.
15. $\vec{a}\{5; 3; -1\}$, $\vec{b}\{1; -2; 3\}$, $\vec{c}\{2; 0; -4\}$.
16. $\vec{a}\{-3; 3; 3\}$, $\vec{b}\{2; 1; 1\}$, $\vec{c}\{19; 11; 17\}$.
17. $\vec{a}\{1; 6; 5\}$, $\vec{b}\{3; -2; 4\}$, $\vec{c}\{7; -18; 2\}$.
18. $\vec{a}\{7; -3; 2\}$, $\vec{b}\{3; -7; 8\}$, $\vec{c}\{1; -1; 1\}$.
19. $\vec{a}\{2; 1; -1\}$, $\vec{b}\{1; -4; 1\}$, $\vec{c}\{3; -2; 2\}$.
20. $\vec{a}\{3; 1; -1\}$, $\vec{b}\{-2; -1; 0\}$, $\vec{c}\{5; 2; -1\}$.
21. $\vec{a}\{3; 3; 1\}$, $\vec{b}\{1; -2; 1\}$, $\vec{c}\{1; 1; 1\}$.
22. $\vec{a}\{6; 3; 4\}$, $\vec{b}\{-1; -2; -1\}$, $\vec{c}\{2; 1; 2\}$.
23. $\vec{a}\{1; -2; 6\}$, $\vec{b}\{1; 0; 1\}$, $\vec{c}\{2; -6; 17\}$.
24. $\vec{a}\{1; -1; -3\}$, $\vec{b}\{3; 2; 1\}$, $\vec{c}\{2; 3; 4\}$.
25. $\vec{a}\{1; 5; 2\}$, $\vec{b}\{-1; 1; -1\}$, $\vec{c}\{1; 1; 1\}$.
26. $\vec{a}\{4; 3; 1\}$, $\vec{b}\{1; -2; 1\}$, $\vec{c}\{2; 2; 2\}$.
27. $\vec{a}\{7; 3; 4\}$, $\vec{b}\{-1; -2; -1\}$, $\vec{c}\{4; 2; 4\}$.

28. $\vec{a}\{4;\ 3;\ 1\}, \vec{b}\{6;\ 7;\ 4\}, \vec{c}\{2;\ 0;\ -1\}$.

29 $\vec{a}\{2;\ 3;\ 2\}, \vec{b}\{4;\ 7;\ 5\}, \vec{c}\{2;\ 0;\ -1\}$.

30 $\vec{a}\{-1;\ 2;\ 8\}, \vec{b}\{3;\ 7;\ -1\}, \vec{c}\{2;\ 1;\ 1\}$.

Задача 4.5

1. Вычислите проекцию вектора $\vec{a}=\{-3;\ 1;\ 3\}$ на направление вектора $\vec{AB}$, где $A(7;\ 3;\ -2)$, $B(8;\ 2;\ -2)$.
2. Найдите единичный вектор, перпендикулярный векторам $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.
3. При каком значении t векторы $\vec{a}=\{6;\ 0;\ 12\}$ и $\vec{b}=\{-8;\ 13;\ t\}$ будут взаимно перпендикулярны?
4. Докажите, что точки $A(1;\ -1;\ 1)$, $B(1;\ 3;\ 1)$, $C(4;\ 3;\ 1)$, $D(4;\ -1;\ 1)$ являются вершинами прямоугольника. Вычислите длину его диагоналей.
5. В прямоугольном треугольнике ABC углы при вершинах A и C равны 60 и 90° соответственно, а длина гипотенузы равна 2. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{AC}$ и $\vec{AB}+\vec{CB}$.
6. Даны точки $A(0;\ -3;\ 4)$, $B(2;\ 5;\ -1)$ и $C(-4;\ 2;\ -2)$. Вычислите скалярное произведение векторов $3\vec{AB}-2\vec{BC}$ и $\vec{CB}+\vec{BA}$.
7. В треугольнике ABC заданы координаты вершин $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$ и $C(3;\ -2;\ 1)$. Определите его внешний угол при вершине B.
8. Найдите координаты вектора $\vec{p}$, коллинеарного вектору $\vec{q}=\{3;\ -4;\ 0\}$, если известно, что вектор $\vec{p}$ образует с осью $0x$ тупой угол и $|\vec{p}|=10$.
9. Даны $A(1;\ 1;\ -1)$, $B(2;\ 4;\ -1)$ и $C(8;\ 3;\ -1)$ — координаты вершин треугольника ABC. Выясните, каким он является, прямоугольным, остроугольным или тупоугольным.
10. Проверьте, будет ли треугольник ABC с вершинами в точках $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(7;\ 10;\ 3)$ и $C(-1;\ 3;\ 1)$ прямоугольным.
11. Найдите работу силы $\vec{f}=\{4;\ -1;\ 1\}$ на перемещении $\vec{s}=\{5;\ 3;\ -2\}$.
12. Вычислите координаты вектора $\vec{c}$, ортогонального векторам $\vec{a}=2\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ и образующего тупой угол с осью $0y$, если $|\vec{c}|=\sqrt{7}$.
13. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{b}$ и $q=2\vec{b}+\vec{a}$, если $\vec{a}=-\vec{i}++3\vec{j}-7\vec{k}$ и $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$.
14. Найдите угол между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, если $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.
15. Даны векторы $\vec{a}=m\vec{i}+3\vec{i}+4\vec{k}$ и $\vec{b}=4\vec{i}+m\vec{j}-7\vec{k}$. При каком значении m векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны?
16. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{p}=\vec{a}-2\vec{b}$ и $\vec{q}=2\vec{a}+\vec{b}$, если $\vec{a}=2\vec{i}-$ $-5\vec{j}-7\vec{k}$, $\vec{b}=5\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$.

17. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\frac{\pi}{3}$. Найдите длину вектора $\vec{a}-2\vec{b}$, если $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1$.

18. При каком значении t векторы $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{a}-t\vec{b}$ будут взаимно перпендикулярны, если $\vec{a}=6\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-4\vec{k}$.

19. Заданы точки $A(-2; 4; 0)$, $B(1; 3; -5)$, $C(0; -1; 1)$ и вектор $\vec{a}=3\vec{i}+10j-5\vec{k}$. Вычислите скалярное произведение векторов $2\vec{AB}-3\vec{AC}$ и $\vec{a}+2\vec{AC}$.

20. Найдите координаты вектора $\vec{p}$, если он коллинеарен вектору $\vec{a}=\{1; 2; 1\}$, составляет острый угол с осью $0x$ и $|\vec{a}|=3$.

21. Найдите координаты вектора $\vec{p}$, если он коллинеарен вектору $\vec{a}=\{-4; 3; 2\}$ и скалярное произведение его на вектор $\vec{b}=\{-2; -3; 3\}$ равно 3.

22. Вычислите проекцию вектора $\vec{p}=\{2; -1; 2\}$ на ось, образующую равные острые углы с координатными осями.

23. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 150°, $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3$. Вычислите $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$.

24. Вычислите работу, которую совершает сила $\vec{f}=\{2; 1; 4\}$ по перемещению материальной точки $A(2; 1; -2)$ в положение $B(-1; -3; 6)$.

25. Вычислите проекцию вектора $\vec{a}=\{5; 2; 5\}$ на ось вектора $\vec{b}=\{2; -1; 2\}$.

26. Найдите скалярное произведение векторов $(3\vec{a}-2\vec{b})$ и $(5\vec{a}-6\vec{b})$, если $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=6$ и угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\frac{\pi}{3}$.

27. Вычислите проекцию вектора $\vec{a}=\{-3; 1; 3\}$ на направление вектора $\vec{AB}$, где $A(7; 3; -2)$, $B(8; 2; -2)$.

28. Заданы точки $A(-2; 4; 0)$, $B(1; 3; -5)$ и $C(0; -1; 1)$ и вектор $\vec{a}=3\vec{i}+10\vec{j}-5\vec{k}$. Вычислите скалярное произведение векторов $(2\vec{AB}-3\vec{CA})$ и $(\vec{a}+2\vec{AC})$.

29. Найти работу силы $\vec{f}$ на перемещении $\vec{s}$, если $|\vec{f}|=2, |\vec{s}|=5, \vec{f}\hat{}\vec{s}=\frac{\pi}{6}$.

30. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{a}-3\vec{b}$, если $\vec{a}=6\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ и $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}$.

Задача 4.6

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 30°, $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=1$. Найдите длину вектора $\vec{p}$, равного векторному произведению векторов $(7\vec{a}-2\vec{b})$ и $(2\vec{a}+3\vec{b})$.

2. Сила $\vec{f}=\{2; -4; 5\}$ приложена к точке $A(4; -2; 3)$. Определите момент этой силы относительно точки $B(3; 2; -1)$.

3. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $3\vec{a}-\vec{b}$ и $2\vec{b}-\vec{a}$, если $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 150°.

4. Найдите вектор $\vec{d}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a}=\{0;-1;2\}$ и $\vec{b}=\{1;3;3\}$ и его скалярное произведение на вектор $\vec{p}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ равно 8.
5. Найдите длину высоты треугольника ABC, опущенной из вершины C на сторону AB, если $A(2;3;4)$, $B(4;3;2)$ и $C(1;1;1)$.
6. Даны векторы $\vec{a}=\{3;1;-1\}$, $\vec{b}=\{-2;1;4\}$. Вычислите векторное произведение векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}-2\vec{i}$.
7. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $(\vec{a}+3\vec{b})$ и $(3\vec{a}+\vec{b})$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30°.
8. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\{2;-1;5\}$ и $\vec{b}=\{2;3;6\}$ как на сторонах.
9. Найдите вектор $\vec{c}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a}=(2;3;-1)$ и $\vec{b}=(1;-2;3)$ и скалярное произведение его на вектор $\vec{p}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ равно −6.
10. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $(\vec{a}+3\vec{b})$ и $(3\vec{a}+\vec{b})$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30°.
11. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\{2;-1;5\}$ и $\vec{b}=\{2;3;6\}$ как на сторонах.
12. Найдите орт $\vec{e}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}=\{1;-1;0\}$ и $\vec{b}=\{2;1;-1\}$.
13. Вычислите векторное произведение векторов $(4\vec{b}-\vec{a})$ и $(2\vec{b}+3\vec{a})$, если $\vec{a}=-\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-7\vec{j}+\vec{k}$.
14. Найдите единичный вектор, перпендикулярный векторам $\vec{a}=\{3;-1;-1\}$ и $\vec{b}=\{0;2;1\}$.
15. Найдите единичный вектор, перпендикулярный векторам $\vec{a}=\{3;-1;-1\}$ и $\vec{b}=2\vec{j}+\vec{k}$.
16. Заданы точки $A(0;2;0)$, $B(3;0;-4)$, $C(2;1;1)$ и $D(-1;-1;-1)$. Вычислите векторное произведение векторов $(\vec{AB}-3\vec{BC})$ и $(\vec{CD}+\vec{AC})$.
17. Найдите вектор $\vec{d}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a}=\{2;-3;1\}$ и $\vec{b}=\{1;-2;3\}$ и что его скалярное произведение на вектор $\vec{p}=\vec{i}+2\vec{j}+7\vec{k}$ равно 10.
18. Заданы точки $A(1;0;-3)$, $B(-2;1;-1)$, $C(2;-1;0)$ и $D(3;-3;3)$. Найдите векторное произведение векторов $(\vec{AB}+3\vec{BC})$ и $(\vec{DC}-\vec{AC})$.
19. Найдите орт $\vec{e}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}=\{2;0;-3\}$ и $\vec{b}=\{3;-1;-1\}$.
20. Раскройте скобки и упростите выражение $(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{c}-\vec{a})+(\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{a}+\vec{b})$.
21. Раскройте скобки и упростите выражение $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{c}+(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{b}+$ $+(\vec{b}-\vec{c})\times\vec{a}$.

22. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=\vec{p}+4\vec{q}$, $\vec{b}=2\vec{p}-\vec{q}$, $|\vec{p}|=7$ и $|\vec{q}|=2$, а угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен 30°.
23. Раскройте скобки и упростите выражение $\vec{i}\times(\vec{j}+\vec{k})-\vec{j}\times(\vec{i}+\vec{k})+\vec{k}\times(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$.
24. Раскройте скобки и упростите выражение $2\vec{i}\times(\vec{j}\times\vec{k})+3\vec{j}\times(\vec{i}\times\vec{k})+4\vec{k}\times$ $\times(\vec{i}\times\vec{j})$.
25. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $2\vec{a}+3\vec{b}$ и $\vec{a}-2\vec{b}$, если $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=5$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60°.
26. При каких значениях α и β векторы $2\vec{i}-\alpha\vec{j}+4\vec{k}$ и $\beta\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$ коллинеарны?
27. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $2\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{a}+\vec{b}$, если $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{b}=-\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$.
28. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}-3\vec{b}$ и $4\vec{a}+\vec{b}$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30°.
29. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}+\vec{b}$ и $2\vec{a}-3\vec{b}$, если $\vec{a}=3i+\vec{j}-2\vec{k}$ и $\vec{b}=-2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.
30. Найдите вектор $\vec{c}$, если известно, что он ортогонален векторам $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=4\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ и что скалярное произведение его на вектор $\vec{p}=-3\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$ равно 3.

Задача 4.7

1. Лежат ли точки $A(5;7;-2)$, $B(3;1;-1)$, $C(9;4;-4)$ и $D(1;5;0)$ в одной плоскости?
2. При каком значении k точки $A(1;0;3)$, $B(-1;3;4)$, $C(1;2;1)$ и $D(k;2;5)$ лежат в одной плоскости?
3. Вычислите объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(0;0;1)$, $B(2;3;5)$, $C(6;2;3)$, $D(3;7;2)$.
4. Вычислите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q}+\vec{r}$, $\vec{b}=2\vec{p}+\vec{q}-3\vec{r}$, $\vec{c}=\vec{p}+2\vec{q}+\vec{r}$, где $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ — взаимно перпендикулярные орты.
5. Вычислите объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(0;0;1)$, $B(2;3;5)$, $C(6;2;3)$ и $D(3;7;2)$.
6. Найдите объем параллелепипеда с вершинами в точках $A(2;2;2)$, $B(4;3;3)$, $C(4;5;4)$ и $D(5;5;6)$.
7. При каком значении m векторы $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+m\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{j}+\vec{i}+(m+1)\vec{k}$ и $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}+m\vec{k}$ компланарны?
8. Лежат ли точки $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$ и $D(-5;-5;3)$ в одной плоскости?
9. Заданы точки $A(1;2;-2)$, $B(3;2;-1)$, $C(0;1;-2)$ и $D(3;2;3)$. Найдите объем тетраэдра $ABCD$.

10. Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ и $\vec{AD}$, если $A(5; 2; 0)$, $B(2; 5; 0)$, $C(1; 2; 4)$ и $D(-1; 1; 1)$.
11. Будут ли компланарны векторы $\vec{a} = \{1; -2; -2\}$, $\vec{b} = \{-2; -1; -2\}$, $\vec{c} = \{0; -5; -6\}$?
12. Проверьте, лежат ли точки $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$ и $D(7; 5; -3)$ в одной плоскости.
13. Проверьте, лежат ли в одной плоскости точки с координатами $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 1)$, $C(3; 2; 1)$ и $D(5; 9; 8)$.
14. Найдите объем тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a} = \{1; 2; 2\}$, $\vec{b} = \{2; 1; 2\}$, $\vec{c} = \{4; 8; 9\}$.
15. Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = \{6; 3; 4\}$, $\vec{b} = \{-1; -2; -1\}$, $\vec{c} = \{2; 1; 2\}$.
16. Найдите объем тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a} = \{-1; -2; -1\}$, $\vec{b} = \{4; 3; 6\}$ и $\vec{c} = \{2; 1; 2\}$.
17. Какую тройку (левую или правую) образуют векторы $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ и $\vec{AD}$, если $A(1; 1; -1)$, $B(2; 3; 1)$, $C(3; 2; 1)$ и $D(5; 9; 8)$?
18. Вычислите объем тетраэдра с вершинами в точках $A(1; 3; 6)$, $B(2; 2; 1)$, $C(-1; 0; 1)$, $D(-4; 6; -3)$.
19. Проверьте, лежат ли точки $A(5; 2; 0)$, $B(2; 5; 0)$, $C(1; 2; 4)$ и $D(-1; 1; 1)$ в одной плоскости.
20. Компланарны ли векторы $\vec{a} = \{3; 7; 2\}$, $\vec{b} = \{-2; 0; -1\}$, $\vec{c} = \{2; 2; 1\}$?
21. Проверьте, лежат ли точки $A(5; 2; 0)$, $B(2; 5; 0)$, $C(1; 2; 4)$ и $D(-1; 1; 1)$ в одной плоскости.
22. Вычислите объем тетраэдра с вершинами в точках $A(2; -1; -2)$, $B(1; 2; 1)$, $C(5; 0; -6)$ и $D(-10; 9; -7)$.
23. Проверьте, лежат ли точки $A(-1; 2; 1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(1; 2; -1)$ и $D(2; 1; 3)$ в одной плоскости.
24. Заданы точки $A(1; 0; 1)$, $B(2; 3; 5)$, $C(6; 2; 3)$ и $D(3; 4; 2)$. Найдите объем тетраэдра $ABCD$.
25. Заданы точки $A(1; 4; 0)$, $B(-4; 1; 1)$, $C(1; -2; -21)$ и $D(-5; -5; 3)$. Проверьте, лежат ли они в одной плоскости.
26. Заданы точки $A(0; 0; 1)$, $B(2; 3; 5)$, $C(6; 2; 3)$ и $D(3; 7; 2)$. Найдите объем тетраэдра $ABCD$.
27. Вычислите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ и $\vec{AD}$, если $A(1; 2; -2)$, $B(-1; 4; 0)$, $C(4; 1; 1)$ и $D(5; 5; -3)$.
28. Проверьте, лежат ли точки $A(-1; 2; -2)$, $B(-1; -4; 0)$, $C(4; -1; -1)$ и $D(2; 5; -3)$ в одной плоскости.
29. Вычислите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = \{6; 3; 4\}$, $\vec{b} = \{-1; -2; -1\}$ и $\vec{c} = \{2; 1; 2\}$.
30. При каком значении m векторы $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + m\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{j} + m\vec{i} + \vec{k}$ и $\vec{c} = 2\vec{i} + m^2\vec{j} + 4\vec{k}$ компланарны?

ГЛАВА 5 Аналитическая геометрия на плоскости

Метод координат на плоскости

Если ввести на плоскости прямоугольную декартову систему координат x, y с началом в некоторой точке 0 (рис. 5.1), то точка M в этой системе координат задается ее координатами, то есть $M(x;\ y)$. Вектор

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

на плоскости представляется в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$, где x, y — его координаты в стандартном ортонормированном базисе

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

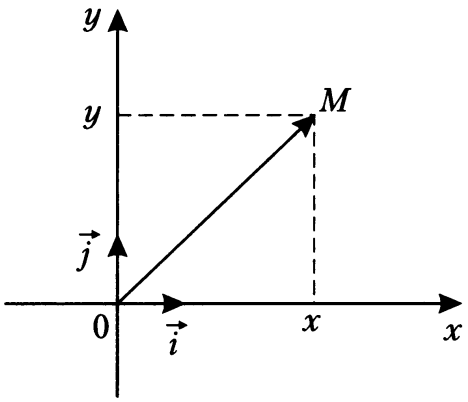


Рис. 5.1

Расстояние r между точками $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$ определяется по формуле

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Координаты точки $M_0(x_0;\ y_0)$, делящей отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = \dfrac{M_1M_0}{M_0M_2}$, можно найти по формулам

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

В частном случае для координат x_0 и y_0 середины отрезка M_1M_2 справедливы формулы

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Линии на плоскости. Прямая на плоскости

Алгебраическое уравнение $f(x,\ y) = 0$ является *уравнением линии* Ф на плоскости, если выполнены следующие условия:

1. Для любой точки $M_0(x_0;\ y_0) \in \Phi$ справедливо равенство $f(x_0,\ y_0) = 0$.
2. Для любого решения x_0, y_0 уравнения $f(x,\ y) = 0$ точка $M_0(x_0;\ y_0) \in \Phi$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1 Из определения следует, что линия на плоскости может быть задана алгебраическим уравнением, связывающим координаты тех и только тех точек, которые принадлежат этой линии.

Уравнения прямой на плоскости

Прямая на плоскости может быть задана следующими уравнениями:

- **Общее уравнение прямой** $Ax + By + C = 0$. Вектор

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

— *нормальный вектор прямой* (любой ненулевой вектор, перпендикулярный прямой) (рис. 5.2).

- **Уравнение прямой с угловым коэффициентом** $y = kx + b$, где $k = \operatorname{tg}\alpha$, α — угол между прямой и осью $0x$; b — ордината точки пересечения прямой с осью $0y$ (рис. 5.3).

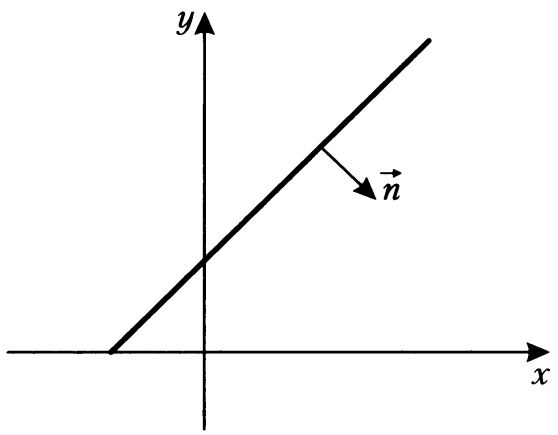


Рис. 5.2

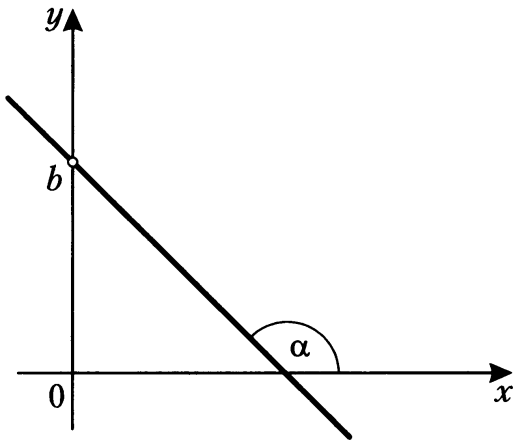


Рис. 5.3

- **Уравнение прямой с нормальным вектором** $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, где $M_0(x_0;\ y_0)$ — точка, принадлежащая прямой,

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

— нормальный вектор прямой (рис. 5.4).

- **Каноническое уравнение прямой** $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n}$, где $M_0(x_0;\ y_0)$ — точка, на прямой; $\vec{s} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ — *направляющий вектор прямой* (любой ненулевой вектор, параллельный прямой) (рис. 5.5).

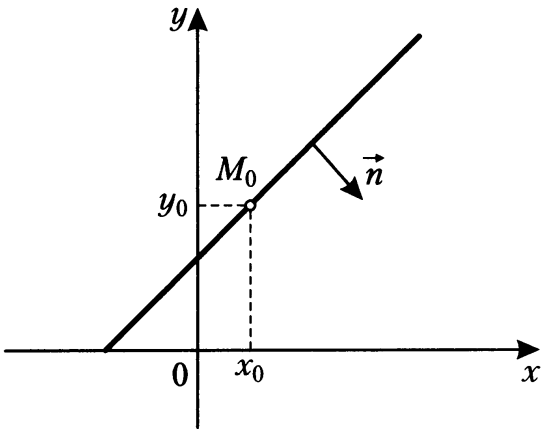


Рис. 5.4

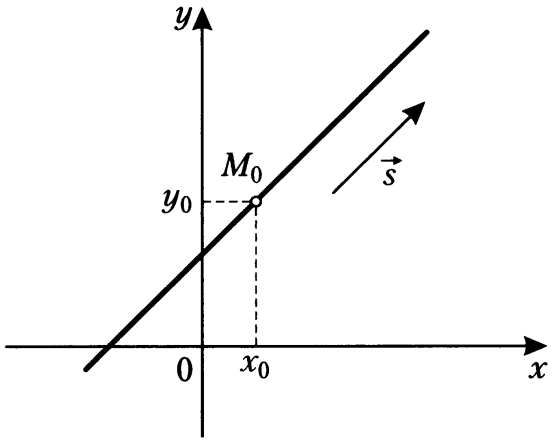


Рис. 5.5

- **Уравнение прямой в отрезках** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, где a — абсцисса точки пересечения прямой с осью $0x$; b — ордината точки пересечения прямой с осью $0y$ (рис. 5.6).
- **Нормальное уравнение прямой** $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$, где $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ — координаты нормального вектора прямой, направленного из начала координат в сторону прямой; p — расстояние от начала координат до прямой (рис. 5.7).

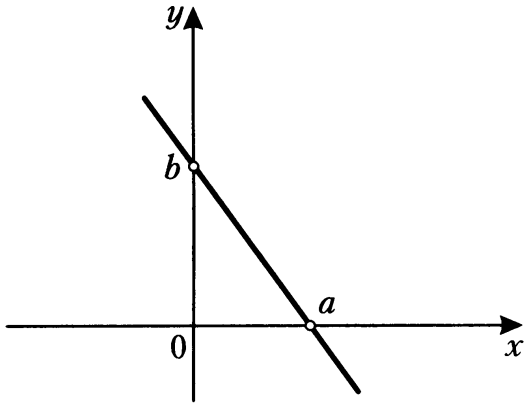


Рис. 5.6

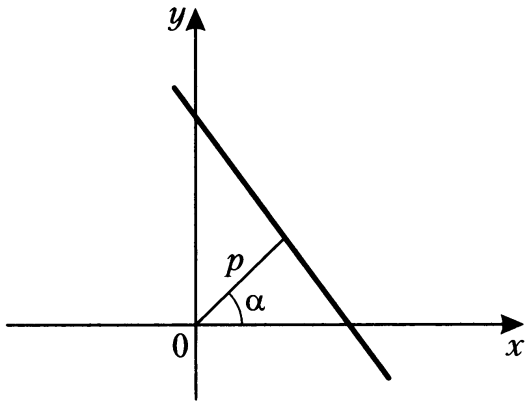


Рис. 5.7

Угол между прямыми

Если k_1 и k_2 — угловые коэффициенты двух прямых, то угол φ между ними определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}.$$

Если прямые заданы общими уравнениями $Ax_1 + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, то угол между ними можно определять как угол между их нормальными векторами

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}.$$

Если прямые заданы каноническими уравнениями $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}$ и $\frac{x-x_2}{m_2}=$ $=\frac{y-y_2}{n_2}$, то угол между ними можно определять как угол между их направляющими векторами

$$\vec{s}_1=\begin{pmatrix}m_1\\n_1\end{pmatrix} \text{ и } \vec{s}_2=\begin{pmatrix}m_2\\n_2\end{pmatrix}.$$

Точка пересечения прямых

Точку пересечения двух прямых, заданных общими уравнениями $A_1x+B_1y+C=$ $=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, находят, решая систему

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0;\\A_2x+B_2y+C_2=0.\end{cases}$$

Расстояние от точки до прямой

Если прямая задана нормальным уравнением $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$, то расстояние r от точки $M_0(x_0;y_0)$ до этой прямой равно

$$r=|x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p|.$$

Общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$ приводится к нормальному виду умножением его на выражение $\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, в котором знак выбирается противоположным знаку параметра C в общем уравнении прямой.

Пример 5.1. Написать уравнения высоты, проведенной из вершины A, и медианы, проведенной из вершины B, треугольника ABC, если заданы его вершины $A(-1;\ -5)$, $B(3;\ -1)$ и $C(1;\ -2)$ (рис. 5.8).

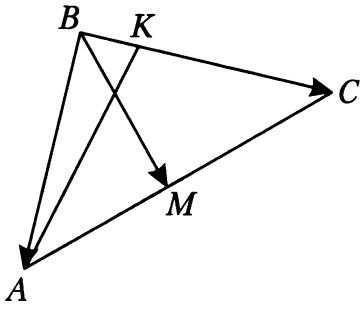


Рис. 5.8

Решение: для высоты AK используем уравнение прямой с нормальным вектором, где в качестве нормального вектора $\vec{n}$ возьмем вектор $\vec{BC}$. Для медианы BM используем каноническое уравнение прямой, где в качестве направляющего вектора $\vec{s}$ возьмем вектор $\vec{BM}$.

Так как $\vec{BC}=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$, а точка $A(-1;\ -5)$ лежит на высоте AK, то ее уравнение будет иметь вид $-2(x+1)-(y+5)=0$, или, раскрывая скобки, $-2x-y-7=0$, или $2x+y+7=0$.

Точка M является серединой отрезка AC. Ее координаты определяются по формуле

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{-1+1}{2} = 0; \\ y_M = \dfrac{-5-2}{2} = -3{,}5, \end{cases}$$

то есть $M(0;\ -3{,}5)$. Теперь можно вычислить координаты вектора

$$\vec{BM} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ -3{,}5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}.$$

Подставляя его координаты и координаты точки $B(3;\ -1)$ в каноническое уравнение $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n}$, получим уравнение медианы BM: $\dfrac{x-3}{-3} = \dfrac{y+1}{-2{,}5}$, или $-2{,}5x + 7{,}5 = -3y - 3$, или $-2{,}5x + 3y + 10{,}5 = 0$.

Пример 5.2. Написать уравнение сторон квадрата $ABCD$ (рис. 5.9), если заданы координаты двух его смежных вершин $A(1;\ -1)$ и $B(-2;\ 3)$.

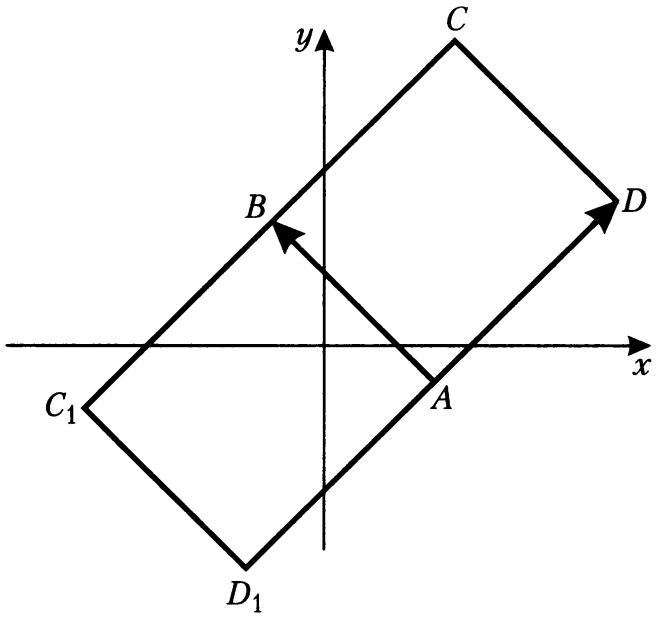


Рис. 5.9

Решение: уравнение стороны AB запишем, используя каноническое уравнение прямой $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n}$ и выбирая в качестве направляющего вектора $\vec{s} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ вектор $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Подставляя в уравнение координаты точки A вместо чисел x_0 и y_0, получим $\dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y+1}{4}$, или $4x - 4 = -3y - 3$, или $4x + 3y - 1 = 0$.

Уравнения сторон AD и BC получим, используя уравнение прямой с нормальным вектором $A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0$, где нормальным вектором является тот же вектор $\vec{AB}$.

Для стороны AD подставляем в это уравнение вместо x_0 и y_0 координаты точки A: $-3(x-1)+4(y+1)=0$, или $3x-4y-7=0$.

Для стороны BC подставляем координаты точки B: $-3(x+2)+4(y-3)=0$, или $3x-4y+18=0$.

Каждый из векторов, $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$, ортогонален вектору $\vec{AB}$, что легко проверить, вычислив их скалярные произведения. На рис. 5.9 вектор $\vec{AD}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, так как он составляет с координатными осями острые углы.

Теперь можно найти координаты точки D, прибавляя к координатам точки A координаты вектора $\vec{AD}$: $x_D=1+4=5$, $y_D=-1+3=2$. Следовательно, $D(5;\ 2)$.

Для стороны CD можно использовать уравнение прямой с нормальным вектором, поскольку известны принадлежащая ей точка $D(5;\ 2)$ и нормальный вектор $\vec{AD}$. Подставляя их в это уравнение, получим $4(x-5)+3(y-2)=0$ и, раскрыв скобки, $4x+3y-26=0$.

Теперь можно использовать второй, ортогональный к вектору $\vec{AB}$, вектор $\vec{AD_1}=\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$. Прибавляя его координаты к координатам точки A, найдем координаты точки D_1, симметричной точке D относительно стороны AB. Легко проверить, что координаты точки $D_1(-3;\ -4)$. Следовательно, условиям задачи удовлетворяет и квадрат ABC_1D_1, симметричный квадрату $ABCD$ относительно стороны AB. Уравнение стороны C_1D_1 имеет вид $4(x+3)+3(y+4)=0$, или $4x+3y+24=0$.

Пример 5.3. Написать уравнение прямой, которая проходит через точку $P(8;\ 6)$ и образует с координатными осями треугольник площадью 12 квадратных единиц (рис. 5.10).

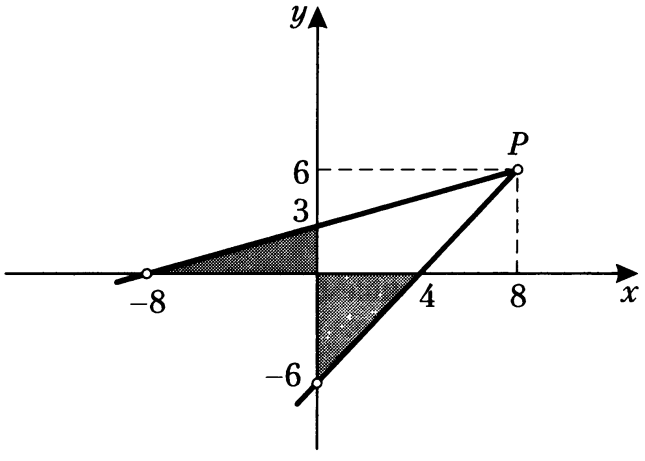


Рис. 5.10

Решение: для уравнения искомой прямой следует использовать уравнение прямой в отрезках $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Так как точка $P(8;\ 6)$ принадлежит этой прямой, то, подставляя ее координаты, получим $\frac{8}{a}+\frac{6}{b}=1$, или $8b+6a=ab$.

Из условий задачи площадь треугольника, которая вычисляется по формуле $S=\frac{1}{2}|a||b|$, равна 12. Тогда $|a||b|=24$, и необходимо рассмотреть два случая: $ab=24$ и $ab=-24$.

1. Если $ab=24$, $b=\frac{24}{a}$, то $8\frac{24}{a}+6a=24$. Сокращая последнее равенство на 6 и умножая его на a, получим квадратное уравнение $a^2-4a+32=0$, которое не имеет вещественных корней, так как его дискриминант отрицателен.
2. Если $ab=-24$, $b=-\frac{24}{a}$, то $8\frac{-24}{a}+6a=-24$, или $a^2+4a-32=0$. Решения этого уравнения $a_1=-8$ и $a_2=4$. Поскольку $ab=-24$, то $b_1=3$ и $b_2=-6$. Подставляя эти значения a и b в уравнение прямой в отрезках, получим:

$$\frac{x}{-8}+\frac{y}{3}=1;\quad 3x-8y+24=0;$$

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{-6}=1,\quad 3x-2y-12=0.$$

Пример 5.4. Вычислить расстояние от точки $M(5;\ 4)$ до прямой, проходящей через точки $A(1;\ -2)$ и $B(0;\ 3)$.

Решение: для прямой AB направляющий вектор $\vec{s}=\vec{AB}=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$, и ее каноническое уравнение имеет вид $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{5}$. Преобразуем его к виду $5x+y-3=0$, а затем к нормальному виду $\frac{5x}{\sqrt{26}}+\frac{y}{\sqrt{26}}-\frac{3}{\sqrt{26}}=0$. Тогда расстояние от точки M до прямой определяется из соотношения

$$r=\left|\frac{25}{\sqrt{26}}+\frac{4}{\sqrt{26}}-\frac{3}{\sqrt{26}}\right|=\frac{26}{\sqrt{26}}=\sqrt{26}.$$

Кривые второго порядка

В прямоугольной декартовой системе координат $x0y$ кривая второго порядка задается уравнением второй степени

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \tag{5.1}$$

где A, B, C, D, E, F — заданные действительные числа. При этом числа A, B, C одновременно не равны нулю. Уравнение (5.1) называется *общим уравнением кривой второго порядка*. Если нет точек $(x;\ y)$ с действительными координатами, удовлетворяющих уравнению (5.1), то говорят, что это уравнение определяет мнимую кривую второго порядка. Уравнение $x^2+y^2=-1$ может служить примером уравнения второй степени, определяющего мнимую кривую, в данном случае мнимую окружность.

Эллипс

Эллипсом называется множество точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (рис. 5.11).

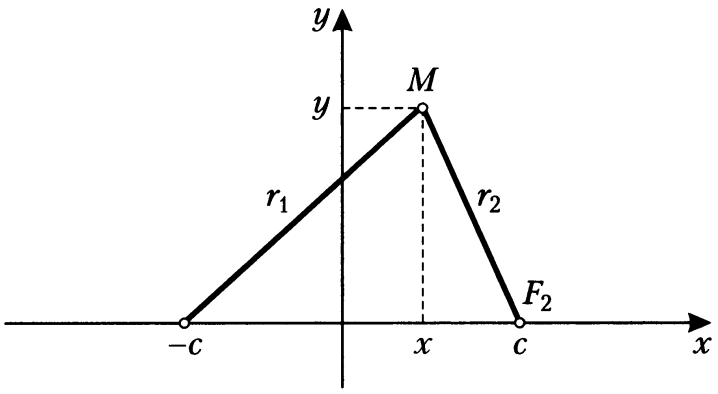


Рис. 5.11

Если известны расстояние между фокусами F_1 и F_2 эллипса, равное $2c$, и сумма расстояний от любой точки на эллипсе до фокусов, равная $2a$, то в прямоугольной декартовой системе координат, где ось $0x$ проходит через фокусы F_1 и F_2 (от F_1 к F_2), а начало координат находится посередине между ними, уравнение эллипса имеет вид, который называется *каноническим*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где числа a и b называются *полуосями* эллипса; $a,\ b>0,\ b^2=a^2-c^2$.

Вид кривой показан на рис. 5.12.

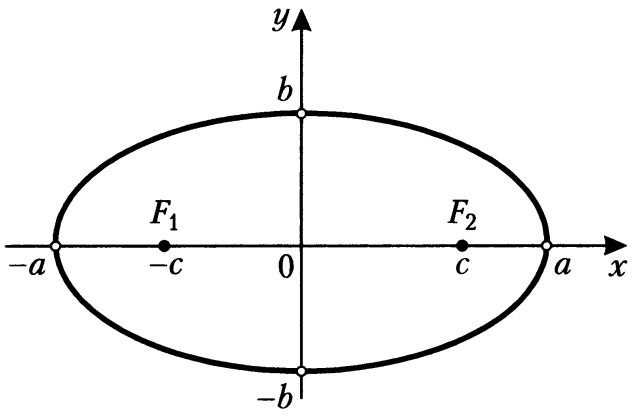


Рис. 5.12

При $a=b$ эллипс представляет собой окружность радиусом a с центром в начале координат. Уравнение этой окружности

$$x^2+y^2=a^2.$$

Эксцентриситетом эллипса называется число $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Для эксцентриситета эллипса справедливо неравенство $0 < \varepsilon < 1$, поскольку из определения эллипса следует, что $0 < c < a$. Эксцентриситет окружности $\varepsilon = 0$, поскольку для окружности $a = b$ и $c = 0$.

Учитывая то, что эксцентриситет окружности $\varepsilon = 0$, можно сделать вывод, что чем больше эксцентриситет эллипса, тем больше он вытянут относительно одной из осей симметрии.

Гипербола

Гиперболой называется множество точек, разность расстояний от которых до двух заданных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Выбирая систему координат так же, как и для эллипса, уравнение гиперболы можно записать в каноническом виде:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где число a называется *действительной полуосью* гиперболы, а число b — *мнимой полуосью*; $a,\ b > 0$, $b^2 = c^2 - a^2$.

Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы. Вид кривой показан на рис. 5.13.

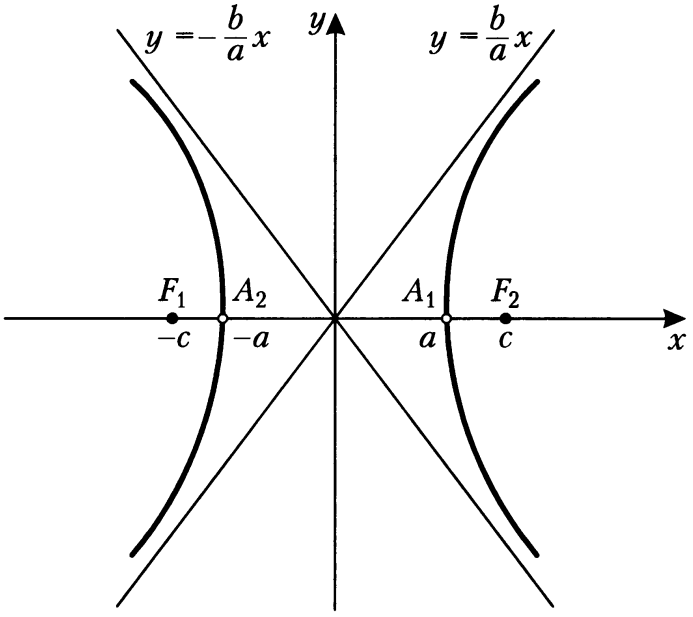


Рис. 5.13

Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = \frac{c}{a}$, где a — действительная полуось. Так как у гиперболы $c > a$, то ее эксцентриситет $\varepsilon > 1$. Величина эксцентриситета гиперболы

определяет форму ее ветвей. При увеличении эксцентриситета увеличивается размах ветвей гиперболы.

Парабола

Параболой называется множество точек, равноудаленных от некоторой точки, называемой фокусом, и прямой, называемой директрисой.

Пусть точка F — фокус параболы, а прямая l — ее директриса и задано расстояние между ними, равное p. В системе координат $x0y$, где ось $0x$ проходит через фокус F перпендикулярно директрисе l, а начало координат выбрано посередине между ними (рис. 5.14), уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px, \quad p > 0.$$

Парабола не имеет асимптот. Эксцентриситет параболы равен 1 и не влияет на форму кривой. Вид кривой показан на рис. 5.15.

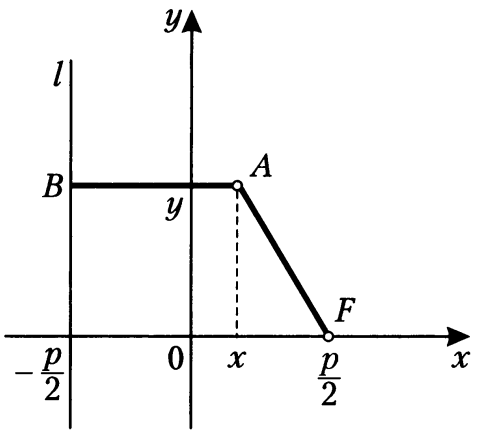


Рис. 5.14

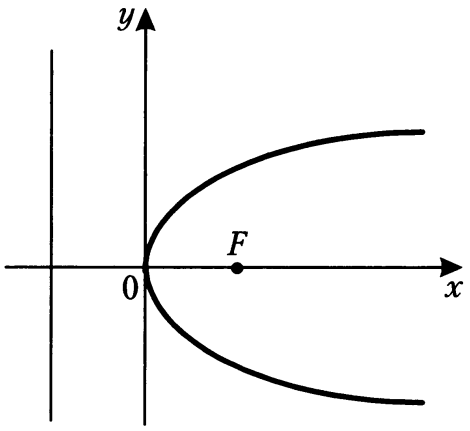


Рис. 5.15

Частные случаи:

- Уравнение пары пересекающихся прямых

$$a^2x^2 - b^2y^2 = 0 \quad (a, b > 0), \text{ или } y = \pm\frac{a}{b}x.$$

- Уравнение пары параллельных или совпадающих прямых

$$x^2 - a^2 = 0 \quad (a \geq 0), \text{ или } x = \pm a;$$

$$y^2 - b^2 = 0 \quad (b \geq 0), \text{ или } y = \pm b.$$

- Уравнение, определяющее точку

$$x^2 + y^2 = 0, \text{ или } \begin{cases} x = 0; \\ y = 0. \end{cases}$$

Пример 5.5. Построить кривую, заданную уравнением $y^2 - x^2 = 4$.

Решение: разделив каждое слагаемое заданного уравнения на 4, запишем его в виде $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$. Это уравнение задает на плоскости гиперболу с полуосями $a = b = 2$. Гипербола с равными полуосями называется равнобочной, ее асимптотами являются биссектрисы координатных углов $y = \pm x$.

При $y = 0$ получим уравнение $-\frac{x^2}{4} = 1$, не имеющее вещественных корней, то есть гипербола не пересекает ось $0x$. При $x = 0$ получим уравнение $\frac{y^2}{4} = 1$, имеющее корни $y = \pm 2$. Следовательно, вершины гиперболы $B_1(0; -2)$, $B_2(0; 2)$ лежат на оси $0y$ (рис. 5.16).

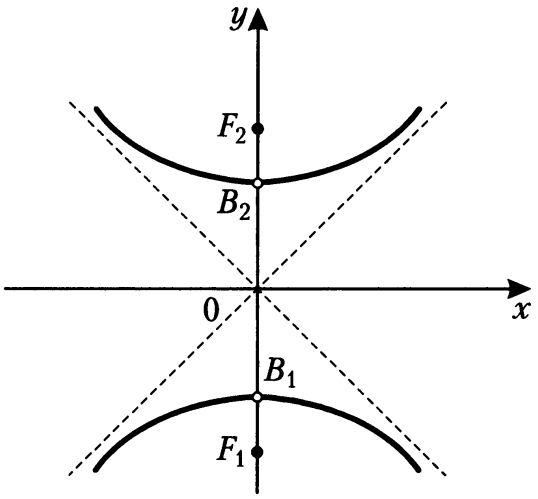


Рис. 5.16

Фокусы гиперболы расположены на той же оси, на которой находятся ее вершины. Из того, что $c^2 = a^2 + b^2 = 8$ и $c = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, следует, что координаты фокусов $F_1(0; -2\sqrt{2})$, $F_2(0; 2\sqrt{2})$. Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Преобразование координат на плоскости. Построение кривых, заданных общим уравнением

Если сравнить канонические уравнения эллипса, окружности, гиперболы и параболы с общим уравнением кривой второго порядка (5.1), то видно, что в них коэффициенты $B = D = E = 0$. Если в этом уравнении $D \neq 0$, $E \neq 0$ или $B \neq 0$, то чтобы привести уравнение к каноническому виду, определить тип кривой и построить ее, необходимо сделать преобразование координат.

Если в уравнении (5.1) $D \neq 0$ или $E \neq 0$, то центр симметрии эллипса или гиперболы, или центр окружности, или вершина параболы находятся не в начале координат, а в некоторой точке $0'(x_0; y_0)$. Строить кривую в данном случае удобно, перенеся начало координат в эту точку, то есть сделав замену $\begin{cases} x' = x - x_0; \\ y' = y - y_0. \end{cases}$

При такой замене в новой системе координат с началом в точке $0'$ и с осями $0'x'$ и $0'y'$ уравнение кривой будет иметь канонический вид.

Приведем уравнения различных прямых:

- Уравнение эллипса с центром симметрии в точке $0'(x_0; y_0)$:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

- Уравнение гиперболы с центром симметрии в точке $0'(x_0;\ y_0)$:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,$$

здесь вершины в точках $(a;\ 0)$ и $(-a;\ 0)$;

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,$$

здесь вершины в точках $(0;\ b)$ и $(0;\ -b)$.

- Уравнение параболы с вершиной в точке $0'(x_0;\ y_0)$:

$$(y-y_0)^2=\pm 2p(x-x_0),$$

ось симметрии параллельна $0x$;

$$(x-x_0)^2=\pm 2p(y-y_0),$$

ось симметрии параллельна $0y$.

Знак «±» показывает направление ветвей параболы. Если в уравнении знак «+», то направление ветвей совпадает с направлением оси, которой параллельна ось симметрии параболы, а если «–», то направление ветвей противоположно направлению оси, которой параллельна ось симметрии параболы.

Пример 5.6. Построить кривую, заданную уравнением $x^2+2x+6y-2=0$, приведя его к каноническому виду.

Решение: преобразуем уравнение следующим образом:

$$(x^2+2x)=-6y+2;\quad (x^2+2x+1)=-6y+2+1;$$

$$(x+1)^2=-6y+3;\quad (x+1)^2=-6(y-0{,}5).$$

Получим уравнение параболы с вершиной в точке $0'(-1;\ 0{,}5)$ и осью симметрии, параллельной оси $0y$. Перенеся начало координат в точку $0'$, получим в системе координат $x'0'y'$ уравнение

$$(x')^2=-6(y'),$$

где параметр p определяется из условия $2p=6$, или $p=3$.

Парабола симметрична относительно оси $0'y'$ или относительно прямой $x=-1$. Фокус параболы находится на ее оси и отстоит от вершины на $\frac{p}{2}$. Поскольку из уравнения следует, что $y'\le 0$, то ветви параболы направлены вниз и фокус F лежит на $\frac{p}{2}=1{,}5$ ниже вершины, то есть его координаты $F(-1;\ -1)$.

Директрисой параболы является прямая, перпендикулярная ее оси и находящаяся на расстоянии $\frac{p}{2}=1{,}5$ от вершины, причем фокус и директриса расположены по разные стороны от вершины. Учитывая все это, можно записать уравнение директрисы $y=0{,}5+1{,}5$, или $y=2$. Кривая приведена на рис. 5.17.

Если в уравнении (5.1) $B\ne 0$, то оси симметрии кривой не параллельны координатным осям. Чтобы получить каноническое уравнение кривой, необходимо повернуть систему координат.

Пример 5.7. Определить тип кривой, заданной уравнением $2x^2 + 2xy + 2y^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y - 5 = 0$, и построить ее.

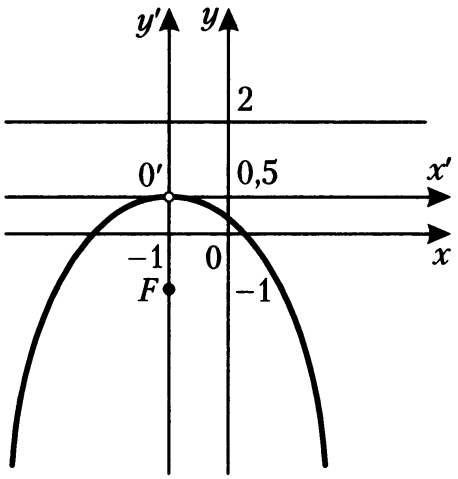


Рис. 5.17

Решение: рассмотрим квадратичную форму $2x^2 + 2xy + 2y^2$ и ее матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Определим собственные числа матрицы из характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (2-\lambda)^2 - 1 = 0, \quad 2-\lambda = \pm 1.$$

Собственные числа $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. Найдем соответствующие собственные векторы из системы

$$\begin{cases} (2-\lambda)x + y = 0; \\ x + (2-\lambda)y = 0, \end{cases}$$

подставив в нее собственные числа λ_1 и λ_2.

Если $\lambda_1 = 3$, то

$$\begin{cases} (2-3)x + y = 0; \\ x + (2-3)y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -x + y = 0; \\ x - y = 0; \end{cases} \quad x = y.$$

Задавая $y = 1$, получим собственный вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Модуль этого вектора равен $\sqrt{2}$.

Нормируя его, получим первый собственный вектор

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Если $\lambda_2 = 1$, то

$$\begin{cases} (2-1)x + y = 0; \\ x + (2-1)y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 0; \\ x + y = 0; \end{cases} \quad x = -y.$$

Задавая $y = 1$, получим собственный вектор $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Модуль этого вектора равен $\sqrt{2}$.

Нормируя его, получим второй собственный вектор нового базиса

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Перейдем к базису векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Составим матрицу перехода

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Координаты вектора $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ в новом базисе определяются из системы

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'; \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y', \end{cases}$$

где x' и y' — новые координаты вектора в базисе $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.

В этом базисе квадратичная форма $2x^2 + 2xy + 2y^2$ будет иметь вид $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = 3(x')^2 + (y')^2$. Подставив в линейную часть уравнения заданной кривой выражения для x и y из последней системы, получим:

$$3(x')^2 + (y')^2 + \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) - \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) - 5 = 0;$$

$$3(x')^2 + (y')^2 - 2y' = 5; \quad 3(x')^2 + (y'-1)^2 = 6; \quad \frac{(x')^2}{2} + \frac{(y'-1)^2}{6} = 1.$$

Последнее уравнение является уравнением эллипса с полуосями $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{6}$ и с центром симметрии в точке $0'(0; 1)$ в системе координат $x'0y'$, определяемой ортонормированным базисом векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.

Строить эллипс будем следующим образом:

1. Зададим произвольно систему координат $x0y$ и построим в ней нормированные собственные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.
2. Проведем координатные оси $0x'$ и $0y'$ через векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.
3. В системе координат $x'0y'$ отметим центр симметрии эллипса $0'(0; 1)$ и проведем через него оси симметрии параллельно осям $0x'$ и $0y'$.
4. Построим эллипс с центром симметрии в точке $0'(0; 1)$ и с полуосями $a = \sqrt{2}$ и $b = \sqrt{6}$ (рис. 5.18).

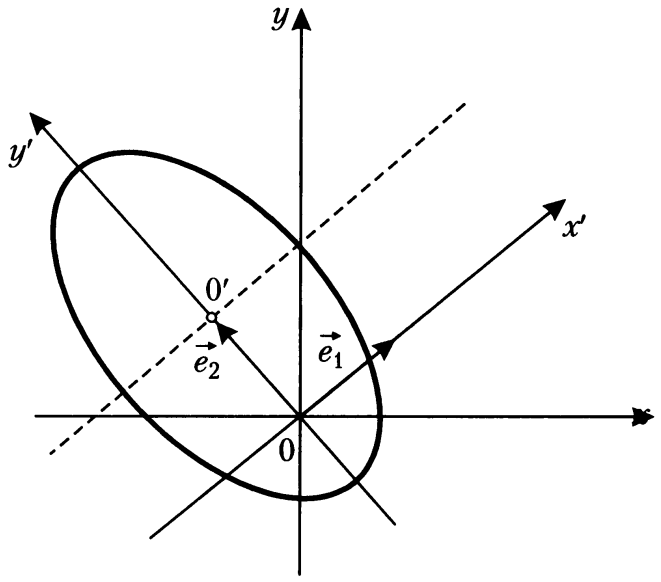


Рис. 5.18

Кривые в полярной системе координат

Полярная система координат задана, если заданы точка 0, называемая полюсом, и исходящий из полюса луч $0x$, который называется полярной осью (рис. 5.19).

Положение любой точки M в полярной системе координат однозначно определяется ее полярными координатами: полярным радиусом ρ — расстоянием от полюса 0 до точки M и полярным углом φ — углом поворота полярной оси до совпадения с вектором $\vec{0M}$ (рис. 5.20).

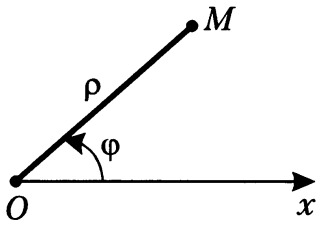


Рис. 5.19

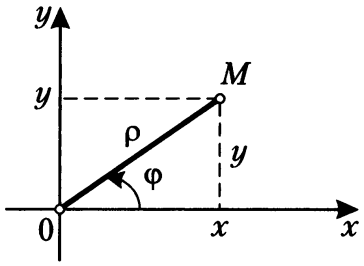


Рис. 5.20

В полюсе полярный радиус $\rho = 0$, а полярный угол не определен. Для всех точек плоскости, не совпадающих с полюсом, $\rho > 0$.

Полярный угол измеряется в радианах и считается положительным, если отсчитывается от полярной оси против часовой стрелки. Полярный угол определяется с точностью до $2\pi k$, где k — целое число. Это означает, что точки с полярными координатами $(\rho;\ \varphi)$ и $(\rho;\ \varphi + 2\pi k)$ при целом k совпадают.

Если задана полярная система координат, то каждой паре чисел $(\rho;\ \varphi)$, где $\rho \geq 0$, соответствует точка плоскости, для которой эти числа являются ее полярными координатами. Если $\rho > 0$, то эта точка расположена на луче, составляющем угол φ с полярной осью $0x$, и на расстоянии ρ от полюса. Если $\rho = 0$, то эта точка совпадает с полюсом.

Из определения полярных координат следует, что уравнение $\rho = r$ задает на плоскости окружность с центром в полюсе и радиусом r, а уравнение $\varphi = \alpha$ задает на плоскости луч, проходящий через полюс и составляющий с полярной осью угол α. В частности, уравнением полярной оси является $\varphi = 0$.

Если задать на плоскости прямоугольную декартову систему координат, поместив ее начало в полюс и совместив ось абсцисс с полярной осью, то, как легко видеть из рис. 5.20, декартовы координаты x и y будут выражены через полярные координаты из соотношений

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Если каждое уравнение системы возвести в квадрат и сложить их, то получим уравнение $\rho^2 = x^2 + y^2$, из которого по заданным декартовым координатам можно определить полярный радиус.

Пример 5.8. Построить кривую, заданную в полярных координатах уравнением $\rho = \varphi$.

Решение: кривая, заданная уравнением $\rho = \varphi$, называется *спиралью Архимеда*. Для ее построения зададим значения полярного угла и найдем из уравнения соответствующие значения полярного радиуса (табл. 5.1).

Таблица 5.1

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ρ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

На лучах $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \pi$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ и $\varphi = 2\pi$ (последний луч совпадает с полярной осью) отложим соответствующие значения ρ. Из уравнения кривой следует, что если мы будем увеличивать φ, то ρ будет возрастать. Кривая построена на рис. 5.21.

Пример 5.9. Построить кривую, заданную в полярной системе координат уравнением $\rho = 1 + \cos\varphi$.

Решение: поскольку $\cos\varphi$ — периодическая функция с периодом 2π, то достаточно исследовать функцию при $0 \le \varphi \le 2\pi$. Значения полярного угла и соответствующие значения полярного радиуса указаны в табл. 5.2.

Таблица 5.2

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
ρ	2	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	2

Отметим точки $(\varphi;\ \rho)$ на плоскости в полярной системе координат и построим соответствующую кривую. Поскольку $\rho(0) = \rho(2\pi)$, то кривая является замкнутой. Ее вид показан на рис. 5.22. Построенная кривая называется *кардиоидой*.

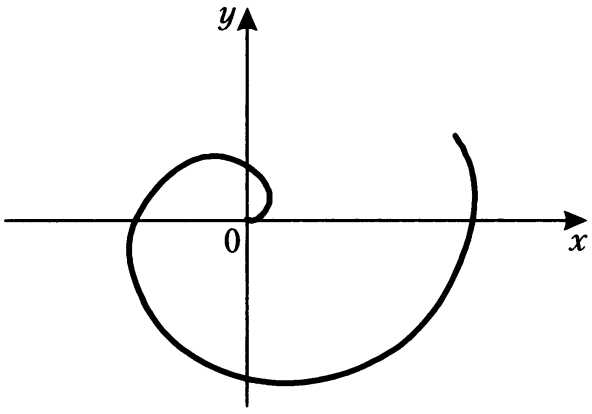


Рис. 5.21

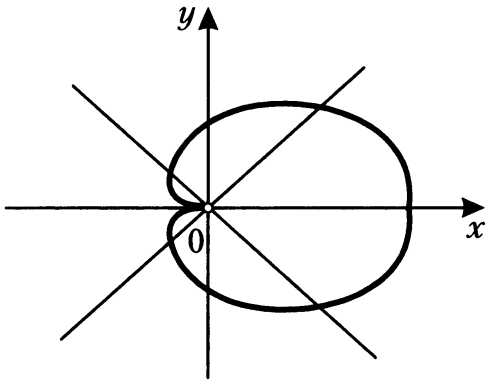


Рис. 5.22

Пример 5.10. Построить кривую, заданную уравнением $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$, перейдя к полярным координатам.

Решение: воспользуемся формулами, связывающими декартовы координаты с полярными координатами,

$$\rho^2 = x^2 + y^2; \quad \begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Тогда уравнение заданной кривой можно записать в виде

$$\rho^4 = \rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi, \text{ или } \rho^4 = \rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).$$

Сокращая последнее уравнение на ρ^2 и используя формулу $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$, получим:

$$\rho^2 = \cos 2\varphi, \quad \text{или} \quad \rho = \sqrt{\cos 2\varphi}.$$

Поскольку $\cos 2\varphi$ — периодическая функция с периодом $\frac{2\pi}{2} = \pi$, то достаточно исследовать кривую на промежутке $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, длина которого равна периоду функции.

Функция определена при $\cos 2\varphi \ge 0$, что равносильно неравенству $2\pi k - \frac{\pi}{2} \le 2\varphi \le \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ или $\pi k - \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$. Несколько точек на кривой, для которых $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$, указаны в табл. 5.3. По точкам построим часть данной кривой. Кривая при $\varphi \in \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ получится поворотом построенной кривой на угол π, равный периоду функции. Заданная кривая называется *лемнискатой Бернулли*, она приведена на рис. 5.23.

Таблица 5.3

φ	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$
ρ	0	1	0

Пример 5.11. Построить кривую в полярной системе координат $\rho = 1 - \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$.

Решение: заменой $\varphi' = \varphi - \frac{\pi}{4}$ приведем уравнение к виду $\rho = 1 - \sin\varphi'$. В новой системе координат с полярной осью $\varphi' = 0$ или $\varphi = \frac{\pi}{4}$ это уравнение кардиоиды, аналогичной построенной в примере 5.9. Вид кривой показан на рис. 5.24.

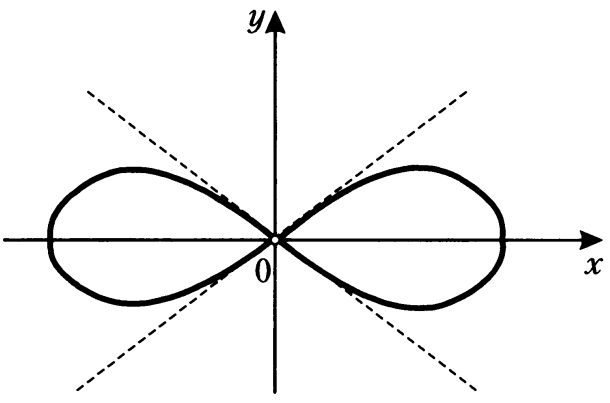


Рис. 5.23

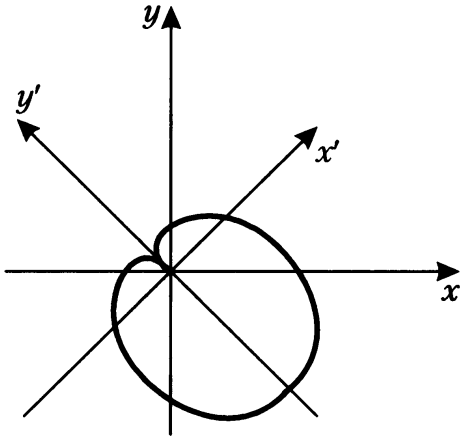


Рис. 5.24

Кривые на плоскости, заданные в параметрическом виде

Параметрически задаются следующие кривые на плоскости:

- **Окружность**

$$\begin{cases} x = R\cos t; \\ y = R\sin t, \end{cases}$$

где R — радиус, $x^2 + y^2 = R^2$ (рис. 5.25).

- **Эллипс**

$$\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t, \end{cases}$$

где a и b — полуоси, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 5.26).

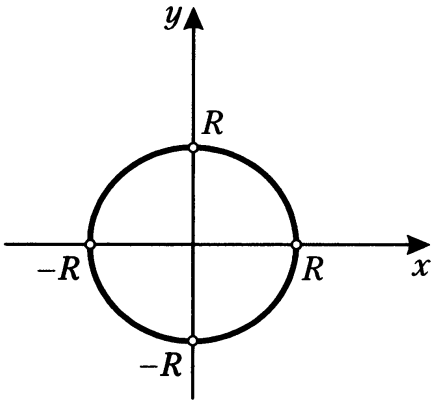


Рис. 5.25

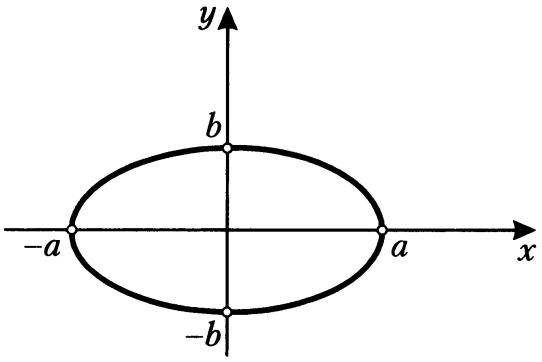


Рис. 5.26

- **Астроида**

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t; \\ y = b\sin^3 t, \end{cases}$$

где $a,\ b > 0$ (рис. 5.27).

- **Циклоида**

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t); \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$$

где $a > 0, T = 2\pi a$ — период (рис. 5.28).

Пример 5.12. Построить кривую, заданную уравнениями

$$\begin{cases} x = 3t^2; \\ y = 3t^3 - t. \end{cases}$$

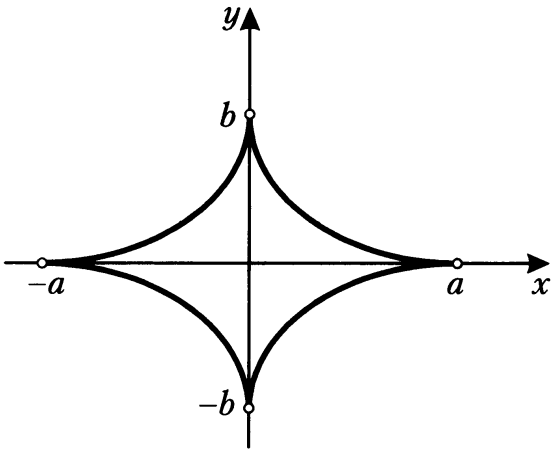


Рис. 5.27

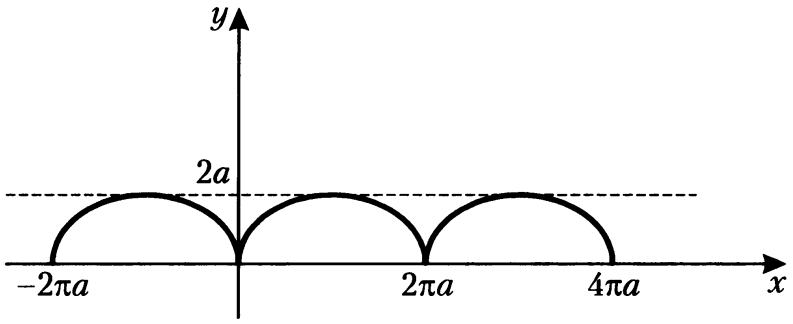


Рис. 5.28

Решение: при всех значениях t $x \geq 0$. Следовательно, кривая расположена в правой полуплоскости. Корнями функции являются $x_1 = 0$, так как $y(0) = 0$ и $x(0) = 0$, а также $x_2 = 1$, так как $y\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$ и $x\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1$.

При $t \to \pm\infty$ $x \to +\infty$, а $y \to \pm\infty$. Значит, кривая не является однозначной и имеет две ветви.

Если $t \in \left(0;\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, то $x \in (0;\ 1)$, а $y < 0$. Если $t \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ +\infty\right)$, то $x \in (1;\ +\infty)$, а $y > 0$.

Если $t \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\ 0\right)$, то $x \in (0;\ 1)$, а $y > 0$. Если $t \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, то $x \in (1;\ +\infty)$, а $y < 0$.

Вычислим производные $x'(t)$ и $y'(t)$, $x'(t) = 6t$, $y'(t) = 9t^2 - 1$. Поскольку производная $y'(t) = 0$ при $t = \pm\frac{1}{3}$ и меняет знак в этих точках, то $t = \pm\frac{1}{3}$ — точки экстремума (рис. 5.29). В этих точках

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}; \\ y = \pm\frac{8}{9}. \end{cases}$$

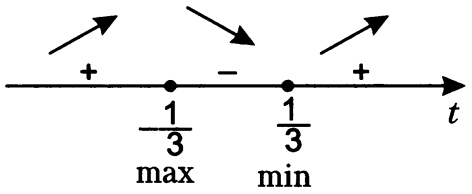


Рис. 5.29

Кривая построена на рис. 5.30.

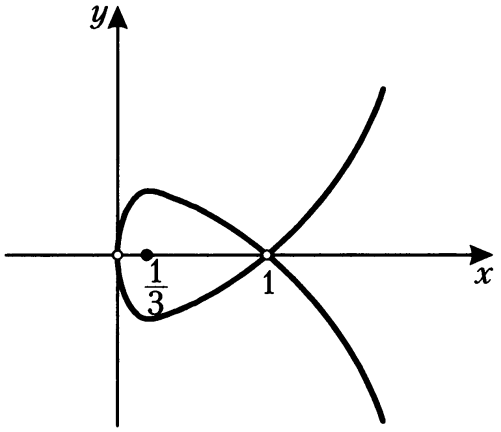


Рис. 5.30

Задачи для типовых расчетов

Прямая на плоскости

Задача 5.1. Напишите уравнение прямых, проходящих через точку M, одна из которых параллельна, а другая — перпендикулярна заданной прямой l.

1. $M(-2;1)$, $l: 3x-2y+`12=0$.
2. $M(2;-1)$, $l: x-y+`1=0$.
3. $M(3;-3)$, $l: x+2y-4=0$.
4. $M(-1;4)$, $l: 2x-5y+`2=0$.
5. $M(-5;0)$, $l: -x+2y+`9=0$.
6. $M(4;-1)$, $l: x+4y-3=0$.
7. $M(1;-1)$, $l: 2x+2y+`1=0$.
8. $M(2;0)$, $l: -4x+y+`2=0$.
9. $M(6;-1)$, $l: 2x-3y+4=0$.
10. $M(1;-3)$, $l: -3x-y+`2=0$.
11. $M(1;1)$, $l: x-y+`10=0$.
12. $M(3;-2)$, $l: 2x-3y+-2=0$.
13. $M(-1;1)$, $l: x+y+`2=0$.
14. $M(2;2)$, $l: 3x+y+`4=0$.
15. $M(2;1)$, $l: x+4y+`1=0$.
16. $M(-2;2)$, $l: 4x+y-3=0$.
17. $M(3;-1)$, $l: 3x-y+`2=0$.
18. $M(-2;-2)$, $l: 2x+5y-2=0$.
19. $M(1;-5)$, $l: 3x+3y+`2=0$.
20. $M(2;-3)$, $l: -2x+5y-4=0$.
21. $M(-3;-4)$, $l: x-3y-5=0$.
22. $M(5;1)$, $l: -2x+5y-2=0$.
23. $M(-2;4)$, $l: 4x+2y-7=0$.
24. $M(1;6)$, $l: -2x+y=0$.
25. $M(0;-3)$, $l: 2x-5y+21=0$.
26. $M(2;4)$, $l: -x-5y-2=0$.
27. $M(-4;4)$, $l: x+5y+13=0$.
28. $M(-3;0)$, $l: 4x-y+13=0$.
29. $M(3;3)$, $l: -4x+y-2=0$.
30. $M(1;4)$, $l: -2x+5y-2=0$.

Задача 5.2. Напишите уравнение прямой, которая проходит через точку M и через точку пересечения прямых l_1 и l_2.

1. $M(1;-2)$; $l_1: 2x-y-1=0$; $l_2: x+3y-4=0$.
2. $M(-4;0)$; $l_1: x+y-2=0$; $l_2: x-3y+2=0$.
3. $M(1;-1)$; $l_1: 7x-2y-5=0$; $l_2: x-5y+4=0$.
4. $M(4;3)$; $l_1: 5x-2y-1=0$; $l_2: 2x-3y+4=0$.
5. $M(3;3)$; $l_1: x-2y-1=0$; $l_2: x-7y+4=0$.
6. $M(4;4)$; $l_1: 2x+2y-2=0$; $l_2: x-3y+5=0$.
7. $M(0;-3)$; $l_1: x+4y-3=0$; $l_2: x+5y+4=0$.
8. $M(2;-2)$; $l_1: 3x+2y-1=0$; $l_2: x-3y-4=0$.
9. $M(-2;0)$; $l_1: 2x+3y+5=0$; $l_2: -x+4y+3=0$.
10. $M(1;-2)$; $l_1: 2x+y+6=0$; $l_2: 3x+5y-15=0$.
11. $M(2;1)$; $l_1: 2x-y+3=0$; $l_2: 3x+5y+11=0$.
12. $M(-1;-3)$; $l_1: 3x+2y-5=0$; $l_2: x-2y+1=0$.
13. $M(-1;1)$; $l_1: 3x+2y-5=0$; $l_2: x-2y+1=0$.
14. $M(2;-3)$; $l_1: x+y-2=0$; $l_2: x-2y-1=0$.
15. $M(4;0)$; $l_1: x+2y-5=0$; $l_2: x-2y+2=0$.

16. $M(3;-2)$; $l_1: x-2y+3=0$; $l_2: 3x-y-1=0$.
17. $M(0;1)$; $l_1: x+3y-7=0$; $l_2: -x+y-1=0$.
18. $M(1;0)$; $l_1: 4x-y-5=0$; $l_2: x+2y-8=0$.
19. $M(-1;-4)$; $l_1: 2x-y-5=0$; $l_2: x+y-7=0$.
20. $M(2;-4)$; $l_1: 3x-y+10=0$; $l_2: -x-y-2=0$.
21. $M(2;-5)$; $l_1: 3x-4y-5=0$; $l_2: 4x+3y-15=0$.
22. $M(2;1)$; $l_1: -2x+y-1=0$; $l_2: 2y+1=0$.
23. $M(1;-4)$; $l_1: -2x+2y-11=0$; $l_2: 2x+3=0$.
24. $M(-2;4)$; $l_1: -x+2y-1=0$; $l_2: -7x-4y+11=0$.
25. $M(2;3)$; $l_1: -x+y-4=0$; $l_2: -7x-4y-6=0$.
26. $M(1;-4)$; $l_1: 3x-2y-8=0$; $l_2: -3x+4y+4=0$.
27. $M(-3;2)$; $l_1: -3x+4y+1=0$; $l_2: 7x-9y-3=0$.
28. $M(-3;3)$; $l_1: -3x+4y+14=0$; $l_2: 7x-4y-6=0$.
29. $M(1;7)$; $l_1: -2x+5y+9=0$; $l_2: 3x-4y-3=0$.
30. $M(-1;5)$; $l_1: 5x+3y-1=0$; $l_2: 4x+5y+7=0$.

Задача 5.3. Найдите расстояние от точки P до прямой l.

1. $P(2;2)$, $l: \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{2}$.
2. $P(-2;2)$, $l: \begin{cases} x=2t-3; \\ y=t+2. \end{cases}$
3. $P(2;3)$, $l: \dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-2}{4}$.
4. $P(3;2)$, $l: \begin{cases} x=t+2; \\ y=-2t+3. \end{cases}$
5. $P(2;4)$, $l: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{2}$.
6. $P(-1;-1)$, $l: \begin{cases} x=4t; \\ y=3t-2. \end{cases}$
7. $P(3;-1)$, $l: \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{2}$.
8. $P(1;1)$, $l: \begin{cases} x=-4t-5; \\ y=3t+2. \end{cases}$
9. $P(-2;1)$, $l: \dfrac{x}{-3}=\dfrac{y-3}{4}$.
10. $P(-3;1)$, $l: \begin{cases} x=t-3; \\ y=-2t+2. \end{cases}$
11. $P(-1;3)$, $l: \dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y-1}{3}$.
12. $P(-1;-2)$, $l: \begin{cases} x=-t-5; \\ y=t+3. \end{cases}$
13. $P(1;1)$, $l: \dfrac{x-2}{-4}=\dfrac{y+2}{2}$.
14. $P(3;1)$, $l: \begin{cases} x=t-2; \\ y=2t+1. \end{cases}$
15. $P(-3;1)$, $l: \dfrac{x+3}{-6}=\dfrac{y+2}{8}$.
16. $P(-2;1)$, $l: \begin{cases} x=-2t-3; \\ y=4t+5. \end{cases}$
17. $P(3;-2)$, $l: \dfrac{x+2}{8}=\dfrac{y+2}{6}$.
18. $P(-3;0)$, $l: \begin{cases} x=-3t+2; \\ y=4t-1. \end{cases}$

19. $P(-2; 1)$, l: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1}$.

20. $P(0; -1)$, l: $\begin{cases} x = -4t; \\ y = 3t - 5. \end{cases}$

21. $P(0; 2)$, l: $\frac{x+3}{-2} = \frac{y-4}{1}$.

22. $P(1; -4)$, l: $\begin{cases} x = 3t - 1; \\ y = -2t + 4. \end{cases}$

23. $P(-2; 0)$, l: $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{4}$.

24. $P(1; 2)$, l: $\begin{cases} x = t - 1; \\ y = 2t + 4. \end{cases}$

25. $P(1; -2)$, l: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-5}{2}$.

26. $P(-2; 1)$, l: $\begin{cases} x = 2t - 3; \\ y = -t + 2. \end{cases}$

27. $P(-3; 1)$, l: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{-1}$.

28. $P(2; 3)$, l: $\begin{cases} x = -t + 1; \\ y = 2t - 1. \end{cases}$

29. $P(-2; 1)$, l: $\frac{x-3}{-3} = \frac{y}{1}$.

30. $P(3; 4)$, l: $\begin{cases} x = 3t - 3; \\ y = -4t + 1. \end{cases}$

Задача 5.4. В треугольнике ABC составьте уравнения:

1) стороны BC;

2) высоты, опущенной из вершины A на сторону BC;

3) медианы, проведенной из вершины C.

1. $A(-3; 3)$, $B(5; 1)$, $C(6; -2)$.
2. $A(2; -1)$, $B(4; 5)$, $C(-3; 2)$.
3. $A(2; 0)$, $B(5; 3)$, $C(3; 7)$.
4. $A(-3; 3)$, $B(5; 1)$, $C(6; -2)$.
5. $A(2; 1)$, $B(-1; -1)$, $C(3; 2)$.
6. $A(0; 1)$, $B(-2; 2)$, $C(3; -2)$.
7. $A(-2; -1)$, $B(1; 1)$, $C(4; 0)$.
8. $A(3; -1)$, $B(-3; 1)$, $C(1; 4)$.
9. $A(4; -2)$, $B(1; 6)$, $C(-3; 1)$.
10. $A(4; 2)$, $B(-1; 3)$, $C(1; -2)$.
11. $A(0; 4)$, $B(-3; -2)$, $C(0; 1)$.
12. $A(2; 0)$, $B(-2; 1)$, $C(1; -1)$.
13. $A(-1; 1)$, $B(1; -2)$, $C(3; 1)$.
14. $A(1; 1)$, $B(-2; -3)$, $C(2; 0)$.
15. $A(2; 4)$, $B(1; 1)$, $C(4; 2)$.
16. $A(3; 2)$, $B(-1; 3)$, $C(1; -2)$.
17. $A(3; 4)$, $B(2; 1)$, $C(5; 2)$.
18. $A(5; 4)$, $B(4; 1)$, $C(7; 2)$.
19. $A(2; 2)$, $B(1; -1)$, $C(4; 0)$.
20. $A(2; 1)$, $B(1; -2)$, $C(4; -1)$.
21. $A(2; 7)$, $B(1; 4)$, $C(4; 5)$.
22. $A(2; 0)$, $B(1; -3)$, $C(4; -2)$.
23. $A(2; 6)$, $B(1; 3)$, $C(4; 4)$.
24. $A(-1; 0)$, $B(1; 5)$, $C(4; -3)$.
25. $A(2; 5)$, $B(1; 2)$, $C(4; 3)$.
26. $A(-3; -2)$, $B(2; 2)$, $C(4; -1)$.
27. $A(-2; 2)$, $B(1; -1)$, $C(4; 1)$.
28. $A(2; 7)$, $B(-3; -3)$, $C(3; -1)$.
29. $A(1; -4)$, $B(3; 2)$, $C(-3; 1)$.
30. $A(2; 5)$, $B(1; 2)$, $C(4; 3)$.

Задача 5.5

1. $C(3; -2)$ — вершина прямого угла равнобедренного треугольника, $2y - 5x + 1 = 0$ — уравнение его гипотенузы. Напишите уравнения катетов этого треугольника.

2. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2; 6)$ и составляющей с осью $0x$ угол, вдвое меньший угла, который составляет с осью $0x$ прямая $\sqrt{3}y - 3x + 5 = 0$.
3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; -2)$ и составляющей с осью $0x$ угол, вдвое больший угла, который составляет с осью $0x$ прямая $\sqrt{3}x - 3y + 13 = 0$.
4. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(-3; -3)$ и составляющей с осью $0x$ угол, втрое больший угла, который составляет с осью $0x$ прямая $x - y - 17 = 0$.
5. Вершины треугольника $A(2; -1)$, $B(4; 5)$, $C(-3; 2)$. Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и центр тяжести треугольника ABC.
6. Вершины треугольника $A(2; 0)$, $B(5; 3)$, $C(3; 7)$. Найдите уравнение прямой, проходящей через вершину B и параллельной медиане AM треугольника.
7. Вершины треугольника $A(1; -2)$, $B(-1; 3)$, $C(3; 2)$. Напишите уравнение прямых, проходящих через вершины треугольника и параллельных его сторонам.
8. Найдите основание перпендикуляра, проведенного из начала координат на прямую, заданную уравнением $x - y - 17 = 0$.
9. Найдите угол между прямыми, заданными уравнениями $x - 5y - 2 = 0$ и $3x + 2y + 5 = 0$.
10. При каком значении p прямые $3x - py - 3 = 0$ и $2x + 4y - 7 = 0$ параллельны?
11. При каком значении l прямые $3x + 4y - 7 = 0$ и $lx - 3y - 1 = 0$ перпендикулярны?
12. При каком значении l прямая $lx - 2y + 5 = 0$ параллельна прямой, проходящей через точки $M(-1; 2)$ и $N(1; 4)$?
13. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2; 2)$ и отсекающей на координатных осях отрезки одинаковой длины.
14. Точки $A(2; 1)$, $B(4; 2)$, $C(-3; 3)$ — последовательные вершины параллелограмма $ABCD$. Напишите уравнения сторон этого параллелограмма.
15. Напишите уравнения прямых, проходящих через точку $P(2; -1)$ и составляющих угол 45° с прямой $2x + 5y + 1 = 0$.
16. Найдите расстояние между параллельными прямыми, заданными уравнениями $3x - 4y - 2 = 0$ и $3x - 4y + 1 = 0$.
17. Найдите уравнения прямых, проходящих через точку $M(-1; 2)$ под углом 45° к прямой $x - 2y + 3 = 0$.
18. Из точек $A(1; 2)$ и $B(3; 1)$ проведены прямые через начало координат. Вычислите угол между этими прямыми.
19. Найдите уравнение прямых, проходящих через точку $A(1; 1)$ и отсекающих на оси $0x$ отрезок вдвое больший, чем на оси $0y$.
20. Найти длину высоты, проведенной к стороне AB, в треугольнике с вершинами в точках $A(2; 0)$, $B(4; 2)$, $C(-3; 3)$.

21. Прямые $2x - y + 2 = 0$ и $2x - y - 6 = 0$ являются сторонами прямоугольника, прямая $x - y + 2 = 0$ — одна из его диагоналей. Напишите уравнения двух других сторон прямоугольника.
22. Напишите уравнение средней линии, параллельной стороне AC треугольника ABC, если заданы его вершины $A(1; -1)$, $B(4; 2)$, $C(-3; 3)$.
23. Напишите уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника ABC, параллельных его сторонам, если заданы координаты вершин треугольника $A(1; -1)$, $B(-4; 2)$, $C(3; 1)$.
24. Напишите уравнения прямых, отстоящих на расстояние 3 от начала координат и образующих угол 60° с осью $0x$.
25. Напишите уравнения прямых, проходящих через точку $M(1; 3)$ и отсекающих на оси $0y$ отрезок втрое больший, чем на оси $0x$.
26. Прямые $x + 2y - 4 = 0$ и $x - y - 1 = 0$ — смежные стороны параллелограмма $ABCD$, а $P(-2; -1)$ — точка пересечения его диагоналей. Напишите уравнения двух других сторон параллелограмма.
27. В треугольнике ABC найдите точку пересечения высот, если заданы его вершины $A(1; 0)$, $B(-4; 1)$, $C(-2; 2)$.
28. Даны $7x - 2y - 9 = 0$ и $2x + 7y + 5 = 0$ — уравнения двух сторон равнобедренного треугольника. Напишите уравнение третьей стороны треугольника, если точка $M(2{,}8; 0)$ — ее середина.
29. В треугольнике ABC найдите расстояние от вершины A до медианы, проведенной из вершины C, если заданы координаты вершин $A(2; 1)$, $B(-2; 0)$, $C(0; 3)$.
30. Вершины треугольника $A(2; 1)$, $B(4; -5)$, $C(-3; 3)$. Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения высот треугольника ABC.

Задача 5.6

1. Составьте уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(3; -4)$ и уравнения двух высот: $7x - 2y - 1 = 0$ и $2x - 7y - 6 = 0$.
2. Вычислите координаты вершин ромба, если известны уравнения двух его сторон, $x + 2y = 4$ и $x + 2y = 10$, и уравнение одной из его диагоналей, $y = x + 2$.
3. Даны $2x - y + 5 = 0$ и $x - 2y + 4 = 0$ — уравнения сторон AB и BC параллелограмма $ABCD$, его диагонали пересекаются в точке $M(1; 4)$. Найдите уравнение сторон CD и AD.
4. Для треугольника ABC даны уравнение стороны AB $3x + 2y = 12$, уравнение высоты BM $x + 2y = 4$, уравнение высоты AM $4x + y = 6$, где M — точка пересечения высот. Напишите уравнения сторон AC и BC.
5. Для параллелограмма $ABCD$ даны: уравнения сторон AB — $3x + 4y - 12 = 0$, AD — $5x - 12y - 6 = 0$ и середина $E(-2; 1)$ стороны BC. Найдите уравнения двух других сторон параллелограмма.
6. Найдите проекцию точки $M(1; 1)$ на прямую $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1{,}5}{-2}$.

7. Составьте уравнения сторон треугольника, зная его вершину $C(1; 2)$, а также уравнения высоты $x - 2y + 1 = 0$ и медианы $4x + y + 2 = 0$, проведенных из одной вершины.
8. Даны уравнения двух сторон треугольника, $x - 2y - 1 = 0$, $2x - y - 2 = 0$, и середина третьей стороны $M(1; 1)$. Найдите вершины треугольника.
9. Найдите точку B, симметричную точке $A(4; -3)$ относительно прямой, проходящей через точки $M(1; -2)$ и $N(-3; 2)$.
10. Даны две смежные вершины $A(5; -2)$ и $B(3; 1)$ параллелограмма $ABCD$ и точка $Q(0; 2)$ пересечения его диагоналей. Составьте уравнения сторон BC и CD и прямой, проходящей через точку Q параллельно стороне BC.
11. Напишите уравнения прямых, проходящих через точку $P(1; 2)$ и образующих с координатными осями треугольник, площадь которого равна 4 квадратным единицам.
12. Даны $3x + 5y - 15 = 0$, $3x - 5y + 15 = 0$ — уравнения двух смежных сторон параллелограмма, $A(10; -3)$ и $B(-5; 0)$ — координаты двух его вершин. Напишите уравнения диагоналей этого параллелограмма.
13. Для равнобедренного прямоугольного треугольника даны координаты вершины острого угла $(1; -2)$ и уравнение противолежащего катета $3x - 4y + 2 = 0$. Составьте уравнения двух других сторон треугольника.
14. Даны вершины треугольника $A(0; 4)$, $B(2; -3)$, $C(-4; 5)$. Составьте уравнение высоты, опущенной из вершины C на медиану, проведенную из вершины A.
15. Даны $A(1; 1)$ и $C(2; -1)$ — две вершины квадрата $ABCD$, лежащие на одной диагонали. Найдите две другие вершины этого квадрата.
16. Найдите уравнения прямых, проходящих на расстоянии 2 от начала координат и составляющих угол 30° с осью $0x$.
17. Вершины треугольника $A(1; 4)$, $B(2; 5)$, $C(5; -2)$. Найдите точку пересечения стороны AB с перпендикуляром, восстановленным из середины стороны AC.
18. Даны уравнения двух смежных сторон параллелограмма, $x - y - 1 = 0$ и $x - 2y = 0$, и точка пересечения его диагоналей $M(3; -1)$. Найдите уравнения двух других сторон параллелограмма.
19. Напишите уравнение прямой, которая проходит через точку $M(3; 6)$ и находится на расстоянии $2\sqrt{2}$ от точки $N(5; 4)$.
20. Найдите проекцию точки $P(4; 5)$ на прямую, проходящую через точки $A(3; -2)$ и $B(6; -1)$.
21. Даны две вершины треугольника, $A(5; -2)$ и $B(-4; 1)$, его высоты пересекаются в точке $N(3; 2)$. Найдите координаты третьей вершины C.
22. Для треугольника ABC даны: уравнение стороны AB $3x - 4y + 5 = 0$, уравнение высоты AM $x + 2y - 10 = 0$ и уравнение высоты BN $2x - 3y + 4 = 0$. Составьте уравнения двух других сторон треугольника.
23. Найдите точку N, симметричную точке $M(0; -3)$ относительно прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1,5}{-1}$.

24. Напишите уравнение прямой, которая параллельна прямым $3x - 2y + 7 = 0$ и $3x - 2y - 4 = 0$ и проходит посередине между ними.
25. Дано уравнение $3x + 4y - 12 = 0$ стороны AB параллелограмма $ABCD$, уравнение $x + 12y - 12 = 0$ диагонали AC и середина $E\left(2; \frac{13}{6}\right)$ стороны BC. Найдите уравнения сторон BC, CD и AD.
26. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2; 3)$ на одинаковом расстоянии от точек $A(5; -1)$ и B(3; 7).
27. Найдите вершины прямоугольного равнобедренного треугольника, если даны вершина прямого угла $C(3; -1)$ и уравнение гипотенузы $3x - y + 2 = 0$.
28. В ромбе $ABCD$ заданы вершины $A(-1; 1)$ и $C(3; -1)$ и уравнение одной из его сторон $x - y + 2 = 0$. Найдите координаты остальных вершин ромба.
29. Составьте уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $B(2; -7)$, а также уравнения высоты $3x + y + 11 = 0$ и медианы $x + 2y + 7 = 0$, проведенных из различных вершин.
30. Вершины треугольника $A(1; 2)$, $B(2; 7)$, $C(5; 2)$. Найдите точку пересечения стороны AC с перпендикуляром, восстановленным из середины стороны BC.

Кривые на плоскости

Задача 5.7. Приведите уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и постройте ее. Укажите координаты вершин, фокусов. Напишите уравнение директрисы и асимптот, если они есть. Вычислите эксцентриситет кривой.

1. $4x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0.$
2. $9x^2 - 4y^2 + 54x + 8y + 41 = 0.$
3. $2x^2 + 3y^2 + 12x - 6y + 21 = 0.$
4. $4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 3 = 0.$
5. $9x^2 + 16y^2 + 36x - 64y - 44 = 0.$
6. $4x^2 - 25y^2 + 8x - 10y + 4 = 0.$
7. $9x^2 + 4y^2 + 36x - 8y + 36 = 0.$
8. $x^2 - 4y^2 + 10x + 24y - 7 = 0.$
9. $4x^2 + 25y^2 - 8x + 100y + 4 = 0.$
10. $x^2 - 4y^2 + 6x + 8y + 5 = 0.$
11. $2x^2 + 3y^2 + 8x - 6y + 11 = 0.$
12. $9x^2 - 4y^2 + 36x + 8y + 68 = 0.$
13. $4x^2 + 9y^2 - 32x + 36y + 64 = 0.$
14. $4x^2 - y^2 - 8x - 4y - 16 = 0.$
15. $9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y + 49 = 0.$
16. $4x^2 - y^2 + 16x - 2y + 15 = 0.$
17. $x^2 + 25y^2 + 4x - 150y + 204 = 0.$
18. $4x^2 - 9y^2 + 16x + 54y - 101 = 0.$
19. $3x^2 + 2y^2 + 12x - 16y + 44 = 0.$
20. $9x^2 - 16y^2 - 36x - 64y - 172 = 0.$
21. $4x^2 + 9y^2 + 32x - 16y + 37 = 0.$
22. $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 7 = 0.$
23. $4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 24 = 0.$
24. $4x^2 - y^2 - 16x - 6y + 11 = 0.$
25. $x^2 + 4y^2 + 10x - 24y + 57 = 0.$
26. $x^2 - 4y^2 + 6x + 8y + 21 = 0.$
27. $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 109 = 0.$
28. $5x^2 + 3y^2 - 10x + 12y + 17 = 0.$
29. $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0.$
30. $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0.$

Задача 5.8. Приведите уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и постройте ее. Укажите координаты вершин, фокусов. Напишите уравнение директрисы и асимптот, если они есть. Вычислите эксцентриситет кривой.

1. $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 7 = 0.$
2. $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 24x - 32 = 0.$
3. $7x^2 + 60xy + 32y^2 - 14x + 60y + 7 = 0.$
4. $29x^2 - 24xy + 36y^2 + 82x - 96y - 91 = 0.$
5. $4x^2 + 4xy + y^2 + 16x + 8y + 15 = 0.$
6. $4x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 4y - 7 = 0.$
7. $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0.$
8. $11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0.$
9. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 20x + 30y + 16 = 0.$
10. $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0.$
11. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 230x + 110y - 475 = 0.$
12. $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0.$
13. $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0.$
14. $3x^2 + xy - 2y^2 - 5x + 5y - 2 = 0.$
15. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = 0.$
16. $4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0.$
17. $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0.$
18. $4x^2 + 16xy + 15y^2 - 8x - 22y - 5 = 0.$
19. $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$
20. $8x^2 + 6xy - 26x - 12y + 11 = 0.$
21. $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$
22. $2x^2 - 5xy - 12y^2 - x + 26y - 10 = 0.$
23. $x^2 - 12xy - 4y^2 + 12x + 8y + 5 = 0.$
24. $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0.$
25. $x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0.$
26. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 6x - 10y - 3 = 0.$
27. $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0.$
28. $12xy + 5y^2 - 12x - 22y - 19 = 0.$
29. $5x^2 + 24xy - 5y^2 = 0.$
30. $41x^2 + 24xy + 9y^2 + 24x + 18y - 36 = 0.$

Задача 5.9. Постройте кривую в полярной системе координат.

1. $\rho = 2\varphi.$
2. $\rho = 0{,}5\varphi.$
3. $\rho = -\varphi.$
4. $\rho = 2\cos\varphi.$
5. $\rho = 1 + 2\varphi.$
6. $\rho = 4\sin\varphi.$

7. $\rho = \dfrac{3}{\varphi}$.
8. $\rho = \dfrac{2}{\varphi}$.
9. $\rho = \dfrac{2}{\varphi + \dfrac{\pi}{3}}$.
10. $\rho = \dfrac{2}{\varphi - \pi}$.
11. $\rho = \dfrac{1}{\varphi} + 2$.
12. $\rho = 2\varphi + \dfrac{\pi}{6}$.
13. $\rho = 1 - 2\sin\varphi$.
14. $\rho = 3(1 + \cos\varphi)$.
15. $\rho = 1 + \sin\varphi$.
16. $\rho = 2\cos 2\varphi$.
17. $\rho = 1 - 2\cos\varphi$.
18. $\rho = 2\cos 3\varphi$.
19. $\rho = a\sin 3\varphi,\ a > 0$.
20. $\rho = 2\sin 2\varphi$.
21. $\rho = a\sin\left(2\varphi - \dfrac{\pi}{4}\right)$.
22. $\rho = a\cos 4\varphi,\ a > 0$.
23. $\rho = a\sin\left(\varphi - \dfrac{\pi}{6}\right)$.
24. $\rho = a\cos\left(2\varphi + \dfrac{\pi}{4}\right)$.
25. $\rho = 2\cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{4}\right)$.
26. $\rho = 2\sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{4}\right)$.
27. $\rho = \cos\left(2\varphi - \dfrac{\pi}{4}\right)$.
28. $\rho = 1 + \cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{3}\right)$.
29. $\rho = 1 + \sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{4}\right)$.
30. $\rho = 1 - \cos\left(\varphi + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Задача 5.10. Постройте кривую, заданную параметрическими уравнениями.

1. $\begin{cases} x = 9\cos t; \\ y = 4\sin t. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x = \cos t; \\ y = 8\sin t. \end{cases}$
3. $\begin{cases} x = 4\cos t; \\ y = 3\sin t. \end{cases}$
4. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t; \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x = \cos^3 \dfrac{t}{4}; \\ y = \sin^3 \dfrac{t}{4}. \end{cases}$
6. $\begin{cases} x = 3\cos^3 \dfrac{t}{2}; \\ y = 2\sin^3 \dfrac{t}{2}. \end{cases}$
7. $\begin{cases} x = 2(t + \sin t); \\ y = 2(1 - \cos t). \end{cases}$
8. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t); \\ y = 3(1 - \cos t). \end{cases}$
9. $\begin{cases} x = e^t \cos t; \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$
10. $\begin{cases} x = e^{2t} \cos^2 t; \\ y = e^{2t} \sin^2 t. \end{cases}$
11. $\begin{cases} x = t^2 - 4; \\ y = 4t - t^3. \end{cases}$
12. $\begin{cases} x = t^2; \\ y = t - t^3. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = 0{,}5(2 - t^2); \\ y = t(t^3 - 3). \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = 2t - t^2; \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = t^2 - 2t; \\ y = t^2 + 2t. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = \dfrac{(t+1)^2}{4}; \\ y = \dfrac{(t-1)^2}{4}. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = 1 + \dfrac{2}{\cos t}; \\ y = \operatorname{tg} t - 1. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right); \\ y = \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{1}{t}\right). \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = \cos^4 t; \\ y = \cos^4 t. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = 3(\operatorname{sh} t - t); \\ y = 3(\operatorname{ch} t - 1). \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t); \\ y = 2(\sin t - t \cos t). \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = -1 + 2\cos t; \\ y = 3 + 4\sin t. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = 1 + 3\cos t; \\ y = -2 + \sin t. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = 2\sin 2t; \\ y = 4\sin^2 t. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = 2\sin^2 t; \\ y = \sin 2t. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = 2\sin 2t; \\ y = 4\cos^2 t. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = 2\sin 2t; \\ y = 4\sin^2 t. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = 1 + 2\cos^3 t; \\ y = -1 + 2\sin^3 t. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x = 2 + \cos^3 t; \\ y = 3\sin^3 t. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x = 2\cos 2t; \\ y = 2\cos^2 t. \end{cases}$

ГЛАВА 6 Аналитическая геометрия в пространстве

Метод координат в пространстве

Если в пространстве введена прямоугольная декартова система координат x, y, z с началом в некоторой точке 0, то расстояние r между точками $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ определяется по формуле

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Координаты точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, делящей отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = \dfrac{M_1M_0}{M_0M_2}$, можно найти по формулам

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\ y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda};\ z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

В частном случае для координат x_0, y_0, z_0 середины отрезка M_1M_2 справедливы формулы $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y_0 = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$, $z_0 = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$.

Поверхности в пространстве. Плоскость

Если в пространстве задана прямоугольная декартова система координат, то алгебраическое уравнение $f(x,\ y,\ z) = 0$ называется *уравнением поверхности* Φ в этой системе координат, если:

1) для любой точки $M(x_0;\ y_0;\ z_0) \in \Phi$ справедливо равенство $f(x_0,\ y_0,\ z_0) = 0$;
2) для любого решения $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ уравнения $f(x,\ y,\ z) = 0$ точка $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0) \in \Phi$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1 Из определения следует, что поверхность в пространстве может быть задана алгебраическим уравнением, связывающим координаты тех и только тех точек, которые принадлежат этой поверхности.

Существуют следующие уравнения плоскости:

- **Общее уравнение плоскости** $Ax + By + Cz + D = 0$. Вектор

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

— *нормальный вектор плоскости* (любой ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости) (рис. 6.1).

- **Уравнение плоскости с нормальным вектором** $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, где числа A, B, C — координаты нормального вектора $\vec{n}$; $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ — точка, принадлежащая плоскости (рис. 6.2).

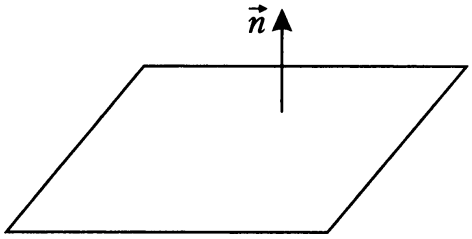


Рис. 6.1

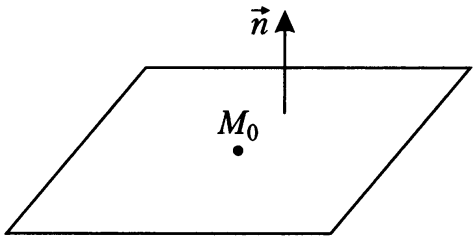


Рис. 6.2

- **Уравнение плоскости в отрезках** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, где числа a, b, c — абсцисса, ордината и аппликата точек пересечения плоскости с координатными осями (рис. 6.3).
- **Нормальное уравнение плоскости** $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$, где $p>0$ — расстояние от начала координат до плоскости; направляющие косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — координаты единичного нормального вектора $\vec{n}$, направленного из начала координат к плоскости (рис. 6.4).

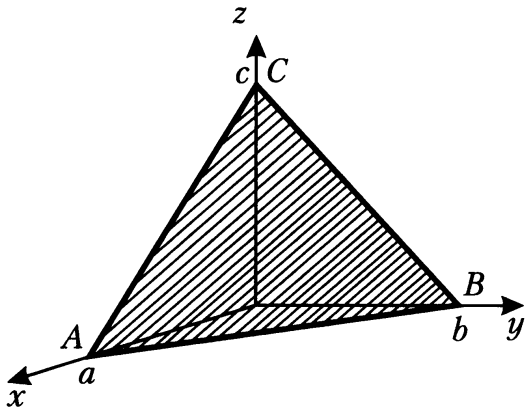


Рис. 6.3

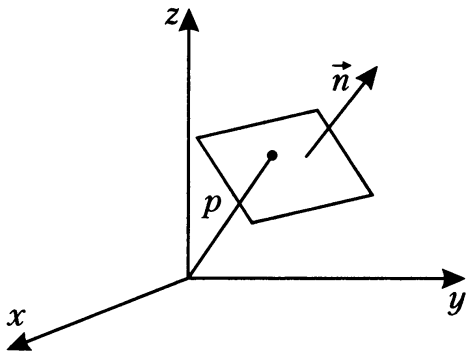


Рис. 6.4

Пример 6.1. Какие из заданных точек $A(2;\ -2;\ -1)$, $B(1;\ 0;\ -2)$, $C(-1;\ -1;\ 4)$, $D(4;\ 5;\ 0)$ принадлежат плоскости, заданной уравнением $x-y+5z+1=0$?

Решение: чтобы выяснить, лежит ли точка в плоскости, надо в уравнение плоскости подставить ее координаты. Поскольку

$$2-(-2)+5\cdot(-1)+1=0;\ 1-0+5\cdot(-2)+1\neq 0;$$

$$-1-(-1)+5\cdot 4+1\neq 0;\ 4-5+5\cdot 0+1=0,$$

то заданной плоскости принадлежат только точки A и D.

Пример 6.2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;\ -1;\ -2)$ перпендикулярно вектору $\vec{AB}$, если $B(-1;\ 2;\ 3)$.

Решение: вектор

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

является нормальным вектором плоскости. В уравнение $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ подставим вместо A, B и C координаты вектора $\vec{AB}$, а вместо x_0, y_0, z_0 — координаты точки A. Получим:

$$-2\cdot(x-1)+3\cdot(y+1)+5\cdot(z+2)=0, \text{ или } -2x+3y+5z+15=0.$$

Пример 6.3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-1;\ 2;\ -3)$ параллельно плоскости, заданной уравнением $4x+y-2z+2=0$.

Решение: уравнение плоскости будем искать в виде $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. Вместо x_0, y_0, z_0 подставим в это уравнение координаты точки M_0. Из уравнения заданной плоскости найдем координаты ее нормального вектора

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Так как плоскости параллельны, то этот вектор является нормальным и для искомой плоскости. Подставив его координаты в уравнение, получим:

$$4\cdot(x+1)+(y-2)-2\cdot(z+3)=0, \text{ или } 4x+y-2z-4=0.$$

Пример 6.4. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;\ -1;\ 3)$ и отсекающей на координатных осях отрезки равной длины.

Решение: уравнение плоскости будем искать в виде $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Из условия $|a|=|b|=|c|$ возможны следующие случаи:

1. $a=b=c$, тогда $x+y+z=a$. Подставив в это уравнение координаты точки A, найдем a: $1-1+3=a$, или $a=3$. Уравнение плоскости будет записано в виде $x+y+z=3$.
2. $a=b=-c$, тогда $x+y-z=a$, и получим: $1-1-3=a$, или $a=-3$. Уравнение плоскости $x+y-z=-3$.
3. $-a=b=c$, $-x+y+z=a$. Отсюда $-1-1+3=a$, или $a=1$. Уравнение плоскости $-x+y+z=1$.
4. $a=-b=c$, $x-y+z=a$. Отсюда $1+1+3=a$, или $a=5$. Уравнение плоскости $x-y+z=5$.

Угол между плоскостями. Угол α между плоскостями определяется как угол между их нормальными векторами. Тогда для косинуса этого угла справедлива формула

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{n}_1,\ \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Условие параллельности плоскостей:

$$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2, \text{ или } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Условие перпендикулярности плоскостей:

$$(\vec{n}_1,\ \vec{n}_2) = 0, \text{ или } A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Пример 6.5. Найти угол между плоскостями, заданными уравнениями $x - \sqrt{2}y + z - 1 = 0$ и $x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0$.

Решение: нормальные векторы заданных плоскостей

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Если обозначить α угол между плоскостями, то

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{n}_1,\ \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \frac{1-2-1}{\sqrt{1+2+1}\cdot\sqrt{1+2+1}} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, угол $\alpha = 120°$.

Пример 6.6. При каких значениях l и m заданные плоскости $mx + 3y - 2z - 1 = 0$ и $2x - 5y - lz - 1 = 0$ параллельны?

Решение: нормальные векторы заданных плоскостей

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} m \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix},\quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -l \end{pmatrix}.$$

Из условия параллельности следует: $\frac{m}{2} = \frac{3}{-5} = \frac{-2}{-l}$. Тогда $m = -\frac{6}{5}$ и $l = -\frac{10}{3}$.

Плоскость, заданная точкой и двумя векторами, коллинеарными плоскости

Если заданы точка $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, принадлежащая плоскости, и два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, коллинеарные плоскости и не коллинеарные между собой, то для этой плоскости используется уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, где нормальный вектор равен $\vec{n} = [\vec{a},\ \vec{b}]$ (рис. 6.5).

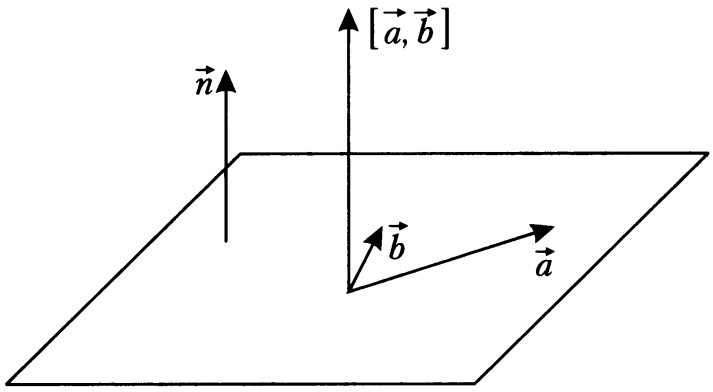


Рис. 6.5

Пример 6.7. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;\ 2;\ -3)$, $M_2(4;\ -1;\ -4)$ и $M_3(-1;\ -5;\ 2)$.

Решение: из рис. 6.6 ясно, что нормальный вектор плоскости — это вектор $\vec{n} = \left[\overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{M_1M_3}\right]$.

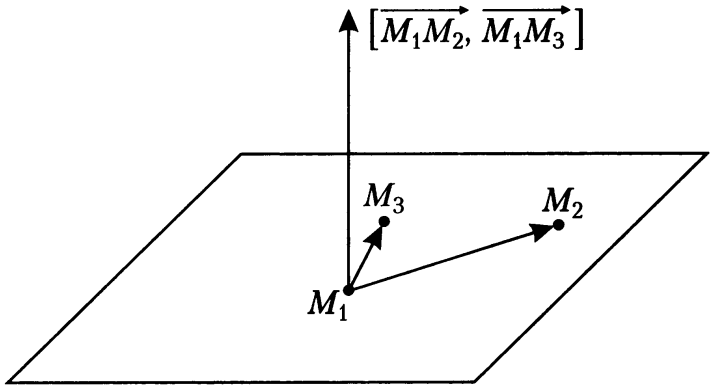


Рис. 6.6

Вычислим координаты векторов

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ и } \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix},$$

а также их векторное произведение

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{M_1M_3}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -3 & -1 \\ -2 & -7 & 5 \end{vmatrix} = -22\vec{i} - 13\vec{j} - 27\vec{k}.$$

Подставив его координаты, а также координаты любой из точек, например M_1, в уравнение плоскости с нормальным вектором, получим:

$$-22(x-1) - 13(y-2) - 27(z+3) = 0, \text{ или } 22x + 13y + 27z + 33 = 0.$$

Исследование общего уравнения плоскости

Если в общем уравнении плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

1) $A = 0$, то плоскость параллельна оси $0x$;
2) $B = 0$, то плоскость параллельна оси $0y$;
3) $C = 0$, то плоскость параллельна оси $0z$;
4) $D = 0$, то плоскость проходит через начало координат;
5) $A = 0$ и $B = 0$, то плоскость параллельна $x0y$;
6) $A = 0$ и $C = 0$, то плоскость параллельна $x0z$;
7) $B = 0$ и $C = 0$, то плоскость параллельна $y0z$;
8) $A = 0$ и $D = 0$, то плоскость проходит через ось $0x$;
9) $B = 0$ и $D = 0$, то плоскость проходит через ось $0y$;
10) $C = 0$ и $D = 0$, то плоскость проходит через ось $0z$.

Уравнения координатных плоскостей

Уравнение координатной плоскости $x0y$ будет иметь вид $z = 0$. Уравнение координатной плоскости $x0z - y = 0$. Уравнение координатной плоскости $y0z - x = 0$.

Пример 6.8. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось $0x$ и через точку $M(1;\ 1;\ 1)$.

Решение: так как плоскость проходит через ось $0x$, то ее уравнение будет иметь вид $By + Cz = 0$. Разделим это уравнение на $B \neq 0$ и получим: $y + \frac{C}{B}z = 0$. Подставив в него координаты точки $M(1;\ 1;\ 1)$, определим $\frac{C}{B} = -1$. Теперь можно записать уравнение искомой плоскости: $y - z = 0$.

Расстояние от точки до плоскости

Если уравнение плоскости записано в нормальном виде, $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, то расстояние r от точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ до этой плоскости определяется из формулы

$$r = \left| x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p \right|.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2 Если общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ необходимо привести к нормальному виду, то его следует умножить на выражение $\pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, в котором знак выбирается противоположным знаку D.

Пример 6.9. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями, заданными уравнениями $2x - 2y + 5z - 1 = 0$ и $2x - 2y + 5z + 2 = 0$.

Решение: выберем на первой плоскости произвольную точку $M_0(-2;\ 0;\ 1)$ и вычислим расстояние от точки M_0 до второй плоскости:

$$r=\left|\frac{2\cdot 2}{\sqrt{33}}+\frac{2\cdot 0}{\sqrt{33}}-\frac{5\cdot 1}{\sqrt{33}}-\frac{2}{\sqrt{33}}\right|=\left|\frac{4-5-2}{3\sqrt{33}}\right|=\frac{3}{\sqrt{33}}.$$

Линии в пространстве

Если $f_1(x,\ y,\ z)=0$ и $f_2(x,\ y,\ z)=0$ — уравнения двух поверхностей в прямоугольной декартовой системе координат, то система $\begin{cases} f_1(x,\ y,\ z)=0; \\ f_2(x,\ y,\ z)=0 \end{cases}$ задает в пространстве множество точек, принадлежащих как одной поверхности, так и другой, то есть их линии пересечения.

Следовательно, линия в пространстве задается системой двух уравнений с тремя переменными.

Пример 6.10. Система $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9; \\ z=0 \end{cases}$ задает в пространстве линию пересечения сферы с центром в начале координат и радиусом 3 и координатной плоскости $x0y$, то есть окружность с радиусом 3, расположенную в плоскости $x0y$.

Поскольку прямая является линией пересечения двух непараллельных плоскостей, то она задается в пространстве системой двух линейных уравнений с тремя переменными $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$ Эти уравнения называются *общими уравнениями прямой.*

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3 Следует иметь в виду, что при этом между двумя уравнениями системы не должно быть линейной зависимости, то есть ранг матрицы системы должен быть равен 2.

Пример 6.11. Система $\begin{cases} x=3; \\ z=2 \end{cases}$ задает линию пересечения плоскости, параллельной координатной плоскости $y0z$, и плоскости, параллельной координатной плоскости $x0y$.

Ясно, что это прямая, параллельная координатной оси $0y$ (рис. 6.7).

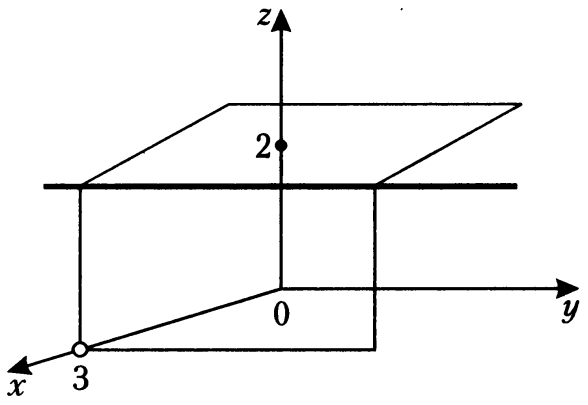


Рис. 6.7

Параметрические и канонические уравнения прямой в пространстве

Параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt; \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$$

где

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$$

— *направляющий вектор*, то есть ненулевой вектор, параллельный этой прямой; $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ — точка, принадлежащая прямой.

Канонические уравнения прямой:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

где

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$$

— направляющий вектор прямой; $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ — точка, принадлежащая прямой.

Пример 6.12. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точки $M(-2;\ -3;\ 4)$ и $N(2;\ -3;\ -1)$.

Решение: вектор

$$\vec{MN} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

параллелен прямой, следовательно, может быть направляющим вектором. Подставляя в канонические уравнения прямой координаты любой из заданных точек, например M, получим систему канонических уравнений прямой

$$\frac{x+2}{4} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-4}{-5}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.4 Следует заметить, что канонические и параметрические уравнения прямой выглядят по-разному в зависимости от того, координаты какой точки в них под-

ставлены вместо чисел x_0, y_0 и z_0. Кроме того, в данной задаче одна из координат направляющего вектора равна нулю, а это означает, что один из знаменателей в канонических уравнениях равен нулю. Такая запись для канонических уравнений прямой считается вполне допустимой. Чтобы понять, как в данном случае расположена в пространстве прямая, перейдем к параметрическим уравнениям. Для этого каждое из трех равных отношений обозначим t и получим:

$$\begin{cases} x+2=4\cdot t; \\ y+3=0\cdot t; \\ z-4=-5\cdot t, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=4t-2; \\ y=-3; \\ z=-5t+4. \end{cases}$$

Из последних уравнений ясно, что заданная прямая лежит в плоскости $y=-3$.

Пример 6.13. Составить параметрические уравнения медианы, проведенной из вершины A в треугольнике ABC, если заданы координаты его вершин $A(1;\ 4;\ -1)$, $B(-2;\ -2;\ 5)$ и $C(3;\ 1;\ -2)$.

Решение: на медиане AM задана точка A, а направляющим вектором для нее может являться вектор $\vec{AD}=\vec{AB}+\vec{AC}$ (рис. 6.8).

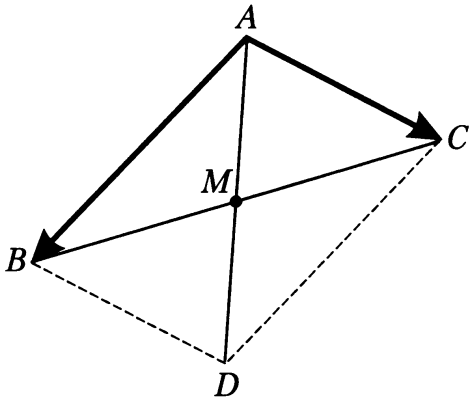


Рис. 6.8

Вычислим координаты векторов

$$\vec{AB}=\begin{pmatrix}-3\\-6\\6\end{pmatrix} \text{ и } \vec{AC}=\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix},$$

а также координаты вектора

$$\vec{AD}=\begin{pmatrix}-1\\-9\\5\end{pmatrix}.$$

Подставим в параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x=x_0+mt; \\ y=y_0+nt; \\ z=z_0+pt \end{cases}$$

вместо m, n, p координаты вектора $\vec{s}=\vec{AD}$, а вместо x_0, y_0, z_0 — координаты точки A. Получим:

$$\begin{cases} x=1-t; \\ y=4-9t; \\ z=-1+5t. \end{cases}$$

Взаимное расположение прямых. Приведение общих уравнений прямой к параметрическим и каноническим уравнениям

Угол между прямыми. Пусть

$$\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \\ p_1 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

— направляющие векторы двух прямых. Угол α между прямыми определяется как угол между их направляющими векторами. Для косинуса этого угла справедлива формула

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{s}_1,\ \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности прямых:

$$(\vec{s}_1,\ \vec{s}_2) = 0, \text{ или } m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0.$$

Условие параллельности прямых:

$$\vec{s}_1 \| \vec{s}_2, \text{ или } \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Условия пересечения прямых в пространстве. Если

$$\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \\ p_1 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

— направляющие векторы двух непараллельных прямых, а $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ — точки на этих прямых, то прямые пересекаются или скрещиваются в зависимости от того, компланарны или нет векторы $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ (рис. 6.9).

Прямые скрещиваются, если смешанное произведение $\vec{s}_1\vec{s}_2\ \overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$ (рис. 6.9, *а*).

Прямые пересекаются, если смешанное произведение $\vec{s}_1\vec{s}_2\ \overrightarrow{M_1M_2} = 0$ (рис. 6.9, *б*).

Пример 6.14. При каком значении l прямые $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}$ и $\frac{x-3}{l} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$ пересекаются?

Решение: точка $M_1(-2;\ 0;\ 1)$ принадлежит первой прямой, ее направляющий вектор

$$\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

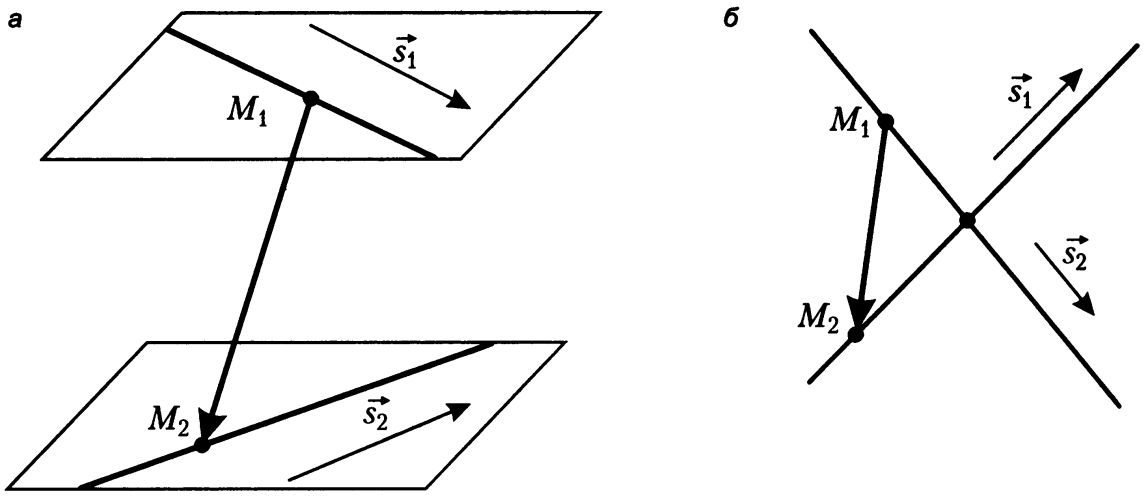


Рис. 6.9

Точка $M_2(3;\ 1;\ 7)$ принадлежит второй прямой, ее направляющий вектор

$$\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} l \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим координаты вектора

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

и смешанное произведение векторов $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\vec{s}_1\vec{s}_2\,\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ l & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 48 - 30 + 4l - 80 - 4 + 18l = 22l - 66.$$

Поскольку прямые пересекаются, если смешанное произведение равно нулю, то $22l - 66 = 0$, откуда $l = 3$.

Приведение общих уравнений прямой к каноническому виду

Пусть прямая задана общими уравнениями

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Если нужно привести ее уравнения к каноническим или параметрическим уравнениям, то следует выбрать на этой прямой какую-либо точку и найти вектор,

параллельный прямой. Координатами точки, принадлежащей прямой, является любое из решений заданной линейной системы. Направляющим вектором прямой является вектор $\vec{s} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$, где $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ — нормальные векторы плоскостей, задающих прямую (рис. 6.10).

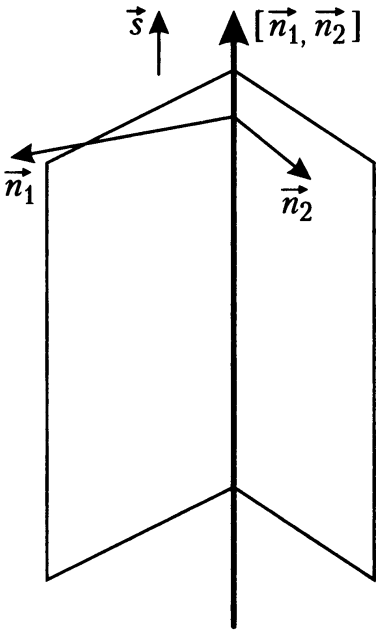


Рис. 6.10

Пример 6.15. Привести уравнения прямой $\begin{cases} 2x - y - z = 0; \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$ к каноническому виду.

Решение: выберем на прямой точку с аппликатой $z = 0$. Подставим $z = 0$ в общие уравнения прямой и найдем остальные координаты точки из системы $\begin{cases} 2x - y = 0; \\ x + y = 3. \end{cases}$ Складывая уравнения системы, получим $3x = 3$, или $x = 1$. Подставляя это значение x в любое уравнение системы, найдем $y = 2$. Итак, точка $M_0(1;\ 2;\ 0)$ принадлежит прямой. Нормальные векторы плоскостей

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда направляющий вектор прямой

$$\vec{s} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{j} + 3\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, канонические уравнения прямой имеют вид $\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{3}$ или $\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$.

Взаимное расположение прямой и плоскости

Пусть прямая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt; \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$$

а плоскость — общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$.

Угол между прямой и плоскостью. Из рис. 6.11 ясно, что для угла φ между прямой и плоскостью справедлива формула

$$\sin\varphi = \cos\alpha = \frac{(\vec{n},\ \vec{s})}{|\vec{n}|\cdot|\vec{s}|} = \frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Условие параллельности прямой и плоскости:

$$\vec{n}\perp\vec{s},\ \text{или}\ (\vec{n},\ \vec{s})=0,\ \text{или}\ Am+Bn+Cp=0.$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\vec{n}\,||\,\vec{s},\ \text{или}\ \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

Пример 6.16. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-1;\ 2;\ -3)$ и перпендикулярной прямой, заданной уравнениями $\frac{x}{-5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+2}{-3}$.

Решение: из рис. 6.12 видно, что направляющий вектор прямой

$$\vec{s}=\begin{pmatrix}-5\\2\\-3\end{pmatrix}$$

перпендикулярен плоскости и его можно принять в качестве ее нормального вектора.

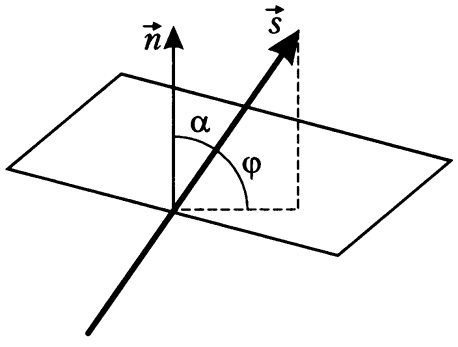


Рис. 6.11

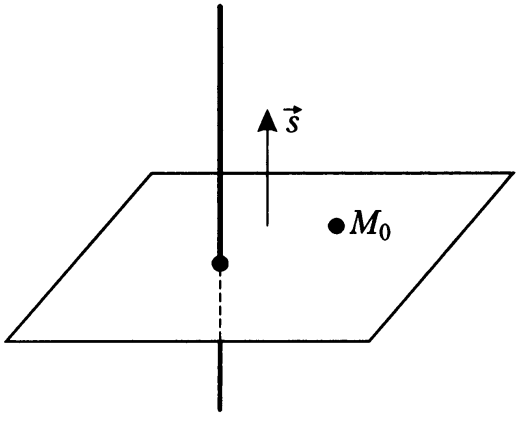


Рис. 6.12

Подставляя в уравнение плоскости с нормальным вектором $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ координаты точки M_0 и координаты вектора $\vec{s}$, получим:

$$-5(x+1)+2(y-2)-3(z+3)=0,\ \text{или}\ -5x+2y-3z-18=0.$$

Точка пересечения прямой и плоскости. Точку пересечения прямой и плоскости можно найти из системы

$$\begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt; \\ z = z_0 + pt; \\ Ax + By + Cz + D = 0, \end{cases} \quad \text{где} \quad \begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt; \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

— параметрические уравнения прямой, $Ax + By + Cz + D = 0$ — уравнение плоскости.

Пример 6.17. Найти точку, симметричную точке $M_0(-1;\ -2;\ 2{,}5)$ относительно прямой, заданной каноническими уравнениями $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+2}{-2}$.

Решение: точка M, симметричная точке M_0 относительно заданной прямой l, лежит на прямой M_0M, перпендикулярной прямой l. При этом точка пересечения прямых O делит отрезок M_0M пополам (рис. 6.13).

Если провести через точку M_0 плоскость α, перпендикулярную прямой l, то прямая M_0M будет лежать в этой плоскости. Для плоскости α нормальным вектором является направляющий вектор прямой l:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

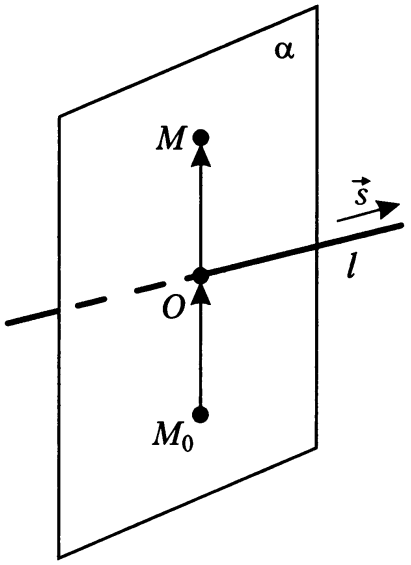


Рис. 6.13

Уравнение плоскости α: $1(x+1) + 2(y+2) - 2(z-2{,}5) = 0$, или $x + 2y - 2z + 10 = 0$. Запишем уравнения прямой l в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 4 + t; \\ y = 2t; \\ z = -2 - 2t. \end{cases}$$

Точка O — точка пересечения прямой l и плоскости α. Ее координаты найдем из системы

$$\begin{cases} x = 4 + t; \\ y = 2t; \\ z = -2 - 2t; \\ x + 2y - 2z + 10 = 0. \end{cases}$$

Подставляя x, y и z из первых трех уравнений в четвертое, получим $4 + t + 4t - 2(-2 - 2t) + 10 = 0$, или $9t + 18 = 0$, откуда $t = -2$.

Теперь можно определить координаты точки O: $O(2;\ -4;\ 2)$. Точка O — середина отрезка M_0M. Подставляя координаты точек O и M_0 в формулы деления отрезка пополам, определим координаты точки $M(x_M;\ y_M;\ z_M)$:

$$\begin{cases} x_O = \dfrac{x_{M_0} + x_M}{2}; \\ y_O = \dfrac{y_{M_0} + y_M}{2}; \\ z_O = \dfrac{z_{M_0} + z_M}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_M = 2x_O - x_{M_0}; \\ y_M = 2y_O - y_{M_0}; \\ z_M = 2z_O - z_{M_0}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_M = 2 \cdot 2 + 1 = 5; \\ y_M = 2 \cdot (-4) + 2 = -6; \\ z_M = 2 \cdot 2 - 2{,}5 = 1{,}5. \end{cases}$$

Следовательно, $M(5;\ -6;\ 1{,}5)$.

Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется множество точек, которое задается уравнением

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Pz + Q = 0,$$

где A, B, C, D, E, F, G, H, P, Q — заданные числа, причем A, B и C не равны нулю одновременно.

В некоторых случаях это уравнение определяет пару различных или совпадающих плоскостей, или одну единственную точку. Такие множества также называются поверхностью. Если это уравнение определяет пустое множество, то есть нет ни одной точки, координаты которой удовлетворяют ему, то говорят, что оно определяет мнимую поверхность.

Основными частными случаями уравнения поверхности второго порядка являются уравнения следующих поверхностей:

- **эллипсоида** (рис. 6.14)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a,\ b,\ c > 0;$$

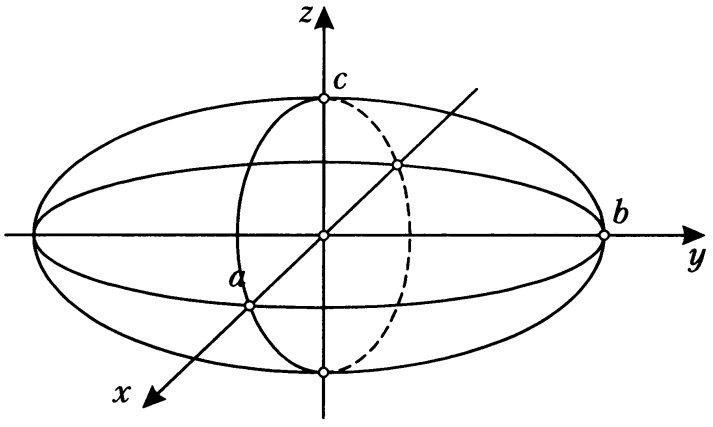


Рис. 6.14

- **однополостного гиперболоида** (рис. 6.15)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a,\ b,\ c > 0;$$

- **двуполостного гиперболоида** (рис. 6.16)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,\quad a,\ b,\ c>0;$$

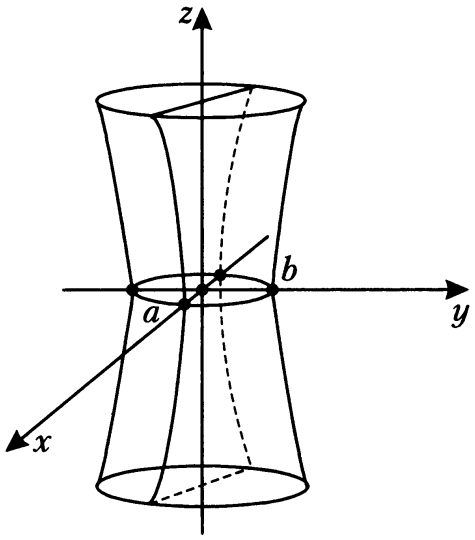


Рис. 6.15

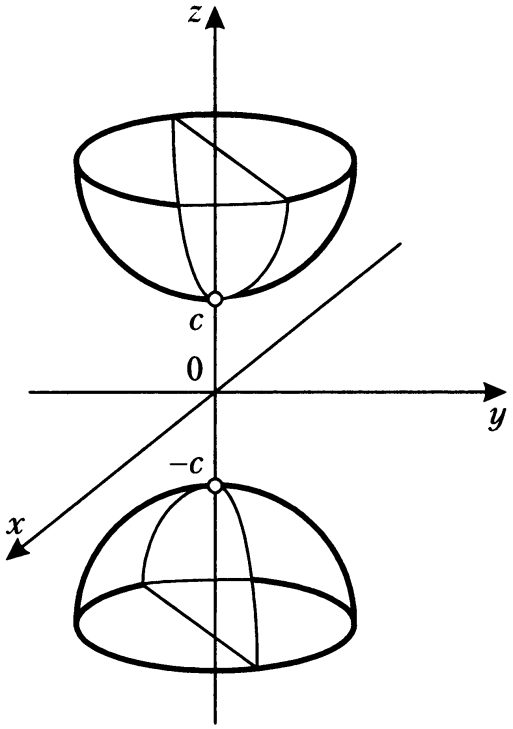


Рис. 6.16

- **эллиптического параболоида** (рис. 6.17)

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=2z,\quad p,\ q>0.$$

При $p=q$ параболоид называется *параболоидом вращения*;

- **гиперболического параболоида** (рис. 6.18)

$$\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=2z,\quad p,\ q>0;$$

- **конуса второго порядка** (рис. 6.19)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,\quad a,\ b,\ c>0;$$

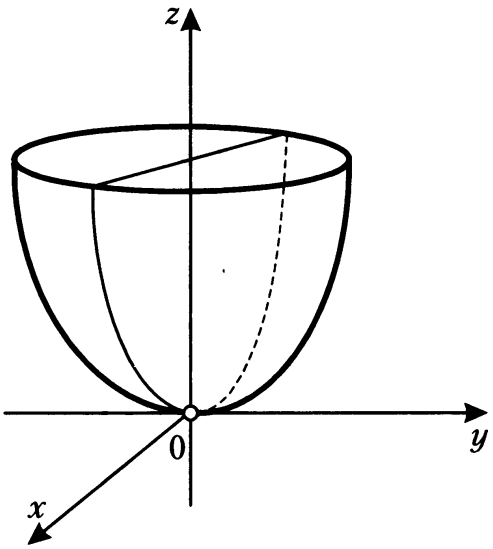


Рис. 6.17

- **цилиндров второго порядка.**

Поверхность, описываемая прямой, параллельной некоторому заданному направлению и пересекающей данную линию L, называется *цилиндрической*. При этом движущаяся прямая называется *образующей*, а прямая L — *направляющей* цилиндра. Если образующая цилиндра параллельна какой-то из ко-

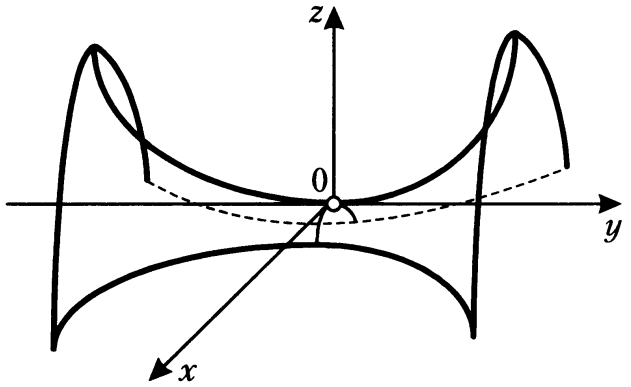


Рис. 6.18

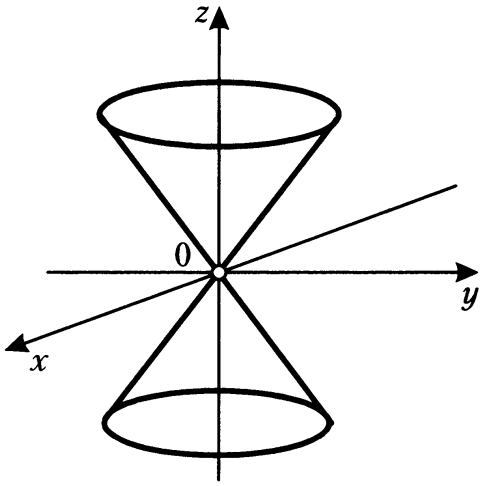


Рис. 6.19

ординатных осей, то цилиндрическая поверхность задается уравнением второго порядка с двумя переменными:

- $F(x, y) = 0$, образующая параллельна оси $0z$;
- $F(x, z) = 0$, образующая параллельна оси $0y$;
- $F(y, z) = 0$, образующая параллельна оси $0x$;

- **эллиптического цилиндра** (рис. 6.20)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0;$$

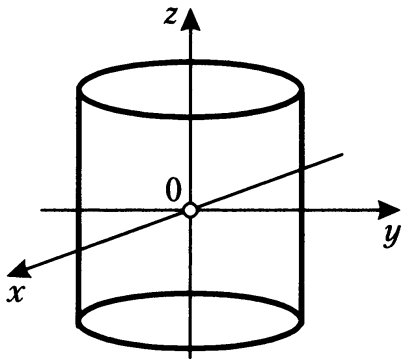


Рис. 6.20

- **гиперболического** (рис. 6.21) **и параболического** (рис. 6.22) **цилиндров**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0 \text{ и } y^2 = 2px, \quad p > 0.$$

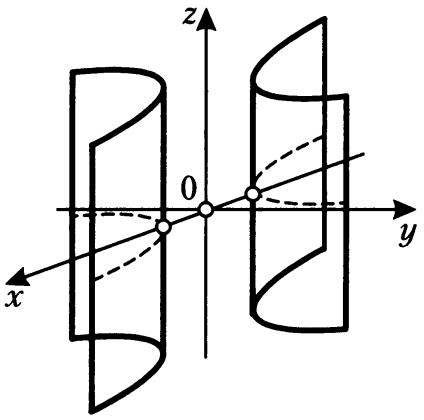


Рис. 6.21

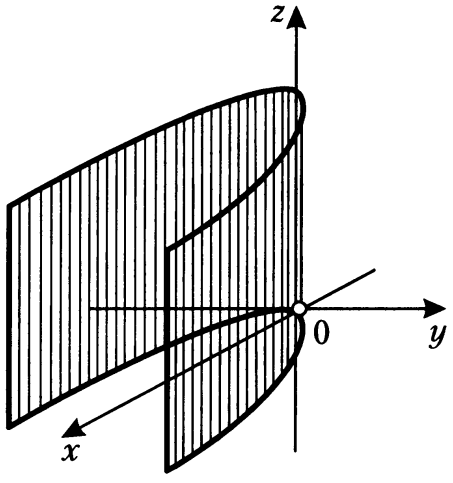


Рис. 6.22

Задачи для типовых расчетов

Плоскость в пространстве

Задача 6.1. Найдите косинус угла между плоскостями α_1 и α_2.

1. $\alpha_1: -x+2y-z+1=0$; $\alpha_2: y+3z-1=0$.
2. $\alpha_1: x+y-2z+4=0$; $\alpha_2: 2x-y+z-3=0$.
3. $\alpha_1: -x+2y-z+1=0$; $\alpha_2: y+3z-1=0$.
4. $\alpha_1: 2x+y-2z+3=0$; $\alpha_2: x+y+6=0$.
5. $\alpha_1: -3x+4y-7=0$; $\alpha_2: x+z-5=0$.
6. $\alpha_1: 3x-2y-4z+5=0$; $\alpha_2: 2y-z-3=0$.
7. $\alpha_1: x+2y-5z+2=0$; $\alpha_2: 2x+4y+2z-1=0$.
8. $\alpha_1: 3x+4y-7=0$; $\alpha_2: 2x+y+2z-1=0$.
9. $\alpha_1: x+2y-z+1=0$; $\alpha_2: -2x-4y+2z-7=0$.
10. $\alpha_1: x+2y+3z+2=0$; $\alpha_2: 2x-y-9=0$.
11. $\alpha_1: 2x-y+2z-7=0$; $\alpha_2: 3x+4y-z-1=0$.
12. $\alpha_1: x+2y+3z=0$; $\alpha_2: 2x-4y+2z-5=0$.
13. $\alpha_1: x-2y-z-2=0$; $\alpha_2: 2x-y+2z-4=0$.
14. $\alpha_1: x-2y-2z+3=0$; $\alpha_2: 4x-7z-5=0$.
15. $\alpha_1: x-2y+z-2=0$; $\alpha_2: x-y-z+3=0$.
16. $\alpha_1: x-2y+2z-8=0$; $\alpha_2: x+z-6=0$.
17. $\alpha_1: x+2y-5z-3=0$; $\alpha_2: 2x+4y+2z=0$.
18. $\alpha_1: x-2y-4z-2=0$; $\alpha_2: 2y-z-3=0$.
19. $\alpha_1: 2x+y+4z-1=0$; $\alpha_2: x+y-2=0$.
20. $\alpha_1: 3x+2y-z=0$; $\alpha_2: -x-4y-3z-4=0$.
21. $\alpha_1: 2x+y+2z-5=0$; $\alpha_2: -2x+4y-z+1=0$.
22. $\alpha_1: -2x+4y+3=0$; $\alpha_2: -x+2z-5=0$.
23. $\alpha_1: 2x-y-3z+3=0$; $\alpha_2: -x+y-7=0$.
24. $\alpha_1: x+2y-2z+4=0$; $\alpha_2: 2x-y-z+6=0$.
25. $\alpha_1: -3x+y-z+2=0$; $\alpha_2: -y-4z-1=0$.
26. $\alpha_1: x-y-4z-2=0$; $\alpha_2: -x-y+3z+2=0$.
27. $\alpha_1: -x+2y+3z-3=0$; $\alpha_2: x-4y+2z+3=0$.
28. $\alpha_1: x+y-5z+1=0$; $\alpha_2: 2x+4y-3z+1=0$.
29. $\alpha_1: x-5z-3=0$; $\alpha_2: 3x-5y-2z-2=0$.
30. $\alpha_1: x-2y-5z-4=0$; $\alpha_2: 2x-3y-2z+6=0$.

Задача 6.2. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку P и параллельной плоскости α.

1. $P(2;1,1)$, α: $3x+y-2z-1=0$.
2. $P(2;1;3)$, α: $x-4y+3z-3=0$.
3. $P(1;3;2)$, α: $x+y-z-3=0$.
4. $P(1;0;-1)$, α: $2x+y-5z-1=0$.

5. $P(3;\,-1;\,1)$, α: $3x+y-2z+1=0$.
6. $P(0;\,5;\,7)$, α: $3x+y-2z-1=0$.
7. $P(2;\,1;\,0)$, α: $x+y-2z=0$.
8. $P(3;\,2;\,1)$, α: $x+y-z-1=0$.
9. $P(-3;\,4;\,1)$, α: $2x-y-z-1=0$.
10. $P(-1;\,1;\,1)$, α: $5y-4z+2=0$.
11. $P(2;\,1;\,2)$, α: $x+y-2z=0$.
12. $P(3;\,-4;\,1)$, α: $x+y-z-1=0$.
13. $P(1;\,1;\,1)$, α: $x+y+2z-3=0$.
14. $P(-6;\,1;\,1)$, α: $x+3y-6=0$.
15. $P(0;\,2;\,1)$, α: $x+y-2z-5=0$.
16. $P(5;\,2;\,-1)$, α: $3x-y+z-4=0$.
17. $P(1;\,-2;\,1)$, α: $x-3y-z+7=0$.
18. $P(3;\,2;\,1)$, α: $x+y-z-1=0$.
19. $P(3;\,2;\,1)$, α: $2x-y-z+2=0$.
20. $P(1;\,-3;\,1)$, α: $x+2y-z+4=0$.
21. $P(0;\,1;\,1)$, α: $4x-y-z-6=0$.
22. $P(0;\,2;\,2)$, α: $x-5y+z+1=0$.
23. $P(3;\,0;\,2)$, α: $x+3y-z+2=0$.
24. $P(3;\,2;\,-1)$, α: $-x-y+z+7=0$.
25. $P(2;\,-2;\,1)$, α: $-x-y+5z=0$.
26. $P(2;\,3;\,0)$, α: $x-y+7z+4=0$.
27. $P(5;\,-2;\,1)$, α: $x+y+4z+1=0$.
28. $P(3;\,4;\,1)$, α: $x-5y+z+1=0$.
29. $P(3;\,-4;\,1)$, α: $2x+y-z+3=0$.
30. $P(0;\,1;\,-1)$, α: $4x-y-z-7=0$.

Задача 6.3. Найдите расстояние от точки M до плоскости α.

1. $M(1;\,0;\,-3)$, α: $2x-y-z=1$.
2. $M(1;\,2;\,-1)$, α: $2x+3y-6z=2$.
3. $M(1;\,-3;\,1)$, α: $2x+y-z=2$.
4. $M(3;\,-1;\,0)$, α: $x+2y-z=4$.
5. $M(2;\,1;\,-4)$, α: $5x+y-7z=2$.
6. $M(0;\,-2;\,1)$, α: $2x-y+2z=1$.
7. $M(1;\,2;\,-4)$, α: $2x+y+z=5$.
8. $M(4;\,2;\,-1)$, α: $2x-y-z=1$.
9. $M(-3;\,1;\,-2)$, α: $-3x-y+2z=1$.
10. $M(1;\,-1;\,2)$, α: $4x+4y-2z=3$.
11. $M(2;\,-2;\,1)$, α: $x+y-z=3$.
12. $M(1;\,-1;\,-1)$, α: $6x+2y-3z=2$.
13. $M(-2;\,1;\,3)$, α: $4x+y-z=1$.
14. $M(1;\,1;\,1)$, α: $2x+2y+z=4$.
15. $M(2;\,-1;\,-1)$, α: $2x+y-z=5$.
16. $M(2;\,3;\,-3)$, α: $3x-2y+6z=3$.
17. $M(4;\,0;\,1)$, α: $2x+y-2z=3$.
18. $M(1;\,3;\,-4)$, α: $3x-5y+4z=0$.
19. $M(0;\,-3;\,4)$, α: $x+y-z=4$.
20. $M(0;\,3;\,6)$, α: $2x-3y-6z=2$.
21. $M(5;\,1;\,-2)$, α: $3x-4y-5z=2$.
22. $M(4;\,0;\,-4)$, α: $2x-2y+2z=1$.
23. $M(3;\,1;\,-3)$, α: $3x-3y-3z=7$.
24. $M(3;\,0;\,2)$, α: $x-2y-2z=4$.
25. $M(3;\,1;\,-4)$, α: $2x-4y+5z=3$.
26. $M(1;\,5;\,-1)$, α: $x-2y-2z=2$.
27. $M(6;\,1;\,-1)$, α: $x-y-5z=3$.
28. $M(3;\,2;\,-1)$, α: $x+y+z=7$.
29. $M(-1;\,4;\,-1)$, α: $2x-2y+z=5$.
30. $M(1;\,0;\,3)$, α: $4x-2y-6z=5$.

Задача 6.4

1. Напишите уравнение плоскости, которая проходит через ось Ox и точку $M(0;\,-2;\,3)$.
2. Напишите уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(1;\,7;\,-5)$ и отсекает от осей координат положительные и равные отрезки.
3. Напишите уравнение плоскости, которая проходит через точки $M(1;\,2;\,0)$ и $N(2;\,1;\,1)$ параллельно вектору $\vec{a}=(3;\,0;\,1)$.
4. Даны $A(2;\,0;\,0)$, $B(5;\,3;\,0)$, $C(0;\,1;\,1)$, $D(-2;\,-4;\,1)$ — вершины тетраэдра $ABCD$. Найдите двугранный угол между гранями ABC и ABD.

5. Напишите уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2; -3; 1)$ параллельно векторам $\vec{a} = \{-3; 2; -1\}$ и $\vec{b} = \{1; 2; 3\}$.
6. Напишите уравнение плоскости, которая проходит через точки $A(2; 3; -1)$ и $B(1; 5; 3)$ перпендикулярно плоскости $3x - y + 3z + 15 = 0$.
7. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; -3; 5)$ перпендикулярно линии пересечения плоскостей $2x + y - 2z + 1 = 0$ и $x + y + z - 5 = 0$.
8. Напишите уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(1; 2; 0)$, $M_2(2; 1; 1)$, $M_3(3; 0; 1)$.
9. Плоскость проходит через ось $0z$ и составляет с плоскостью $2x + y - \sqrt{5}z = 0$ угол $\frac{\pi}{3}$. Найдите ее уравнение.
10. Напишите уравнение плоскости, параллельной оси $0y$ и проходящей через точки $A(-1; 2; 1)$ и $B(3; 0; 2)$.
11. Напишите уравнение плоскости, которая проходит через ось $0y$ и точку $M(2; -1; 3)$.
12. Из точки $P(2; -1; 3)$ опущен на плоскость перпендикуляр, его основание — точка $M(1; 2; 4)$. Найдите уравнение плоскости.
13. Напишите уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $4x - y + 3z - 1 = 0$ и $x + 5y - z + 2 = 0$ и точку $M(1; 1; 1)$.
14. Составьте уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к двум плоскостям, $2x - y + 5z + 3 = 0$ и $x + 3y - z - 7 = 0$.
15. Через точку $M(-5; 16; 12)$ проведены две плоскости: одна из них содержит ось $0x$, другая — ось $0y$. Вычислите угол между этими двумя плоскостями.
16. Напишите уравнение плоскости, которая проходит через линию пересечения плоскостей $4x - y + 3z - 6 = 0$ и $x + 5y - z + 10 = 0$ и перпендикулярна к плоскости $2x - y + 5z - 5 = 0$.
17. Найдите угол между плоскостью, которая проходит через точки $0(0; 0; 0)$, $A(a; -a; 0)$ и $B(a; a; a)$, и плоскостью $x0y$.
18. Напишите уравнение плоскости, параллельной оси $0z$ и проходящей через точки $A(2; 2; 0)$ и $B(4; 0; 0)$.
19. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1; -1; 2)$ и перпендикулярной к плоскостям $x - 2y + z - 4 = 0$ и $x + 2y - 2z + 4 = 0$.
20. Напишите уравнение плоскости, которая проходит через ось $0z$ и точку $M(2; -4; 3)$.
21. Напишите уравнение плоскости, параллельной оси $0x$ и проходящей через точки $A(0; 1; 3)$ и $B(2; 4; 5)$.
22. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-1; -2; 0)$ и $B(1; 1; 2)$ и перпендикулярной к плоскости $x + 2y + 2z - 4 = 0$.
23. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; -1; 2)$, $M_2(2; 1; 2)$ и $M_3(1; 1; 4)$.

24. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; 1; 1)$:
    1) перпендикулярно плоскости $2x + 4y + z - 5 = 0$;
    2) параллельно этой же плоскости.
25. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; -1; 1)$ перпендикулярно плоскостям $2x - y + 3z - 1 = 0$ и $x + 2y + z = 0$.
26. Вычислите расстояние между параллельными плоскостями, заданными уравнениями $-4x - 3y - 5z + 2 = 0$ и $4x + 3y + 5z - 5 = 0$.
27. Напишите уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(-3; 1; 0)$ и перпендикулярна плоскостям $2x - y - z = 0$ и $x + 3y - 2x - 1 = 0$.
28. Напишите уравнение плоскости, которая проходит через точки $M(0; 0; 2)$, $N(0; 1; 0)$ и $P(2; 1; 2)$.
29. Напишите уравнение плоскости, которая проходит через точки $P(0; 1; 0)$ и $Q(-1; 3; 2)$ и отсекает на оси абсцисс отрезок длиною вдвое больше, чем на оси ординат.
30. Напишите уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(1; -3; 2)$ и перпендикулярна линии пересечения плоскостей, $2x + y - 2z + 1 = 0$ и $x + y + z - 5 = 0$.

Прямая в пространстве

Задача 6.5. Прямая задана общим уравнением. Напишите ее канонические и параметрические уравнения.

1. $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0; \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + y + z - 4 = 0; \\ 2x - y - 3z + 1 = 0. \end{cases}$
3. $\begin{cases} x - y + z - 3 = 0; \\ x + 2y - 2z - 4 = 0. \end{cases}$
4. $\begin{cases} 3x - y + z - 4 = 0; \\ -2x + 2y - 5z = 0. \end{cases}$
5. $\begin{cases} 3x - y + 4z - 6 = 0; \\ x + y - 5z - 4 = 0. \end{cases}$
6. $\begin{cases} -x - 2y + 2z - 2 = 0; \\ x + 5y + 3z - 1 = 0. \end{cases}$
7. $\begin{cases} 2x - y + z - 2 = 0; \\ x - 2y + 3z - 2 = 0. \end{cases}$
8. $\begin{cases} 4x - 2y + 3z + 4 = 0; \\ x + 2y - 5z + 6 = 0. \end{cases}$
9. $\begin{cases} x - 4y + z + 4 = 0; \\ 2x + 3y + 4z + 7 = 0. \end{cases}$
10. $\begin{cases} 5x - 3y + z - 1 = 0; \\ x + 3y - 2z - 5 = 0. \end{cases}$
11. $\begin{cases} x - 4y + 3z - 4 = 0; \\ 2x + 4y - 5z + 1 = 0. \end{cases}$
12. $\begin{cases} -x - y + 3z - 5 = 0; \\ 3x + 2y - 5z + 3 = 0. \end{cases}$
13. $\begin{cases} 4x + y + z - 10 = 0; \\ x + 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$
14. $\begin{cases} x - y + z - 1 = 0; \\ 2x + 4y - z + 10 = 0. \end{cases}$
15. $\begin{cases} 6x - 3y + z - 3 = 0; \\ x + y + 5z - 5 = 0. \end{cases}$
16. $\begin{cases} 2x + y + 2z + 4 = 0; \\ -x - 3y - z + 3 = 0. \end{cases}$
17. $\begin{cases} -2x - y + z - 1 = 0; \\ x + 4y + z + 3 = 0. \end{cases}$
18. $\begin{cases} x - y - z - 2 = 0; \\ x - 2y + z + 4 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x+4y-z+1=0; \\ 2x+y+4z-3=0. \end{cases}$
20. $\begin{cases} 5x+3y+z-18=0; \\ 2y+z-9=0. \end{cases}$
21. $\begin{cases} 3x-y-5=0; \\ 2x+y-3=0. \end{cases}$
22. $\begin{cases} x+y-35=0; \\ x+2y-2z-7=0. \end{cases}$
23. $\begin{cases} 2x+2y+z-1=0; \\ x+z-1=0. \end{cases}$
24. $\begin{cases} 2x+2y+z+9=0; \\ x-y+3z-1=0. \end{cases}$
25. $\begin{cases} x-3y-2z-8=0; \\ x+y-z+3=0. \end{cases}$
26. $\begin{cases} 6x+3y-2z=0; \\ x+2y+6z-12=0. \end{cases}$
27. $\begin{cases} 3x+2y-3z-1=0; \\ x+y+z-7=0. \end{cases}$
28. $\begin{cases} 3x-2y+2z-2=0; \\ 5x+2y-2z+4=0. \end{cases}$
29. $\begin{cases} 5x-y+z-1=0; \\ 5x+2y-z+5=0. \end{cases}$
30. $\begin{cases} 3x+2y-z+5=0; \\ x+y+5z-1=0. \end{cases}$

Задача 6.6. Напишите канонические уравнения прямой, проходящей через точки A и B. Выясните, лежит ли точка P на этой прямой.

1. $A(1;2;2)$, $B(0;4;-4)$, $P(3;1;2)$.
2. $A(-2;3;1)$, $B(1;6;-1)$, $P(2;2;2)$.
3. $A(1;3;-2)$, $B(5;-1;2)$, $P(2;1;0)$.
4. $A(-1;2;7)$, $B(1;3;-7)$, $P(3;4;-7)$.
5. $A(5;-1;2)$, $B(3;2;5)$, $P(7;-4;-1)$.
6. $A(4;1;0)$, $B(1;2;2)$, $P(4;1;4)$.
7. $A(1;-2;1)$, $B(3;1;-1)$, $P(5;4;-3)$.
8. $A(-3;3;4)$, $B(3;1;1)$, $P(2;2;-2)$.
9. $A(3;-1;0)$, $B(1;0;-3)$, $P(5;-2;3)$.
10. $A(5;0;2)$, $B(1;3;-2)$, $P(-3;5;-6)$.
11. $A(2;-5;1)$, $B(4;3;-1)$, $P(0;2;5)$.
12. $A(2;-4;1)$, $B(-1;-3;2)$, $P(-4;-2;3)$.
13. $A(3;-2;-1)$, $B(4;-4;-3)$, $P(5;-6;-5)$.
14. $A(-3;4;-1)$, $B(1;3;-2)$, $P(4;7;2)$.
15. $A(-2;2;-2)$, $B(-1;5;1)$, $P(0;8;4)$.
16. $A(-5;1;-2)$, $B(-4;2;-1)$, $P(3;9;6)$.
17. $A(3;1;-4)$, $B(1;-5;2)$, $P(2;-2;5)$.
18. $A(3;-4;-1)$, $B(4;-3;0)$, $P(4;-7;-4)$.
19. $A(0;2;-4)$, $B(-1;3;-2)$, $P(2;0;-6)$.
20. $A(3;4;1)$, $B(4;3;7)$, $P(2;-6;-1)$.
21. $A(1;1;1)$, $B(-2;4;-2)$, $P(0;1;0)$.
22. $A(1;2;-3)$, $B(4;5;0)$, $P(2;3;-2)$.
23. $A(2;3;1)$, $B(2;5;2)$, $P(2;7;3)$.
24. $A(-1;-2;5)$, $B(1;0;7)$, $P(2;1;8)$.
25. $A(1;-5;-4)$, $B(4;6;-1)$, $P(3;0;1)$.

26. $A(3; -5; 2)$, $B(6; -2; 5)$, $P(2; -6; 1)$.
27. $A(2; -2; -3)$, $B(4; 1; -3)$, $P(7; 1; -2)$.
28. $A(-3; 1; 1)$, $B(0; -2; 4)$, $P(3; -5; 7)$.
29. $A(3; 1; -1)$, $B(-2; 3; 4)$, $P(1; 6; 2)$.
30. $A(-2; 1; -1)$, $B(1; 2; 6)$, $P(1; -4; 1)$.

Задача 6.7

1. Составьте канонические уравнения прямой, которая проходит через точку $M(1; -2; 3)$ перпендикулярно вектору $\vec{a} = \{9; -3; -1\}$ и пересекает прямую $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$.
2. Составьте канонические уравнения прямой, лежащей в плоскости $y0z$, проходящей через начало координат и перпендикулярной прямой $\frac{x+3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$.
3. Составьте канонические уравнения прямой, которая проходит через точку M(3; –2; 0) перпендикулярно прямой $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$ и расположена в плоскости $x0y$.
4. При каком значении λ прямые
$$\frac{x+2}{\lambda} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y - z = 0; \\ x - y - 5z - 8 = 0 \end{cases}$$
параллельны?
5. При каком значении D прямая
$$\begin{cases} 2x - y + 3z + D = 0; \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$$
проходит через начало координат?
6. Напишите канонические уравнения прямой, которая проходит через точку $M(2; 1; 3)$ и параллельна прямой $x = 3 + t$, $y = 3t$, $z = 2 - t$.
7. Даны вершины треугольника $A(1; 0; -1)$, $B(2; 1; 3)$, $C(0; -1; 1)$. Составьте параметрические уравнения высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.
8. При каком значении λ прямые
$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{\lambda} = \frac{z}{3} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0; \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0 \end{cases}$$
перпендикулярны?
9. Напишите параметрические уравнения прямой, которая проходит через точку $M(2; -1; 3)$ и параллельна прямой
$$\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0; \\ 3x + 2y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

10. Напишите канонические уравнения перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую $\frac{x-5}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-2}$.

11. Напишите параметрические уравнения прямой, которая проходит через точку $A(0;-2;1)$ и пересекает две данные прямые, $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$ и $\frac{x}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{1}$.

12. Пересекаются или нет прямые $\begin{cases}4x+z-1=0;\\ x-2y+3=0\end{cases}$ и $\begin{cases}3x+y-z+4=0;\\ y+2z-8=0?\end{cases}$

13. Проверьте, пересекаются ли прямые $\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-5}{4}$ и $\frac{x-6}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$.

14. Даны вершины треугольника $A(1;0;2)$, $B(-2;3;-1)$, $C(3;-2;4)$. Составьте канонические уравнения медианы, проведенной из вершины B на сторону AC.

15. Составьте канонические уравнения прямой, которая проходит через точку $A(1;-5;3)$ и образует с осями координат $0x$, $0y$ и $0z$ углы 60, 45 и 120° соответственно.

16. Напишите параметрические уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $A(-1;0;3)$ на прямую $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$.

17. Даны точки пересечения прямой с двумя координатными плоскостями $(x_1;\ y_1;\ 0)$ и $(x_2;\ 0;\ z_2)$. Вычислите координаты точки пересечения этой же прямой с третьей координатной плоскостью.

18. Укажите особенность в расположении прямой $\begin{cases}3y+2=0;\\ x-3y+2z+1=0.\end{cases}$

19. При каких значениях коэффициентов B и D прямая

$$\begin{cases}x-2y+z-9=0;\\ 3x+By+z+D=0\end{cases}$$

лежит в плоскости $x0y$?

20. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты в уравнении прямой

$$\begin{cases}Ax+By+Cz+D=0;\\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\end{cases}$$

чтобы она пересекала ось $0y$?

21. Укажите особенность в расположении прямой $\begin{cases}2x-3=0;\\ 4y+5=0.\end{cases}$

22. Напишите параметрические уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $M(-1;2;3)$ на ось $0z$.

23. Напишите канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-1;3;2)$ параллельно оси $0z$.

24. Найдите угол между прямыми $\begin{cases} x-y+z-4=0; \\ 2x+y-2z+5=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y+z-4=0; \\ 2x+3y-z-6=0. \end{cases}$

25. Составьте канонические уравнения прямой, которая проходит через точку $M(1;\ 2;\ -3)$ параллельно прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+2}{1}$.

26. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-4;\ 3;\ 0)$ параллельно прямой $\begin{cases} x-2y+z=4; \\ 2x+y-z=0. \end{cases}$

27. Составьте параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2;\ 3;\ -1)$ параллельно вектору $\vec{a}=\{5;\ -3;\ 2\}$.

28. Напишите канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1;\ -1;\ 0)$ и перпендикулярной к плоскости $2x-4y+z=3$.

29. Найдите угол между прямыми $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z}{\sqrt{2}}$ и $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+5}{\sqrt{2}}$.

30. Выясните, будут ли пересекаться прямые $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$ и

$$\begin{cases} x-2y-3z-4=0; \\ x-y-5z-2=0. \end{cases}$$

Прямая и плоскость в пространстве

Задача 6.8. Напишите канонические уравнения прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной плоскости α.

1. $A(1;\ 2;\ 3)$, α: $3x-2y-z-3=0$.
2. $A(2;\ 2;\ 2)$, α: $x-y-3z-4=0$.
3. $A(-1;\ -2;\ 6)$, α: $x+y-3z-2=0$.
4. $A(3;\ 0;\ 3)$, α: $2x+3y-4z=0$.
5. $A(-3;\ 5;\ -4)$, α: $4x-y+5z-1=0$.
6. $A(0;\ -1;\ -2)$, α: $2x+y+z-7=0$.
7. $A(-3;\ 4;\ 2)$, α: $4x+2y-z+1=0$.
8. $A(1;\ 2;\ 3)$, α: $3x-2y-z-3=0$.
9. $A(1;\ 2;\ 7)$, α: $-x+y-4z+5=0$.
10. $A(1;\ -2;\ -3)$, α: $-4x-y+5z+3=0$.
11. $A(-2;\ -3;\ 4)$, α: $2x+6y-2z+3=0$.
12. $A(4;\ -2;\ 1)$, α: $6x-3y+2z-2=0$.
13. $A(0;\ 1;\ 1)$, α: $x+y-z+4=0$.
14. $A(0;\ -2;\ -5)$, α: $x+3y-2z-1=0$.
15. $A(1;\ 4;\ -1)$, α: $7x+y-3z+2=0$.
16. $A(-1;\ 0;\ -1)$, α: $2x+2y-2z+7=0$.
17. $A(-1;\ -5;\ 1)$, α: $2x-y-4z+5=0$.
18. $A(6;\ 1;\ -6)$, α: $-x-3y+3z+5=0$.
19. $A(2;\ 1;\ 4)$, α: $4x+2y-3z+4=0$.
20. $A(3;\ -3;\ 1)$, α: $3x+2y-z+4=0$.
21. $A(1;\ -1;\ -1)$, α: $3x-3y+5z-4=0$.
22. $A(1;\ 1;\ -5)$, α: $x-2y+3z-2=0$.
23. $A(1;\ -4;\ -3)$, α: $6x-z-12=0$.
24. $A(-1;\ -3;\ 0)$, α: $4x+3y+z-4=0$.
25. $A(4;\ -4;\ 2)$, α: $-2x+y+1=0$.
26. $A(0;\ -3;\ -1)$, α: $6x-y-6z=0$.
27. $A(-2;\ -3;\ 4)$, α: $7x-y-z-7=0$.
28. $A(-2;\ 6;\ 2)$, α: $x+4y-5z-1=0$.
29. $A(-1;\ 2;\ -6)$, α: $x+5y+z-2=0$.
30. $A(3;\ -2;\ -1)$, α: $x+2y-3z+1=0$.

Задача 6.9. Найдите точку пересечения прямой l и плоскости α.

1. l: $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-4}{3}$, α: $x+3y+5z-42=0$.
2. l: $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-4}{5}=\dfrac{z-4}{2}$, α: $7x+y+4z-47=0$.
3. l: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-4}{3}$, α: $x-2y+z-9=0$.
4. l: $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{2}$, α: $3x+y-z+13=0$.
5. l: $\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z+1}{0}$, α: $2x-2y+3z+21=0$.
6. l: $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+2}{-3}$, α: $3x-y-z-3=0$.
7. l: $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{-4}$, α: $x+y+z-10=0$.
8. l: $\dfrac{x+1}{-4}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+2}{5}$, α: $2x+3y-2z-11=0$.
9. l: $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-6}{-3}$, α: $7x+2y+2z+2=0$.
10. l: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{4}$, α: $5x+3y+4z+23=0$.
11. l: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+3}{2}$, α: $2x-y+4z=0$.
12. l: $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+4}{-3}$, α: $17x-4y-z+6=0$.
13. l: $\dfrac{x-7}{5}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+4}{3}$, α: $3x-9y+z+1=0$.
14. l: $\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-5}{4}$, α: $2x+2y-z+7=0$.
15. l: $\dfrac{x-5}{0}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{3}$, α: $2x+y+3z-20=0$.
16. l: $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+1}{-3}$, α: $x+y+z-7=0$.
17. l: $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-6}{-2}$, α: $x+y+13z-26=0$.
18. l: $\dfrac{x+3}{7}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$, α: $2x+11y-2z+1=0$.
19. l: $\dfrac{x+5}{4}=\dfrac{y-5}{-3}=\dfrac{z+1}{2}$, α: $2x+3y+2z+9=0$.
20. l: $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-3}{7}$, α: $2x+2y+z-26=0$.

21. l: $\frac{x-4}{-2}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-6}{-3}$, α: $5x+3y+2z-28=0$.

22. l: $\frac{x}{-4}=\frac{y}{-3}=\frac{z-7}{3}$, α: $x+2y+2z-6=0$.

23. l: $\frac{x-1}{7}=\frac{y-3}{-5}=\frac{z-8}{-2}$, α: $x+3y+5z-32=0$.

24. l: $\frac{x-5}{1}=\frac{y+6}{2}=\frac{z-7}{3}$, α: $2x+5y+6z-22=0$.

25. l: $\frac{x+3}{-2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+4}{-3}$, α: $4x+5y+6z+4=0$.

26. l: $\frac{x-3}{3}=\frac{y-7}{7}=\frac{z-4}{4}$, α: $-6x+3y+35z=0$.

27. l: $\frac{x-2}{5}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-2}{5}$, α: $x+4y+z-2=0$.

28. l: $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{0}$, α: $5x+4y+5z-4=0$.

29. l: $\frac{x}{6}=\frac{y+6}{-3}=\frac{z}{-4}$, α: $2x+3y+2z+23=0$.

30. l: $\frac{x-1}{-6}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+1}{4}$, α: $3x+3y+5z-15=0$.

Задача 6.10

1. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1; 1; 1)$ и $N(-1; 1; -1)$ параллельно прямой, проходящей через точки $A(5; -2; 3)$ и $B(6; 1; 0)$.
2. Составьте уравнение плоскости, проходящей через перпендикуляры, опущенные из точки $A(2; 0; 1)$ на плоскости $x - 3y + 2z = 0$ и $2x - y + 2z = 0$.
3. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; -1; 3)$ перпендикулярно прямой $\frac{x+1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}$.
4. Напишите канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2; 3; -1)$ и перпендикулярной к плоскости $2x + 4y - 3z = 2$.
5. При каком значении λ прямая $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{\lambda}=\frac{z-3}{3}$ параллельна плоскости $2x + y - z = 0$?
6. При каком значении коэффициента a плоскость $ax+2y-z+3=0$ параллельна прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}$?
7. При каких значениях коэффициентов a и b плоскость $ax+by-2z+1=0$ перпендикулярна прямой $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{-1}$?
8. Даны точки $A(1; 3; -2)$ и $B(7; -4; 4)$. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку B и перпендикулярной к отрезку AB.

9. При каких значениях a и b прямая $\frac{x+a}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+2}{-1}$ лежит в плоскости $bx+2y-z+1=0$.
10. Напишите уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{3}$ и точку $M(3;\ 4;\ 0)$.
11. Найдите проекцию точки $A(2;\ 3;\ 4)$ на прямую $x=y=z$.
12. Принадлежит ли прямая $\frac{x-13}{8}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$ плоскости $x+2y-4z+1=0$?
13. Найдите угол между прямой $\begin{cases}x+y+z-2=0;\\2x+y-z-1=0\end{cases}$ и плоскостью, проходящей через точки $A(2;\ 3;\ -1)$, $B(1;\ 1;\ 0)$ и $C(0;\ -2;\ 1)$.
14. Составьте параметрические уравнения прямой, проходящей через точки пересечения плоскости $x-3y+2z+1=0$ с прямыми $\frac{x-5}{5}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$ и $\frac{x-3}{4}=\frac{y+4}{-6}=\frac{z-5}{2}$.
15. Составьте канонические уравнения прямой, которая проходит через точку $A(4;\ 0;\ -1)$ и пересекает прямые $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{3}$ и $\frac{x}{5}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$.
16. Найдите точку, симметричную точке $A(3;\ -1;\ 4)$ относительно прямой
$$\begin{cases}2x-2y+z-3=0;\\2x+y-2z+3=0.\end{cases}$$
17. Найдите угол между прямой, которая проходит через точки $A(-1;\ 0;\ -5)$ и $B(1;\ 2;\ 0)$, и плоскостью $x-3y+z+5=0$.
18. Найдите основание перпендикуляра, опущенного из точки $A(-1;\ 3;\ 2)$ на плоскость $2x-y+z+3=0$.
19. Проверьте, что прямые $\frac{x}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{2}$ и $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{1}$ пересекаются. Найдите уравнение плоскости, в которой они лежат.
20. Напишите канонические уравнения прямой, которая проходит через точку $M(3;\ -2;\ -4)$ параллельно плоскости $3x-2y-3z-7=0$ и пересекает прямую
$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-1}{2}.$$
21. При каком значении λ плоскость $5x-3y+\lambda z+1=0$ будет параллельна прямой $\begin{cases}x-4z-1=0;\\y-3z+2=0?\end{cases}$
22. Найдите расстояние от точки $A(2;\ 3;\ -1)$ до прямой $\begin{cases}2x-2y+z+3=0;\\3x-2y+2z+17=0.\end{cases}$

23. Напишите уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(1; -1; 2)$ и которая параллельна прямым $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{1}$ и $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{3}$.

24. Найдите проекцию точки $M(3; 1; -1)$ на плоскость $x + 2y + 3z - 30 = 0$.

25. Напишите уравнение плоскости, проходящей через прямые $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$.

26. Найдите точку B, симметричную точке $A(2; 0; 1)$ относительно прямой $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$.

27. Напишите уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$ и перпендикулярной плоскости $2x + 3y - z = 4$.

28. Найдите точку B, симметричную точке $A(1; 2; 0)$ относительно плоскости $2x - 3y + 5z = 5$.

29. Напишите уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+4}{-1}$ перпендикулярно плоскости $3x + y - 2z + 5 = 0$.

30. Напишите уравнение плоскости, которая проходит через прямую $x = 2t + 1$, $y = -t + 2$, $z = 3t - 2$ и параллельна прямой $\frac{x}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{2}$.

Кривые и поверхности в пространстве

Задача 6.11. Нарисуйте пространственные линии, заданные пересечением двух поверхностей, установив предварительно, какие это поверхности. В тех случаях, когда это необходимо, приведите уравнения поверхностей к каноническому виду.

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5; \\ x + z = 3. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x^2 + z^2 - y^2 = 1; \\ x = 3. \end{cases}$
3. $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2; \\ x + y + z = 2. \end{cases}$
4. $\begin{cases} x^2 + z^2 + y^2 = 4; \\ z = x^2 + y^2. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1; \\ x + y + z = 2. \end{cases}$
6. $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 4; \\ y = 3. \end{cases}$
7. $\begin{cases} x^2 = z^2 + y^2; \\ x = 2. \end{cases}$
8. $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2; \\ x + y + z = 2. \end{cases}$
9. $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2; \\ 2x + 3y = 6. \end{cases}$
10. $\begin{cases} 2y^2 + z^2 - 2x - 4 = 0; \\ y - x - 2 = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2y^2 + z^2 - 2x - 4 = 0; \\ x = 6. \end{cases}$

12. $\begin{cases} y^2 + 4x^2 - 3z - 4 = 0; \\ z = 4. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4; \\ x^2 + y^2 = 3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 8; \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6z; \\ x^2 + y^2 = 6. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 49; \\ y = \sqrt{13}. \end{cases}$

17. $\begin{cases} y^2 + y^2 + z^2 = 36; \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$

18. $\begin{cases} y^2 + z^2 = x; \\ x - 4 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{36} + \dfrac{z^2}{25} = 1; \\ z + 3 = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{32} - \dfrac{y^2}{18} + \dfrac{z^2}{2} = 1; \\ z + 1 = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{4} = 1; \\ x + 2 = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{25} = 1; \\ z - 4 = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{9} = 1; \\ x - 4 = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} -\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{49} + \dfrac{z^2}{4} = 1; \\ y = \sqrt{13}. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{25} = 1; \\ x = \sqrt{7}. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x^2 + y^2 = x; \\ x + 2y - z = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{4} = 1; \\ x + 2z = 4. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z + 4 = 0; \\ z = 4. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = -5; \\ y = 2. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x^2 + z^2 = 6y^2; \\ x + y = 1. \end{cases}$

Задача 6.12. Нарисуйте область, ограниченную заданными поверхностями.

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4; \\ 3z = x^2 + y^2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4; \\ z = x^2 + y^2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4x; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 16. \end{cases}$

4. $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2; \\ x + y = 3; \\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} z = 4 - x + y; \\ y = x^2; \\ y = x,\ z = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4; \\ x^2 + z^2 = 4. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4z = x^2 + y^2; \\ x + y = 4 \\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} z^2 + y^2 = 9; \\ x^2 + z^2 = 9. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2; \\ z^2 = 2x. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x = x^2 + y^2; \\ 6x = x^2 + y^2; \\ z = x + 3y,\ z = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x + 3y = 1; \\ z = \dfrac{1}{4}y^2; \\ x = 0,\ z = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x + 2y = 6; \\ z = 4 - y^2; \\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x + z = 3; \\ y = \sqrt{x}; \\ y = 2\sqrt{x},\ z = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} z = x^2 + y^2; \\ y = x^2; \\ y = 3,\ z = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} z = 2y; \\ z = y; \\ x = y^2,\ y = 1. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2 + y^2 = z; \\ z^2 = 4y. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3z; \\ y^2 + 3z - 6 = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4x; \\ z^2 = 4 - x. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x^2 + z^2 = y^2; \\ x^2 + z^2 + (y-2)^2 = 4. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x^2 + z^2 + y^2 - 4x = 0; \\ x^2 \le z^2 + y^2. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x^2 + z^2 + y^2 - 2y = 0; \\ x^2 + z^2 \le (y-1)^2. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 8z^2 = 4; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

23. $\begin{cases} y^2 + z^2 = 4; \\ z = y^2,\ z = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x^2 + z^2 = 4; \\ y = 2x,\ y = 0,\ z = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16; \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x^2 + z^2 = 4; \\ y = 2x,\ y = 0,\ z = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 36; \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2z; \\ z = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 4 - x^2 - y^2 = z; \\ z = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x^2 + z^2 = 9; \\ x^2 + z^2 = y,\ y = 0. \end{cases}$

ГЛАВА 7 Предел и непрерывность функций одной переменной

Окрестность точки

Окрестностью радиусом $h > 0$ (или *h-окрестностью*) конечной точки x_0 называется множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < h$, то есть множество $(x_0 - h;\ x_0 + h)$ (рис. 7.1). Обозначение окрестности — $U_h(x_0)$.

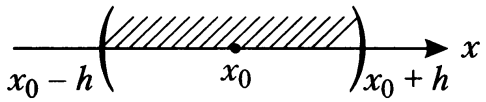


Рис. 7.1

Проколотой *h-окрестностью* $(h > 0)$ конечной точки x_0 называется множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < h$, то есть множество $(x_0 - h; x_0) \cup (x_0; x_0 + h)$ (рис. 7.2). Обозначение — $\dot{U}_h(x_0)$.

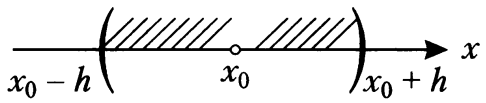


Рис. 7.2

Пусть $h > 0$, тогда h-окрестностью точки $(+\infty)$ называется множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $x > h$, то есть множество $(h; +\infty)$ (рис. 7.3). Обозначение — $U_h(+\infty)$.

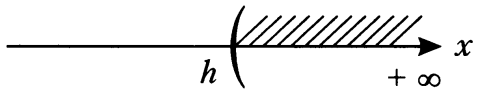


Рис. 7.3

Пусть $h > 0$, тогда h-окрестностью точки $(-\infty)$ называется множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $x < -h$, то есть множество $(-\infty; -h)$ (рис. 7.4). Обозначение $-U_h(-\infty)$.

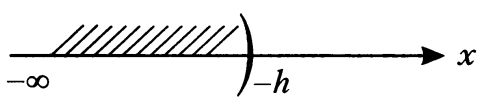


Рис. 7.4

Точка x_0 называется *предельной точкой* множества X, если в любой проколотой окрестности точки x_0 содержится хотя бы одна точка данного множества X.

Определение предела функции

Пусть задана функция $f(x)$, X — ее область определения, x_0 — предельная точка множества X.

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0 (или при $\to x_0$), если для любой U_ε-окрестности точки A существует U_δ-окрестность точки x_0, такая, что для всех x из области определения X и проколотой $\dot{U}_\delta$-окрестности точки x_0 значения функции $f(x)$ принадлежат U_ε-окрестности точки A (определение предела функции по Коши). Обозначение — $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \underset{x\to x_0}{\to} A$.

Запишем это определение в другой форме, используя символы:

- $\forall$ — для любого;
- $\exists$ — существует (найдется);
- $:$ — такая что;
- $\Rightarrow$ — следует;
- $\Leftrightarrow$ — равносильно:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall U_\varepsilon(A)\ \exists U_\delta(x_0) : \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \cap X \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Если известно, что x_0 и A — конечные числа или равны $\pm\infty$, то можно дать определение предела функции, заменив записи $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ и $f(x) \in U_\varepsilon(A)$ соответствующими неравенствами.

Рассмотрим некоторые случаи значений x_0 и A.

Пусть x_0 и A — конечные числа, тогда

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0\ : \forall x \in X;\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Иными словами, число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого положительного числа ε существует число $\delta > 0$, зависящее от ε, такое, что для любых $x \in X$ и удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ (определение предела функции на языке «$\varepsilon - \delta$»).

На рис. 7.5 проиллюстрировано определение предела функции $f(x)$ при $x \to x_0$. Для построения этого рисунка необходимо выполнить следующие действия:

1) построить график функции $y = f(x)$ и отметить точки x_0 и A;
2) построить окрестность точки A, выбрав произвольное число $\varepsilon > 0$;
3) по точкам $A + \varepsilon$, $A - \varepsilon$ и графику функции построить δ-окрестность точки x_0. Расстояния от точки x_0 до точек $x_0 + \delta$ и $x_0 - \delta$ должны быть равными, поэтому из двух полученных отрезков следует взять меньший и отложить его в обе стороны от точки x_0;
4) взять произвольную точку $x \neq x_0$, принадлежащую окрестности точки x_0, и по графику функции найти значение $f(x)$, которое должно попасть в построенную окрестность точки A.

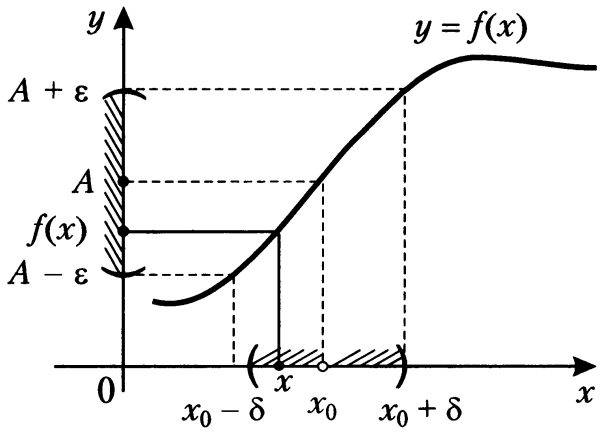


Рис. 7.5

Пусть x_0 — конечное число, $A = +\infty$ (рис. 7.6), тогда

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ : \forall x \in X; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon.$$

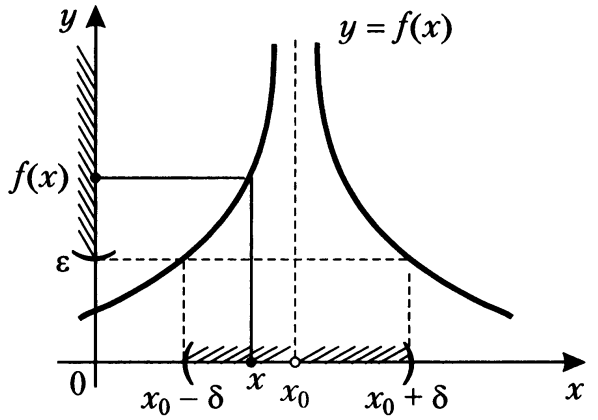


Рис. 7.6

Пример 7.1. Доказать, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$.

Решение: областью определения функции является множество R, для которого $+\infty$ есть предельная точка. Покажем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ : \forall x > \delta \Rightarrow \left| \left(\frac{1}{2}\right)^x - 0 \right| < \varepsilon.$$

На рис. 7.7 изображен график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и проиллюстрировано определение предела.

Рассмотрим равносильные неравенства

$$\left| \left(\frac{1}{2}\right)^x - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x < \varepsilon \Leftrightarrow x > \log_{\frac{1}{2}} \varepsilon.$$

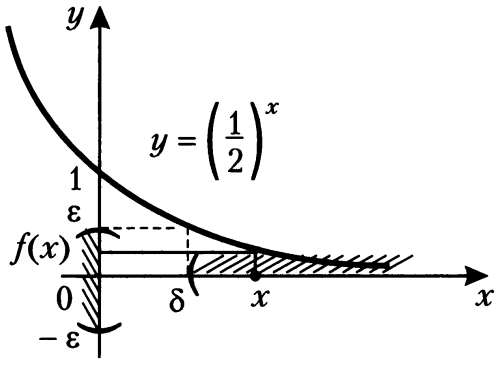


Рис. 7.7

Если взять $0 < \varepsilon < 1$, то $\log_{\frac{1}{2}} \varepsilon > 0$, и при $\delta(\varepsilon) = \log_{\frac{1}{2}} \varepsilon$ будет выполнено:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) = \log_{\frac{1}{2}} \varepsilon > 0 \ : \forall x > \delta \Rightarrow \left| \left(\frac{1}{2}\right)^x - 0 \right| < \varepsilon,$$

то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) = \log_{\frac{1}{2}} \varepsilon > 0$, что при $x > \log_{\frac{1}{2}} \varepsilon = \delta$ выполняется неравенство

$$\left| \left(\frac{1}{2}\right)^x - 0 \right| < \varepsilon,$$

а это и доказывает, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$.

Односторонние пределы

Правосторонней h-окрестностью точки x_0 называется множество точек x, таких, что $x \in (x_0;\ x_0 + h)$, где $h > 0$ (рис. 7.8). Обозначение — $U_h^+(x_0)$.

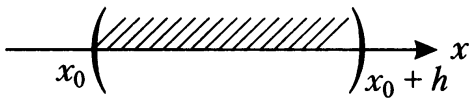


Рис. 7.8

Левосторонней *h-окрестностью* точки x_0 называется множество точек x, таких, что $x \in (x_0 - h;\ x_0)$, где $h > 0$ (рис. 7.9). Обозначение — $U_h^-(x_0)$.

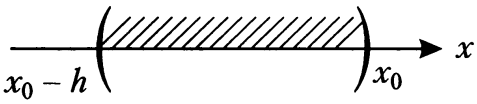


Рис. 7.9

Сформулируем определения правостороннего и левостороннего пределов в терминах окрестностей.

Число A называется *правосторонним пределом функции* $f(x)$ при $x \to x_0 + 0$ (x стремится к x_0 справа), если для любой U_ε-окрестности точки A существует U_δ-окрестность точки x_0, такая, что для любых x из области определения X и правосторонней U_δ-окрестности точки x_0 соответствующие значения функции $f(x)$ принадлежат U_ε-окрестности точки A:

$$A = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \Leftrightarrow \forall U_\varepsilon(A) \ \exists U_\delta(x_0) \ : \forall x \in U_\delta^+(x_0) \cap X \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Число A называется *левосторонним пределом функции* $f(x)$ при $x \to x_0 - 0$ (x стремится к x_0 слева), если для любой U_ε-окрестности точки A существует U_δ-окрестность точки x_0, такая, что для любых x из области определения X и левосторонней U_δ-окрестности точки x_0 соответствующие значения функции $f(x)$ принадлежат U_ε-окрестности точки A:

$$A = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \Leftrightarrow \forall U_\varepsilon(A) \ \exists U_\delta(x_0) \ : \forall x \in U_\delta^-(x_0) \cap X \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Если число A конечное, то можно дать равносильные определения односторонних пределов на языке «$\varepsilon - \delta$»:

$$A = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \;\; : \forall x \in (x_0; x_0 + h) \cap X \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon;$$

$$A = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \;\; : \forall x \in (x_0 - h; x_0) \cap X \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Пример 7.2. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 0+0} \log_2 x = -\infty$.

Решение: областью определения функции является множество $(0 + \infty)$, для которого 0 есть предельная точка. Покажем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \;\; : \forall\, 0 < x < \delta \Rightarrow \log_2 x < -\varepsilon.$$

На рис. 7.10 изображен график функции $y = \log_2 x$ и проиллюстрировано определение предела.

Рассмотрим равносильные неравенства

$$\log_2 x < -\varepsilon \Leftrightarrow 0 < x < 2^{-\varepsilon}.$$

Если принять $\delta(\varepsilon) = 2^{-\varepsilon}$, то будет выполнено:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta(\varepsilon) = 2^{-\varepsilon} \;\; : \forall\, 0 < x < \delta = 2^{-\varepsilon} \Rightarrow \log_2 x < -\varepsilon,$$

а это и доказывает, что $\lim\limits_{x \to 0+0} \log_2 x = -\infty$.

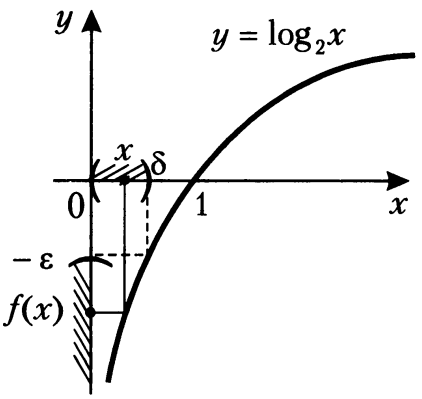


Рис. 7.10

Теоремы о пределах функции. Неопределенности

При вычислении пределов функций необходимо знать следующие теоремы:

$$\lim_{x \to x_0} = C = C, \tag{7.1}$$

где $C = \text{const}$;

$$\lim_{x \to x_0} Cf(x) = C \lim_{x \to x_0} f(x), \tag{7.2}$$

где $C = \text{const}$.

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, то

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B; \tag{7.3}$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B; \tag{7.4}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \tag{7.5}$$

где $B \neq 0$;

$$\lim_{x \to x_0} (f(x))^{g(x)} = (\lim_{x \to x_0} f(x))^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}. \tag{7.6}$$

Если $f(x)$ — элементарная функция, то в любой точке ее области определения имеет место равенство

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x). \tag{7.7}$$

Рассмотрим все возможные случаи, которые могут встретиться при вычислении пределов. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$.

Вычисление предела суммы $f(x)+g(x)$.

1. A, B — конечные числа $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=A+B$.
2. $A=+\infty$, $B=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=[+\infty+\infty]=+\infty$.
3. $A=-\infty$, $B=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=[-\infty-\infty]=-\infty$.
4. $A=\infty$, B — конечное число $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=[\infty+B]=\infty$.
5. $A=+\infty$, $B=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=[+\infty-\infty]$.

Последнее выражение не определено, его принято называть *неопределенностью вида* $[\infty-\infty]$.

Пример 7.3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+5-1)$.

Решение: из формул (7.1)–(7.4) следует, что

$$\lim_{x\to 1}(3x^2+5-1)=3(\lim_{x\to 1}x)^2+5\lim_{x\to 1}x-\lim_{x\to 1}1=3\cdot 1^2+5\cdot 1-1=7.$$

Вычисление предела произведения $f(x)\cdot g(x)$.

1. A, B — конечные числа $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=A\cdot B$.
2. $A\neq 0$, $B=\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=[A\cdot\infty]=\infty$.
3. $A=0$, $B=\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=[0\cdot\infty]$ — *неопределенность вида* $[0\cdot\infty]$.
4. $A=\infty$, $B=\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=[\infty\cdot\infty]=\infty$.

Пример 7.4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(e^{1-x}\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}\right)$.

Решение: из формул (7.1)–(7.4) и (7.7) следует, что

$$\lim_{x\to 1}\left(e^{1-x}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right)=e^{\lim\limits_{x\to 1}1-\lim\limits_{x\to 1}x}\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\lim_{x\to 1}x\right)=e^{1-1}\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)=[1\cdot(+\infty)]=+\infty.$$

Вычисление предела отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

1. A, B — конечные числа, $B\neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$.
2. $A\neq 0$, $B=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{A}{0}\right]=\infty$.
3. A — конечное число, $B=\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{A}{\infty}\right]=0$.
4. $A=\infty$, B — конечное число $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{\infty}{B}\right]=\infty$.
5. $A=0$, $B=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$ — *неопределенность вида* $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.
6. $A=\infty$, $B=\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ — *неопределенность вида* $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Пример 7.5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x+1}{2x^2-x}$.

Решение: из формул (7.1)–(7.5) следует, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x+1}{2x^2-x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}x^2+3\lim\limits_{x\to 0}x+1}{2\lim\limits_{x\to 0}x^2-\lim\limits_{x\to 0}x}=\frac{0+3\cdot 0+1}{2\cdot 0-0}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty.$$

Вычисление предела функции $(f(x))^{g(x)}$.

1. A, B — конечные числа $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=A^B$.
2. $0<A<1, B=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=[A^{+\infty}]=0$.
3. $A>1, B=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=[A^{+\infty}]=+\infty$.
4. $0<A<1, B=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=[A^{-\infty}]=+\infty$.
5. $A>1, B=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=[A^{-\infty}]=0$.
6. $A=1, B=\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=[1^{\infty}]$ — *неопределенность вида* $[1^{\infty}]$.
7. $A=0, B=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=[0^0]$ — *неопределенность вида* $[0^0]$.
8. $A=\infty, B=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=[\infty^0]$ — *неопределенность вида* $[\infty^0]$.
9. A — конечное число, $B=\pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=[A^{\pm\infty}]$ — не существует.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1 Из приведенных решений примеров 7.3–7.5 видно, что на практике в простейших случаях вычисление предела сводится к подстановке в данное выражение значения $x=x_0$. Результат подстановки записывают в квадратных скобках.

Пример 7.6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(\dfrac{x+1}{2x^2+x}\right)^{\frac{1}{x-1}}$.

Решение: из теорем о пределе функции следует, что

$$\lim_{x\to 1+0}\left(\frac{x+1}{2x^2+x}\right)^{\frac{1}{x-1}}=\left[\left(\frac{1+1}{2\cdot 1^2+1}\right)^{\frac{1}{1-1}}\right]=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{\left[\frac{1}{+0}\right]}\right]=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{+\infty}\right]=0.$$

Вычисление пределов с помощью алгебраических преобразований

Часто, прежде чем перейти к пределу, приходится проводить алгебраические преобразования данного выражения. В последующих примерах покажем, какими приемами следует пользоваться для раскрытия неопределенностей.

Пример 7.7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-1}\right)$.

Решение: подстановка в данное выражение предельного значения аргумента $x=1$ приводит к неопределенности вида $[\infty-\infty]$:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)=\left[\frac{2}{0}-\frac{1}{0}\right]=[\infty-\infty].$$

Следовательно, прежде чем перейти к пределу, необходимо данное выражение преобразовать. Приведем дроби к общему знаменателю и найдем разность дробей:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{2(x+1)-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{x^2-1}.$$

Подставив в полученное выражение $x=1$, получаем:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{x^2-1}=\left[\frac{3}{0}\right]=\infty.$$

Пример 7.8. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{2\cdot x}$.

Решение: после подстановки в данное выражение $x=1$ имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, то есть

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Чтобы раскрыть неопределенность, умножаем числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}$, сопряженное числителю, и сокращаем дробь:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x})(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}{2x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{2x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}=-\frac{1}{4}.$$

Пример 7.9. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}$.

Решение: **Способ 1.** Под знаком предела опять имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Умножаем числитель на выражение, с помощью которого можно получить разность кубов. Таким множителем является неполный квадрат суммы, то есть $(\sqrt[3]{1+2x})^2+\sqrt[3]{1+2x}+1$. На этот множитель надо умножить и знаменатель:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{1+2x}-1)((\sqrt[3]{1+2x})^2+\sqrt[3]{1+2x}+1)}{x((\sqrt[3]{1+2x})^2+\sqrt[3]{1+2x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x-1}{x((\sqrt[3]{1+2x})^2+\sqrt[3]{1+2x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x((\sqrt[3]{1+2x})^2+\sqrt[3]{1+2x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{(\sqrt[3]{1+2x})^2+\sqrt[3]{1+2x}+1}=\frac{2}{1+1+1}=\frac{2}{3}.$$

Способ 2 (*метод подстановки*). Примем $1+2x=t^3$. Тогда $x=\dfrac{t^3-1}{2}$ и $t\to 1$ при $x\to 0$. Удобно использовать следующую форму записи:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{c}1+2x=t^3\\ x=\dfrac{t^3-1}{2}\\ x\to 0\Rightarrow t\to 1\end{array}\right|=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{\dfrac{t^3-1}{2}}=$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{2(t-1)}{(t-1)(t^2+t+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{2}{t^2+t+1}=\frac{2}{3}.$$

Отдельно рассмотрим предел отношения двух многочленов при $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}.$$

Покажем, что многочлены $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ стремятся к ∞ при $x\to\infty$. Для этого вынесем в числителе и в знаменателе за скобку старшие степени x:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n\cdot\left(a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+\ldots+\dfrac{a_1}{x^{n-1}}+\dfrac{a_0}{x^n}\right)}{x^m\cdot\left(b_m+\dfrac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\dfrac{b_1}{x^{m-1}}+\dfrac{b_0}{x^m}\right)}.$$

Так как все слагаемые вида $\dfrac{a_k}{x^{n-k}}$ $(0<k<n-1)$ и $\dfrac{b_k}{x^{m-k}}$ $(0<k<m-1)$ стремятся к нулю при $x\to\infty$, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n\cdot a_n}{x^m\cdot b_m}=\left[\frac{\infty\cdot a_n}{\infty\cdot b_m}\right]=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Таким образом, отношение двух многочленов при $x\to\infty$ представляет собой неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, и предел этого отношения равен пределу отношения слагаемых со старшими степенями:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2 При $m=n$ предел отношения двух многочленов при $x\to\infty$ равен $\dfrac{a_n}{b_m}$ — отношению коэффициентов слагаемых со старшими степенями, при $m>n$ предел равен нулю, при $m<n$ предел равен бесконечности.

Пример 7.10. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4\cdot x^3}{x^3+3\cdot x-x^3}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x^3}{x^3+3x-x^2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x^3}{x^3}=-4$.

Рассмотрим раскрытие неопределенности вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ в случае отношения двух многочленов:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Числитель и знаменатель данной дроби при $x=a$ обращаются в нуль, поэтому многочлены $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ делятся без остатка на двучлен $(x-a)$. Следовательно, надо числитель и знаменатель дроби разложить на множители и сократить дробь.

Пример 7.11. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-4x^2+3x}$.

Решение: в данном случае имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^3-4x^2+3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to1}\frac{x-2}{x(x-3)}=\frac{1}{2}.$$

Пример 7.12. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2x}{x^2-1}\right]$.

Решение:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2x}{x^2-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to1}\frac{x+1-2x}{x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{-1}{x+1}=-\frac{1}{2}.$$

Пример 7.13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$.

Решение: умножая числитель и знаменатель на сопряженное выражение и учитывая, что $\sqrt{x^2}=-x$ для $x<0$, получим:

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}{(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-x^2+x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}}=$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)} - x\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{-2x} = -1.$$

Два замечательных предела

В дальнейшем будем пользоваться формулами первого и второго замечательных пределов:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \tag{7.8}$$

$$\lim_{\alpha\to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e. \tag{7.9}$$

Пример 7.14. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(x \cdot \operatorname{ctg} x)$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}(x \cdot \operatorname{ctg} x) = [0\cdot\infty] = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$

Пример 7.15. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$.

Решение: воспользуемся формулой $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$, тогда

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x} = [1^{\infty}] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}} = e,$$

согласно формуле (7.9), так как $\alpha = \operatorname{ctg} x \to 0$ при $x \to \frac{\pi}{2}$.

Пример 7.16. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2x}$.

Решение: предел основания $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x} = 1$, а показатель степени $2x \to \infty$. Значит, имеем неопределенность вида $[1^{\infty}]$. Для того чтобы раскрыть эту неопределенность, представляем основание в виде $1+\alpha$, а в показателе выделяем множитель $\frac{1}{\alpha}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2x} = [1^{\infty}] = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-1}{x+1}-1\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^{2x\frac{-2}{x+1}\frac{x+1}{-2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right)^{\frac{-4x}{x+1}} = \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x}{x+1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x}{x}} = e^{-4}.$$

Заметим, что $\alpha = \dfrac{-2}{x+1} \to 0$ при $x \to \infty$, и по формуле (7.9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}} = e$.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Главная часть

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = 0$.
Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Обозначение эквивалентных бесконечно малых функций — $\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \beta(x)$.
Примеры бесконечно малых функций:

- $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.
- $\operatorname{tg} x \underset{x\to 0}{\sim} x$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{1}{\cos x}\right) = 1$.
- $1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x^2}{4}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 = 1.$$

- $\arcsin x \underset{x\to 0}{\sim} x$, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \left|\begin{array}{c}\arcsin x = t\\ x = \sin t\\ x\to 0 \Rightarrow t\to 0\end{array}\right| = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = 1.$$

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций ($\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$):

$$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x);\ \arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x);$$

$$\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x);\ \operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x);$$

$$1-\cos\alpha(x) \sim \frac{(\alpha(x))^2}{2};$$

$$\log_a(1+\alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)}{\ln a};\ \ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x);$$

$$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a;\ e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x);$$

$$(1+\alpha(x))^m - 1 \sim m\cdot\alpha(x).$$

Функция $U(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} U(x) = \infty$.
Бесконечно большие функции $U(x)$ и $V(x)$ называются *эквивалентными* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{U(x)}{V(x)} = 1$.

Обозначение эквивалентных бесконечно больших функций — $U(x) \underset{x \to x_0}{\sim} V(x)$.
Пример бесконечно большой функции:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \underset{x \to x_0}{\sim} a_n x^n.$$

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции при $x \to x_0$ и $\beta(x) \underset{x \to x_0}{\sim} C(\alpha(x))^k$, где C, k — постоянные числа, $C \neq 0$, то бесконечно малую функцию $C(\alpha(x))^k$ называют *главной частью* $\beta(x)$. Число k называют *порядком функции* $\beta(x)$ относительно $\alpha(x)$:

- Если x_0 — конечное число, то главная часть функции $\beta(x)$ имеет вид $C(x - x_0)^k$.
- Если $x_0 = \infty$, то главная часть функции $\beta(x)$ имеет вид $C\left(\dfrac{1}{x}\right)^k$.

Если $U(x)$ и $V(x)$ — бесконечно большие функции при $x \to x_0$ и $V(x) \underset{x \to x_0}{\sim} C(U(x))^k$, где C, k — постоянные числа, $C \neq 0$, то бесконечно большую функцию $C(U(x))^k$ называют *главной частью* $V(x)$. Число k называют порядком функции $V(x)$ относительно $U(x)$:

- Если x_0 — конечное число, то главная часть функции $V(x)$ имеет вид

$$C\left(\frac{1}{x - x_0}\right)^k.$$

- Если $x_0 = \infty$, то главная часть функции $V(x)$ имеет вид Cx^k.

Для выделения главной части бесконечно малой или бесконечно большой функций пользуются следующими теоремами.

Теорема 7.1. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C$, где $0 < |C| < \infty$, то

$$f(x)\alpha(x) \underset{x \to x_0}{\sim} C\,\alpha(x).$$

Теорема 7.2. Если $\alpha(x) \underset{x \to x_0}{\sim} \alpha_1(x)$ и $\beta(x) \underset{x \to x_0}{\sim} \beta_1(x)$, то

$$\alpha(x)\beta(x) \underset{x \to x_0}{\sim} \alpha_1(x)\beta_1(x) \text{ и } \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \underset{x \to x_0}{\sim} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Теорема 7.3. Если $\alpha(x) \underset{x \to x_0}{\sim} \beta(x)$ и $\beta(x) \underset{x \to x_0}{\sim} \gamma(x)$, то

$$\alpha(x) \underset{x \to x_0}{\sim} \gamma(x).$$

Теорема 7.4. Сумма бесконечно малых функций разного порядка эквивалентна бесконечно малой функции меньшего порядка.

Теорема 7.5. Сумма бесконечно больших функций разного порядка эквивалентна бесконечно большой функции большего порядка.

Пример 7.17. Выделить главную часть функции $f(x)=\dfrac{2x^2-x+2}{3x^2+4x-7}$ при $x\to 1$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x+2}{3x^2+4x-7}=\left[\dfrac{2-1+2}{3+4-7}\right]=\left[\dfrac{3}{0}\right]=\infty.$

Функция $f(x)$ является бесконечно большой, и ее главная часть при $x\to 1$ имеет вид $C\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^k$. Для выделения главной части разложим знаменатель дроби на множители:

$$f(x)=\frac{2x^2-x+2}{3x^2+4x-7}=\frac{2x^2-x+2}{(x-1)(3x+7)}.$$

Так как $2x^2-x+2\underset{x\to 1}{\to}3$ и $3x+7\underset{x\to 1}{\to}10$, то имеем

$$f(x)=\frac{2x^2-x+2}{3x^2+4x-7}=\frac{2x^2-x+2}{(x-1)(3x+7)}\underset{x\to x_0}{\sim}\frac{3}{(x-1)\cdot 10}=\frac{3}{10}\left(\frac{1}{x-1}\right),$$

и, по определению, $\dfrac{3}{10}\cdot\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$ есть главная часть функции $f(x)$.

Пример 7.18. Выделить главную часть функции $f(x)=\cos x-e^{3x}$ при $x\to 0$ и установить ее порядок относительно x.

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-e^{3x})=0$. Следовательно, функция $f(x)$ является бесконечно малой, и ее главная часть при $x\to 0$ имеет вид $C(x-0)^k=Cx^k$, где k — порядок функции $f(x)$ относительно x. Воспользуемся соотношениями эквивалентностей

$$1-\cos\alpha(x)\underset{\alpha(x)\to 0}{\sim}\frac{(\alpha(x))^2}{2}$$

и $e^{\alpha(x)}-1\underset{\alpha(x)\to 0}{\sim}\alpha(x)$, для этого приведем $f(x)$ к виду

$$f(x)=\cos x-e^{3x}=\cos x-e^{3x}+1-1=-(1-\cos x)-(e^{3x}-1)\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{1}{2}x^2-3x.$$

Меньший порядок имеет слагаемое $(-3x)$, поэтому

$$f(x)=\cos x-e^{3x}\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{1}{2}x^2-3x\underset{x\to 0}{\sim}-3x.$$

Главная часть функции $f(x)$ имеет вид $-3x^1$, где $k=1$ — ее порядок относительно x.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.3 Если в задаче требуется сравнить бесконечно малые или бесконечно большие функции, это значит, что следует найти порядки функций и сравнить их.

Пример 7.19. Сравнить функции $f_1(x)=\ln(x+1)-\ln(x+3)$ и

$$f_2(x)=\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}}{\sqrt{x^5-3x^3+x^2+8}}$$

при $x\to\infty$.

Решение:

$$f_1(x) = \ln(x+1) - \ln(x+3) = \ln\frac{x+1}{x+3} = \ln\left(1 + \frac{-2}{x+3}\right).$$

Заметим, что $\frac{-2}{x+3} \underset{x\to\infty}{\to} 0$, и по соотношению эквивалентностей

$$\ln\left(1 + \frac{-2}{x+3}\right) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{-2}{x+3},$$

тогда

$$f_1(x) = \ln\left(1 + \frac{-2}{x+3}\right) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{-2}{x+3} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{-2}{x} = -2\left(\frac{1}{x}\right)^1.$$

Главная часть функции $f_1(x)$ имеет вид $-2\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^1$, и ее порядок $k_1 = 1$.

Теперь выделим главную часть функции $f_2(x)$. Для этого заметим, что

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x-3}} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x-3}}$$

при $\frac{1}{\sqrt{x-3}} \underset{x\to\infty}{\to} 0$:

$$f_x(x) = \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x-3}}}{\sqrt{x^5 - 3x^3 + x^2 + 8}} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{\sqrt{x-3}}}{\sqrt{x^5 - 3x^3 + x^2 + 8}} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{x^3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3.$$

Главная часть функции $f_2(x)$ имеет вид $\left(\frac{1}{x}\right)^3$, и ее порядок $k_2 = 3$.

Поскольку при $x \to \infty$ функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ стремятся к нулю, то они являются бесконечно малыми, причем порядок малости функции $f_2(x)$ больше, чем порядок малости функции $f_1(x)$.

Вычисление пределов с помощью эквивалентных функций

Теорема 7.6. Если $\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \alpha_1(x)$ и $\beta(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \beta_1(x)$, то

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)\beta(x) = \lim_{x\to x_0}\alpha_1(x)\beta_1(x) = \lim_{x\to x_0}\alpha_1(x)\beta(x) = \lim_{x\to x_0}\alpha(x)\beta_1(x);$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)}.$$

Эквивалентные бесконечно малые или бесконечно большие функции применяются к вычислению следующих пределов:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0}\right];\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right];\ \lim_{x\to x_0}(f(x)g(x))=[0\cdot\infty];$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=[1^{\infty}];\ \lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=[0^0];\ \lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=[\infty^0].$$

Пример 7.20. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2x}}{\cos 4x-\cos 2x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{2x}}{\cos 4x-\cos 2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}(e^{x^2-2x}-1)}{-2\sin\dfrac{4x+2x}{2}\sin\dfrac{4x-2x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}(e^{x^2-2x}-1)}{-2\sin 3x\sin x}.$$

Поскольку $e^{x^2-2x}-1\underset{x\to 0}{\sim}x^2-2x\underset{x\to 0}{\sim}-2x$, а $\sin 3x\sin x\underset{x\to 0}{\sim}3x\cdot x=3x^2$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{2x}}{\cos 4x-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}(e^{x^2-2}-1)}{-2\sin 3x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}(-2x)}{-2\cdot 3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}}{3x}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty.$$

Пример 7.21. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 3x}{\cos x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{c}t=\dfrac{\pi}{2}-x\\ x=\dfrac{\pi}{2}-t\\ x\to\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t\to 0\end{array}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{\cos 3\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-3t\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin 3t}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{-3t}{t}=-3.$$

Пример 7.22. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

Решение:

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln\dfrac{x}{e}}{x-e}=\left|\begin{array}{c}t=x-e\\ x=e+t\\ x\to e\Rightarrow t\to 0\end{array}\right|=$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\ln\frac{e+t}{e}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{e}}{t} = \frac{1}{e}.$$

Пример 7.23. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left(\cos\frac{1}{x}-1\right) = [\infty\cdot 0] = -\lim_{x\to\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right).$$

При $x\to\infty$ дробь $\frac{1}{x}\to 0$, значит, $1-\cos\frac{1}{x} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2}$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left(\cos\frac{1}{x}-1\right) = -\lim_{x\to\infty} x^2\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2} = -\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}.$$

При вычислении пределов $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}$ удобно пользоваться формулой

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}.$$

Пример 7.24. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-4x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1-4x} = \lim_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1}{x}} = [1^\infty] = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1-4x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(-4x)} = e^{-4}.$$

Здесь воспользовались тем, что $\ln(1-4x) \underset{x\to 0}{\sim} -4x$.

Пример 7.25. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}^2 x}}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}^2 x}} = [1^\infty] = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{arctg}^2 x}\ln(\cos x)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{arctg}^2 x}\ln(1+(\cos x-1))} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}} = e^{-0,5}.$$

Непрерывность и точки разрыва функции

Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0 в следующих случаях:

- $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0;

- существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$;
- эти пределы равны значению функции в точке x_0:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0).$$

Если в точке x_0 хотя бы одно из условий непрерывности нарушается, точка x_0 называется *точкой разрыва* данной функции.

Пусть существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$.

1. Если $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, то точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода* (рис. 7.11). Величина $\delta=|f(x_0+0)-f(x_0-0)|$ называется *скачком функции* $f(x)$ в точке x_0.

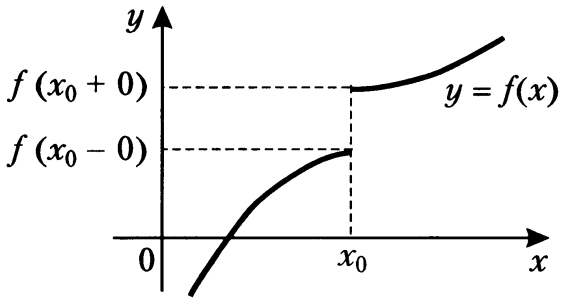


Рис. 7.11

2. Если $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$ или функция $f(x)$ не определена в точке x_0 и $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, то точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода*, или *точкой устранимого разрыва* (рис. 7.12).

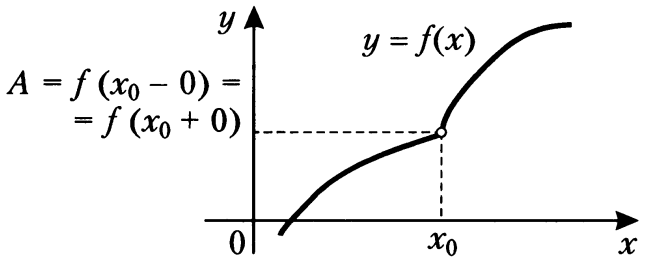


Рис. 7.12

Для того чтобы устранить разрыв, нужно доопределить (или переопределить) функцию в самой точке x_0, то есть ввести новую функцию

$$y=\begin{cases} f(x), & \text{если } x\neq x_0;\\ A, & \text{если } x=x_0. \end{cases}$$

3. Если в точке x_0 хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности, то точка x_0 называется *точкой разрыва второго рода* (рис. 7.13).

Точки разрыва второго рода подразделяются на *точки бесконечного разрыва* (хотя бы один из пределов $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ равен бесконечности) и *точки неопределенности* (по крайней мере один из пределов $f(x_0-0)$ или $f(x_0+0)$ не существует).

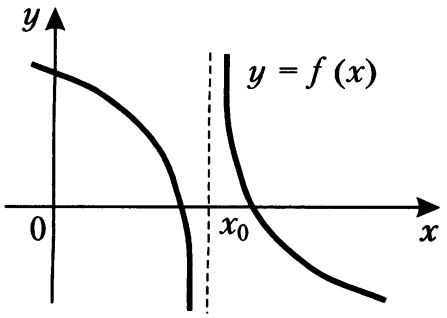


Рис. 7.13

Пример 7.26. Исследовать функцию

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{если} \quad 0\le x<3; \\ 3-x, & \text{если} \quad 3\le x\le 4 \end{cases}$$

на непрерывность.

Решение: изобразим график данной функции (рис. 7.14).

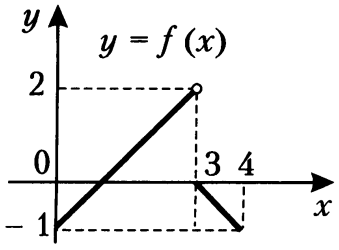


Рис. 7.14

Для функции $f(x)$ точка $x=3$ является точкой разрыва первого рода, так как

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3-0}(x-1)=2 \\ \lim_{x\to 3+0} f(x)=\lim_{x\to 3+0}(3-x)=0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ разрыв первого рода, скачок $\delta=2$.

Следует отметить, что в точке $x=0$ функция непрерывна справа, так как

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}(x-1)=-1=f(0).$$

А в точке $x=4$ функция непрерывна слева, так как

$$\lim_{x\to 4-0} f(x)=\lim_{x\to 4-0}(3-x)=-1=f(4).$$

Пример 7.27. Исследовать функцию $y=\dfrac{\sin x}{x}$ на непрерывность.

Решение: функция $f(x)$ не определена в точке $x=0$. Эта точка является точкой устранимого разрыва, так как

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

График функции $y=\dfrac{\sin x}{x}$ изображен на рис. 7.15.

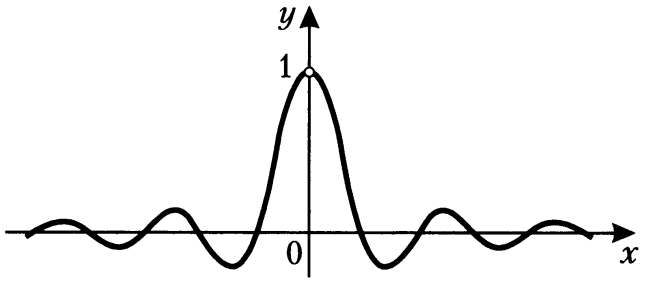


Рис. 7.15

Доопределить функцию по непрерывности — это значит задать $f(0)=1$, то есть получить функцию

$$y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0;\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

которая непрерывна в точке $x=0$.

Пример 7.28. Исследовать функцию $y=\sin\dfrac{1}{x}$ на непрерывность.

Решение: точка $x=0$ является точкой разрыва второго рода, так как пределы $\lim\limits_{x\to 0\pm 0}\sin\dfrac{1}{x}$ не существуют.

График функции $y=\sin\dfrac{1}{x}$ (рис. 7.16) колеблется между числами -1 и 1, не приближаясь ни к какому значению.

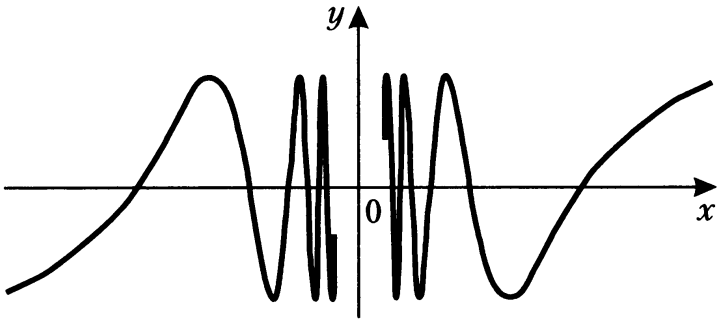


Рис. 7.16

Пример 7.29. Исследовать функцию $y=e^{\frac{1}{x-1}}$ на непрерывность.

Решение: данная функция имеет разрыв в точке $x=1$. Найдем в этой точке односторонние пределы

$$\lim_{x\to 1-0} e^{\frac{1}{x-1}} e^{\left[\frac{1}{-0}\right]} = e^{[-\infty]} = 0;$$

$$\lim_{x\to 1+0} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{\left[\frac{1}{+0}\right]} = e^{[+\infty]} = +\infty.$$

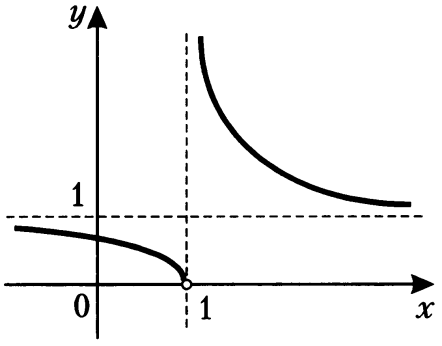


Рис. 7.17

Следовательно, $x=1$ является точкой разрыва второго рода, так как предел справа бесконечный (рис. 7.17).

Задачи для типовых расчетов

Задача 7.1. Сформулируйте определение предела или одностороннего предела функции по Коши и на языке «$\varepsilon - \delta$». Проиллюстрируйте определение схематическим рисунком.

1. $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = -3.$
2. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty.$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty.$
4. $\lim\limits_{x\to 4+0} f(x) = +\infty.$
5. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -10.$
6. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0.$
7. $\lim\limits_{x\to -3-0} f(x) = -\infty.$
8. $\lim\limits_{x\to 4+0} f(x) = -\infty.$
9. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2.$
10. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -5.$
11. $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = +\infty.$
12. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty.$
13. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0.$
14. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -3.$
15. $\lim\limits_{x\to 10} f(x) = 1.$
16. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 4.$
17. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 3.$
18. $\lim\limits_{x\to -2+0} f(x) = +\infty.$
19. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty.$
20. $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = -\infty.$
21. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty.$
22. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty.$
23. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2.$
24. $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 4.$
25. $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 1.$
26. $\lim\limits_{x\to 1-1} f(x) = 4.$
27. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0.$
28. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0.$
29. $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = +\infty.$
30. $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = -\infty.$

Задача 7.2. Докажите предел функции. Найдите $\delta(\varepsilon)$. Сделайте рисунок.

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} 3^x = +\infty.$
2. $\lim\limits_{x\to -5-0} \dfrac{1}{x+5} = -\infty.$
3. $\lim\limits_{x\to -3-0} \dfrac{1}{x+3} = -\infty.$
4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty.$
5. $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}} \cos x = 0.$
6. $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4.$
7. $\lim\limits_{x\to -5+0} \dfrac{1}{x+5} = +\infty.$
8. $\lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{ctg} x = +\infty.$
9. $\lim\limits_{x\to \pi} \cos x = -1.$
10. $\lim\limits_{x\to +\infty} 4^{-x} = 0.$
11. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty.$
12. $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_2 x = +\infty.$
13. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0.$
14. $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt[3]{x} = -1.$
15. $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$
16. $\lim\limits_{x\to 1+0} \log_2 (x-1) = -\infty.$

17. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0.$
18. $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_{\frac{1}{3}}x=-\infty.$
19. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$
20. $\lim\limits_{x\to1-0}\arcsin x=\frac{\pi}{2}.$
21. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1.$
22. $\lim\limits_{x\to0}\operatorname{tg}x=0.$
23. $\lim\limits_{x\to0+0}\log_2 x=-\infty.$
24. $\lim\limits_{x\to-1+0}\arcsin x=-\frac{\pi}{2}.$
25. $\lim\limits_{x\to0+0}\log_{0,5}x=+\infty.$
26. $\lim\limits_{x\to0-0}e^x=1.$
27. $\lim\limits_{x\to-4+0}\frac{1}{x+4}=+\infty.$
28. $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty.$
29. $\lim\limits_{x\to2+0}\log_4(x-2)=-\infty.$
30. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0.$

Задача 7.3. Вычислите предел функции.

1. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+2x^2-4x-8}{x^3+8}.$
2. $\lim\limits_{x\to6}\frac{x^2-8x+12}{x^3-7x^2+6x}.$
3. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^2+x-1}{x^3-3x-2}.$
4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}.$
5. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x}.$
6. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}.$
7. $\lim\limits_{x\to1}\frac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}.$
8. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-x^3+x-1}{2x^2-x-1}.$
9. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}.$
10. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}.$
11. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}.$
12. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}.$
13. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{x^3+2x^2-x-2}.$
14. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^3+4x^2+3x}{x^2+x-6}.$
15. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-1}{x^3-x^2-x+1}.$
16. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^3+2x^2-4x-8}.$
17. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x^3-2x-1)^2}{(x^4+2x+1)}.$
18. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^4+2x+1}{x^2-x-2}.$
19. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-3x^2+4}{x^4-4x^2}.$
20. $\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^3-4x^2}{5x^3+8x^2}.$
21. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{x^3+2x^2-x-2}.$
22. $\lim\limits_{x\to2}\frac{4x^2-5x-6}{3x^3-7x^2+2x}.$
23. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^4+2x^3+x^2}{x^4+2x+1}.$
24. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^3-3x-2}.$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^5}$.

26. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^3-7x^2+2x}{4x^2-5x-6}$.

27. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$.

28. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{(x^2-x-2)^2}$.

29. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$.

30. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-5x+6}$.

Задача 7.4. Вычислите предел функции.

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2-5x+3})$.

2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt[3]{1-x^3})$.

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x+3})$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$.

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$.

11. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$.

12. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{25-2x}-3}{\sqrt[3]{x}-2}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2})$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x-2)^2})$.

15. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

16. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{(x+3)(x-2)}-x)$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}}$.

18. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

19. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

20. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+x})$.

21. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt[3]{1-x^3})$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1}$.

23. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-2})$.

24. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-5x+6}-x)$.

25. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$.

26. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[5]{x}}$.

28. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2}-x)$.

29. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$.

Задача 7.5. Вычислите предел функции.

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin x-1}{\sin 6x}$.

2. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{x+1}-3}{\ln(1+x\sqrt{1+xe^{2x}})}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\alpha+x)-\sin(\alpha-x)}{x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 2x}{\ln(1+2\operatorname{tg} 3x)}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{tg} 3x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{tg} x}{\arcsin 2x^2}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2x}{\operatorname{tg}[2\pi(x+0{,}5)]}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\sin^2 3x}$.

13. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin 7\pi x}{\operatorname{tg} 8\pi x}$.

14. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\sin x-\sqrt{3}}{\cos\frac{3x}{2}}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{\operatorname{tg}^2\pi x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin^2\sqrt{x}}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin^2 3x}$.

20. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$.

21. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\sin(\pi-3x)}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos 4x}-1}{\sin^2 8x}$.

23. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{(2x-1)^2}{e^{\sin\pi x}-e^{-\sin 3\pi x}}$.

24. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-2\sin 2x}{x\cdot\ln\cos 6x}$.

26. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\operatorname{tg}\left(3^{\frac{\pi}{x}}-3\right)}{3^{\cos\frac{3x}{2}}-1}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x\ln(1-x\sin x)}$.

28. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(e^x-e^{-x})}{e^{x^3+1}-e}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x^2+\sin^3 x}$.

Задача 7.6. Вычислите предел функции.

1. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\ln(4x-1)}{\sqrt{1-\cos\pi x}-1}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^2+2x)-\ln(x^2+3)}{e^{\frac{x}{x^2-1}}-1}$.

3. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\operatorname{tg}\left(3^{\frac{\pi}{x}}-3\right)}{3^{\cos\frac{3x}{2}}-1}$.

4. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin\frac{x^2}{\pi}}{2^{\sqrt{\sin x+1}}-2}$.

5. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\operatorname{tg}(x+1)}{e^{\sqrt[3]{x^3-4x^2+6}}-e^2}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin\pi x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x^2-1)-\ln(x+1)}{\sqrt[3]{x-1}-1}$.

8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(x+2)-\ln(2x-1)}{\sin\pi x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$.

10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$.

11. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln 2x-\ln\pi}{\sin\frac{5x}{2}\cdot\cos x}$.

12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{\ln(5x^2-4x)}$.

13. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{x^2-a^2}-1}{\operatorname{tg}\ln\frac{x}{a}}$.

14. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\arcsin\frac{x+2}{2}}{3^{\sqrt{2+x+x^2}}-9}$.

15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x}$.

16. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{e^{\sin^2 6x}-e^{\sin^2 3x}}{\log_3\cos 6x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\operatorname{tg}\pi x}$.

18. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}$.

19. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\lg x-1}{\sqrt{x-9}-1}$.

20. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\operatorname{tg}(e^{x+2}-e^{x^2-4})}{\ln(3x+7)}$.

21. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\operatorname{tg}2x}}{\ln\frac{2}{\pi}}$.

22. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^{\sin\pi x}-1}{\ln(x^2-2x+1)}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x\sqrt{1+xe^x})}{\sqrt{\cos x}-1}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos^2 x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

25. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-\sqrt{3x^2-5x+2}}{\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}}$.

26. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{2+3x}-\sqrt{2x}}{\ln(x+2)-2\ln x}$.

27. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-5x+5}-1}{\operatorname{tg}\pi x}$.

28. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln 2x-\ln\pi}{e^{\operatorname{tg}2x}-e^{-\sin 2x}}$.

29. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\ln\cos x}{\operatorname{tg}(\cos x-1)}$.

30. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{tg}\ln(3x-5)}{e^{x+3}-e^{x^2+1}}$.

Задача 7.7. Вычислите предел функции.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos 3x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg}2x}{\sin 3x}}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\ln(2-x)}}$.

5. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}}$.

6. $\lim\limits_{x\to 2}(2e^{x-2}-1)^{x-2}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0+0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}[1-\ln(1+x^3)]^{\frac{3}{x^2\arcsin x}}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos)^{\frac{1}{x}}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}(2-3^{\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}})^{\frac{2}{\sin x}}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(5-\dfrac{4}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x^2]{2-\cos x}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}(2-e^{x^2})^{\frac{1}{1-\cos\pi x}}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}[1-\ln(1+\sqrt[3]{x})]^{\frac{x}{\sin^4\sqrt[3]{x}}}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}(3-2\cos x)^{-\operatorname{cosec}^2 x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sin x}{\sin 3}\right)^{\frac{1}{x-3}}$.

18. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[5]{x}-1}}$.

19. $\lim\limits_{x\to 1}(2e^{x-1}-1)^{\frac{x}{x-1}}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}[1-x\sin^2 x]^{\frac{1}{\ln(1+\pi x^3)}}$.

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2+3}\right)^{4x^2}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

23. $\lim\limits_{x\to 4\pi}(\cos x)^{\frac{5}{\operatorname{tg}5x\cdot\sin 2x}}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 3\pi x)^{\frac{1}{x\sin 2\pi x}}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}(2-3^{\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}})^{\frac{2}{\sin x}}$.

26. $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg}2x}{\sin 3x}}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}(2-e^{\arcsin^2\sqrt{x}})^{\frac{3}{x}}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\left(4-\dfrac{3}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x}}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos \pi x)^{\frac{1}{x\cdot \sin \pi x}}$.

30. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-\pi/2}}$.

Задача 7.8. Установите, являются ли функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ бесконечно малыми или бесконечно большими при $x \to x_0$. Выделите главные части функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Определите порядок функций относительно x. Сравните функции.

1. $f_1(x) = 3\arcsin(2x^2 + x^4)$, $f_2(x) = \operatorname{tg}^2\sqrt{x}(1 - \cos 2\sqrt{x})$, $x_0 = 0$.
2. $f_1(x) = \sin \pi(x + 5)$, $f_2(x) = (e^{3x} - 1)^2$, $x_0 = 0$.
3. $f_1(x) = \sin(x\sqrt{x} + e^{2x} - 1)$, $f_2(x) = \sqrt{x}\operatorname{tg}\sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$.
4. $f_1(x) = 5x^3 + 3x^2\operatorname{arctg}$, $f_2(x) = (x^3 - 1)^2 + 2x^6$, $x_0 = \infty$.
5. $f_1(x) = \ln(1 + x^2 + x^5)$, $f_2(x) = 3x + x\sqrt{x}$, $x_0 = 0$.
6. $f_1(x) = (3x + 1)\operatorname{arctg} 4x^2$, $f_2(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$, $x_0 = 0$.
7. $f_1(x) = \ln(1 + \sqrt{x}\sin x)$, $f_2(x) = e^{2x} - 1$, $x_0 = 0$.
8. $f_1(x) = x^2 + 3\sqrt{x} + 4x^3$, $f_2(x) = x^2 - 2x + 3$, $x_0 = \infty$.
9. $f_1(x) = \sqrt{x^2 + 3\sqrt{x + 1}}$, $f_2(x) = x^2 + 5x + 1$, $x_0 = \infty$.
10. $f_1(x) = x^2 + 6$, $f_2(x) = \ln(1 + 2\operatorname{tg} x)$, $x_0 = 0$.
11. $f_1(x) = 6x^3 + \sqrt{x^6 + 1}$, $f_2(x) = \sqrt[3]{x^9 + 1} + x^2$, $x_0 = \infty$.
12. $f_1(x) = (e^{2x} - 1)^2$, $f_2(x) = 1 - \cos x^3$, $x_0 = 0$.
13. $f_1(x) = \sin\sqrt[3]{x}\,(1 - \cos\sqrt{x})$, $f_2(x) = \operatorname{tg}(\pi(x - 5))$, $x_0 = 0$.
14. $f_1(x) = 4^{-3x^2} - 1$, $f_2(x) = \sin 5x - 3\sin 2x$, $x_0 = 0$.
15. $f_1(x) = \operatorname{arctg}(x^2 + 3x)$, $f_2(x) = 1 - \sqrt{3x + 1}$, $x_0 = 0$.
16. $f_1(x) = \dfrac{1}{1 - \sqrt{3x + 1}}$, $f_2(x) = \dfrac{1}{3x^2 + 2x}$, $x_0 = 0$.
17. $f_1(x) = 1 - \cos 10x^2$, $f_2(x) = \sqrt{1 + x} - 1$, $x_0 = 0$.
18. $f_1(x) = x\sqrt[3]{5x^3} + \sqrt[4]{x^{12} + 1}$, $f_2(x) = (x^2 - 1)^2 - x^4$, $x_0 = \infty$.
19. $f_1(x) = \arcsin(3x + 5x^3)$, $f_2(x) = 2^{x^2} - 1$, $x_0 = 0$.
20. $f_1(x) = x^2 + 6x + 3\sqrt{x}$, $f_2(x) = \dfrac{1}{(2x + 1)\cdot \sin^2\dfrac{1}{x}}$, $x_0 = \infty$.
21. $f_1(x) = (5^{-x^2} - 1)x$, $f_2(x) = (1 - \cos 6x)\cdot \operatorname{tg} 2$, $x_0 = 0$.
22. $f_1(x) = (1 - e^{-6x})\cdot \cos 2x$, $f_2(x) = \ln(1 + 2\sin\sqrt{x} + x)$, $x_0 = 0$.
23. $f_1(x) = (2 - x)^4 - (3 + x)^4$, $f_2(x) = \dfrac{(x^3 + 3x^2)}{\sin\dfrac{1}{x}}$, $x_0 = \infty$.
24. $f_1(x) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 2)$, $f_2(x) = 3x^3 - 1 + (x - 2)^3$, $x_0 = \infty$.

25. $f_1(x)=\sin 10x-4\sin x^2,\ f_2(x)=e^{6x^2}-1,\ x_0=0.$

26. $f_1(x)=\dfrac{1}{3x^2+2x\cdot \operatorname{arctg} x},\ f_2(x)=x\cdot\sin\dfrac{x+1}{5x^3+3x},\ x_0=\infty.$

27. $f_1(x)=\sqrt{1+3x^2}-1,\ f_2(x)=x\cdot \operatorname{tg}\left(2\pi\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right),\ x_0=0.$

28. $f_1(x)=\sin\dfrac{2}{x+x^2},\ f_2(x)=\dfrac{2x+1}{3x^2\sqrt{x}+5x},\ x_0=\infty.$

29. $f_1(x)=x+\sqrt{x}(1+5x^2),\ f_2(x)=(x^2-1)^2,\ x_0=\infty.$

30. $f_1(x)=1-\sqrt{1+3x^2},\ f_2(x)=x\cdot \operatorname{tg} 3x,\ x_0=0.$

Задача 7.9. Установите, является ли функция $f(x)$ бесконечно малой или бесконечно большой при $x\to x_0$. Выделите ее главную часть.

1. $f(x)=\dfrac{3\cos 4x}{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}},\ x_0=0.$
2. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x+1}-1},\ x_0=1.$
3. $f(x)=\ln(13-3x^2),\ x_0=-2.$
4. $f(x)=\operatorname{tg}^2 x-\sin^2 x,\ x_0=0.$
5. $f(x)=1-\cos^3 x,\ x_0=0.$
6. $f(x)=\sin\sqrt{x}(e^{2\sqrt{x}}-1),\ x_0=0.$
7. $f(x)=e^{2x}+e^{-x}-2,\ x_0=0.$
8. $f(x)=\ln(1+2\sin\sqrt{x}+\operatorname{tg}^2 x),\ x_0=0.$
9. $f(x)=\operatorname{tg} x-2\sin\sqrt{x},\ x_0=0.$
10. $f(x)=\arcsin 3x-\sin 4x,\ x_0=0.$
11. $f(x)=(e^{x^2}-1)\cdot\sin 2x,\ x_0=0.$
12. $f(x)=\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}-1,\ x_0=0.$
13. $f(x)=\dfrac{x+6}{2^x-8},\ x_0=3.$
14. $f(x)=\dfrac{1}{x\sin 3x},\ x_0=\pi.$
15. $f(x)=\sqrt{1+x^2+3x}-1,\ x_0=0.$
16. $f(x)=\sqrt[3]{x+2}-2,\ x_0=6.$
17. $f(x)=\ln(1+2x\sqrt{x}+3x^2),\ x_0=0.$
18. $f(x)=\dfrac{1}{\sin\pi x},\ x_0=1.$
19. $f(x)=e^{3x}-\cos 6x,\ x_0=0.$

20. $f(x)=2x+3\arcsin^2 x-3\operatorname{arctg} 4x,\ x_0=0.$
21. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1,\ x_0=1.$
22. $f(x)=\dfrac{3\cos^2 x}{e^{2x}-\cos x},\ x_0=0.$
23. $f(x)=\sqrt[4]{x^4+x^2}+x^3,\ x_0=\infty.$
24. $f(x)=2^x-2^{-x}+3x,\ x_0=0.$
25. $f(x)=(x^2+2x)(1-\sqrt{\cos x}),\ x_0=0.$
26. $f(x)=(x+2)(e^{x^2-5}-e^{-1}),\ x_0=-2.$
27. $f(x)=\ln(x^2+4)-\ln(x+10),\ x_0=3.$
28. $f(x)=2\sqrt{x}\cdot(1-\cos^3 2x),\ x_0=0.$
29. $f(x)=\operatorname{tg}\pi x\cdot\sin 5\pi x,\ x_0=1.$
30. $f(x)=\sin^2 x\cdot(\operatorname{tg}3x-2\operatorname{tg}5x),\ x_0=0.$

Задача 7.10. Установите, является ли функция $f(x)$ бесконечно малой или бесконечно большой при $x\to x_0$. Выделите ее главную часть.

1. $f(x)=(3x^2+1)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{5x},\ x_0=\infty.$
2. $f(x)=(2x+3)(x+\sqrt[3]{x}),\ x_0=\infty.$
3. $f(x)=(x^2-3x)\operatorname{tg}2x^2,\ x_0=0.$
4. $f(x)=\dfrac{1}{(1-x^2)\sin\pi x},\ x_0=1.$
5. $f(x)=\dfrac{3x+7}{x^2-x-12},\ x_0=-3.$
6. $f(x)=\dfrac{x+3}{(x^3-1)^2},\ x_0=1.$
7. $f(x)=\dfrac{x-3}{\sin^2\pi x},\ x_0=2.$
8. $f(x)=\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2},\ x_0=5.$
9. $f(x)=\dfrac{2x+3}{\sin 3x},\ x_0=\pi.$
10. $f(x)=\dfrac{2x-1}{\ln(4+x)},\ x_0=-3.$
11. $f(x)=\dfrac{1}{\ln^2(x^2-8)},\ x_0=-3.$
12. $f_2(x)=\dfrac{2x+1}{x^3+2x^2+x},\ x_0=-1.$
13. $f(x)=x^{-1}(\ln(x+1)-\ln x),\ x_0=\infty.$

14. $f(x)=\dfrac{(2x+3)^3(3x-2)^3}{x^4+1}$, $x_0=\infty$.

15. $f(x)=2^{\frac{5x}{\cos^2 x-1}}-2^{-5x}$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

16. $f(x)=\dfrac{3\cos 2x}{1-4^{-\sin 2x^2}}$, $x_0=0$.

17. $f(x)=\dfrac{1}{2^x-8}$, $x_0=3$.

18. $f(x)=x\sqrt{x}(x+\sqrt{x^2+1})$, $x_0=\infty$.

19. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}$, $x_0=1$.

20. $f(x)=\dfrac{1}{\sin\pi x\cdot \operatorname{tg} 3\pi x}$, $x_0=1$.

21. $f(x)=(x^2+5x)^2\cdot \operatorname{tg}\dfrac{1}{x+1}$, $x_0=\infty$.

22. $f(x)=\sqrt{x^2+3x-9}-1$, $x_0=2$.

23. $f(x)=\ln(1+2\sin 2x+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})$, $x_0=0$.

24. $f(x)=\operatorname{ctg} 8\pi$, $x_0=2$.

25. $f(x)=1-\sin\dfrac{\pi x}{2}$, $x_0=1$.

26. $f(x)=e^{-x^2}+\cos x-2$, $x_0=0$.

27. $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x^3-4x}$, $x_0=2$.

28. $f(x)=\dfrac{1}{2\sin 3x-x+5\operatorname{tg} x^2}$, $x_0=0$.

29. $f(x)=\dfrac{x}{\ln x^2-\ln 4}$, $x_0=2$.

30. $f(x)=\operatorname{ctg}^2\pi x$, $x_0=1$.

Задача 7.11. Установите, является ли функция $f(x)$ бесконечно малой или бесконечно большой при $x\to x_0$. Выделите ее главную часть.

1. $f(x)=\operatorname{tg} 3\pi$, $x_0=2$.
2. $f(x)=\cos x-\sqrt[3]{\cos x}$, $x_0=0$.
3. $f(x)=x\sqrt{x}(x+\sqrt{x^2+1})$, $x_0=\infty$.
4. $f(x)=\ln(x+2)-\ln x$, $x_0=\infty$.
5. $f(x)=\sqrt[4]{x^4+x^2}+x^3$, $x_0=\infty$.
6. $f(x)=\sin\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\arcsin\dfrac{2x}{5x^2+3}$, $x_0=\infty$.

7. $f(x)=(2x^2+3x)\operatorname{arctg} 3x^2,\ x_0=\infty.$
8. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+5}\sin\dfrac{2}{x\sqrt{x}},\ x_0=\infty.$
9. $f(x)=\ln(x^2+x)-\ln(x^2+1),\ x_0=\infty.$
10. $f(x)=\dfrac{2x^2-3x^3+4\sqrt{x+5}}{x^2+4x},\ x_0=\infty.$
11. $f(x)=\dfrac{2}{x^2+x}\operatorname{tg}\dfrac{3}{\sqrt{x}},\ x_0=\infty.$
12. $f_3(x)=\operatorname{arctg} 4x\cdot(e^{\frac{1}{2x}}-1),\ x_0=\infty.$
13. $f(x)=x^2+2x+3\sin^2 x-4\operatorname{tg} x,\ x_0=0.$
14. $f(x)=\operatorname{arctg}(\sqrt{4+x^2}-2),\ x_0=0.$
15. $f(x)=x^2+\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x},\ x_0=\infty.$
16. $f(x)=2x^2-3\sqrt{x^8-5x^2+1},\ x_0=\infty.$
17. $f(x)=\operatorname{arctg} 3x\cdot\sin\dfrac{1}{x+2x^2},\ x_0=\infty.$
18. $f(x)=\sin^2\sqrt{x}\cdot(\operatorname{tg} 3x-2\operatorname{tg} 5x),\ x_0=0.$
19. $f(x)=(x^2+4)^2\cdot\sqrt{16x^4+1},\ x_0=\infty.$
20. $f(x)=\sqrt{x}(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}),\ x_0=\infty.$
21. $f(x)=e^{x^2}+e^{-3x\sqrt{x}}+2\sin^2 x-2,\ x_0=0.$
22. $f(x)=\sqrt{x(x^3+2)}+2x^2,\ x_0=\infty.$
23. $f(x)=(x^3-1)^2\cdot\sqrt[3]{x-1},\ x_0=1.$
24. $f(x)=\dfrac{3}{x^3}-2\arcsin\dfrac{1}{x^2},\ x_0=\infty.$
25. $f(x)=2x^2-4\cdot\sqrt[3]{x^{12}-5x^3+1},\ x_0=\infty.$
26. $f(x)=\sqrt[4]{9x^8+1}+3x^2,\ x_0=\infty.$
27. $f(x)=(2x^3+4x)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{1}{3\sqrt{x}},\ x_0=\infty.$
28. $f(x)=\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{4}{x^4}+\operatorname{tg}\dfrac{2}{x^2},\ x_0=\infty.$
29. $f(x)=2x^2\operatorname{arctg} x+3x^2\sin\dfrac{1}{x},\ x_0=\infty.$
30. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}\operatorname{tg}\dfrac{1}{x^5+2x^2},\ x_0=\infty.$

Задача 7.12. Исследуйте функцию $f(x)$ на непрерывность. Установите тип точек разрыва и изобразите график функции в окрестности точек разрыва.

1. $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0;\\ x^3, & 0<x\le 2;\\ \dfrac{1}{2-x}, & x>2.\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}4-x^2, & x<0;\\ 4e^x, & 0<x\le 4;\\ \dfrac{1}{x-4}, & x>4.\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+3}, & x<-3;\\ x+3, & -3\le x\le 0;\\ x^2, & x>0.\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases}x^2+2x, & x<0;\\ -x^3, & 0<x<2;\\ x+3, & x\ge 2.\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0;\\ x+1, & 0<x\le 2;\\ \dfrac{1}{x-2}, & x>2.\end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases}0, & x<-1;\\ |x|, & |x|\le 1;\\ \ln(x-1), & x>1.\end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases}3, & x<-3;\\ |x|, & -3\le x\le 3;\\ 6-x, & x>3.\end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{x^2}, & 0<x<\dfrac{1}{2};\\ 4, & x>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\le 0;\\ \cos x, & 0<x\le \pi;\\ \dfrac{1}{x-\pi}, & x>\pi.\end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\le 2;\\ x^2-6x+11, & 2<x<4;\\ 2x-5, & x>4.\end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le -1;\\ \dfrac{1}{x}, & -1<x<0;\\ -2x^2+x, & x\ge 0.\end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}, & x<-2;\\ 0, & -2\le x<0;\\ \sin x, & 0<x<\infty.\end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases}-x^2, & x<0;\\ \operatorname{tg} x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2};\\ x, & x\ge \dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases}3x+1, & x<1;\\ 2x+2, & 1<x\le 3;\\ \lg(x-3), & x>3.\end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases}3, & x<-3;\\ |x|, & -3<x\le 3;\\ \ln(x-3), & x>3.\end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases}1, & x<0;\\ \cos x, & 0<x<\pi;\\ \dfrac{\pi}{x}, & x\ge\pi.\end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases}x^3, & -\infty<x<0;\\ x^2+1, & 0\le x<4;\\ \lg(x-4), & x>4.\end{cases}$

18. $f(x)=\begin{cases}2, & x<-2;\\ |x|, & |x|<2;\\ \dfrac{1}{x-2}, & x>2.\end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}, & x<-1;\\ |x|, & -1\le x\le 1;\\ 1-x^2, & x>1.\end{cases}$

20. $f(x)=\begin{cases}|x|, & x\le 2;\\ \lg(x-2), & x>2.\end{cases}$

21. $f(x)=\begin{cases}4^x, & x<1;\\ 5-x^2, & 1<x\le 4;\\ \lg(x-4), & x>4.\end{cases}$

22. $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{x}, & 0<x<5;\\ 3x+4, & x\ge 5.\end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases}-1, & x\le -\dfrac{\pi}{2};\\ \operatorname{tg} x, & -\dfrac{\pi}{2}<x<0;\\ x, & x>0.\end{cases}$

24. $f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x, & x<0;\\ x+1, & 0<x\le 3;\\ \lg(x-3), & x>3.\end{cases}$

25. $f(x)=\begin{cases}x-x^2, & -\infty<x\le 1;\\ \lg(x-1), & x>1.\end{cases}$

26. $f(x)=\begin{cases}2^{-x}, & x<0;\\ \cos x, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2};\\ \dfrac{1}{x-\dfrac{\pi}{2}}, & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

27. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+2}, & x<-2;\\ |x|, & |x|<2;\\ x, & x>2.\end{cases}$

28. $f(x)=\begin{cases}x^2-x, & x<1;\\ 2-x, & 1<x\le 4;\\ \dfrac{1}{x-4}, & x>4.\end{cases}$

29. $f(x)=\begin{cases}3-x, & x\le 3;\\ 8x-x^2-15, & 3<x\le 5;\\ 2x-12, & x>5.\end{cases}$ 30. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<0;\\ 3x+1, & 0\le x<2;\\ 4-x^2, & x\ge 2.\end{cases}$

Задача 7.13. Исследуйте функцию $f(x)$ на непрерывность. Установите тип точек разрыва и изобразите график функции в окрестности точек разрыва.

1. $f(x)=\dfrac{|x+2|}{x+2}+x.$
2. $f(x)=x+2\dfrac{|x-2|}{x-2}.$
3. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-9}.$
4. $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)(x+1)}.$
5. $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{x^2}.$
6. $f(x)=\dfrac{1}{5+2^{1/x}}.$
7. $f(x)=\dfrac{1}{5+3^{1/x}}.$
8. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2-1}.$
9. $f(x)=\dfrac{x^2-x^3}{|x-1|}.$
10. $f(x)=2^{\frac{x}{x^2-1}}.$
11. $f(x)=e^{x+\frac{1}{x}}.$
12. $f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}.$
13. $f(x)=\dfrac{e^{4x}-1}{x}.$
14. $f(x)=2^{x-\frac{1}{x}}.$
15. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+3}.$
16. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}.$
17. $f(x)=x+\dfrac{x+2}{|x+2|}.$
18. $f(x)=\dfrac{2x}{\sin x}.$
19. $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}.$
20. $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}.$
21. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+2}.$
22. $f(x)=\dfrac{\pi}{2}\dfrac{(x-1)}{|x-1|}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}.$
23. $f(x)=\dfrac{\sin 4x}{|x|}.$
24. $f(x)=\dfrac{1}{1+6^{1/x}}.$
25. $f(x)=x+\dfrac{|x|}{x}.$
26. $f(x)=\dfrac{1}{2+3^{-1/x}}.$
27. $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}.$
28. $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{x}.$
29. $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}.$
30. $f(x)=\dfrac{e^{3x}-1}{x}.$

ГЛАВА 8 Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Производная. Геометрический смысл производной

Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке $(a;\ b)$ и пусть точка $x_0 \in (a;\ b)$, а число Δx такое, что $x_0 + \Delta x \in (a;\ b)$. Число Δx называется *приращением аргумента в точке* x_0.

Приращением Δy *функции* $f(x)$ в точке x_0, соответствующим приращению аргумента Δx, называется разность значений функции в точках $x_0 + \Delta x$ и x_0, иначе говоря

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Если функция $f(x)$ задана на промежутке $(a;\ b)$ и если точка $x_0 \in (a;\ b)$, а число Δx такое, что точка $x_0 + \Delta x \in (a;\ b)$, то *производной функции* $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, если этот предел существует и конечен.

Для производной используются обозначения $f'(x_0)$ или просто y'. Итак,

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

или

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Геометрический смысл производной. Производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0 (рис. 8.1):

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha.$$

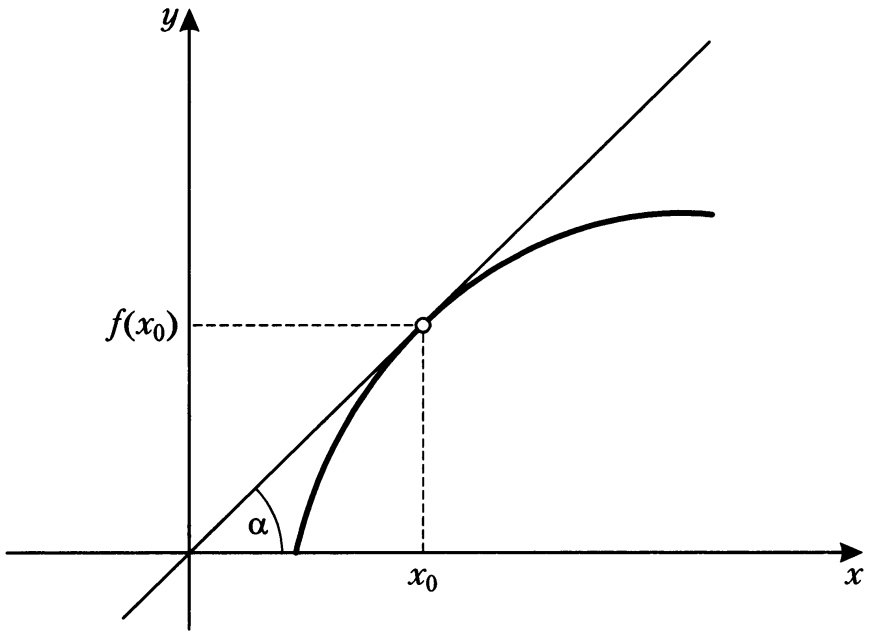


Рис. 8.1

Дифференцируемая функция

Функция $f(x)$, заданная на промежутке $(a;\ b)$, называется *дифференцируемой* в точке $x_0 \in (a;\ b)$, если ее приращение Δy в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \vartheta(\Delta x),$$

где $A = f'(x_0)$ — конечное число, а символом $\vartheta(\Delta x)$ обозначена функция, являющаяся бесконечно малой более высокого порядка, чем бесконечно малая Δx.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.1 В определении дифференцируемой функции приращение Δy представлено в виде двух слагаемых, которые являются бесконечно малыми при $\Delta x \to 0$. При этом первое слагаемое — бесконечно малая функция одного порядка с Δx, а второе слагаемое — бесконечно малая функция более высокого порядка, чем Δx.

Из определения ясно, что функция $f(x)$, заданная на промежутке $(a;\ b)$, является дифференцируемой в точке $x_0 \in (a;\ b)$ тогда и только тогда, когда в этой точке существует конечная производная $f'(x_0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.2 Так как дифференцируемость функции в некоторой точке равносильна существованию у нее конечной производной в этой точке, то операцию вычисления производной называют *дифференцированием*.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.3 Если функция не имеет конечной производной в некоторой точке, то она называется не дифференцируемой в этой точке

Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой на промежутке* $(a;\ b)$, если она является дифференцируемой в каждой точке $x_0 \in (a;\ b)$.

Можно доказать, что, если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.4 Обратное утверждение неверно. Непрерывная в точке x_0 функция может не быть в этой точке дифференцируемой. Это можно показать на следующих примерах.

Пример 8.1. Функция $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 8.2) определена и непрерывна на всей числовой оси. Однако в точке $x_0 = 0$ она не является дифференцируемой, так как касательной к графику функции в точке $x_0 = 0$ является ось $0y$ и, следовательно, $f'(x_0) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \infty$.

Пример 8.2. Функция $y = |x|$ (рис. 8.3) определена и непрерывна на всей числовой оси, а в точке $x_0 = 0$ она не является дифференцируемой, так как ее производная y' в этой точке не существует. Действительно, поскольку $y = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0, \end{cases}$ то

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \begin{cases} \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1, & x > 0; \\ \lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \dfrac{-\Delta x}{\Delta x} = -1, & x < 0, \end{cases}$$

то есть в точке $x_0 = 0$ существуют только односторонние пределы, не равные между собой.

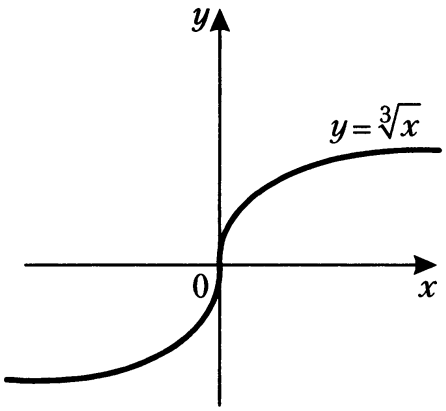


Рис. 8.2

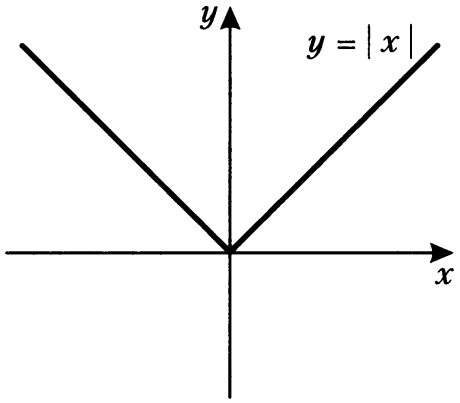


Рис. 8.3

Если у функции $y = f(x)$ существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

то он называется *производной в точке* $x_0 = 0$ *справа.*

Если у функции $y = f(x)$ существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

то он называется *производной в точке* $x_0 = 0$ *слева.*

Производные справа и слева называются *односторонними производными.*

ЗАМЕЧАНИЕ 8.5 Функция $y = |x|$ дифференцируема справа и слева, так как существуют и конечны односторонние производные. При этом производная справа равна 1, а производная слева равна -1. Функция $y = \sqrt[3]{x}$ не является дифференцируемой ни справа, ни слева.

Правила дифференцирования

1. Если $f(x) \equiv c$, где c — постоянная, то $f'(x) \equiv 0$.
2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x, то функция $f(x) + g(x)$ также дифференцируема в этой точке и ее производная вычисляется по правилу
$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x).$$
3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x, то функция $f(x) \cdot g(x)$ также дифференцируема в этой точке и ее производная вычисляется по правилу
$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$
4. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x, то функция $cf(x)$, где c — постоянная, также дифференцируема в этой точке и ее производная вычисляется по правилу
$$(cf(x))' = cf'(x).$$
5. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x и $g'(x) \neq 0$, то функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ также дифференцируема в этой точке и ее производная вычисляется по правилу
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$
6. Если функция $y(x)$ монотонна на промежутке $(a;\ b)$ и дифференцируема в точке $x \in (a;\ b)$, то существует обратная функция $x = x(y)$, которая дифференцируема в точке y, и ее производная определяется из соотношения
$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$
7. Если функция $u(x)$ дифференцируема в точке x и функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке $u = u(x)$, то суперпозиция функций (сложная функция) $y = f(u(x))$ дифференцируема в точке x и ее производная по переменной x вычисляется по правилу
$$y'_x = f'_u \cdot u'_x.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8.6 Правило дифференцирования суперпозиции функций (сложной функции) следует понимать так, что если требуется вычислить производную от функции $y = \sin^2 x$, то вычисляется производная суперпозиции функций $y = u^2$ и $u = \sin x$. При этом следует вычислить производную $y'_u = (u^2)'_u = 2u$ и производную

$$u'_x = (\sin x)'_x = \cos x.$$

Производная y' вычисляется по правилу дифференцирования сложной функции $y' = 2u \cdot \cos x = 2 \sin x \cdot \cos x$.

Производные основных элементарных функций

При вычислении производных наряду с правилами дифференцирования следует использовать формулы для производных основных элементарных функций, которые даны в табл. 8.1.

Таблица 8.1. Производные основных элементарных функций

$(x^n)' = \alpha x^{n-1}$	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$(x)' = 1$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(e^x)' = e^x$	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Примеры вычисления производных

Пример 8.3. Вычислить производную функции $y = e^{-x^2}$.

Решение: по правилу дифференцирования сложной функции следует сначала вычислить производную экспоненты по ее аргументу $-x^2$. Это означает, что в табличной производной $(e^x)' = e^x$ переменную x нужно заменить переменной $-x^2$. Эту производную необходимо умножить на производную от аргумента $-x^2$ по переменной x. Правило дифференцирования заданной функции можно записать в следующем виде:

$$y' = (e^{-x^2})'_{-x^2}(-x^2)' = e^{-x^2}(-2x).$$

Пример 8.4. Вычислить производную функции $y = \sqrt{\cos(3x-2)}$.

Решение: заданная функция является суперпозицией трех функций $y = (\cos(3x-2))^{\frac{1}{2}}$:

$$y' = \left((\cos(3x-2))^{\frac{1}{2}}\right)'_{\cos(3x-2)} (\cos(3x-2))'_{(3x-2)}(3x-2)'.$$

При этом следует понимать, что, дифференцируя внешнюю функцию (степенную или косинус), нельзя менять ее сложный аргумент. Поэтому

$$y' = \frac{1}{2}\cdot(\cos(3x-2))^{-\frac{1}{2}}(-\sin(3x-2))\cdot 3.$$

Упростив полученное выражение, получим:

$$y' = -\frac{3\sin(3x-2)}{2\sqrt{\cos(3x-2)}}.$$

Пример 8.5. Вычислить производную функции $y = \operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}\cdot\ln x$.

Решение: по правилу дифференцирования произведения функций, $y' = (\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x})' \times$ $\times \ln x + \operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}\cdot(\ln x)'$. Так как производная $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, а производная сложной функции

$$(\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x})' = (\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x})'_{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{1+(\sqrt[3]{x})^2}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{1+(\sqrt[3]{x})^2}\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} =$$
$$= \frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

то производная заданной функции равна

$$y' = \frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cdot\ln x + \operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}\frac{1}{x}.$$

Пример 8.6. Вычислить производную функции $y = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}{3^{\sin x}}$.

Решение: по правилу дифференцирования частного двух функций, производную от заданной функции можно записать в виде

$$y' = \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{1}{x}\right)'\cdot 3^{\sin x} - \operatorname{tg}\frac{1}{x}(3^{\sin x})'}{(3^{\sin x})^2}.$$

Функции $\operatorname{tg}\frac{1}{x}$ и $3^{\sin x}$ — сложные, поэтому производные от этих функций по переменной x будут равны

$$\left(\operatorname{tg}\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}\cdot x^2};$$

$$(3^{\sin x})' = 3^{\sin x}\cdot \ln 3\cdot \cos x.$$

Подставим вычисленные производные в формулу для производной частного и запишем производную от заданной функции в виде

$$y' = \frac{-\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}\cdot x^2}\cdot 3^{\sin x} - \operatorname{tg}\frac{1}{x}\cdot 3^{\sin x}\cdot \ln 3\cdot \cos x}{3^{2\sin x}}.$$

Пример 8.7. Вычислить производную функции $y = \left(\frac{x}{\arcsin x}\right)^{\operatorname{ctg} x}$.

Решение: заданная функция называется показательно-степенной. Прежде чем вычислять ее производную, запишем эту функцию, используя основное логарифмическое тождество $y = e^{\ln y}$. Получим:

$$y = e^{\ln\left(\frac{x}{\arcsin x}\right)^{\operatorname{ctg} x}}.$$

Используя свойства логарифма, получим: $y = e^{\operatorname{ctg} x\cdot(\ln x - \ln\arcsin x)}$. Дифференцируя полученное выражение по правилу дифференцирования сложной функции, получим:

$$y' = e^{\operatorname{ctg} x\cdot(\ln x-\ln\arcsin x)}\cdot(\operatorname{ctg} x\cdot(\ln x - \ln\arcsin x))' = e^{\operatorname{ctg} x\cdot(\ln x-\ln\arcsin x)} =$$

$$= [(\operatorname{ctg} x)'(\ln x - \ln\arcsin x) + \operatorname{ctg} x(\ln x - \ln\arcsin x)'] = e^{\operatorname{ctg} x\cdot(\ln x-\ln\arcsin x)};$$

$$\left[-\frac{1}{\sin^2 x}(\ln x - \ln\arcsin x) + \operatorname{ctg} x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right].$$

Уравнение касательной к кривой. Угол между кривыми

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то *уравнение касательной* к графику этой функции в точке с абсциссой x_0 имеет вид

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Пример 8.8. Написать уравнение касательной к графику функции $y = e^x$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$.

Решение: уравнение касательной запишем в виде

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Поскольку $f'(x) = (e^x)' = e^x$, $f'(x_0) = e^0 = 1$, $f(x_0) = e^0 = 1$, то касательная к графику заданной функции в точке $x_0 = 0$ задается уравнением $y = x + 1$.

Пример 8.9. Найти угол между кривыми $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ в точке их пересечения.

Решение: углом между кривыми, пересекающимися в точке с абсциссой x_0, называется угол между их касательными, проведенными к графикам функций в этой точке. Поскольку уравнение $x^2 = \sqrt{x}$ имеет корни $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$, то кривые пересекаются в точках с абсциссами $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$.

Напомним, что угол между прямыми, заданными уравнениями $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$, определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Так как $(x^2)' = 2x$, то угловой коэффициент k_1 касательной к графику функции $y = x^2$ в точке с абсциссой $x_1 = 1$ равен $k_1 = 2$.

Так как $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, то угловой коэффициент k_2 касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x_1 = 1$ равен $k_2 = \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4},$$

откуда следует, что $\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

В точке $x_2 = 0$ функция $y = \sqrt{x}$ не дифференцируема, так как ее производная в этой точке бесконечна. В этом случае угол, под которым пересекаются кривые, определим из следующих соображений: касательная к графику функции $y = x^2$ в точке $x_2 = 0$ параллельна оси $0x$, а касательная к графику функции $y = \sqrt{x}$ в точке $x_2 = 0$ перпендикулярна оси $0x$, значит, кривые пересекаются в этой точке под прямым углом.

Дифференциал

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, принадлежащей ее области определения, и пусть $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — приращение функции в точке x_0. Линейная относительно приращения аргумента Δx часть приращения функции в этой точке называется ее *дифференциалом* и обозначается dy.

Из определения следует формула дифференциала:

$$dy = f'(x_0)\Delta x.$$

В произвольной точке x формула дифференциала имеет вид

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Поскольку для функции $y = x$ в любой точке производная $f'(x) = 1$, то $dy = dx = \Delta x$. Учитывая это, формулу для дифференциала записывают в виде

$$dy = f'(x)dx.$$

Из определения и формулы дифференциала следует, что при вычислении дифференциала справедливы правила, аналогичные правилам дифференцирования.

Правила дифференцирования:

1. $d(c) \equiv 0$, если $c = \text{const}$.
2. $d(c \cdot f(x)) = c \cdot d(f(x))$, если $c = \text{const}$.
3. $d(f(x) \pm g(x)) = d(f(x)) \pm d(g(x))$.
4. $d(f(x)g(x)) = d(f(x))g(x) + f(x)d(g(x))$.
5. $d\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{d(f(x))g(x) - f(x)d(g(x))}{g^2(x)}$, если $g(x) \neq 0$.

Пример 8.10. Вычислить дифференциал функции $y = \cos^2 x \cdot \sqrt{1-x^2}$ в произвольной точке x.

Решение: по правилу вычисления дифференциала произведения двух функций, запишем:

$$dy = d(\cos^2 x)\sqrt{1-x^2} + \cos^2 x \cdot d(\sqrt{1-x^2}).$$

Учитывая, что

$$d(\cos^2 x) = (\cos^2 x)'_x dx = 2\cos x(-\sin x)dx;$$

$$d(\sqrt{1-x^2}) = (\sqrt{1-x^2})'_x dx = \frac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)dx,$$

получим:

$$dy = 2\cos x(-\sin x)\sqrt{1-x^2}dx + \cos^2 x \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)dx =$$

$$= \left(2\cos x(-\sin x)\sqrt{1-x^2} + \cos^2 x \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)\right)dx.$$

Геометрически дифференциал равен *приращению ординаты касательной*, проведенной к графику функции в точке дифференцируемости (рис. 8.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 8.7 Формула для дифференциала $dy = f'(x)dx$ обладает свойством инвариантности, то есть сохраняет свой вид и в том случае, если x — не независимая переменная, а некоторая функция. Из этого следует, что производную y' функции $y = f(x)$ можно записывать в виде $y' = \dfrac{dy}{dx}$ независимо от того, является ли x независимой переменной или функцией.

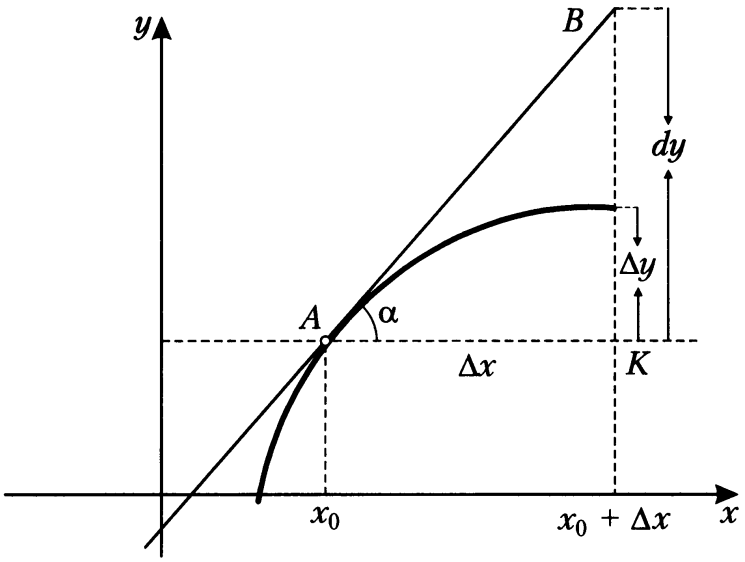


Рис. 8.4

Иногда удобно вычислять дифференциал, не раскрывая до конца производные сложных функций, а пользуясь инвариантностью его формулы.

Пример 8.11. Вычислить дифференциал функции $y = \dfrac{\operatorname{arctg}^3 x}{\sqrt[3]{3-5x}}$ в произвольной точке x.

Решение: согласно правилу вычисления дифференциала частного двух функций, запишем:

$$dy = d\left(\frac{\operatorname{arctg}^3 x}{\sqrt[3]{3-5x}}\right) = \frac{d(\operatorname{arctg}^3 x)\sqrt[3]{3-5x} - \operatorname{arctg}^3 x\, d(\sqrt[3]{3-5x})}{(\sqrt[3]{3-5x})^2}.$$

Раскрывая дифференциалы $d(\operatorname{arctg}^3 x)$ и $d(\sqrt[3]{3-5x})$, получим выражение для дифференциала dy в следующем виде:

$$dy = \frac{3\operatorname{arctg}^2 x\, d(\operatorname{arctg} x)\sqrt[3]{3-5x} - \operatorname{arctg}^3 x \dfrac{1}{3}(3-5x)^{-\frac{2}{3}} d(3-5x)}{(\sqrt[3]{3-5x})^2} =$$

$$= \frac{3\operatorname{arctg}^2 x\, dx \dfrac{1}{1+x^2}\sqrt[3]{3-5x} - \operatorname{arctg}^3 x \cdot \dfrac{1}{3} \cdot (3-5x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-5)dx}{(\sqrt[3]{3-5x})^2},$$

или окончательно:

$$dy = \frac{3\operatorname{arctg}^2 x \dfrac{1}{1+x^2}\sqrt[3]{3-5x} + \operatorname{arctg}^3 x \cdot \dfrac{5}{3} \cdot (3-5x)^{-\frac{2}{3}}}{(\sqrt[3]{3-5x})^2} dx.$$

Производные функций, заданных параметрически

Если функция $y = y(x)$ задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \phi(t), \end{cases}$

где t — параметр, и если функции $\varphi(t)$ и $\phi(t)$ дифференцируемы в точке t, то функция $y = y(x)$ также дифференцируема в точке $x(t)$ и ее производная вычисляется по правилу

$$y'_x = \frac{\phi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Пример 8.12. Вычислить производную y'_x функции $y(x)$, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{t}}; \\ y = \sqrt[3]{t}. \end{cases}$$

Решение: согласно теореме о производной функции, заданной параметрически, можно записать:

$$y'_x = \frac{(\sqrt[3]{t})'_t}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)'_t} = \frac{\dfrac{1}{3}\cdot t^{-\frac{2}{3}}}{-\dfrac{1}{2}\cdot t^{-\frac{3}{2}}} = -\frac{2}{3}t^{\frac{5}{6}}.$$

Дифференцирование функций, заданных неявно

Если дифференцируемая в точке x функция $y = y(x)$ задана соотношением $F(x,\ y) = 0$ и если при этом функция $F(x,\ y(x))$ дифференцируема в точке x, то производную $y'(x)$ можно определить из равенства

$$(F(x,\ y(x)))'_x = 0.$$

Пример 8.13. Вычислить производную y'_x, если дифференцируемая функция $y = y(x)$ задана неявно равенством

$$x^3y + xy^3 - 3x^2 - 3y^2 + e^{xy} = 0.$$

Решение: производную y'_x следует определять из равенства

$$(x^3y + xy^3 - 3x^2 - 3y^2 + e^{xy})'_x = 0.$$

Вычислим все производные в левой части этого соотношения, используя правила дифференцирования:

$$3x^2y + x^3y'_x + y^3 + x\cdot 3y^2y'_x - 6x - 6yy'_x + e^{xy}(y + xy'_x) = 0.$$

Из полученного равенства определим производную y'_x:

$$(x^3 + 3xy^2 - 6y + e^{xy}x)y'_x = 6x - 3x^2y - y^3 - e^{xy}y;$$

$$y'_x = \frac{6x - 3x^2y - y^3 - e^{xy}y}{x^3 + 3xy^2 - 6y + e^{xy}x}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8.8 Аналогично вычисляется дифференциал функции, заданной неявно.

Пример 8.14. Найти дифференциал функции $y = y(x)$, заданной неявно равенством $x^2 + y^2 + \sqrt{xy} = 0$.

Решение: функция $x^2 + y^2 + \sqrt{xy}$ является функцией x, а так как она тождественно равна нулю, то и ее дифференциал тождественно равен нулю, то есть

$$d(x^2 + y^2 + \sqrt{xy}) = 0.$$

Тогда $d(x^2) + d(y^2) + d(\sqrt{xy}) = 0$, или $2x\,dx + 2y\,dy + \frac{x\,dy + y\,dx}{2\sqrt{xy}} = 0$.

Из полученного равенства определим дифференциал dy:

$$\left(2y + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}\right)dy = -2x\,dx - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\,dx, \text{ или } dy = -\frac{2x + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}}{2y + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}}\,dx.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8.9 Обращаем ваше внимание на то, что в примерах 8.13 и 8.14 производная и дифференциал неявных функций также являются неявными функциями. В выражения для них входит функция y, явный вид которой неизвестен.

Вычисление дифференциала. Приближенные вычисления с помощью дифференциала

Дифференциал является функцией двух переменных, x и Δx. Чтобы вычислить его значение в некоторой точке x_0, следует задать не только значение x_0, но и величину приращения аргумента Δx.

Пример 8.15. Найти значение дифференциала функции $y = \sqrt{2x - 1}$ в точке $x_0 = 5$ при приращении аргумента $\Delta x = 0{,}03$.

Решение: так как дифференциал $dy = f'(x_0)\Delta x$, производная $f'(x) = \frac{1}{2}(2x - 1)^{-\frac{1}{2}} \times$

$\times 2 = \frac{1}{\sqrt{2x - 1}}$, а значение производной в заданной точке $x_0 = 5$

$$f'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 5 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3},$$

то $dy = \frac{1}{3} \cdot 0{,}03 = 0{,}01$.

Пусть требуется вычислить значение функции $f(x)$ в точке $x_0 + \Delta x$ и число Δx довольно мало. Тогда

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Пример 8.16. Вычислить приближенно arctg 1,02.

Решение: требуется вычислить значение функции $y = \operatorname{arctg} x$ в точке $x = 1{,}02$. Представим $x = x_0 + \Delta x$ так, чтобы значение функции в точке x_0 легко вычислялось, а Δx было бы достаточно (с учетом точности вычислений) малым.

Ясно, что в предложенной задаче удобно взять $x_0 = 1$ и $\Delta x = 0{,}02$. Теперь обозначим $y_0 = f(x_0)$, а значение функции в точке x представим в виде $y = y_0 + \Delta y$, где Δy — приращение функции, соответствующее приращению аргумента Δx.

Учитывая замечание, приращение функции Δy приближенно заменим дифференциалом в точке x_0 при приращении аргумента $\Delta x = 0{,}02$. Получим:

$$y_0 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7852;\ y' = f'(x) = \frac{1}{1+x^2};\ f'(x_0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Поскольку $\Delta y \approx dy = \frac{1}{2} \cdot 0{,}02 = 0{,}01$, то

$$y = \operatorname{arctg} 1{,}02 \approx 0{,}7852 + 0{,}01 = 0{,}7952.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8.10 Следует заметить, что, поскольку приращение функции отличается от ее дифференциала на бесконечно малую функцию более высокого порядка, чем Δx, то вычисления сделаны с абсолютной погрешностью, не превосходящей 0,02.

Производные высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точках x_0 и $x_0 + \Delta x$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}$, то он называется *второй производной* функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается y'', или $f''(x_0)$. При этом функция $y = f(x)$ называется *дважды дифференцируемой* в точке x_0. Аналогично определяются производные более высокого порядка $f'''(x_0)$, $f^{IV}(x_0)$, ..., $f^{(n)}(x_0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.11 Из определения производных высших порядков следует, что вторая производная — это производная от первой производной, третья производная — это производная от второй производной и т. д.

Пример 8.17. Вычислить третью производную y''' функции $y = \dfrac{x}{e^x}$ в произвольной точке x.

Решение: сначала вычислим первую производную, используя правило дифференцирования частного двух функций:

$$y' = \left(\frac{x}{e^x}\right)' = \frac{1 \cdot e^x - x \cdot e^x}{(e^x)^2}.$$

Упростим это выражение:

$$y' = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

— и вычислим вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{1-x}{e^x}\right)' = \frac{(1-x)'e^x - (1-x)(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{-e^x - (1-x)e^x}{e^{2x}}.$$

Полученное выражение можно упростить:

$$y'' = \frac{-e^x(1+1-x)}{e^{2x}} = \frac{-(2-x)}{e^x} = \frac{x-2}{e^x}$$

— и вычислить третью производную:

$$y''' = \left(\frac{x-2}{e^x}\right)' = \frac{(x-2)'e^x - (x-2)(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{e^x - (x-2)e^x}{e^{2x}},$$

которая после всех возможных упрощений примет вид

$$y''' = \frac{e^x(1-x+2)}{e^{2x}} = \frac{3-x}{e^x}.$$

Пример 8.18. Получить выражение производной n-го порядка $y^{(n)}$ для функции $y = \ln(x+1)$.

Решение: получим выражения для производных первого, второго, третьего и четвертого порядков, выполняя последовательное дифференцирование заданной функции:

$$y' = \frac{1}{x+1};\quad y'' = -\frac{1}{(x+1)^2};\quad y''' = \frac{1\cdot 2}{(x+1)^3};\quad y^{IV} = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(x+1)^4}.$$

Из выражений для этих производных ясно, что каждое последующее дифференцирование увеличивает на единицу показатель степени выражения $(x+1)$ в знаменателе и добавляет в числитель натуральный сомножитель, на единицу больший предыдущего.

Знаки в производных чередуются, причем производные четного порядка имеют знак «минус». Учитывая это, запишем выражение для производной произвольного (n-го) порядка:

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{(x+1)^n}.$$

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n называется *n-факториалом* и обозначается $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$. Учитывая это обозначение, выражение для n-й производной функции $y = \ln(x+1)$ можно переписать в виде

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n}.$$

Пример 8.19. Получить выражение производной n-го порядка $y^{(n)}$ для функции $y = \cos x$.

Решение: вычислим последовательно производные

$$y' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right);\ y'' = -\cos x = \cos(x + \pi) = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y''' = \sin x = \cos\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

и т. д.

По методу математической индукции получим искомую формулу

$$y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right).$$

Пример 8.20. Вычислить производную второго порядка от функции $y = y(x)$, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = t^3 + 3t^2 + 4; \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$$

Решение: вычислим первую производную y'_x по правилу дифференцирования функции, заданной параметрически:

$$y'_x = \frac{(\sin^2 t)'_t}{(t^3 + 3t^2 + 4)'_t} = \frac{2\sin t \cdot \cos t}{3t^2 + 6t} = \frac{\sin 2t}{3t^2 + 6t}.$$

Чтобы вычислить вторую производную, учтем, что производная y'_x также является параметрически заданной функцией, то есть первая производная y'_x задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = t^3 + 3t^2 + 4; \\ y'_x = \dfrac{\sin 2t}{3t^2 + 6t}. \end{cases}$$

Для вычисления второй производной можно использовать то же правило дифференцирования, что и для вычисления первой:

$$y''_{x^2} = \frac{\left(\dfrac{\sin 2t}{3t^2 + 6t}\right)'_t}{(t^3 + 3t^2 + 4)'_t} = \frac{\dfrac{2\cos 2t \cdot (3t^2 + 6t) - \sin 2t \cdot (6t + 6)}{(3t^2 + 6t)^2}}{3t^2 + 6t} =$$

$$= \frac{6(\cos 2t(t^2 + 2t) - \sin 2t(t + 1))}{(3t^2 + 6t)^3}.$$

Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в точке x. *Дифференциалом второго порядка* от функции $f(x)$, или *вторым дифференциалом*, в точке x называется дифференциал от ее первого дифференциала $d(dy)$. Второй дифференциал обозначается d^2y. Аналогично определяется дифференциал третьего порядка d^3y, четвертого порядка d^4y и т. д.

Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема и x — независимая переменная, то формула для второго дифференциала имеет вид

$$d^2y = f''(x)(dx)^2.$$

Если x — независимая переменная, то формула для дифференциала n-го порядка имеет вид

$$d^ny = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

Пример 8.21. Найти дифференциал второго порядка для функции $y = e^{\sin x}$.

Решение: формула для второго дифференциала имеет вид

$$d^2y = y''(dx)^2.$$

Вычислим первую производную: $y' = e^{\sin x} \cdot \cos x$. Затем вычислим вторую производную:

$$y'' = e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \cos x + e^{\sin x}(-\sin x).$$

Проведем в полученном выражении все упрощения и получим:

$$y'' = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x).$$

Подставив найденную формулу для второй производной в формулу дифференциала, запишем второй дифференциал в виде

$$d^2y = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x)(dx)^2.$$

Пример 8.22. Найти формулу для дифференциала n-го порядка d^ny функции $y = \sin x$.

Решение: при решении используем формулу для дифференциала n-го порядка

$$d^ny = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

Вычислим производные $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$, $y^{IV} = \sin x$, $y^{V} = \cos x = y'$, $y^{VI} = y''$ и т. д. Заметим, что $y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ при $n = 1, 2, 3, 4,$

тогда

$$d^ny = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)(dx)^n.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8.12 Дифференциалы второго и более высоких порядков не обладают свойством инвариантности, то есть их формула меняется, если x не является независимой переменной.

Для независимой переменной x формула второго дифференциала имеет вид $d^2y = f''(x)(dx)^2$. Если x не является независимой переменной, то $d(dx) \neq 0$. Тогда $d^2y = d(dy) = d(f'(x)\,dx) = f''(x)(dx)^2 + f'(x)\,d^2x$.

Правило Лопиталя

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0 и если выполняется условие $f(x_0) = g(x_0) = 0$, причем $g'(x_0) \neq 0$, то существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.13 Можно доказать правило Лопиталя в общем виде

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Это замечание позволяет применять правило Лопиталя несколько раз, то есть для дважды дифференцируемых в некоторой окрестности точки x_0 функций $f(x)$ и $g(x)$ предел их отношения равен

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{f''(x_0)}{g''(x_0)}$$

в том случае, когда $g''(x_0) \neq 0$.

Если же $f''(x_0) = g''(x_0) = 0$, а функции $f(x)$ и $g(x)$ трижды дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0, то правило применяется еще раз, и так продолжается до тех пор, пока не будет устранена неопределенность.

Пример 8.23. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x + e^{-x} - 1}{x^2}$, используя правило Лопиталя.

Решение:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + e^{-x} - 1}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{-x}}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8.14 Правило Лопиталя справедливо и в том случае, когда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$.

Пример 8.24. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{\ln \sin x}$, используя правило Лопиталя.

Решение: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{\ln \sin x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x \cdot 1} = 1.$

Пример 8.25. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} 3x}$, используя правило Лопиталя.

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg} 3x} = [0^0]$. Такой вид неопределенности раскрывается с помощью основного логарифмического тождества. Представим показательно-степенную функцию под знаком предела в виде

$$(\sin x)^{\operatorname{tg} 3x} = e^{\ln((\sin x)^{\operatorname{tg} 3x})} = e^{\operatorname{tg} 3x \cdot \ln(\sin x)}.$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg} 3x \cdot \ln(\sin x)) = [0 \cdot \infty] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg} 3x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, то, применяя правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg} 3x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{-\dfrac{3}{\sin^2 3x}} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x\cdot\cos x}{\sin x}.$$

Так как $\cos x \underset{x\to 0}{\to} 1$, а $\sin^2 3x \underset{x\to 0}{\sim} 9x^2$ и $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg} 3x} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2\cdot 1}{x} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{9x^2}{x} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}(9x) = 0.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg} 3x} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\operatorname{tg} 3x \ln \sin x} = e^0 = 1$.

Монотонные функции. Признаки монотонности

Напомним определения монотонных функций.

Функция $f(x)$ называется *возрастающей* на промежутке $[a;\ b]$, если для любых $x_1,\ x_2 \in [a;\ b]$, удовлетворяющих условию $x_1 > x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Функция $f(x)$ называется *убывающей* на промежутке $[a;\ b]$, если для любых $x_1,\ x_2 \in [a;\ b]$, удовлетворяющих условию $x_1 > x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.15 Если функция убывает или возрастает на всем промежутке $[a;\ b]$, то она называется *монотонной* (строго монотонной) на промежутке $[a;\ b]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.16 В определении возрастающей и убывающей функций знаки неравенства между значениями функции могут быть нестрогими. При этом:

1) если при $x_1 > x_2$ справедливо $f(x_1) \geq f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется *неубывающей*;
2) если при $x_1 > x_2$ справедливо $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется *невозрастающей*.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке $[a;\ b]$. В этом случае:

1) если производная $f'(x) > 0$ для всех значений $x \in [a;\ b]$, то функция $f(x)$ возрастает на промежутке $[a;\ b]$;
2) если производная $f'(x) < 0$ для всех значений $x \in [a;\ b]$, то функция $f(x)$ убывает на промежутке $[a;\ b]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.17 Если $f'(x) \geq 0$ для всех $x \in [a;\ b]$, то $f(x)$ — неубывающая функция на промежутке $[a;\ b]$. Если $f'(x) \leq 0$ для всех $x \in [a;\ b]$, то $f(x)$ — невозрастающая функция на промежутке $[a;\ b]$.

Исследование функций с помощью первой производной

Функция $f(x)$, определенная на промежутке $[a;\ b]$, имеет в точке $x_0 \in (a;\ b)$ *локальный максимум*, если существует окрестность $U_\delta(x_0)$, такая, что $f(x_0) > f(x)$ для всех $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$.

Функция $f(x)$, определенная на промежутке $[a;\ b]$, имеет в точке $x_0 \in (a;\ b)$ *локальный минимум*, если существует окрестность $U_\delta(x_0)$, такая, что $f(x_0) < f(x)$ для всех $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.18 Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума*.

Необходимое условие экстремума. Если дифференцируемая в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ имеет в этой точке экстремум, то ее производная в точке x_0 равна нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.19 Условие равенства нулю производной является необходимым, но не достаточным. Примером этому может служить функция $y = x^3$. Ее производная $y' = 3x^2$ равна нулю в точке $x_0 = 0$. Однако функция всюду возрастает (рис. 8.5) и не имеет экстремумов.

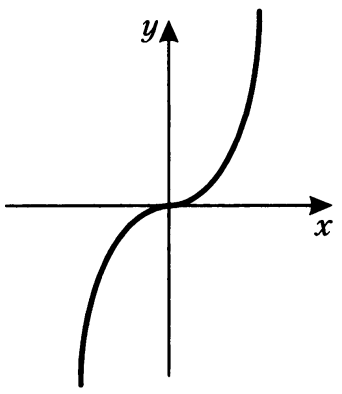


Рис. 8.5

Для исследования функции на экстремум более важным является следствие из необходимого условия, а именно: если производная дифференцируемой в точке x_0 функции отлична от нуля, то в точке x_0 у этой функции нет экстремума.

Точки, в которых производная заданной функции равна нулю, называются *стационарными*.

Достаточное условие экстремума. Если функция $f(x)$ дифференцируема в окрестности $U_\delta(x_0)$ точки x_0, $f'(x_0) = 0$ и производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум. При этом:

- если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с «плюса» на «минус», то этот экстремум — максимум (рис. 8.6);

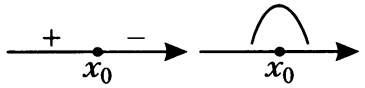


Рис. 8.6

- если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с «минуса» на «плюс», то этот экстремум — минимум (рис. 8.7).

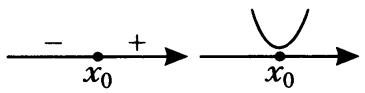


Рис. 8.7

Пример 8.26. Исследовать функцию $f(x)=\frac{e^x}{x}$ на экстремум.

Решение: заданная функция определена при всех значениях $x \neq 0$. Вычислим ее производную

$$f'(x)=\frac{e^x x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}.$$

Следовательно, функция дифференцируема на всей области определения. Так как $f'(x)=0$ при $x=1$, то экстремум может быть только в точке $x=1$. Чтобы выяснить, есть ли в этой точке экстремум, надо исследовать, меняет ли знак производная при переходе через эту точку. Отметим на числовой оси точку $x=1$. Она разобьет числовую ось на два интервала. Выясним знак производной y' на каждом из полученных интервалов и по знаку производной определим характер монотонности функции.

Поскольку производная меняет знак в точке $x=1$ с «минуса» на «плюс» (рис. 8.8), то в этой точке заданная функция имеет минимум.

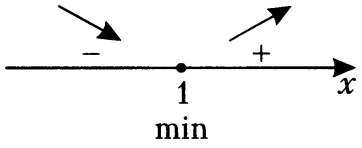


Рис. 8.8

ЗАМЕЧАНИЕ 8.20 Учитывая теорему о достаточном условии экстремума, можно определить точки экстремума как точки, в которых меняется характер монотонности функции.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.21 Производная может менять знак и в точках, в которых $f'(x)=\infty$ или не существует. Если эти точки входят в область определения функции, то они также являются точками ее экстремума, поскольку в них меняется характер монотонности. Точки экстремума, в которых производная $f'(x)=\infty$ или не существует, называются точками острого экстремума — *острого минимума* (рис. 8.9, *а*) и *острого максимума* (рис. 8.9, *б*).

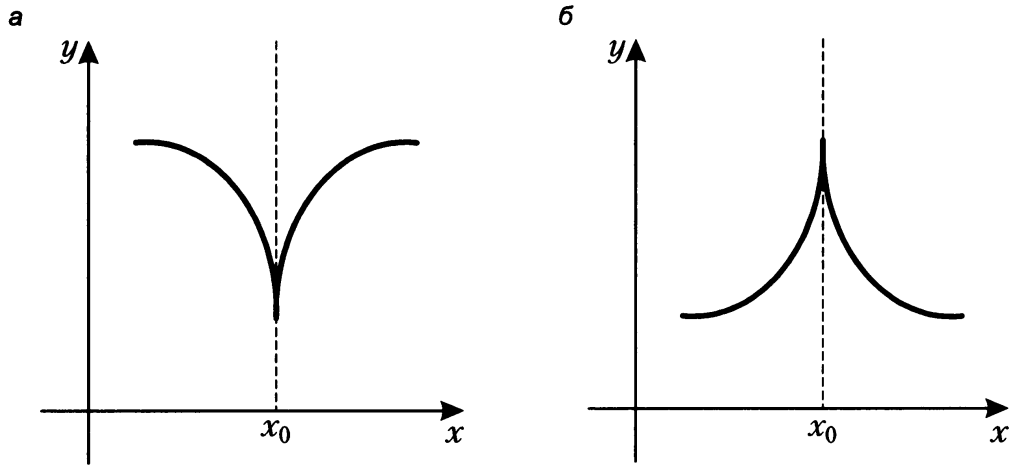


Рис. 8.9

ЗАМЕЧАНИЕ 8.22 Стационарные точки функции $f(x)$, а также точки, в которых производная $f'(x)=\infty$ или не существует, называются *критическими*. Только в этих точках следует искать экстремум функции. К критическим точкам относят также точки разрыва функции, так как в этих точках может меняться характер ее монотонности.

Пример 8.27. Исследовать функцию $y = x\sqrt[3]{(x-2)^2}$ на экстремум.

Решение: $y' = \sqrt[3]{(x-2)^2} + x \cdot \frac{2}{3} \cdot (x-2)^{-\frac{1}{3}} = \frac{3 \cdot (x-2) + 2x}{3\sqrt[3]{x-2}} = \frac{5x-6}{3\sqrt[3]{x-2}}$.

Производная $y' = 0$ при $x_1 = \frac{6}{5}$ и $y' = \infty$ при $x_2 = 2$. Поскольку функция определена на всей числовой оси, то других критических точек нет. Из рис. 8.10, *а* ясно, что заданная функция имеет максимум в точке $x_1 = \frac{6}{5}$ и острый минимум в точке $x_2 = 2$. На рис. 8.10, *б* показан график функции.

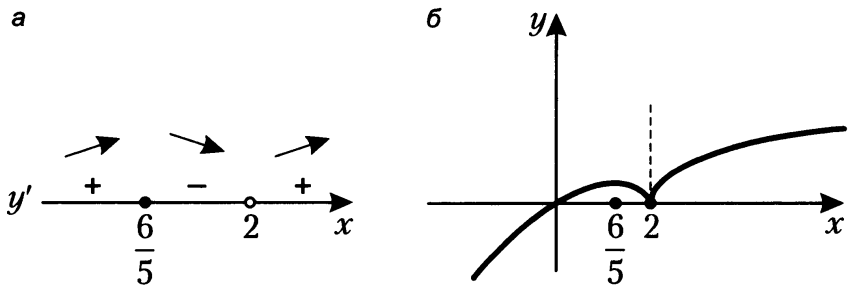


Рис. 8.10

Чтобы исследовать функцию на экстремум, необходимо:

- вычислить производную заданной функции;
- найти все критические точки функции, включая точки разрыва функции;
- нанести эти точки на числовую ось;
- определить знак производной на каждом из полученных интервалов;
- по знаку производной определить характер монотонности функции;
- определить наличие экстремума и его характер в каждой критической точке, исключая точки разрыва функции.

Пример 8.28. Исследовать функцию $y = \frac{x^2+3}{x-1}$ на экстремум.

Решение: $y' = \frac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$.

Критическими точками функции являются стационарные точки $x_1 = 3$ и $x_2 = -1$, а также точка разрыва $x_3 = 1$. Отметим их на числовой оси и определим знак производной на каждом из полученных интервалов (рис. 8.11).

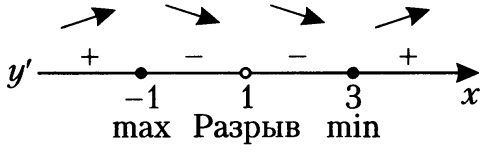


Рис. 8.11

Из рис. 8.11 ясно, что функция имеет максимум в точке $x_1 = -1$ и минимум в точке $x_2 = 3$. В точке разрыва характер монотонности не меняется.

Исследование функций с помощью второй производной. Точки перегиба

Функция $f(x)$ называется *выпуклой вниз* (выпуклой) на промежутке $(a;\ b)$, если ее график лежит выше касательной к ней, проведенной в любой точке с абсциссой $x_0 \in (a;\ b)$ (рис. 8.12, *а*).

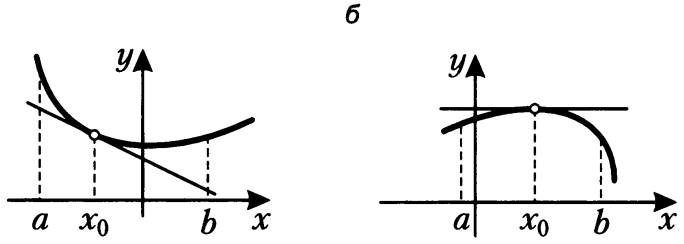


Рис. 8.12

Функция $f(x)$ называется *выпуклой вверх* (вогнутой) на промежутке $(a;\ b)$, если ее график лежит ниже касательной к ней, проведенной в любой точке с абсциссой $x_0 \in (a;\ b)$ (рис. 8.12, *б*).

Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на промежутке $(a;\ b)$ и вторая производная $f''(x) > 0$ для всех значений $x \in (a;\ b)$, то $f(x)$ выпукла вниз на промежутке $(a;\ b)$.

Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на промежутке $(a;\ b)$ и вторая производная $f''(x) < 0$ для всех $x \in (a;\ b)$, то $f(x)$ на промежутке $(a;\ b)$ выпукла вверх.

Точки, в которых меняется характер выпуклости функции, называются *точками перегиба*. Если $f''(x_0) = 0$ и $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 перегиб.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.23 Вторая производная может менять знак и в точке своего разрыва. Поэтому точками перегиба являются и точки, в которых вторая производная бесконечна (а функция определена) и меняет знак при переходе через эту точку.

Чтобы найти точки перегиба графика функции, нужно:

- вычислить вторую производную заданной функции;
- найти все точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует;
- нанести эти точки, а также точки разрыва функции на числовую ось;
- определить знак второй производной на каждом из полученных интервалов;
- по знаку второй производной определить характер выпуклости функции.

Точками перегиба будут те точки, в которых меняется характер выпуклости функции, исключая точки разрыва.

Пример 8.29. Определить точки перегиба графика функции $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

Решение: первая производная заданной функции равна $f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x$. Исследуя первую производную (рис. 8.13, *а*), легко убедиться в том, что функция имеет минимум в точке (0; 0).

Теперь вычислим вторую производную:

$$y'' = 2 \cdot \frac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = 2 \cdot \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2 \cdot (1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$$

и исследуем ее. Вторая производная меняет знак в точках $x = \pm 1$. По знаку второй производной y'' можно выяснить характер выпуклости функции (рис. 8.13, *б*). Здесь видно, что функция имеет две точки перегиба:

$$\begin{cases} x = \pm 1; \\ y = \ln 2. \end{cases}$$

На рис. 8.13, *в* показан график заданной функции.

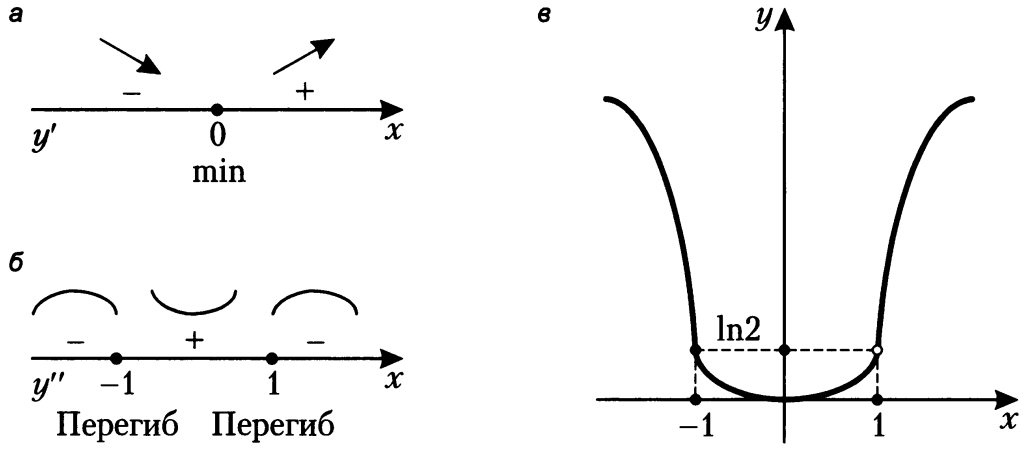


Рис. 8.13

Пример 8.30. Исследовать характер выпуклости графика функции $y = \sqrt[3]{x^5}$ и найти точки перегиба.

Решение: поскольку первая производная функции

$$y = (\sqrt[3]{x^5})' = \left(x^{\frac{5}{3}}\right)' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$$

всюду положительна, то функция возрастает при всех значениях x.

Вычислим вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}.$$

Вторая производная не существует при $x=0$ и меняет знак в этой точке (рис. 8.14, *а*). Поскольку функция определена на всей числовой оси, то $x=0$ — точка перегиба. График функции показан на рис. 8.14, *б*.

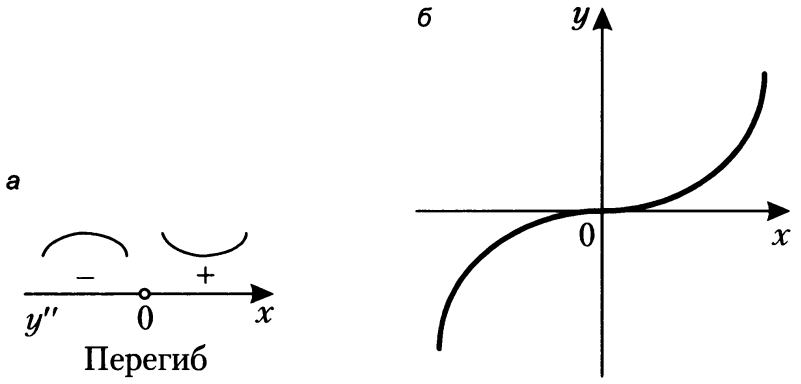


Рис. 8.14

Асимптоты графика функции

Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $f(x)$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.24 Из определения вертикальной асимптоты следует, что вертикальные асимптоты следует искать в точках бесконечного разрыва функции.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.25 Если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой справа или слева.

Пример 8.31. Найти вертикальные асимптоты графика функции

$$y = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Решение: поскольку

$$\lim_{x\to 1} = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \infty; \quad \lim_{x\to 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \infty;$$

$$\lim_{x\to 3} = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \infty,$$

то прямые $x=1$, $x=2$ и $x=3$ являются вертикальными асимптотами графика функции. Чтобы выяснить поведение функции вблизи вертикальных асимптот, исследуем заданную функцию на знак.

Из рис. 8.15 можно определить знаки бесконечных пределов:

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to 1-0} f(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to 2-0} f(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x\to 3+0} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to 3-0} f(x) = -\infty.$$

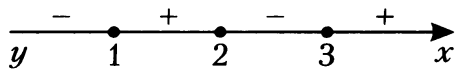


Рис. 8.15

Легко выяснить, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Эскиз графика функции показан на рис. 8.16.

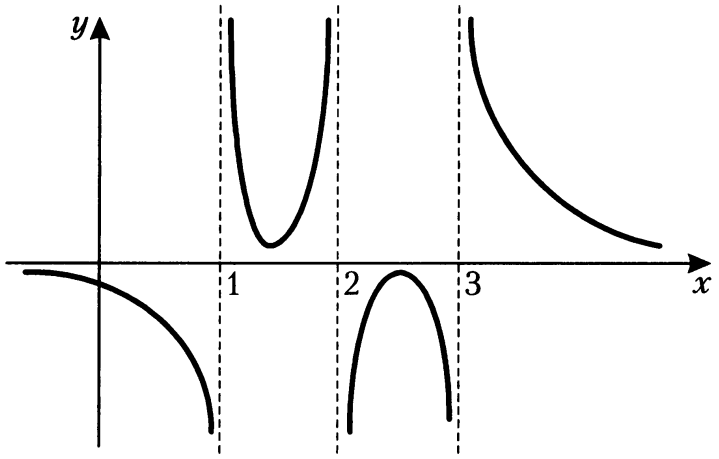


Рис. 8.16

График функции $y = f(x)$ имеет *наклонную асимптоту* вида $y = kx + b$ при $x \to \pm\infty$, если $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx - b) = 0$.

Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ тогда и только тогда, когда существуют и конечны пределы

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k; \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = b. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8.26 Если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k = 0$, то уравнение наклонной асимптоты принимает вид $y = b$. Такая асимптота называется *горизонтальной*.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.27 Функция может вести себя по-разному вблизи наклонной асимптоты:

- она может иметь одну и ту же наклонную асимптоту при $x \to \pm\infty$ (рис. 8.17, *а*);
- она может иметь разные наклонные асимптоты при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ (рис. 8.17, *б*);
- она может иметь наклонную асимптоту только при $x \to +\infty$ или при $x \to \infty$ (рис. 8.17, *в*).

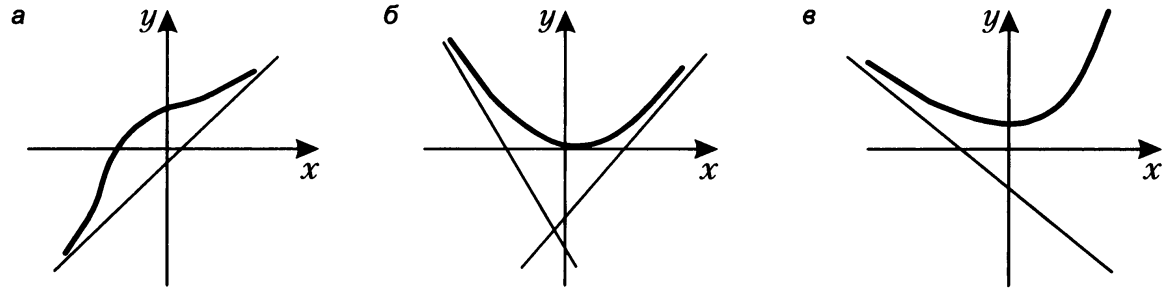


Рис. 8.17

Пример 8.32. Найти асимптоты графика функции $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x+4}$.

Решение: заданная функция определена и непрерывна на всей числовой оси, следовательно, ее график не имеет вертикальных асимптот.

Выясним, имеет ли график функции наклонные асимптоты вида $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^x+1}{(e^x+4)x}.$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to\pm\infty}e^x=\begin{cases}\infty, & x\to+\infty;\\ 0, & x\to-\infty,\end{cases}$ то асимптоты разные при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

Поэтому

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{(e^x+4)x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0;$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-k_1x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{e^x+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1.$$

При $x\to+\infty$ график функции имеет горизонтальную асимптоту $y=1$:

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+1}{(e^x+4)x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{4x}=0;$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-k_2x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+1}{e^x+4}=\frac{1}{4}.$$

При $x\to-\infty$ график функции имеет горизонтальную асимптоту $y=\dfrac{1}{4}$. График функции показан на рис. 8.18.

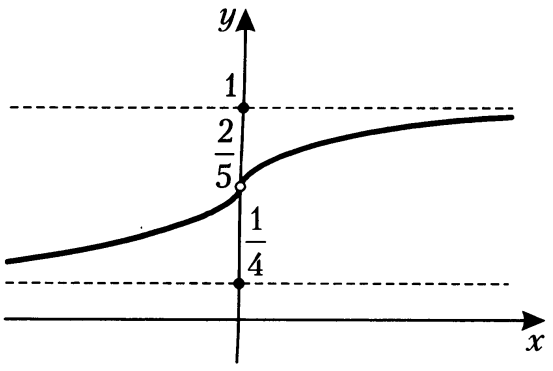


Рис. 8.18

Построение графиков функций

Если требуется построить график функции, то следует провести полное ее исследование по следующей схеме:

1. Область определения функции (ООФ) и вертикальные асимптоты.
2. Четность функции, периодичность функции.
3. Корни и знаки функции.
4. Монотонность функции. Экстремумы.
5. Выпуклость функции. Точки перегиба.
6. Наклонные (горизонтальные) асимптоты.

Для того чтобы построить график исследованной функции, нужно:

1) ввести прямоугольную декартову систему координат;
2) провести вертикальные и наклонные асимптоты;
3) отметить все характерные точки (корни, точки экстремума, точки перегиба);
4) соединить характерные точки кривыми в соответствии с исследованием функции на выпуклость.

Пример 8.33. Провести полное исследование функции $f(x)=\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2$ и построить ее график.

Решение: ООФ $x \neq 2$. Поскольку $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\infty$, то прямая $x=2$ — вертикальная асимптота. Функция общего вида и непериодическая. Корень функции $x=1$. Функция неотрицательна при всех значениях x.

Вычислим первую производную функции:

$$f'(x)=2\cdot\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\frac{x-2-x+1}{(x-2)^2}=\frac{-2\cdot(x-1)}{(x-2)^3}.$$

Отметим на числовой оси стационарную точку, $x=1$ и точку разрыва функции $x=2$. Определим знак первой производной на каждом из полученных интервалов и отметим стрелками характер монотонности функции (рис. 8.19).

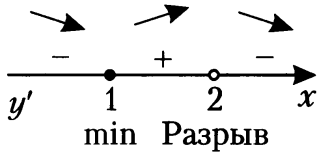


Рис. 8.19

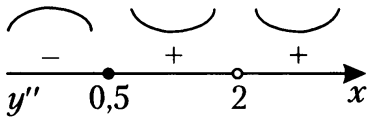
Из рис. 8.19 ясно, что $x=1$ — точка минимума. Для построения графика требуется найти значение функции в точке минимума $f(1)=0$. В точке разрыва меняется характер монотонности функции.

Вычислим вторую производную заданной функции:

$$f''(x)=-2\cdot\frac{(x-2)^3-(x-1)\cdot 3\cdot(x-2)^2}{(x-2)^6}=-2\cdot\frac{x-2-3x+3}{(x-2)^4}=2\cdot\frac{2x-1}{(x-2)^4}.$$

Вторая производная обращается в ноль в точке $x=\frac{1}{2}$ и меняет знак при переходе через эту точку. Точка перегиба — $x=\frac{1}{2}$. В точке разрыва $x=2$ вторая производ-

ная знак не меняет. Определим знак второй производной на всей числовой оси и отметим на ней характер выпуклости функции (рис. 8.20).



Перегиб Разрыв

Рис. 8.20

Значение функции в точке перегиба $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{9}$.

Выясним, имеет ли функция наклонную асимптоту вида $y = kx + b$. Для этого вычислим пределы:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2}{x(x-2)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2}{(x-2)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1.$$

Следовательно, график функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$. График заданной функции построен на рис. 8.21.

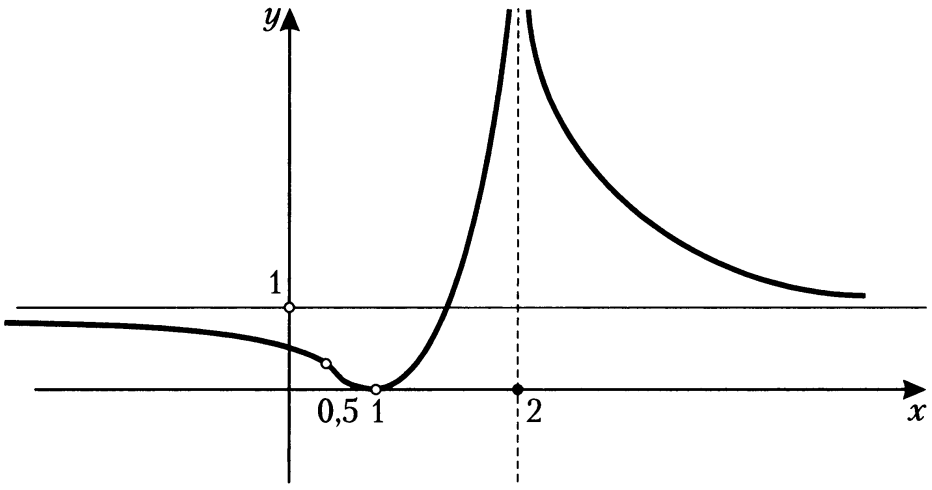


Рис. 8.21

Наибольшее и наименьшее значения непрерывной на замкнутом промежутке функции

Функция, непрерывная на замкнутом промежутке, принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Эти значения могут достигаться в точках экстремума и острого экстремума, а также на концах промежутка. Функция, график кото-

рой показан на рис. 8.22, достигает наибольшего значения на левом конце промежутка в точке $x = a$ и наименьшего — в точке минимума x_3.

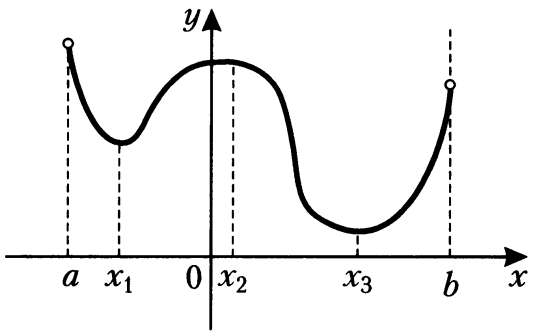


Рис. 8.22

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$, непрерывной на промежутке $[a, b]$, нужно:

1) найти все ее критические точки;
2) вычислить значения функции во всех критических точках;
3) вычислить значения $f(a)$ и $f(b)$;
4) среди полученных чисел найти самое большое и самое маленькое.

Пример 8.34. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \sqrt[3]{x^2}$ на промежутке $[-8; 8]$.

Решение: заданная функция непрерывна на всей числовой оси. Производная функции

$$f'(x) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{x\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Производная $f'(x) = 0$ при $x = \pm 1$ и $f'(x) = \infty$ при $x = 0$. Вычислим значения функции в этих точках: $f(\pm 1) = -\frac{2}{3}$, $f(0) = 0$. Значения функции на концах заданного промежутка равны $f(\pm 8) = 17\frac{1}{3}$. Следовательно, наибольшее значение функции равно $17\frac{1}{3}$ при $x = \pm 8$, наименьшее значение функции равно $-\frac{2}{3}$ при $x = \pm 1$.

Исследование функций с помощью производных высших порядков

Если функция $f(x)$ $n+1$ раз дифференцируема в окрестности точки x_0 и все ее производные до производной n-го порядка в этой точке равны нулю, то есть $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0$, а $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, то:

- если $n+1$ — нечетное число, то в точке x_0 перегиб;
- если $n+1$ — четное число, то в точке x_0 экстремум.

Если при четном $n+1$:

- $f^{(n+1)}(x_0)<0 \Rightarrow x_0$ — точка максимума;
- $f^{(n+1)}(x_0)>0 \Rightarrow x_0$ — точка минимума.

Пример 8.35. Исследовать поведение функции $f(x)=xe^x-\sin(x^2)-\frac{1}{2}x^3-x$ в точке $x_0=0$.

Решение:

$$f'(x)=e^x+xe^x-\cos(x^2)2x-\frac{3}{2}x^2-1 \Rightarrow f'(0)=0;$$

$$f''(x)=e^x+e^x+xe^x+\sin(x^2)4x^2-2\cos(x^2)-\frac{3}{2}2x \Rightarrow f''(0)=0;$$

$$f'''(x)=2e^x+e^x+xe^x+\cos(x^2)8x^3+\sin(x^2)8x+2\sin(x^2)2x-3 \Rightarrow f'''(0)=0.$$

Упростим третью производную и продифференцируем функцию еще раз:

$$f'''(x)=3e^x+xe^x+\cos(x^2)8x^3+12x\sin(x^2)-3;$$

$$f^{IV}(x)=3e^x+e^x+xe^x-\sin(x^2)16x^4+\cos(x^2)24x^2+$$
$$+12\sin(x^2)+12x\cos(x^2)2x.$$

Поскольку $f^{IV}(0)=4>0$, то функция имеет в точке $x=0$ минимум.

Задачи для типовых расчетов

Дифференцирование функций

Задача 8.1. Вычислите производную.

1. $y=\dfrac{2(3x^3+4x^2-x-2)}{15\sqrt{1+x}}$.
2. $y=\dfrac{x^4-8x^2}{2(x^2-4)}$.
3. $y=3\sqrt[3]{(x+1)/(x-1)^2}$.
4. $y=3\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}$.
5. $y=\dfrac{2x^2-x-1}{3\sqrt{2+4x}}$.
6. $y=\dfrac{\sqrt[3]{3x^5-2x}}{x+7}$.
7. $y=\dfrac{(x^2-6)\sqrt{(4+x^2)^3}}{120x^5}$.
8. $y=\dfrac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}$.
9. $y=\dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$.
10. $y=\dfrac{(x^2-2)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$.
11. $y=\dfrac{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}$.
12. $y=\dfrac{x^6+x^3-2}{\sqrt{1-x^3}}$.

13. $y=\dfrac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$.

14. $y=\dfrac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2}$.

15. $y=\dfrac{(x^3-3x)\sqrt{x^2-2x^4}}{4x+5}$.

16. $y=\dfrac{(2x^2+3)\sqrt{x^2-3}}{9x^3}$.

17. $y=\dfrac{x^6+8x^3-128}{\sqrt{8-x^3}}$.

18. $y=\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+5}}$.

19. $y=2\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$.

20. $y=\dfrac{\sqrt{2x+3}(x-2)}{x^2}$.

21. $y=\dfrac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}$.

22. $y=\dfrac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$.

23. $y=\dfrac{x-1}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}$.

24. $y=(1-x^2)\sqrt[5]{x^3+\dfrac{1}{x}}$.

25. $y=\dfrac{\sqrt{2-x^5}}{5x^2-2x}$.

26. $y=\dfrac{(x^2-8)\sqrt{x^2-8}}{6x^3}$.

27. $y=\dfrac{x\sqrt{2x^2+x^5}}{x^3-5x}$.

28. $y=\dfrac{\sqrt{x^3-3x}}{\sqrt{x^3+x}}$.

29. $y=\dfrac{x^4-3x+5}{\sqrt{x}-4}$.

30. $y=\sqrt[3]{\dfrac{(1+x^{3/4})^2}{x^{3/2}}}$.

Задача 8.2. Вычислите производную.

1. $y=x-\ln(1+e^x)-2e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{arctg}e^{\frac{x}{2}}-\left(\operatorname{arctg}e^{\frac{x}{2}}\right)^2$.

2. $y=\operatorname{tg}\ln x-2e^{-x}+\dfrac{1}{\cos 2x}$.

3. $y=3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2)$.

4. $y=\dfrac{e^x}{2}[(x^2-1)\cos x+(x-1)^2\sin x]$.

5. $y=\dfrac{1}{\sqrt{m}}\dfrac{e^{2mx}}{\sin 2x-\cos 2x}$.

6. $y=\sqrt{x}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+a})-\sqrt{x+a}$.

7. $y=\sqrt{\dfrac{a}{b}}\operatorname{arctg}(e^{3\cos^2 x})$.

8. $y=\ln\dfrac{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}-e^x-1}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}-e^x+1}$.

9. $y=\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1})+\arcsin e^{-x}$.

10. $y = x^2 - 3x + \dfrac{8\operatorname{tg} 3x}{1 + e^{\frac{x}{4}}}$.

11. $y = x + \dfrac{1}{1 + e^x} - \ln(1 + e^x)$.

12. $y = x - 3\ln\left[\left(1 + e^{\frac{x}{6}}\right)\sqrt{1 + e^{\frac{x}{3}}}\right] - 3\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{6}}$.

13. $y = e^{ax}\left[\dfrac{1}{2a} + \dfrac{a\cos x + 2b\sin bx}{2(a^2 + 4b^2)}\right]$.

14. $y = \ln(e^x + 1) + \dfrac{18e^{2x} + 27e^x + 11}{6(e^x + 1)^3}$.

15. $y = \dfrac{1}{\ln 4}\ln\dfrac{1 + 2^x}{1 - 2^x} + \operatorname{ctg}(1 - x^4)$.

16. $y = \dfrac{1}{2}\ln(e^{2x} + 1) - 2\operatorname{arctg} e^x$.

17. $x(\cos\ln x + \sin\ln x)/2$.

18. $y = 2\sqrt{e^x + 1} + \ln\dfrac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1}$.

19. $y = 2\dfrac{\sqrt{2^x - 1} - \operatorname{arctg}\sqrt{2^x - 1}}{\ln 2}$.

20. $y = 2(x - 2)\sqrt{1 + e^x} - 2\ln\dfrac{\sqrt{1 + e^x} - 1}{\sqrt{1 + e^x} + 1}$.

21. $y = e^{\alpha x}(\beta\sin\beta x + \alpha\cos\beta x)/(\alpha^2 + \beta^2)$.

22. $y = \sqrt{1 - \ln^3 x}\,(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x)$.

23. $y = x - \ln(2 + e^x + 2\sqrt{e^{2x} + e^{x+1}})$.

24. $y = \dfrac{\sin^2 x}{3}\sqrt{(\operatorname{arctg} e^x)^3}$.

25. $y = x - e^{-x}\arcsin e^x - \ln(1 + \sqrt{1 - e^{2x}})$.

26. $y = \sqrt{\sin x + \cos x} + \dfrac{\sqrt{1 - x^2} - x}{\sqrt{1 - x^2} + x}$.

27. $y = \sqrt{1 - \sqrt{x}} + \ln(x + \sqrt{1 + x})$.

28. $y = \sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \arcsin^2(e^{-2x})$.

29. $y = \arccos(2^{-x^2}) + \ln(x^2 - 3)$.

30. $y = \sqrt{1 + 3x}\ln^2(1 - \cos x) - 3^{ax}\operatorname{arctg} 3\sqrt{x}$.

Задача 8.3. Вычислите производную.

1. $y = \ln\dfrac{\sqrt{5} + \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{\sqrt{5} - \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}$.
2. $y = \dfrac{\arcsin^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.
3. $y = \dfrac{1}{2x^2}\arcsin(\sin\alpha + 2x)$.
4. $y = \operatorname{arctg}^3(1 + \sqrt[4]{x})$.
5. $y = \log_3\log_6 \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.
6. $y = \operatorname{arctg}^3(1 - 3\cos ax)$.
7. $y = \operatorname{arctg}\left(\sin\alpha \operatorname{tg}\dfrac{x}{5}\right)$.
8. $y = \ln\arcsin\sqrt{1 - e^{2x}}$.
9. $y = \log_{16}\log_5 \operatorname{tg}x$.
10. $y = \log_4\log_2 \operatorname{arcctg}\sqrt{x}$.
11. $y = \dfrac{x}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{e^x - 3}{2}$.
12. $y = \ln\cos\dfrac{2x + 3}{2x + 1}$.
13. $y = \ln\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.
14. $y = \ln\dfrac{bx}{\sqrt{1 + b^2x^2}}$.
15. $y = \arcsin\dfrac{x - 2}{(x - 1)\sqrt{2}}$.
16. $y = \ln\dfrac{\sqrt{x^2 + 1} + x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1} - x\sqrt{2}}$.
17. $y = \ln\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^4}}$.
18. $y = \ln\sin\dfrac{2x + 4}{x + 1}$.
19. $y = \ln\sqrt[4]{\dfrac{1 + 2x}{1 - 2x}}$.
20. $y = x + \ln\dfrac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}}$.
21. $y = \ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)$.
22. $y = \ln\dfrac{x^2}{1 - x^2}$.
23. $y = \ln^2(x + \cos x)$.
24. $y = \cos^2 x \cdot \operatorname{arcctg}\sqrt{1 + x}$.
25. $y = \ln\dfrac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x} + \sqrt{x + 1}}$.
26. $y = \ln\dfrac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$.
27. $y = \ln\dfrac{x^2}{\sqrt{1 - ax^4}}$.
28. $y = \arcsin\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$.
29. $y = 2\sqrt{x} - 4\ln(2 + \sqrt{x})$.
30. $y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^x})$.

Задача 8.4. Вычислите производную.

1. $y = (2x^2 + 6x + 5)\operatorname{arctg}\dfrac{x + 1}{x - 1} - x$.
2. $y = 2\sqrt{x} - 4\ln(2 + \sqrt{x})$.
3. $y = \ln(\sqrt{2}\operatorname{tg}x + \sqrt{1 + 2\operatorname{tg}^2 x})$.

4. $y = \operatorname{arctg} x + \frac{5}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}$.

5. $y = \frac{(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x}}{x}$.

6. $y = 6\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{6+x}{2}\sqrt{x(4-x)}$.

7. $y = \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} + \operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

8. $y = \frac{1}{4}\ln\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

9. $y = \frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2} + \frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3}$.

10. $y = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1+x}{2x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

11. $y = \frac{4+x^4}{x^3}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2} + \frac{4}{x}$.

12. $y = \sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{6x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

13. $y = \frac{2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$.

14. $y = e^{\operatorname{ctg}^2 x}\frac{\sqrt{x}}{3} + 2\sin^2 x$.

15. $y = 3^{\cos^2 2x}\arcsin\sqrt{x} + \operatorname{tg} 3x$.

16. $y = \sqrt{x}\cdot\sin(x\cdot e^{\cos x}) - \frac{\ln(1+x)}{2-x}$.

17. $y = e^{\operatorname{tg} 2x} - \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \cos\frac{1}{x}$.

18. $y = \ln(\sqrt{x} - 2^{\operatorname{ctg}^3 x}) - 3^{\sqrt{1-\sin x}}\cdot x$.

19. $y = \arcsin\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{5x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\sin^2\left(\frac{\pi}{5} - x\right)$.

20. $y = \sqrt{1-x^2} - x\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

21. $y = \frac{2x-5}{4}\sqrt{5x-4-x^2} + \frac{9}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-1}{3}}$.

22. $y = \frac{2x\operatorname{ctg} 3x}{\sqrt{x}} - 3^{-\arccos\sqrt{x}}$.

23. $y = \frac{x-3}{2}\sqrt{6x-x^2-8} + \arcsin\sqrt{\frac{x}{2}-1}$.

24. $y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}-\frac{\arccos x}{2x^2}-\frac{1}{\cos^2 x}$.

25. $y=\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{8x-x^2-7}-9\arccos\sqrt{\frac{x-1}{6}}$.

26. $y=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}-\ln\frac{1-x^3}{\sqrt{2x+1}}$.

27. $y=e^{-\operatorname{tg}3x}\cdot\arccos\frac{x^2-4}{\sqrt{x^4+16}}$.

28. $y=\frac{(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x^2}+\frac{1}{3x\sqrt{x}}$.

29. $y=\frac{3+x}{2}\sqrt{x(2-x)}+3\arccos\sqrt{\frac{x}{2}}$.

30. $y=\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x}{\sqrt{2}}-\log_3^2(x+1)$.

Задача 8.5. Вычислите производную.

1. $y=(\operatorname{arctg}x)^{\frac{1}{2}\ln\operatorname{arctg}x}$.
2. $y=x^{\arcsin x}$.
3. $y=(\sin x)^{5e^x}$.
4. $y=(\sin x)^{e^{\sqrt{x}}}$.
5. $y=(\ln x)^{3^x}$.
6. $y=(\cos 5x)^{e^x}$.
7. $y=(\operatorname{ctg}3x)^{2e^x}$.
8. $y=(x^3+4)^{\operatorname{tg}x}$.
9. $y=(\operatorname{tg}x)^{4e^x}$.
10. $y=x^{3^x}2^x$.
11. $y=(x\sin x)^{8\ln(x\sin x)}$.
12. $y=x^{2^x}5^x$.
13. $y=x^{\sin x^3}$.
14. $y=x^{e^{\cos x}}$.
15. $y=(\sin\sqrt{x})^{\frac{1}{e^x}}$.
16. $y=19^{x^{19}}x^{19}$.
17. $y=x^{e^{\sin x}}$.
18. $y=(\sin x)^{5x/2}$.
19. $y=(x^2+1)^{\cos x}$.
20. $y=x^{e^{\operatorname{arcctg}x}}$.
21. $y=(x^4+5)^{\operatorname{ctg}x}$.
22. $y=\left(\frac{x}{\operatorname{tg}x}\right)^{e^{\cos x}}$.
23. $y=x^{e^{\operatorname{ctg}x}}$.
24. $y=\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}\right)^{x+1}$.
25. $y=x^{e^{\operatorname{tg}x}}$.
26. $y=(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

27. $y = \sin 3x^{\ln(1-2x^2)}$.

28. $y = (\operatorname{tg} x)^{\ln \operatorname{tg}\frac{x}{4}}$.

29. $y = \left(\dfrac{\cos^2 x}{1+2x}\right)^{\sin x}$.

30. $y = (\arcsin x)^{e^x}$.

Задача 8.6. Вычислите производную.

1. $y = \dfrac{4x+1}{16x^2+8x+3} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \dfrac{4x+1}{\sqrt{2}}$.

2. $y = \dfrac{2x-1}{4x^2-4x+3} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \dfrac{2x-1}{\sqrt{2}}$.

3. $y = \ln \dfrac{1+\sqrt{-3-4x-x^2}}{-x-2} - \dfrac{2}{x+2}\sqrt{-3-4x-x^2}$.

4. $y = \ln \dfrac{1+\sqrt{-3-4x-x^2}}{-x-2} - \dfrac{2}{x+2}\sqrt{-3-4x-x^2}$.

5. $y = \ln \dfrac{1+\sqrt{-3-4x-x^2}}{-x-2} - \dfrac{2}{x+2}\sqrt{-3-4x-x^2}$.

6. $y = \sqrt{x^2-8x+17} \operatorname{arctg}(x-4) - \ln(x+\sqrt{x^2-8x+17})$.

7. $y = \sqrt{9x^2+5} \operatorname{arctg}(3x-2) - \ln(3x+\sqrt{9x^2-12x+5})$.

8. $y = \dfrac{2}{x-1}\sqrt{2x-x^2} + \ln \dfrac{1+\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$.

9. $y = \ln(x-1+\sqrt{4x^2-8x+2}) - \sqrt{4x^2-8x+2} \operatorname{arctg}(x-1)$.

10. $y = (2x+3)^4 \arcsin \dfrac{1}{2x+3} + (4x^2+12x+1)\sqrt{x^2+3x+2}$.

11. $y = \dfrac{x^4}{16} \arcsin \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{24}(x^2+18)\sqrt{x^2-4}$.

12. $y = \dfrac{1}{\cos^2 x}\sqrt{2x-x^2} + \ln \operatorname{arctg} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

13. $y = \dfrac{\ln \arcsin\sqrt{1-x}}{x \cdot e^{-2x}} + \operatorname{ctg} \dfrac{1}{x}$.

14. $y = \cos \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{\cos^2 \alpha} \log_4 \dfrac{1-\sqrt{3x}}{1+\sqrt[3]{2x}}$.

15. $y = \dfrac{\ln \operatorname{arctg}(e^{2x+1})}{\sqrt{4-x^2}} + \dfrac{1+\sqrt[5]{(x-2)^2}}{4x-3}$.

16. $y = x^3 \ln \dfrac{1-2\sin x}{1+\sqrt{\cos x}} - \dfrac{2}{3^{\sqrt[3]{x}}} - \sqrt{1-e^{3x}}$.

17. $y = \ln(e^{5x} + \sqrt{e^{10x}-1}) + \arcsin(e^{-5x})$.

18. $y=\frac{x^4}{81}\arcsin\frac{3}{x}+\frac{1}{81}(x^2+18)\sqrt{x^2-9}$.

19. $y=\frac{x+2}{x^2+4x+6}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{2}}$.

20. $y=\ln\frac{1+2\sqrt{-x-x^2}}{2x+1}+\frac{4}{2x+1}\sqrt{-x-x^2}$.

21. $y=2x-\ln(1+\sqrt{1-e^{4x}})-e^{-2x}\arcsin(e^{2x})$.

22. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}\frac{3x-1}{3x^2-2x+1}$.

23. $y=5x-\ln(1+\sqrt{1-e^{10x}})-e^{-5x}\arcsin(e^{5x})$.

24. $y=\ln\frac{1+\sqrt{-3+4x+x^2}}{2-x}+\frac{2}{2-x}\sqrt{-3+4x+x^2}$.

25. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{2}}+\frac{x-1}{x^2-2x+3}$.

26. $y=\ln(3+\sqrt{2x^2-2x+1})-\sqrt{2x^2-2x+1}\operatorname{arctg}(3x)$.

27. $y=\frac{2}{3}(4x^2-4x+3)\sqrt{x^2-x}+(2x-1)^4\arcsin\frac{1}{2x-1}$.

28. $y=\arcsin e^{-4x}+\ln(e^{4x}+\sqrt{e^{8x}-1})$.

29. $y=\frac{2}{3x-2}\sqrt{-3+12x-9x^2}+\ln\frac{1+\sqrt{-3+12x-9x^2}}{3x-2}$.

30. $y=\ln(x+\sqrt{x^2-x+1})-\sqrt{x^2-x+1}\cdot e^{\sqrt[3]{x-1}}$.

Задача 8.7. Вычислите производную.

1. $y=\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}$.

2. $y=x(2x^2+5)\sqrt{x^2+1}+3\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

3. $y=3\arcsin\frac{3}{4x+1}+2\sqrt{4x^2+2x-2}$.

4. $y=\arcsin\frac{2}{3x+4}+\sqrt{9x^2+24x+12}$.

5. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

6. $y=\sqrt{(4+x)(1+x)}+3\ln(\sqrt{4+x}+\sqrt{1+x})$.

7. $y=\ln\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2-1}\right)\operatorname{arctg}x$.

8. $y = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x.$

9. $y = (2+3x)\sqrt{x-1} + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}.$

10. $y = 4\arcsin\frac{4}{2x+3} + \sqrt{4x^2+12x-7}.$

11. $y = x\ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) + \frac{1}{2}(\arcsin x - x).$

12. $y = x(2x^2+1)\sqrt{x^2+1} - \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$

13. $y = \frac{\sqrt{1-e^{-x}}}{\ln\operatorname{tg} x} - \ln(1+\sqrt[3]{x+1}) + \frac{1}{\cos 2x}.$

14. $y = \frac{5^{-\cos x}\sqrt{1-x^4}}{\operatorname{ctg}^3 x} - e^{\frac{2}{x+2}}.$

15. $y = \frac{e^{-\cos^2 x}\sqrt{1+3x}}{\operatorname{ctg}^3 2x} + \frac{1}{\ln^2 x}.$

16. $y = x^3\arccos x - \frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-7x^2}.$

17. $y = 2\arcsin\frac{2}{3x+1} + \sqrt{9x^2+5x-3}.$

18. $y = \frac{1}{3}(x-2)\sqrt{x+1} + \ln(\sqrt{x+1}+1).$

19. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} + \ln\frac{1+\sqrt{2x-x^2}}{x-1}.$

20. $y = \sqrt{(3-x)(2+x)} + 5\arcsin\sqrt{(x+2)/5}.$

21. $y = \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+1}.$

22. $y = \ln\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x} + \sqrt{3}\,e^{-x}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$

23. $y = \sqrt{1-3x-2x^2} + \frac{3}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x+3}{\sqrt{17}}.$

24. $y = \left(1-\operatorname{tg}\frac{1}{x}\right)\sqrt{x^2-1} - \frac{\arccos 3x}{\sqrt[3]{3x+2}}.$

25. $y = \sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x - \ln(x+\sqrt{1+x^2}).$

26. $y = x^3\arcsin\sqrt{x} + \frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}.$

27. $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + 2^{3x}\arcsin x - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}.$

28. $y = \ln^2(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) + \dfrac{\operatorname{arctg} 2x^3}{1+x}$.

29. $y = (1 - \operatorname{ctg} 2x)\sqrt{x^2 + 4} - \dfrac{\arccos 2x}{\sqrt{x^2+4}}$.

30. $y = \sqrt{2 - 2x - x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \dfrac{2x+1}{\sqrt{5}}$.

Задача 8.8. Вычислите производную.

1. $y = 2 \cdot \dfrac{\cos x}{\sin^4 x} + 3 \cdot \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$.

2. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{2\sin x}{\sqrt{9\cos^2 x - 4}}$.

3. $y = \dfrac{2^x(\sin x + \cos x \ln 2)}{1 + (\ln 2)^2}$.

4. $y = \dfrac{6^x(4x - 4\operatorname{tg} 4x)}{16 + \ln^2 6}$.

5. $y = \dfrac{5^x(\sin 3x \ln 5 - 3\cos 3x)}{9 + \ln^2 5}$.

6. $y = \ln \dfrac{\sin x}{\cos x + \sqrt{\cos 2x}}$.

7. $y = \dfrac{4^x(\sin 4x - 4\cos 4x)}{16 + \ln^2 4}$.

8. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{\cos x}{\sqrt[4]{\cos 2x}}$.

9. $y = \dfrac{5^x(\sin 2x + \ln 5 \cos 2x)}{4 + \ln^2 x}$.

10. $y = \dfrac{1}{3\sin^3 x} + \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$.

11. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{2\operatorname{tg} x}}{1 - \operatorname{tg} x}$.

12. $y = \dfrac{\operatorname{ctg} x + x}{1 - x \operatorname{ctg} x}$.

13. $y = \dfrac{7^x(\sin 3x + \ln 7 \cos 3x)}{9 + \ln^2 7}$.

14. $y = \dfrac{1}{\sin \alpha} \ln(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} \alpha)$.

15. $y = \dfrac{\sin^2 x}{x \cos x} + \dfrac{x}{\cos^6 x}$.

16. $y = \dfrac{1}{\sin \alpha} \ln(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} \alpha)$.

17. $y = (\sin \ln x - \cos \ln x) x^{\sqrt{2}}$.

18. $y = \dfrac{\sin^2 x}{x \cos x} + \dfrac{x}{\cos^6 x}$.

19. $y = (1 + x^2) e^{\operatorname{arctg} x}$.

20. $y = \ln \dfrac{\sin \alpha}{x + \sqrt{1 + \cos^2 2x}}$.

21. $y = \dfrac{1}{2\sin \dfrac{\alpha}{2}} \operatorname{arctg} \dfrac{2x \sin \dfrac{\alpha}{2}}{1 - x^2}$.

22. $y = \dfrac{2^x(\sin x + \ln \cos \alpha x)}{1 + \sin^2 \alpha}$.

23. $y = \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} \sin x}{b}\right)$.

24. $y = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} - 2\cos x \cdot \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$.

25. $y = \dfrac{3^x(4\sin 4x + \ln 3 \cos 4x)}{16 + \ln^2 3}$.

26. $y = \ln(1 + e^x) - e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}$.

27. $y=\sqrt{\dfrac{1-x^3}{1+x^3}}\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

28. $y=x\cos\alpha-\ln\sin(x-\alpha)$.

29. $y=\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}\ln\left(\operatorname{arcctg}\dfrac{1-x}{1+\sin x}\right)$.

30. $y=\dfrac{1}{\cos\alpha}\operatorname{arctg}\dfrac{x^3\cos\alpha}{\sqrt{x^3+x}}$.

Задача 8.9. Вычислите производную.

1. $y=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\dfrac{x}{2}-5$.
2. $y=x\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}$.
3. $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}-3$.
4. $y=\sqrt{1+2x}-\ln(x+\sqrt{1+2x})$.
5. $y=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}-3^{\cos x}$.
6. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2\operatorname{tg}x}}{1-\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+3x}$.
7. $y=\dfrac{\ln x}{1+x^2}-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2}{1+x^2}$.
8. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x}+\dfrac{1}{\operatorname{arctg}2x}$.
9. $y=\left(\sqrt{x-1}-\dfrac{1}{2}\right)e^{2\sqrt{x-1}}$.
10. $y=\sqrt{\operatorname{ctg}x}-\dfrac{1}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3x}$.
11. $y=\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1})+\arcsin e^{-x}$.
12. $y=\ln\left(\cos\dfrac{x}{2}+1\right)-\dfrac{\sqrt{1-\cos^2x}}{\operatorname{arctg}3x}$.
13. $y=x^2\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-1}$.
14. $y=\log_2(2\sin2x+\cos2x)$.
15. $y=\dfrac{1+2x}{\log_3(1-\cos x)}\ln\left(2x+\dfrac{2}{x^2}\right)$.
16. $y=\ln(1-\operatorname{tg}^3x)e^{-\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}}$.
17. $y=\dfrac{x}{\ln(1-\sin^2x)}\log_2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.
18. $y=e^{\sin x}(3\sin2x+2\sin2x)$.
19. $y=\sqrt{x}-(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

20. $y = x\sqrt{4-x^2} + 4\arcsin\frac{x}{2}$.

21. $y = \ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x} - \arccos 2x$.

22. $y = e^x(\cos 2x + 2\sin 2x) - \ln\frac{1}{1+x^3}$.

23. $y = x(\sin\ln x - \cos\ln x) + \operatorname{arctg}\frac{2}{4+\sqrt{x}}$.

24. $y = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}} - \arcsin\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{1-2\operatorname{tg} 2x}$.

25. $y = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x$.

26. $y = \arccos\frac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}} - \frac{1+\ln^2\cos x}{\sqrt{2x}}$.

27. $y = e^{2x}\sqrt{\cos^2 x - x} - x\,e^{-4x}$.

28. $y = x\arcsin\frac{1}{x} + \ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

29. $y = x\ln(1+x) - x\frac{\sqrt{\arccos x}}{\arccos\sqrt{x}}$.

30. $y = \cos x \ln\operatorname{tg} x \ \ln\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\sqrt{x}\right)$.

Задача 8.10. Вычислите вторую производную заданной функции.

1. $y = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$.
2. $y = \frac{x^2+x}{x-1}$.
3. $y = \frac{x^2}{(x-2)^2}$.
4. $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.
5. $y = \arcsin\sqrt{x}$.
6. $y = \ln(x^2+x+1)$.
7. $y = \frac{x+2}{x^2-x}$.
8. $y = \frac{2-x^2}{x^2+1}$.
9. $y = xe^{-x}$.
10. $y = x\operatorname{arctg} x$.
11. $y = x\sqrt{1-x^2}$.
12. $y = \sqrt{x^2+2x+3}$.
13. $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2}$.
14. $y = \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}$.
15. $y = \operatorname{arctg} x^2$.
16. $y = e^{2x}\sin 3x$.
17. $y = e^{-x}\cos 2x$.
18. $y = x\ln(x^2+1)$.
19. $y = xe^{x^2}$.
20. $y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$.

21. $y = \dfrac{2x}{x^2+4}$.
22. $y = \dfrac{x^2+1}{x+3}$.
23. $y = xe^{-x^2}$.
24. $y = \ln^2(x+1)$.
25. $y = \left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2$.
26. $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.
27. $y = \sin^3 x$.
28. $y = \operatorname{arctg}^2 x$.
29. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$.
30. $y = x\ln(1+x^2)$.

Задача 8.11. Вычислите $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если функция $y(x)$ задана параметрически.

1. $\begin{cases} x = \cos\ln t; \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x = \arcsin(\sin t); \\ y = \arccos(\cos t). \end{cases}$
3. $\begin{cases} x = \sqrt{2t-t^2}; \\ y = \arcsin(t-1). \end{cases}$
4. $\begin{cases} x = \cos\ln t; \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\ln t}; \\ y = \ln\dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}. \end{cases}$
6. $\begin{cases} x = \ln\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}; \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$
7. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}; \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$
8. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t; \\ y = \ln\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t+1}. \end{cases}$
9. $\begin{cases} x = t\sqrt{t^2+1}; \\ y = \ln\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}. \end{cases}$
10. $\begin{cases} x = (1+\cos^2 t)^2; \\ y = \dfrac{\cos t}{\sin^2 t}. \end{cases}$
11. $\begin{cases} x = \arccos\dfrac{1}{t}; \\ y = \sqrt{t^2-1} + \arcsin\dfrac{1}{t}. \end{cases}$
12. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg}\dfrac{t+1}{t-1}; \\ y = \arcsin\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$
13. $\begin{cases} x = \ln\operatorname{tg} t; \\ y = \dfrac{1}{\sin^2 t}. \end{cases}$
14. $\begin{cases} x = \operatorname{ctg}\operatorname{tg} t; \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$
15. $\begin{cases} x = t^2+2t; \\ y = \ln\sin t. \end{cases}$
16. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1}; \\ y = \ln(t+\sqrt{t^2+1}). \end{cases}$
17. $\begin{cases} x = \sqrt{t+1}; \\ y = \ln(1+e^t). \end{cases}$
18. $\begin{cases} x = \arcsin^2 t; \\ y = t\ln t. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2}; \\ y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(t-1)^2}}. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = (\arcsin t)^2; \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = \arcsin\sqrt{1-t^2}; \\ y = (\arccos t)^2. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = \arcsin\sqrt{t}; \\ y = \sqrt{1+\sqrt{t}}. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} e^t; \\ y = \sqrt{e^t + 1}. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = \ln(1-t^2); \\ y = \arcsin\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = \dfrac{3t^2+1}{3t^3}; \\ y = \sin\left(\dfrac{t^3}{3} + t\right). \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = \ln\dfrac{1}{\sqrt{1-t^4}}; \\ y = \arcsin\dfrac{1-t^2}{\sqrt{1+t^2}}. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = \operatorname{ctg}(2e^t); \\ y = \ln\operatorname{tg} e^t. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{t^2+1}); \\ y = t\sqrt{t^2+1}. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x = \cos^3 t; \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x = \arccos t; \\ y = \ln(1+t^2). \end{cases}$

Задача 8.12. Вычислите y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно.

1. $x^2 + y^2 - \sqrt{x^2+y^2} = 0.$
2. $x^4 + y^4 = 4xy.$
3. $\ln x + \ln y = xy.$
4. $x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0.$
5. $x - y = \arcsin x - \arcsin y.$
6. $\sin(xy) + \cos(xy) = 0.$
7. $x^4 + y^4 = x^2y^2.$
8. $e^x \sin y - e^y \cos x = 0.$
9. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$
10. $x^y = y^x.$
11. $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0.$
12. $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = e^x.$
13. $e^x + e^y - 2^{xy} - 1 = 0.$
14. $e^y + xy = e.$
15. $x^2 \sin y + y^3 \cos x = 2x.$
16. $\sin(y - x^2) - \ln(y - x^2) = 2.$
17. $x \sin y + y \sin x = 0.$
18. $x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4 = 0.$
19. $x^3 + y^3 - 3xy = 0.$
20. $a^{\frac{x}{y}} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^a.$
21. $xy = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}.$
22. $2y \ln y = x.$
23. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}.$
24. $2^x + 2^y = 2^{x+y}.$

25. $\operatorname{arctg}\frac{y}{z} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.
26. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$.
27. $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dy=0$.
28. $\cos(x+y)=xy$.
29. $\ln(x+y)=x-y$.
30. $x^4+y^4=4xy$.

Приближенные вычисления. Правило Лопиталя

Задача 8.13. Вычислите приближенное значение функции в заданной точке x.

1. $y=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, $x=1{,}03$.
2. $y=\sqrt[3]{x^2}$, $x=1{,}03$.
3. $y=x^5$, $x=1{,}02$.
4. $y=\sqrt[3]{x}$, $x=1{,}21$.
5. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x=4{,}16$.
6. $y=\frac{x+\sqrt{5-x^2}}{2}$, $x=0{,}98$.
7. $y=\sqrt[3]{x^2+7}$, $x=0{,}97$.
8. $y=\sqrt[3]{x}$, $x=24{,}46$.
9. $y=x^7$, $x=1{,}996$.
10. $y=x^6$, $x=2{,}01$.
11. $y=\frac{1}{\sqrt{2x^2+x+1}}$, $x=1{,}016$.
12. $y=\sqrt{x^3}$, $x=0{,}98$.
13. $y=\sqrt[5]{x^2}$, $x=1{,}03$.
14. $y=\sqrt[3]{3x+1}$, $x=0{,}01$.
15. $y=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$, $x=1{,}58$.
16. $y=\sqrt[3]{x^3+7x}$, $x=1{,}012$.
17. $y=\sqrt{1+\sin x}$, $x=0{,}01$.
18. $y=x^5$, $x=2{,}997$.
19. $y=\sqrt[3]{1+13x}$, $x=2{,}01$.
20. $y=\sqrt{4x-1}$, $x=2{,}56$.
21. $y=\sqrt[3]{x}$, $x=8{,}24$.
22. $y=\sqrt{x^2+x+3}$, $x=1{,}97$.
23. $y=\sqrt[3]{x}$, $x=27{,}54$.
24. $y=\arcsin x$, $x=0{,}08$.
25. $y=x^{11}$, $x=1{,}021$.
26. $y=\sqrt[3]{x^2}$, $x=1{,}03$.
27. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x=1{,}02$.
28. $y=\sqrt[3]{3x^2+1}$, $x=0{,}02$.
29. $y=x^5$, $x=1{,}02$.
30. $y=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, $x=1{,}03$.

Задача 8.14. Вычислите предел функции.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}-4x}{x-\sin x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2x-1}{1-\cos 3x}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-\cos x-x}{\ln(1+x)-x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}-2x}{\sin x-x}$.
5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{ctg}x-1}{\sin 4x}$.
6. $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{\ln(x^2-x)}{\ln(3^x-3)}$.

7. $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{\ln\sin\frac{\pi x}{2}}{\ln(2-x)}$.

8. $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\ln\sin 2\pi x}{\ln\operatorname{tg}\pi x}$.

9. $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln\operatorname{tg}3x}{\ln\sin 2x}$.

10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{\ln(1+\cos x)}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x-1{,}5x^2}{\sin x-x}$.

12. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln\sin\frac{x}{2}}{1+\cos 3x}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-x^2}{\ln(1+x^2)-x^2}$.

14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\pi}{2\arcsin\frac{x}{2}-\pi}$.

15. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arccos\frac{x}{2}}{2\arcsin\frac{x}{2}-\pi}$.

16. $\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{\cos x\ln(x-3)}{\ln(e^x-e^3)}$.

17. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}+\ln(1-x)}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

18. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x\ln(x+3)}{\ln(x^2+x)}$.

19. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(x+3)}{x\ln x}$.

20. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{\ln(x^2+2)}$.

21. $\lim\limits_{x\to 1+0}\ln x\cdot\ln(x-1)$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg}x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

23. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{2\cos x}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{arctg}2x)^{2\sin x}$.

25. $\lim\limits_{x\to\pi}(\operatorname{ctg}x)^{\pi-x}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\operatorname{tg}x)^{\ln x}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x)^{\frac{2}{\ln x}}$.

29. $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+2^x)^{\frac{3}{x}}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

Исследование функций

Задача 8.15. Проведите полное исследование заданной функции и постройте ее график.

1. $y=\dfrac{17-x^2}{4x-5}$.

2. $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x+3}$.

3. $y=\dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$.

4. $y=\dfrac{4x^2+9}{4x+8}$.

5. $y=\dfrac{2x^2-6}{x-2}$.
6. $y=\dfrac{x^2-3}{\sqrt{3x^2-2}}$.
7. $y=\dfrac{x^3-5x}{5-3x^2}$.
8. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
9. $y=\dfrac{2-x^2}{\sqrt{9x^2-4}}$.
10. $y=\dfrac{x^2-6x+4}{3x+2}$.
11. $y=\dfrac{3x^2-7}{2x+1}$.
12. $y=\dfrac{4x^2-3x}{4x^2-1}$.
13. $y=\dfrac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}$.
14. $y=\dfrac{x^2-11}{4x-9}$.
15. $y=\dfrac{3x^2-10}{\sqrt{4x^2-1}}$.
16. $y=\dfrac{x^3+x^2-3x-1}{2x^2-2}$.
17. $y=\dfrac{21-x^2}{7x+9}$.
18. $y=\dfrac{x^2+2x-1}{2x+1}$.
19. $y=\dfrac{x^2+16}{\sqrt{9x^2-8}}$.
20. $y=\dfrac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-2}}$.
21. $y=\dfrac{x^3-2x^2-3x+2}{1-x^2}$.
22. $y=\dfrac{x^3+3x^2-2x-2}{2-3x^2}$.
23. $y=\dfrac{2x^3+2x^2-3x-1}{2-4x^2}$.
24. $y=\dfrac{2x^3+2x^2-9x-3}{2x-3}$.
25. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.
26. $y=\dfrac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}$.
27. $y=\sqrt{x}(x-1)$.
28. $y=x^3e^{-x}$.
29. $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.
30. $y=\dfrac{x}{x^2-4}$.

Задача 8.16. Проведите полное исследование заданной функции и постройте ее график.

1. $y=\dfrac{x^2}{x-2}$.
2. $y=\dfrac{x^2}{1-x^2}$.
3. $y=\dfrac{x^2+3x+1}{x^2+1}$.
4. $y=\dfrac{x^2}{x^4-1}$.
5. $y=\dfrac{2}{(3-x)^2(5-x^2)}$.
6. $y=\left(\dfrac{x-3}{x+3}\right)^2$.
7. $y=\dfrac{2x^2+4}{x^2-4}$.
8. $y=\dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$.
9. $y=\dfrac{x}{16-x^2}$.
10. $y=1-\dfrac{2x}{x^2+1}$.

11. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.
12. $y = \dfrac{3x}{1+x^2}$.
13. $y = \dfrac{3x^2}{x^2+9}$.
14. $y = \dfrac{x^3+4}{2x^2}$.
15. $y = \dfrac{x+1}{x(x+2)}$.
16. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$.
17. $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.
18. $y = \dfrac{x^3}{3-x^2}$.
19. $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}$.
20. $y = \dfrac{x}{x^2-4}$.
21. $y = \dfrac{x^3}{3} - x$.
22. $y = 3x + 1 + \dfrac{12}{x-5}$.
23. $y = \dfrac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$.
24. $y = \dfrac{x^2+4}{x}$.
25. $y = \dfrac{3x-1}{x}$.
26. $y = \dfrac{x}{2} + \operatorname{arctg} x$.
27. $y = x \operatorname{arctg} x$.
28. $y = \dfrac{1}{x} + 4x^2$.
29. $y = \dfrac{x^4}{x^3-1}$.
30. $y = x + \dfrac{4}{x+2}$.

Задача 8.17. Исследуйте поведение функции в точке x_0, используя производные высших порядков.

1. $y = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24(x + 1 - e^x)$, $x_0 = 0$.
2. $y = \cos^2(x-1) + x^2 - 2x$, $x_0 = 1$.
3. $y = (x-1)\sin(x-1) + 2x - x^2$, $x_0 = 1$.
4. $y = x^2 - 2x - 2e^{x-2}$, $x_0 = 2$.
5. $y = 4x - x^2 + (x-2)\sin(x-2)$, $x_0 = 2$.
6. $y = x^2 + 4x + \cos^2(x+2)$, $x_0 = -2$.
7. $y = 2x + x^2 - (x+1)\ln(2+x)$, $x_0 = -1$.
8. $y = 2\ln x + x^2 - 4x + 3$, $x_0 = 1$.
9. $y = 6x^{x-2} - x^3 + 3x^2 - 6x$, $x_0 = 2$.
10. $y = 4x + x^2 - 2e^{x+1}$, $x_0 = -1$.
11. $y = 6e^{x-1} - 3x - x^3$, $x_0 = -1$.
12. $y = \cos^2(x+1) + x^2 + 2x$, $x_0 = -1$.
13. $y = 6e^x - x^3 - 3x^2 - 6x - 5$, $x_0 = 0$.
14. $y = 2e^{x-1} - 2\cos(x-1) - 2x(x-1) - \dfrac{1}{3}(x-1)^3$, $x_0 = 1$.
15. $y = 4(x-1) - (x-1)^2 - 2\cos(x-3)$, $x_0 = 3$.

16. $y = 2e^x - 2\cos x - 2x(x+1) - \frac{1}{3}x^3,\ x_0 = 0.$
17. $y = 2\ln x + (x-2)^2,\ x_0 = 1.$
18. $y = 2e^x + 2\sin x - x^2 - 4x,\ x_0 = 0.$
19. $y = x^2 - 4x - (x-2)\ln(x-1),\ x_0 = 2.$
20. $y = (x+1)\sin(x+1) - 2x - x^2,\ x_0 = -1.$
21. $y = x^2 + 6x + 8 - 2e^{x+2},\ x_0 = -2.$
22. $y = 2x - x^2 - 2\cos(x-1),\ x_0 = 1.$
23. $y = 2\ln(x+1) - 2x + x^2 + 1,\ x_0 = 0.$
24. $y = 1 - 2x - x^2 + 2\cos(x+1),\ x_0 = -1.$
25. $y = \sin^2(x+1) - 2x - x^2,\ x_0 = -1.$
26. $y = x^2 + 2\ln(x+2),\ x_0 = -1.$
27. $y = 6e^{x+1} - (x+1)^3 - 3(x+1)^2 - 6x + 1,\ x_0 = -1.$
28. $y = \sin^2(x+2) - x^2 - 4x - 4,\ x_0 = -2.$
29. $y = x^2 - 2x - (x-1)\ln x,\ x_0 = 1.$
30. $y = 4x - x^2 - 2\cos(x-2),\ x_0 = 2.$

Задача 8.18. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке.

1. $y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(1-x)}$ при $x \in [-3;\ 4]$.
2. $y = \frac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}$ при $x \in [-3;\ 3]$.
3. $y = 1 + \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}$ при $x \in [-1;\ 5]$.
4. $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$ при $x \in [0;\ 1]$.
5. $y = 2x^2 + \frac{108}{x} - 59$ при $x \in [2;\ 4]$.
6. $y = \sqrt[3]{2x^2(x-3)}$ при $x \in [-1;\ 6]$.
7. $y = \sqrt[3]{2x^2(x-6)}$ при $x \in [-2;\ 1]$.
8. $y = x^2 - 2x + \frac{16}{x-1} - 13$ при $x \in [2;\ 5]$.
9. $y = \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)}$ при $x \in [0;\ 4]$.
10. $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x} + 8$ при $x \in [-4;\ -1]$.
11. $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$ при $x \in [1;\ 5]$.
12. $y = \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{8}{x-2} + 5$ при $x \in [-2;\ 1]$.
13. $y = \sqrt[3]{2x^2(x-3)}$ при $x \in [-1;\ 3]$.

14. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ при $x \in [0;\ 4]$.

15. $y = x + 2\sqrt{x}$ при $x \in [0;\ 4]$.

16. $y = x^4 - 2x^2 + 5$ при $x \in [-2;\ 2]$.

17. $y = \sqrt[3]{100 - x^2}$ при $x \in [-6;\ 8]$.

18. $y = \dfrac{10x}{1+x^2}$ при $x \in [0;\ 3]$.

19. $y = -\dfrac{2(x^2+3)}{x^2+2x+5}$ при $x \in [-5;\ 1]$.

20. $y = \dfrac{4x}{4+x^2}$ при $x \in [-4;\ 2]$.

21. $y = x - 4\sqrt{x+2} + 8$ при $x \in [-1;\ 7]$.

22. $y = 2\sqrt{x-1} - x + 2$ при $x \in [1;\ 5]$.

23. $y = \dfrac{-2x(2x+3)}{x^2+4x+5}$ при $x \in [-2;\ 1]$.

24. $y = \dfrac{2(-x^2+7x-7)}{x^2-2x+2}$ при $x \in [1;\ 4]$.

25. $y = 3 - x - \dfrac{4}{(x+2)^2}$ при $x \in [-1;\ 2]$.

26. $y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)} - 2$ при $x \in [-3;\ 3]$.

27. $y = x - 4\sqrt{x} + 5$ при $x \in [1;\ 9]$.

28. $y = 2\sqrt{x} - x$ при $x \in [0;\ 4]$.

29. $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)} - 1$ при $x \in [0;\ 6]$.

30. $y = x^2 + \dfrac{16}{x} - 16$ при $x \in [1;\ 4]$.

ГЛАВА 9 Интегральное исчисление функций одной переменной

Первообразная и неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на некотором множестве X, если для всех значений x из этого множества выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Примеры первообразных:

1. Функция $F(x) = \sqrt{x}$ есть первообразная функции $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ на интервале $(0;\ \infty)$, так как $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ для любого $x \in (0;\ \infty)$.
2. Для функции $f(x) = x^2$ первообразной будет функция $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ на всей числовой оси, так как $\left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = x^2$ для любого $x \in (-\infty;\ \infty)$.

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на множестве X, то функция $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, также первообразная функции $f(x)$.

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$, то есть выражение $F(x) + C$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$, а C — произвольная постоянная, называют *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначают символом

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Свойства неопределенного интеграла:

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$.
2. $d(\int f(x)\,dx) = f(x)\,dx$.
3. $\int df(x) = f(x) + C$.
4. $\int Af(x)dx = A\int f(x)\,dx$, где $A \neq 0$.
5. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

Таблица основных неопределенных интегралов:

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, где $n \neq -1$, $(\int dx = x + C)$.

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$
4. $\int e^x dx = e^x + C.$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
9. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$
10. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C.$
12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C.$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$
14. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$
15. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C.$
17. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$
18. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$
19. $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C.$
20. $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C.$

Используя таблицу основных интегралов и свойства неопределенных интегралов, решим следующие примеры.

Пример 9.1. Найти интеграл $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C.$

Пример 9.2. Найти интеграл $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$

Пример 9.3. Найти интеграл $\int (2x^3 - \sqrt{x} + 3) dx.$

Решение: воспользуемся свойствами 4 и 5 неопределенного интеграла и разобьем интеграл на сумму трех интегралов, каждый из которых является табличным:

$$\int (2x^3 - \sqrt{x} + 3)dx = 2\int x^3 dx - \int \sqrt{x}dx + 3\int dx =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^4}{4} + C_1 - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C_2 + 3x + C_3 = \frac{x^4}{2} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + 3x + C,$$

где $C = C_1 + C_2 + C_3$.

Интегрирование методом замены переменной

Пусть требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, причем непосредственно подобрать первообразную $f(x)$ мы не можем, но нам известно, что она существует.

Сделаем замену переменной: $x = u(t)$, где $u(t)$ — непрерывная функция с непрерывной производной, имеющая обратную функцию.

По определению дифференциала $dx = u'(t)dt$. Тогда имеет место равенство

$$\int f(x)dx = \int f(u(t))u'(t)dt.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9.1 Иногда удобно сделать подстановку в виде $t = \varphi(x)$, тогда

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = \int f(t)dt.$$

Пример 9.4. Найти интеграл $\int \sin x \cdot \cos x dx$.

Решение: сделаем подстановку $t = \sin x$, тогда $dt = \cos x dx$. Следовательно,

$$\int \sin x \cdot \cos x dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

Удобно использовать следующую форму записи:

$$\int \sin x \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

Пример 9.5. Найти интеграл $\int x\sqrt{x-5}dx$.

Решение: воспользуемся предложенной формой записи:

$$\int x\sqrt{x-5}dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x-5} = t \\ x = t^2 + 5 \\ dx = 2tdt \end{array} \right| = \int (t^2 + 5)t \cdot 2tdt =$$

$$= \frac{2t^5}{5} + \frac{10t^3}{3} + C = \frac{2(\sqrt{x-5})^5}{5} + \frac{10(\sqrt{x-5})^3}{3} + C.$$

Используя известное равенство $\varphi'(x)dx = d(\varphi(x))$, отметим ряд преобразований дифференциала, полезных для дальнейшего:

1) $dx = d(x + b)$, где $b = \text{const}$;

2) $dx = \frac{1}{a} d(ax + b)$, где $a \neq 0$;

3) $xdx = \frac{1}{2} d(x^2)$;

4) $\sin x dx = -d(\cos x)$;

5) $\frac{1}{x} dx = d(\ln x)$;

6) $e^x dx = d(e^x)$ и т. д.

О преобразованиях 3–6 говорят, что функция, стоящая перед дифференциалом dx, внесена под знак дифференциала. Пользуясь этими преобразованиями дифференциала, найдем следующие неопределенные интегралы.

Пример 9.6. Найти интеграл $\int \frac{dx}{2x + 3}$.

Решение: дифференциал dx можно представить в виде $dx = \frac{1}{2} d(2x + 3)$, тогда

$$\int \frac{dx}{2x + 3} = \int \frac{\frac{1}{2} d(2x + 3)}{2x + 3} = \frac{1}{2} \ln|2x + 3| + C.$$

Пример 9.7. Найти интеграл $\int x e^{x^2} dx$.

Решение: внесем x под знак дифференциала, то есть $xdx = \frac{1}{2} d(x^2)$. Тогда

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Пример 9.8. Найти интеграл $\int \cos(e^x + 1) e^x dx$.

Решение: так как $e^x dx = d(e^x + 1)$, то

$$\int \cos(e^x + 1) e^x dx = \int \cos(e^x + 1) d(e^x + 1) = \sin(e^x + 1) + C.$$

Интегрирование по частям

Пусть u и v — непрерывно дифференцируемые функции от x. Тогда имеет место следующая формула интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v\, du.$$

Формула показывает, что нахождение интеграла $\int u\, dv$ приводит к нахождению интеграла $\int v\, du$, который может оказаться более простым, чем исходный.

Интегралы, берущиеся по частям

По частям берутся интегралы вида

$$\int P_n(x) \cdot \sin kx\, dx; \int P_n(x) \cdot \cos kx\, dx;$$

$$\int P_n(x)\cdot e^{kx}dx;\ \int P_n(x)\cdot a^{kx}dx,$$

где $P_n(x)$ — многочлен n-й степени; k — число.

В качестве функции $u(x)$ следует взять многочлен $P_n(x)$ и применить к интегралу формулу интегрирования по частям n раз.

Пример 9.9. Найти интеграл $\int x\cos x dx$.

Решение: пусть

$$\left|\begin{array}{ll} u = x & \Rightarrow\ du = dx \\ dv = \cos x dx & \Rightarrow\ v = \sin x \end{array}\right|.$$

Тогда по формуле интегрирования по частям

$$\int x\cos x dx = \left|\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{array}\right| = x\sin x - \int \sin x dx =$$

$$= x\sin x + \cos x + C.$$

Пример 9.10. Найти интеграл $\int x^2 e^x dx$.

Решение: $\int x^2 e^x dx = \left|\begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2x dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{array}\right| = x^2 e^x - 2\int x e^x dx.$

Для полученного интеграла снова применим формулу интегрирования по частям:

$$\int x e^x dx = \left|\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{array}\right| = x e^x - \int e^x dx.$$

Следовательно, как нетрудно понять:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C.$$

Интегралы вида

$$\int x^n \cdot \ln^k x\, dx,$$

где $n \neq -1$, берутся, если за функцию $u(x)$ принять $\ln^k x$ и применить к интегралу k раз формулу интегрирования по частям.

Пример 9.11. Найти интеграл $\int \ln^2 x dx$.

Решение: по формуле интегрирования по частям

$$\int \ln^2 x dx = \left|\begin{array}{ll} u = \ln^2 x & du = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} dx \\ dv = dx & v = x \end{array}\right| = x\ln^2 x - 2\int \ln x dx =$$

$$= \left|\begin{array}{ll} u = \ln x & du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx & v = x \end{array}\right| = x\ln^2 x - 2(x\ln x - \int dx) = x\ln^2 x - 2(x\ln x - x) + C.$$

Интегралы вида

$$\int x^n \cdot \arcsin^k \alpha x\, dx;\ \int x^n \cdot \arccos^k \alpha x\, dx;$$
$$\int x^n \cdot \operatorname{arctg}^k \alpha x\, dx;\ \int x^n \cdot \operatorname{arcctg}^k \alpha x\, dx$$

также берутся по частям, если принять $dv = x^n dx$, а другие сомножители обозначить $u(x)$.

В некоторых случаях, применяя формулу интегрирования по частям, опять получаем данный интеграл (*возвратный*). Тогда интеграл определяется из получившегося алгебраического уравнения. К таким интегралам относятся

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x\, dx;\ \int e^{\alpha x} \sin \beta x\, dx;\ \int \sqrt{x^2 \pm a}\, dx.$$

Пример 9.12. Найти интеграл $\int \sqrt{x^2 + a}\, dx$.

Решение:

$$\int \sqrt{x^2 + a}\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \sqrt{x^2 + a} & du = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a}} dx \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| =$$

$$= x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}} dx = x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{(x^2 + a) - a}{\sqrt{x^2 + a}} dx =$$

$$= x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2 + a}{\sqrt{x^2 + a}} dx + a\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx =$$

$$= x\sqrt{x^2 + a} - \int \sqrt{x^2 + a}\, dx + a \ln\left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C.$$

Сравнивая начало и конец равенства, получим уравнение

$$2\int \sqrt{x^2 + a}\, dx = x\sqrt{x^2 + a} + a \ln\left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + 2C,$$

откуда

$$\int \sqrt{x^2 + a}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + a} + a \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| \right) + C.$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

Дробно-рациональная функция, или *рациональная дробь*, — это дробь вида

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_m}{A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n}.$$

Не ограничивая общность рассуждения, будем предполагать, что многочлены $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ не имеют общих корней, то есть дробь сокращена.

Если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе, то есть $m < n$, то дробь называют *правильной*, в противном случае ($m \geq n$) дробь называют *неправильной*.

Правильные рациональные дроби вида

$$\frac{A}{x-a};\ \frac{B}{(x-b)^k}\ \ (k=2,3\ldots);\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q},$$

где дискриминант $D=\frac{p^2}{4}-q<0$;

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m},$$

где $D<0$ и m — целое положительное число, называются *простейшими дробями* 1-, 2-, 3- и 4-го типов соответственно.

Найдем интегралы от этих дробей:

- $\int\frac{A}{x-a}dx=A\cdot\ln|x-a|+C.$
- $\int\frac{B}{(x-b)^k}dx=A\int(x-b)^{-k}dx=A\frac{(x-b)^{-k+1}}{-k+1}+C\ \ (k\neq 1).$
- Чтобы вычислить интеграл $\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$, в числителе подынтегральной дроби прибавим и отнимем $\frac{Mp}{2}$, или, что то же самое, выделим $2x+p$ — производную знаменателя:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{M}{2}(2x+p)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{x^2+px+q}dx.$$

Разобьем подынтегральную функцию на сумму двух функций и представим интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\frac{M}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Преобразуем знаменатель второй дроби, выделив полный квадрат:

$$x^2+px+q=x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

Учитывая, что $(2x+p)dx=d(x^2+px+q)$, получим:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}.$$

Оба интеграла табличные, значит,

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln|x^2+px+q| + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

Пример 9.13. Найти интеграл $\int \frac{x}{x^2+7x+13}dx$.

Решение: в числителе подынтегральной дроби прибавим и отнимем $\frac{7}{2}$ и разобьем интеграл на сумму двух интегралов:

$$\int \frac{x}{x^2+7x+13}dx = \int \frac{\left(x+\frac{7}{2}\right)-\frac{7}{2}}{x^2+7x+13}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+7}{x^2+7x+13}dx - \frac{7}{2}\int \frac{1}{x^2+7x+13}dx.$$

В первом интеграле внесем $2x+7$ под знак дифференциала и прибавим 13. В знаменателе второго интеграла выделим полный квадрат и прибавим $\frac{7}{2}$ под знаком дифференциала. Получим:

$$\int \frac{x}{x^2+7x+13}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+7x+13)}{x^2+7x+13} - \frac{7}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{7}{2}\right)}{\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+7x+13| - \frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+7}{\sqrt{3}}+C.$$

Более сложных вычислений требует интегрирование простейших дробей типа 4:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx.$$

Повторим преобразования, выполненные ранее, и получим:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{(x^2+px+q)^m}dx =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^m} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^m}.$$

После подстановки

$$\left|\begin{array}{c} x+\frac{p}{2}=t \\ q-\frac{p^2}{4}=a^2 \end{array}\right|$$

имеем:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \frac{M}{2}\frac{1}{(x^2+px+q)^{m-1}(m-1)} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\underbrace{\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}}_{I_m}.$$

Рассмотрим интеграл

$$I_m = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$$

и получим для него *рекуррентную формулу*, то есть формулу, позволяющую вычислить интеграл I_m, если мы знаем интеграл I_{m-1}. Для этого применим к интегралу

$$I_{m-1} = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{m-1}}$$

формулу интегрирования по частям:

$$I_{m-1} = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{m-1}} =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \dfrac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}} & du = -(m-1)(t^2+a^2)^{-m}2t\,dt \\ dv = dt & v = t \end{array} \right| =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^{m-1}} + 2(m-1)\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^m} =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^{m-1}} + 2(m-1)\int \frac{(t^2+a^2)-a^2}{(t^2+a^2)^m}\,dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^{m-1}} + 2(m-1)\left(\underbrace{\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{m-1}}}_{I_{m-1}} - a^2 \underbrace{\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}}_{I_m} \right).$$

В итоге мы получили:

$$I_{m-1} = \frac{t}{(t^2+a^2)^{m-1}} + 2(m-1)I_{m-1} - 2(m-1)a^2 I_m,$$

и, следовательно, если

$$I_m = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m},$$

то

$$I_m = \frac{t}{2(m-1)a^2(t^2+a^2)^{m-1}} + \frac{2(m-1)-1}{2(m-1)a^2} I_{m-1}. \qquad (9.1)$$

Пример 9.14. Найти интеграл $\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$.

Решение: согласно формуле (9.1),

$$I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{2\cdot 1\cdot 1(t^2+1)} + \frac{2\cdot 1-1}{2\cdot 1\cdot 1}\cdot I_1 =$$

$$= \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t^2+1)'} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C.$$

Интегрирование рациональных дробей

Теорема 9.1. Если многочлен $Q(x)$ раскладывается на множители вида

$$Q(x) = (x-a)\ldots(x-b)^k\ldots(x^2+p_1x+q_1)\ldots(x^2+p_2x+q_2)^m,$$

где $(x^2+p_1x+q_1)$ и $(x^2+p_2x+q_2)$ не имеют вещественных корней, то правильная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ может быть представлена в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \ldots + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_k}{(x-b)^k} + \ldots +$$

$$+ \frac{Cx+D}{(x^2+p_1x+q_1)} + \ldots + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_2x+q_2)} + \ldots + \frac{M_mx+N_m}{(x^2+p_2x+q_2)^m},$$

то есть правильная рациональная дробь представляется в виде суммы простейших дробей.

Схема вычисления интегралов вида $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx$:

1. Если подынтегральная дробь неправильная, то, следует разделить $P_m(x)$ на $Q_n(x)$ (по правилу деления многочленов), тогда

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = M(x) + \frac{P_k(x)}{Q_n(x)},$$

где $M(x)$ — многочлен; $\frac{P_k(x)}{Q_n(x)}$ — правильная дробь $(k < n)$.

2. Правильную дробь $\frac{P_k(x)}{Q_n(x)}$ разложить на сумму простейших дробей.

3. Проинтегрировать многочлен $M(x)$ и простейшие дроби.

Пример 9.15. Найти интеграл $\int \frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^2}dx$.

Решение: разложим правильную дробь $\frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-2)}$ на сумму простейших дробей:

$$\frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}.$$

Отсюда, приведя дроби в правой части равенства к общему знаменателю и приравнивая числители левой и правой частей, получим:

$$x^2+2=A(x^2+2x+1)+B_1(x^2-x-2)+B_2(x-2). \qquad (9.2)$$

Рассмотрим несколько способов нахождения коэффициентов A, B_1, B_2.

Способ 1. Из тождественного равенства многочленов приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях правой и левой частей равенства (9.2). Получим:

$$\begin{array}{c|c} x^2 & 1=A+B_1 \\ x^1 & 0=2A-B_1+B_2 \\ x^0 & 2=A-2B_1-2B_2 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{2}{3}; \\ B_1=\frac{1}{3}; \\ B_2=-1. \end{cases}$$

Способ 2. Подставляя значения x в правую и левую части равенства (9.2), получим:

$$\begin{array}{c|c} x=-1 & 3=-3B_2 \\ x=2 & 6=9A \\ x=0 & 2=A-2B_1-2B_2 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} B_2=-1; \\ A=\frac{2}{3}; \\ B_1=\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Способ 3. В данном примере можно скомбинировать оба способа, а именно:

$$\begin{array}{c|c} x=-1 & 3=-3B_2 \\ x=2 & 6=9A \\ x^2 & 1=A+B_1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} B_2=-1; \\ A=\frac{2}{3}; \\ B_1=\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Из сказанного следует, что

$$\frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^2}=\frac{\frac{2}{3}}{x-2}+\frac{\frac{1}{3}}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}.$$

Представим данный интеграл в виде суммы интегралов:

$$\int\frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^2}dx=\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{2}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C.$$

Интегрирование некоторых иррациональных выражений

Предварительно введем обозначение рациональной функции двух переменных $u=u(x)$ и $v=v(x)$, которая представляет собой отношение двух многочленов относительно этих переменных: $R(u, v)$. Например, функция

$$R(x, \sqrt{x^2-4})=\frac{3x^2+2\sqrt{x^2-4}}{4x^3-\sqrt{x^2-4}+5}$$

является рациональной функцией x и $\sqrt{x^2-4}$.

Рассмотрим теперь способы интегрирования рациональных функций относительно некоторых иррациональностей.

- В интегралах, содержащих лишь *линейную иррациональность* $\sqrt[n]{ax+b}$, где $a\neq 0$, n — натуральное число, то есть в интегралах вида

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx,$$

полезно сделать подстановку $t=\sqrt[n]{ax+b}$.

Пример 9.16. Найти интеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}}$.

Решение:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}}=\left|\begin{array}{l} t=\sqrt[3]{x+1} \\ x=t^3-1 \\ dx=3t^2dt \end{array}\right|=3\int\frac{(t^3-1)t^2dt}{t}=$$

$$=3\int(t^4-t)dt=3\frac{t^5}{5}-3\frac{t^2}{2}+C=\frac{3}{5}(x+1)^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}+C.$$

- В интегралах вида

$$\int R(x, \sqrt[k_1]{ax+b}, \sqrt[k_2]{ax+b}, \ldots, \sqrt[k_m]{ax+b})dx$$

надо сделать подстановку $ax+b=t^n$, где n — наименьшее общее кратное натуральных чисел $k_1, k_2, \ldots, k_m$.

- Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt[k_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[k_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots, \sqrt[k_m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$$

рационализуются подстановкой $\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$, где n — наименьшее общее кратное натуральных чисел $k_1, k_2, \ldots, k_m$.

Пример 9.17. Найти интеграл $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x}{x-1}}dx$.

Решение:

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x}{x-1}}dx = \left| \begin{array}{c} \dfrac{x}{x-1} = t^2 \\ x = \dfrac{t^2}{t^2-1} \\ dx = -\dfrac{2tdt}{(t^2-1)^2} \end{array} \right| = -\int \frac{(t^2-1)^2}{t^4} t \frac{2tdt}{(t^2-1)^2} =$$

$$= -2\int \frac{1}{t^2}dt = \frac{2}{t} + C = \left| t = \sqrt{\frac{x}{x-1}} \right| = 2\sqrt{\frac{x-1}{x}} + C.$$

- Интеграл от *простейшей квадратичной иррациональности*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

с помощью выделения полного квадрата в трехчлене $ax^2 + bx + c$ сводится к одному из двух интегралов $\int \frac{dx}{\sqrt{a \pm x^2}}$, которые являются табличными.

Пример 9.18. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}$.

Решение:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+4}} = \int \frac{d(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2+4}} =$$

$$= \ln|x-3=t| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = |t+\sqrt{t^2+4}| + C = \ln|x-3+\sqrt{x^2-6x+13}| + C.$$

- Интегралы вида

$$\int R(x^{2n}, \sqrt{a^2-x^2})dx;\ \int R(x^{2n}, \sqrt{a^2+x^2})dx;\ \int R(x^{2n}, \sqrt{x^2-a^2})dx$$

интегрируются с помощью следующих тригонометрических подстановок:

$$\int R(x^{2n}, \sqrt{a^2-x^2})dx = \left| \begin{array}{c} x = a\cos t \quad (a\sin t) \\ \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\cos^2 t} = a\sin t \\ dx = -a\sin t dt \end{array} \right|;$$

$$\int R(x^{2n}, \sqrt{a^2+x^2})dx = \left| \begin{array}{l} x = a\,\mathrm{tg}\, t \quad (a\,\mathrm{ctg}\, t) \\ \sqrt{a^2+x^2} = a\dfrac{1}{\cos t} \\ dx = \dfrac{1}{\cos^2 t}dt \end{array} \right|;$$

$$\int R(x^{2n},\ \sqrt{x^2-a^2})dx = \left| \begin{array}{c} x = a\operatorname{ch}t \quad (a\operatorname{sh}t) \quad \left(\text{или } x = \dfrac{a}{\cos t}\right) \\ \sqrt{x^2-a^2} = a\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} = a\operatorname{sh}t \\ dx = a\operatorname{sh}t dt \end{array} \right|.$$

Пример 9.19. Найти интеграл $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$.

Решение:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \left| \begin{array}{c} x = a\cos t \\ \sqrt{a^2-x^2} = a\sin t \\ dx = -a\sin t dt \end{array} \right| = \int \frac{-a\sin t dt}{a^3 \sin^3 t} =$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{a^2}\operatorname{ctg} t + C = \left| t = \arccos\frac{x}{a} \right| =$$

$$= \frac{1}{a^2}\operatorname{ctg}\arccos\frac{x}{a} + C = \frac{1}{a^2}\frac{\cos\arccos\dfrac{x}{a}}{\sin\arccos\dfrac{x}{a}} + C = \frac{1}{a^2}\frac{\dfrac{x}{a}}{\sin\arccos\dfrac{x}{a}} + C.$$

Принимая во внимание, что $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, упростим полученный ответ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \frac{1}{a^2}\frac{\dfrac{x}{a}}{\sqrt{1-\cos^2\arccos\dfrac{x}{a}}} + C = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + C.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9.2 Для интегралов вида $\int R(x^{2n+1},\ \sqrt{a^2-x^2})dx$, $\int R(x^{2n+1},\ \sqrt{a^2+x^2})dx$, $\int R(x^{2n+1},\ \sqrt{x^2-a^2})dx$ также можно использовать тригонометрические подстановки. Однако проще их вычислять, делая замену $a^2 \pm x^2 = t^2$ или $x^2 - a^2 = t^2$.

Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций

- Интеграл вида

$$\int R(\sin x,\ \cos x)dx,$$

где $R(\sin x,\ \cos x)$ — рациональная функция своих аргументов $\sin x$ и $\cos x$, всегда можно проинтегрировать с помощью универсальной тригонометрической подстановки $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2};$$

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Таким образом, в результате сделанной подстановки исходный интеграл от тригонометрических функций стал интегралом от рациональной функции переменной t, то есть $\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$.

Пример 9.20. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Решение:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{ll} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t & x = 2\operatorname{arctg} t \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} & dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Рассмотренная подстановка дает возможность проинтегрировать любую функцию вида $R(\sin x, \cos x)$. Однако на практике она часто приводит к получению сложных интегралов от рациональных функций. Поэтому полезно знать и другие подстановки.

- В интеграле вида $\int R(\sin x)\cos x dx$ рационально сделать подстановку

$$\int R(\sin x)\cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right|.$$

Пример 9.21. Найти интеграл $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x} dx$.

Решение:

$$\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x} dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x\, dx}{1+\cos x} = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ \sin x\, dx = -dt \end{array} \right| = -\int \frac{1-t^2}{1+t} dx =$$

$$= \int (t-1)dt = \frac{t^2}{2} - t + C = \frac{\cos^2 x}{2} - \cos x + C.$$

- Интегралы вида $\int R(\operatorname{tg} x)dx$ берутся с помощью подстановки

$$\int R(\operatorname{tg} x)dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right|.$$

- В интегралах вида $\int R(\sin^{2m} x, \cos^{2n} x)\,dx$, где $\sin x$ и $\cos x$ содержатся в четных степенях, делается подстановка

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx = \left| \begin{array}{c} \operatorname{tg} x = t,\quad x = \operatorname{arctg} t \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right|.$$

- В интегралах вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$, где хотя бы один из показателей степеней нечетный, например n, а m — любое число, следует применить формулу $1-\sin^2\alpha = \cos^2\alpha$. В частности, если $n = 2p+1$ — нечетное число, то

$$\int \sin^m x \cdot \cos^{2p+1} x dx = \int \sin^m x \cdot \cos^{2p} x \cdot \cos x\,dx =$$
$$= \int \sin^m x (1-\sin^2 x)^p \cos x\,dx = \int R(\sin x)\cos x\,dx.$$

- В интегралах вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$, где m и n — четные неотрицательные, используются формулы понижения степени

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x);\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

Пример 9.22. Найти интеграл $\int \sin^2 x dx$.

Решение: $\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C.$

- Интегралы вида

$$\int \cos\alpha x \cdot \cos\beta x\,dx;\ \int \sin\alpha x \cdot \sin\beta x\,dx;\ \int \sin\alpha x \cdot \cos\beta x\,dx,$$

где $\alpha \neq \beta$, берутся при помощи следующих формул:

$$\sin\alpha x \cdot \cos\beta x = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x);$$
$$\cos\alpha x \cdot \cos\beta x = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x);$$
$$\sin\alpha x \cdot \sin\beta x = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x).$$

- Интегралы вида

$$\int \operatorname{tg}^m x dx;\ \int ctg^m x dx,$$

где $m \geq 2$ — целое число, берутся, если к подынтегральной функции прибавить и отнять $\operatorname{tg}^{m-2} x$ (или $\operatorname{ctg}^{m-2} x$) и применить формулу $1+\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ (или $1+\operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$).

Пример 9.23. Найти интеграл $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$.

Решение:

$$\int \operatorname{tg}^4 x\,dx = \int((\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^2 x) - \operatorname{tg}^2 x)dx =$$

$$= \int \operatorname{tg}^2 x(1+\operatorname{tg}^2 x)dx - \int((\operatorname{tg}^2 x + 1) - 1)dx =$$

$$= \int \operatorname{tg}^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int dx = \int \operatorname{tg}^2 x \cdot d\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x + x =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C.$$

- Иногда полезно использовать тригонометрическое тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Это удобно, если под знаком интеграла стоят выражения $\frac{1}{\sin^n x}$ и $\frac{1}{\cos^n x}$, где n — четное неотрицательное число.

Пример 9.24. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$.

Решение:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^4 x}dx = \int \frac{1}{\cos^4 x}dx + \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}dx =$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} d(\operatorname{tg} x) + 4\int \frac{1}{\sin^2 2x}dx = \int (1+\operatorname{tg}^2 x)d(\operatorname{tg} x) + 2\int \frac{1}{\sin^2 2x}d2x =$$

$$= \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - 2\operatorname{ctg} 2x + C.$$

Определенный интеграл

Пусть на отрезке $[a;\ b]$ задана функция $y = f(x)$. Разделим отрезок $[a;\ b]$ на части произвольными точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Обозначим через $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ длины частичных отрезков. На каждом частичном отрезке $[x_i;\ x_{i+1}]$ разбиения выберем произвольную точку $\xi_i \in [x_i;\ x_{i+1}]$. Составим сумму $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$, которую будем называть *интегральной суммой* функции $f(x)$, соответствующей этому разбиению. Обозначим через λ максимальную длину частичных отрезков $[x_i;\ x_{i+1}]$, то есть $\lambda = \max\limits_{0 \le i \le n-1} \Delta x_i$.

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a;\ b]$. Если существует конечный предел последовательности интегральных сумм S_n при $\lambda \to 0$ (и $n \to \infty$), который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a;\ b]$, ни от выбора точек в них, то этот предел называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ и обозначается символом $\int_a^b f(x)dx$. При этом функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a;\ b]$.

Таким образом, по определению,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} S_n = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

где a — нижний предел интегрирования; b — верхний предел интегрирования.

Основные свойства определенного интеграла:

1. $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx, \quad A = \text{const}.$
2. $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_1(x)dx.$
3. $\int_a^a f(x)dx = 0.$
4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$
5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

Формула Ньютона–Лейбница

Теорема 9.2. Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a;\ b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Последний символ в формуле называется двойной подстановкой.

Пример 9.25. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Решение: $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_0^1 \frac{d(x^2+1)}{2\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}\Big|_0^1 = \sqrt{1+1^2} - \sqrt{1+0} = \sqrt{2} - 1.$

Замена переменной в определенном интеграле

Пусть дан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[a;\ b]$.

Введем новую переменную t по формуле $x = \varphi(t)$. Если выполняются следующие условия:

1) $\varphi(\alpha) = a;\ \varphi(\beta) = b;$

2) $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ — непрерывные функции на отрезке $[\alpha;\ \beta]$;

множеством значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha;\ \beta]$ является отрезок $[a;\ b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Пример 9.26. Вычислить интеграл $\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$.

Решение: обозначим $\sqrt{x+1} = t$. Следовательно, если $x = 0$, то $t = 1$; если $x = 3$, то $t = 2$.

Запишем решение в форме записи, введенной при нахождении неопределенных интегралов:

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx = \left|\begin{array}{c} \sqrt{x+1} = t \\ x = t^2 - 1 \\ dx = 2tdt \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 3 \Rightarrow t = 2 \end{array}\right| = \int_1^2 (t^2-1)t2tdt = 2\int_1^2 (t^4 - t^2)\,dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = 2\left(\frac{31}{5} - \frac{7}{3}\right) = 7\frac{11}{15}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9.3 1. Если $f(x)$ — четная функция, то есть $f(-x) = f(x)$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

2. Если $f(x)$ — нечетная функция, то есть $f(-x) = -f(x)$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a;\ b]$, то

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Пример 9.27. Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx$.

Решение:

$$\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx = \left|\begin{array}{cc} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{array}\right| = x\sin x\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0 + \cos x\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \cos 2\pi - \cos 0 = 1 - 1 = 0.$$

Геометрические приложения определенного интеграла

Вычисление площадей в декартовых координатах

Если функция $f(x) \geq 0$ и непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то площадь криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью $0x$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 9.1), равна

$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{9.3}$$

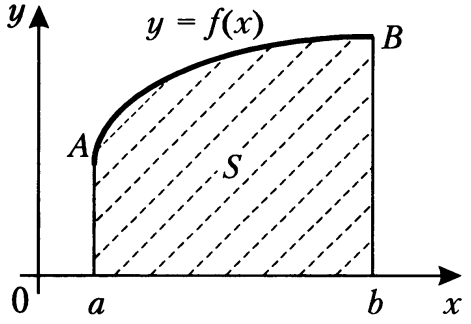


Рис. 9.1

Пример 9.28. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 1$ и $x = 4$ (рис. 9.2).

Решение: площадь заданной фигуры определяется по формуле

$$S = \int_1^4 (x^2 + 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_1^4 = \left(\frac{4^3}{3} + 4\right) - \left(\frac{1^3}{3} + 1\right) = 24.$$

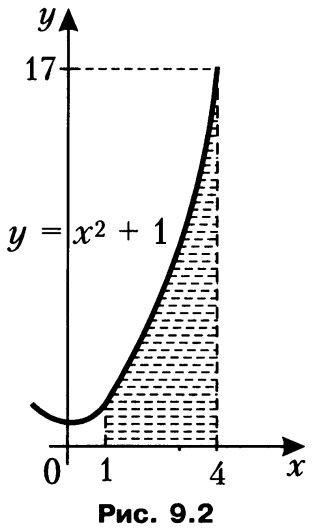


Рис. 9.2

Если функция $f(x) \leq 0$ и непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx \leq 0$ и по абсолютной величине равен площади S соответствующей криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 9.3), то есть

$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right| = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

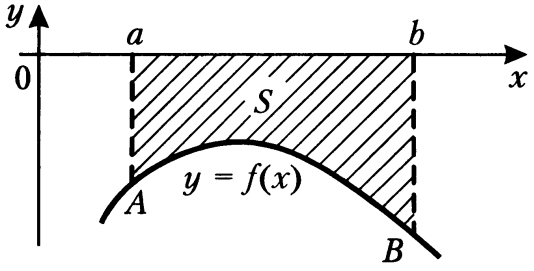


Рис. 9.3

Если непрерывная функция $f(x)$ конечное число раз меняет свой знак на отрезке $[a;\ b]$ (рис. 9.4), то интеграл по всему отрезку $[a;\ b]$ разбиваем на сумму интегралов по отрезкам $[a;\ c]$, $[c;\ d]$ и $[d;\ b]$. Тогда площадь S криволинейной трапеции можно найти по формулам

$$S = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx;\ S = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

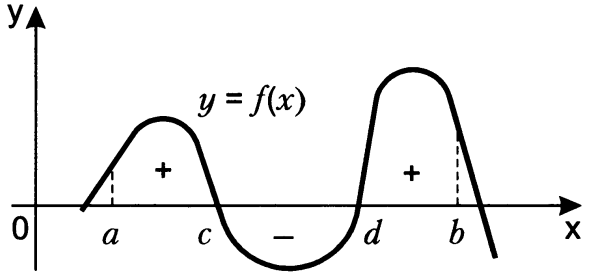


Рис. 9.4

Пример 9.29. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sin x$, $x \in [0;\ 2\pi]$, и осью $0x$ (рис. 9.5).

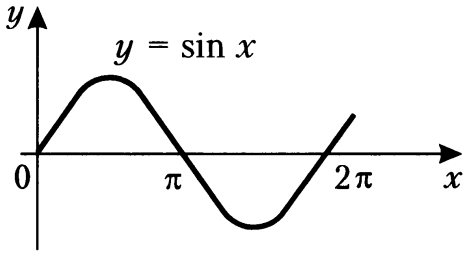


Рис. 9.5

Решение:

$$S = \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx \right| = -\cos x\Big|_0^{\pi} + \left|(-\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi}\right| = 2 + |-2| = 4,$$

или, учитывая симметричность фигуры, $S = 2\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 4$.

Если фигура ограничена снизу и сверху графиками функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ (рис. 9.6), причем $f_1(x) \le f_2(x)$ для всех $x \in [a;\ b]$, то площадь S данной фигуры определяется формулой

$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx,$$

или, что то же самое, $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$.

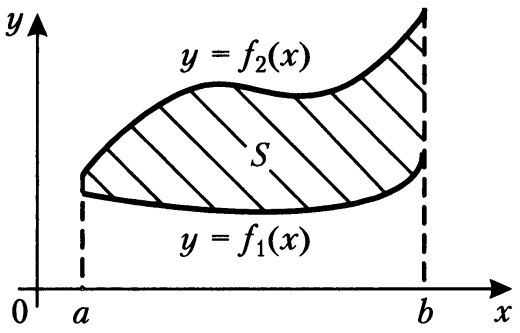


Рис. 9.6

Пример 9.30. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2x$ и $y = 3 - x^2$ (рис. 9.7).

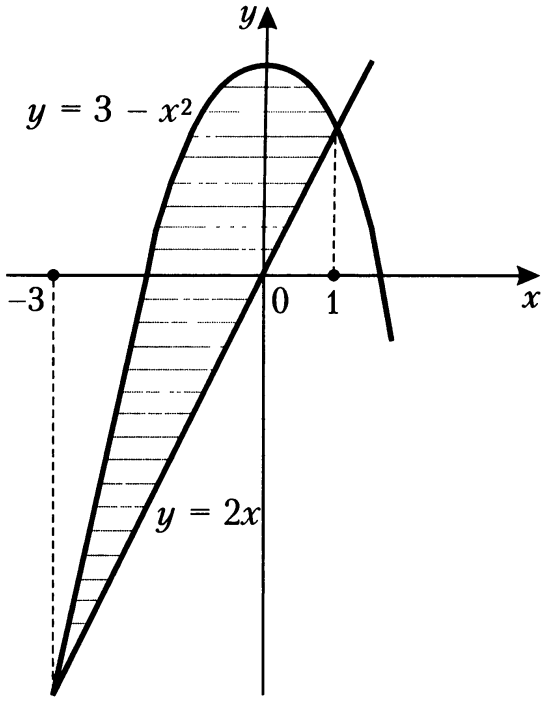


Рис. 9.7

Решение: найдем абсциссы точек пересечения прямой $y = 2x$ и параболы $y = 3 - x^2$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} y = 2x; \\ y = 3 - x^2, \end{cases}$$

получим $x_1 = -3$, $x_2 = 1$. Искомая площадь равна

$$\int_{-3}^{1} (3 - x^2 - 2x)\,dx = \left(3x - \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Bigg|_{-3}^{1} = 10\frac{2}{3}.$$

Вычисление площадей, если линии заданы в параметрическом виде

Если верхняя граница AB криволинейной трапеции (рис. 9.8) задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$, где $\alpha \le t \le \beta$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то в формуле (9.3) надо сделать замену переменной, приняв $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $dx = \varphi'(t)\,dt$.

В этом случае площадь криволинейной трапеции будет определяться как

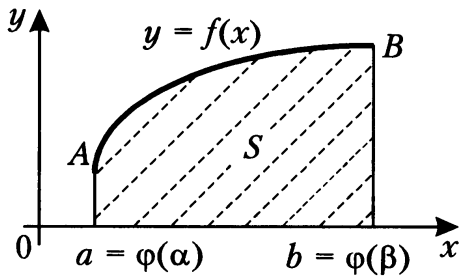


Рис. 9.8

$$S=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b y\,dx=\left|\begin{array}{c} y=\psi(t) \\ x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)\,dt \\ x=a\Rightarrow t=\alpha \\ x=b\Rightarrow t=\beta \end{array}\right|=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,dt.$$

В итоге мы получаем:

$$S=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,dt.$$

Площадь сектора в полярных координатах

Пусть кривая задана уравнением $\rho=\rho(\varphi)$, где $\alpha\le\varphi\le\beta$, функция $\rho(\varphi)$ непрерывна и неотрицательна на промежутке $[\alpha;\ \beta]$ (рис. 9.9).

Тогда площадь криволинейного сектора OAB, ограниченного линией $\rho=\rho(\varphi)$ и лучами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$, определяется формулой

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

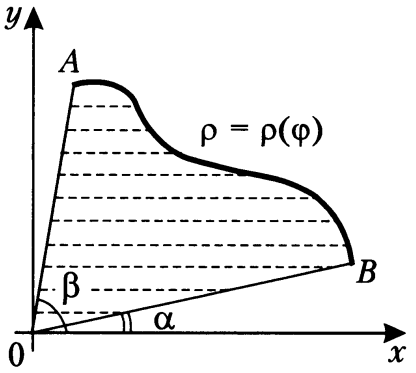


Рис. 9.9

Пример 9.31. Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (рис. 9.10).

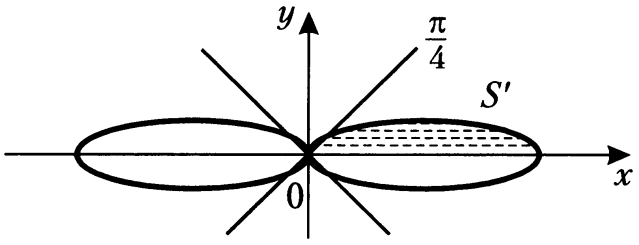


Рис. 9.10

Решение:

$$S=4S'=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} a^2\cos 2\varphi\,d\varphi=2a^2\int_0^{\pi/4}\cos 2\varphi\,d\varphi=2a^2\frac{\sin 2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/4}=a^2(1-0)=a^2.$$

Вычисление объема тела по площадям параллельных сечений

Пусть T — некоторое тело, заключенное между плоскостями $x=a$ и $x=b$. Предположим, что для любого $x\in[a;\ b]$ известна $S(x)$ — площадь сечения этого тела плоскостью, перпендикулярной оси $0x$ (рис. 9.11).

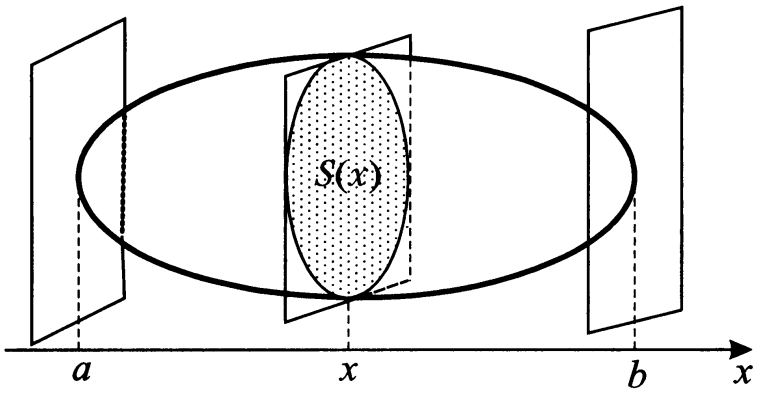


Рис. 9.11

Тогда объем тела T равен

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

Объем тела вращения

Рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси $0x$ криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, непрерывной на отрезке $[a; b]$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью $0x$ (рис. 9.12).

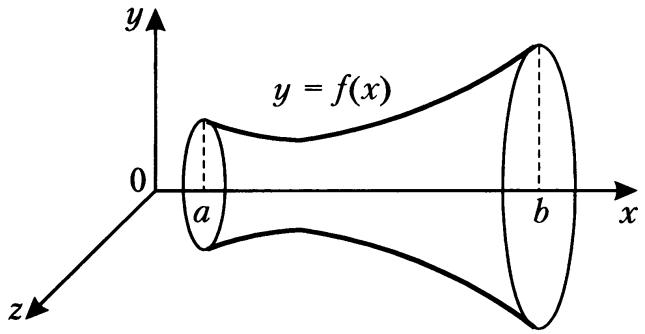


Рис. 9.12

Тогда объем тела вращения равен

$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9.4 1. Объем тела, образованного вращением вокруг оси $0y$ криволинейной трапеции, построенной на отрезке $[c; d]$ оси ординат и ограниченной кривой $x = f(y)$, вычисляется по формуле

$$V = \pi\int_c^d (f(y))^2\,dy.$$

2. Если криволинейная трапеция ограничена кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

где $\alpha \le t \le \beta$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то объем тела вращения вокруг оси $0x$ определяется формулой

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (\psi(t))^2 \, \varphi'_t \, dt.$$

Пример 9.32. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси $0y$ криволинейной трапеции, ограниченной дугой параболы $y = x^2 - 4$, заключенной между точкой $(0; -4)$ и осью $0x$.

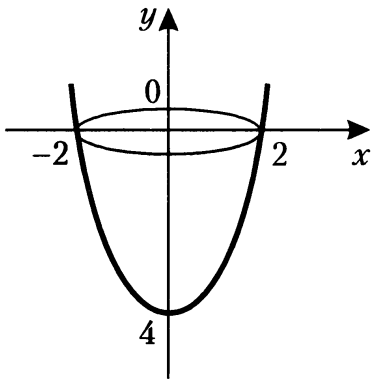


Рис. 9.13

Решение: изобразим тело вращения (рис. 9.13).

Из уравнения $y = x^2 - 4$ найдем $x^2 = y + 4$, то есть $(f(y))^2 = y + 4$. Вычислим объем:

$$V = \pi \int_{-4}^{0} (f(y))^2 \, dy = \pi \int_{-4}^{0} (y + 4) dy = 8\pi.$$

Длина дуги в декартовых координатах

Длина дуги AB (рис. 9.14) графика непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, вычисляется по формуле

$$l = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.$$

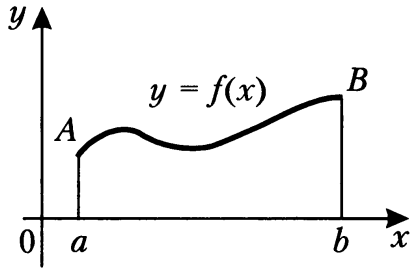


Рис. 9.14

Длина дуги кривой, заданной параметрически

Если уравнение кривой AB задано в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

где $\alpha \le t \le \beta$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то длина дуги AB находится следующим образом:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'_t)^2 + (\psi'_t)^2} \, dt.$$

Длина дуги кривой в полярных координатах

Если уравнение непрерывной кривой AB задано в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, где $\alpha \le \varphi \le \beta$, то длина дуги будет равна

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho'(\varphi))^2 + (\rho(\varphi))^2}\, d\varphi.$$

Пример 9.33. Найти длину кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi)$, $a > 0$ (рис. 9.15).

Решение:

$$l = 2l' = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(-a\sin\varphi)^2 + a^2(1+\cos\varphi)^2}\, d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{2a^2 + 2a^2\cos\varphi}\, d\varphi = 2\sqrt{2}\, a \int_0^{\pi} \sqrt{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi =$$

$$= 2\cdot 2a\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4a\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

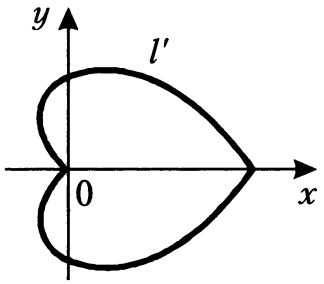


Рис. 9.15

Площадь поверхности тела вращения

Пусть функции $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывные на отрезке $[a; b]$, кривая AB является графиком функции $y = f(x) \ge 0$. Тогда площадь P поверхности, образованной вращением кривой AB вокруг оси $0x$ (рис. 9.16), равна

$$P = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx.$$

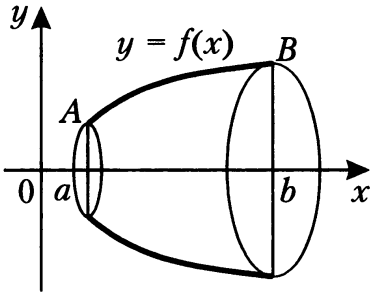


Рис. 9.16

Пример 9.34. Вычислить площадь поверхности шарового пояса, образованного вращением дуги полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, где $-R < a \le x \le b < R$, вокруг оси $0x$.

Решение: учитывая, что производная $f'(x) = y' = \dfrac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}}$, найдем

$$\sqrt{1+(f'(x))^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Следовательно,

$$P = 2\pi\int_a^b \sqrt{R^2 - x^2}\, \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx = 2\pi\int_a^b R\, dx = 2\pi R(b-a).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9.5 1. Если кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta,$$

то площадь поверхности вращения определяется формулой

$$P = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt.$$

2. Если кривая AB задана уравнением в полярных координатах

$$\rho = \rho(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta,$$

то площадь поверхности вращения определяется формулой

$$P = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi.$$

Несобственные интегралы

В определении интеграла $\int_a^b f(x)dx$ предполагалось следующее:

1) промежуток интегрирования $[a;\ b]$ конечен;
2) функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;\ b]$.

Если нарушается хотя бы одно из этих условий, то интеграл называется *несобственным*.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;\ +\infty)$, то предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ называется *несобственным интегралом первого рода* и обозначается

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Если предел в правой части равенства существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*. Если же предел не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл называется *расходящимся*.

Если $F(x)$ — первообразная для подынтегральной функции $f(x)$, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}[F(b) - F(a)] = F(+\infty) - F(a),$$

где $F(+\infty) = \lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.6 Если функция $f(x) \ge 0$ непрерывна на промежутке $[a;\ +\infty)$ и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то этот несобственный интеграл равен площади криволинейной трапеции, которая бесконечно простирается влево вдоль оси $0x$ (рис. 9.17).

Аналогичным образом определяется интеграл на промежутке $(-\infty;\ b]$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

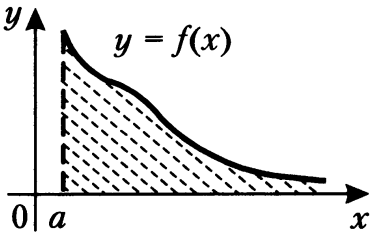


Рис. 9.17

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами интегрирования разделяется на сумму двух интегралов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$

где c — произвольное число, причем интеграл в левой части равенства сходится при условии, что оба интеграла в правой части сходятся.

Пример 9.35. Вычислить интеграл $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$, где α — некоторое число.

Решение:

1. Если $\alpha \neq 1$, то

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \int_{1}^{+\infty} x^{-\alpha}dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_{1}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} = \begin{cases} -\dfrac{1}{1-\alpha} = \dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{если } \alpha > 1; \\ \infty, & \text{если } \alpha < 1. \end{cases}$$

2. Если $\alpha = 1$, то $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{1}^{+\infty} = \infty$.

Таким образом, интеграл $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ — $\begin{cases} \text{сходится, если } \alpha > 1; \\ \text{расходится, если } \alpha \le 1. \end{cases}$

Признаки сходимости несобственных интегралов первого рода

Теорема 9.3 (*признак сравнения*). Если для всех $x \ge a$ непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют неравенству $0 \le f(x) \le g(x)$ и интеграл $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то интеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ тоже сходится, причем

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx \le \int_{a}^{+\infty} g(x)dx.$$

Если же интеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то интеграл $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ тоже расходится.

Пример 9.36. Исследовать, сходится ли интеграл $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2(1+e^x)}$.

Решение: так как при $x \geq 1$ выполняется неравенство $\frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}$ и $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ сходится ($\alpha = 2 > 1$; см. пример 9.35), то данный интеграл сходится.

Теорема 9.4. Если интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. В этом случае последний интеграл называется *абсолютно сходящимся*.

Пример 9.37. Исследовать сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$.

Решение: так как $\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \leq \left|\frac{1}{x^3}\right|$ и интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ сходится, то данный интеграл сходится абсолютно.

Теорема 9.5 (*предельный признак сравнения*). Если для всех $x \geq a$ функции $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$, причем $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} g(x)$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ одновременно оба сходятся или одновременно оба расходятся (то есть ведут себя одинаково в смысле сходимости).

Пример 9.38. Исследовать сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x} e^{-x} dx$.

Решение: интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x} e^{-x} dx$ сходится, так как $\frac{x-1}{x} e^{-x} \underset{x \to +\infty}{\sim} e^{-x}$ и интеграл $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_1^{+\infty} = -(0 - e^{-1}) = \frac{1}{e} < \infty$ сходится.

Пример 9.39. Исследовать сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x} e^{x} dx$.

Решение: интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x} e^{x} dx$ расходится, так как $\frac{x-1}{x} e^{x} \underset{x \to +\infty}{\sim} e^{x}$ и интеграл $\int_1^{+\infty} e^{x} dx = e^{x}\Big|_1^{+\infty} = \infty$ расходится.

Несобственные интегралы от разрывных функций

Если функция $f(x)$ непрерывна при $a \leq x < c$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x = c$, то предел $\lim\limits_{b \to c-0} \int_a^b f(x)dx$ называется *несобственным интегралом второго рода* и обозначается

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{b \to c-0} \int_a^b f(x)dx.$$

Если предел в правой части существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*. Если же предел не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл называется *расходящимся*.

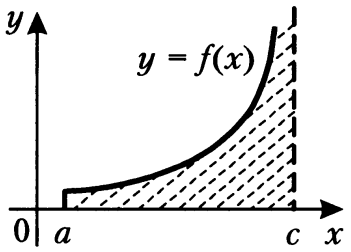


Рис. 9.18

ЗАМЕЧАНИЕ 9.7 Если функция $f(x) \geq 0$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x = c$ и интеграл $\int_a^c f(x)dx$ сходится, то этот несобственный интеграл равен площади криволинейной трапеции, которая бесконечно простирается вверх вдоль прямой $x = c$ (рис. 9.18).

Аналогично определяются интегралы в следующих случаях:

1. Если функция $f(x)$ непрерывна при $c < x \leq b$ и терпит разрыв в точке c, то
$$\int_c^b f(x)dx = \lim_{a \to c+0} \int_a^b f(x)dx.$$
2. Если функция $f(x)$ непрерывна при $x \in [a;\ x_0) \cup (x_0;\ b]$ и терпит бесконечный разрыв в точке x_0, то
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx.$$

В этом случае интеграл слева называется сходящимся, если оба несобственных интеграла, стоящих справа, сходятся.

Пример 9.40. Вычислить интеграл $\int_0^a \frac{dx}{(x-a)^m}$, где m — некоторое число.

Решение:

1. Если $m \neq 1$, то
$$\int_0^a \frac{dx}{(x-a)^m} = \int_0^a (x-a)^{-m}\, d(x-a) = \frac{(x-a)^{1-m}}{1-m}\Bigg|_0^a =$$
$$= \lim_{x \to a} \frac{(x-a)^{1-m}}{1-m} - \frac{(-a)^{1-m}}{1-m} = \begin{cases} -\dfrac{(-a)^{1-m}}{1-m}, & \text{если } m < 1; \\ \infty, & \text{если } m > 1. \end{cases}$$
2. Если $m = 1$, то $\int_0^a \frac{dx}{x-a} = \ln|x|\Big|_0^a = \infty$.

Таким образом, интеграл $\int_0^a \frac{dx}{(x-a)^m}$ $\begin{cases} \text{сходится, если } m < 1; \\ \text{расходится, если } m \geq 1. \end{cases}$

Признаки сходимости несобственных интегралов второго рода

Теорема 9.6 (*признак сравнения*). Если непрерывные на отрезке $[a;\ c)$ функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке c терпят бесконечный разрыв, причем $g(x) \geq f(x) \geq 0$, то:

1) если интеграл $\int_a^c g(x)dx$ сходится, то интеграл $\int_a^c f(x)dx$ тоже сходится;

2) если же интеграл $\int_a^c f(x)dx$ расходится, то интеграл $\int_a^c g(x)dx$ тоже расходится.

Теорема 9.7. Если функция $f(x)$, непрерывная на промежутке $[a;\ c)$, имеет бесконечный разрыв в точке c и интеграл $\int_a^c |f(x)|\,dx$ сходится, то интеграл $\int_a^c f(x)dx$ тоже сходится, причем абсолютно.

Теорема 9.8 (*предельный признак сравнения*). Если на промежутке $[a;\ c)$ функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывные и имеют бесконечный разрыв в точке c, причем $f(x)\geq 0$, $g(x)\geq 0$ и $f(x)\underset{x\to c}{\sim} g(x)$, то интегралы $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_a^c g(x)dx$ одновременно сходятся.

Пример 9.41. Исследовать сходимость интеграла $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+4x^2}\,dx$.

Решение: функция $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+4x^2}$ имеет на отрезке [0; 1] единственный бесконечный разрыв в точке $x=0$. Интеграл $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+4x^2}\,dx$ сходится, так как:

1) $\frac{1}{\sqrt{x}+4x^2}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$;

2) интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}$ сходится ($m=\frac{1}{2}<1$, см. пример 9.40).

Задачи для типовых расчетов

Задача 9.1. Найдите неопределенные интегралы.

1. $\int \sqrt[6]{(x+4)^5}\,dx$.
2. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$.
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-2x^2}}$.
4. $\int \frac{dx}{3x^2-9}$.
5. $\int \frac{dx}{7x^2+7}$.
6. $\int \frac{(\mathrm{arctgx})^3}{1+x^2}\,dx$.
7. $\int \frac{x^3}{4-x^2}\,dx$.
8. $\int (3x-7)^{17}\,dx$.
9. $\int (x-1)x^{-\frac{2}{3}}dx$.
10. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{3-2x}}$.

11. $\int \frac{dx}{4x^2-4}$.
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{8+4x^2}}$.
13. $\int \sin(2-4x)dx$.
14. $\int \cos(1-2x)dx$.
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{(5x-1)^2+1}}$.
16. $\int 2^{1-4x}dx$.
17. $\int 4^{2-3x}dx$.
18. $\int \frac{dx}{5+3x}$.
19. $\int \frac{dx}{\sin^2(2-3x)}$.
20. $\int 2^{1-x}dx$.
21. $\int \frac{dx}{\sin^2(1-2x)}$.
22. $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$.
23. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3}}$.
24. $\int \frac{dx}{\cos^2(1-3x)}$.
25. $\int \frac{dx}{\cos^2(1-3x)}$.
26. $\int \sqrt{3-5x}\,dx$.
27. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$.
28. $\int 4^{1-3x}dx$.
29. $\int \cos(3-5x)dx$.
30. $\int \sqrt[4]{2x+7}\,dx$.

Задача 9.2. Найдите неопределенные интегралы.

1. $\int x\cdot\sqrt[5]{5-x^2}\,dx$.
2. $\int \frac{x^3}{x^8+5}dx$.
3. $\int (\sin 2x+\cos 2x)^2 dx$.
4. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$.
5. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$.
6. $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$.
7. $\int \operatorname{tg}\frac{x}{3}dx$.
8. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$.
9. $\int \cos^2 2x\,dx$.
10. $\int \operatorname{ctg}\frac{x}{2}dx$.
11. $\int \frac{2-3\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}dx$.
12. $\int \sin 3x\cdot\cos x\,dx$.
13. $\int \operatorname{tg} x\,dx$.
14. $\int \frac{\sin x-4}{\cos^2 x}dx$.
15. $\int \sin 2x\cdot\cos 2x\,dx$.
16. $\int \sin 2x\,dx$.
17. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{1+\cos 2x}$.
18. $\int \operatorname{ctg} x\,dx$.
19. $\int \frac{\cos 3x\,dx}{5+3\sin 3x}$.
20. $\int \frac{\cos x+1}{\sin^2 x}dx$.

21. $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx.$
22. $\int \frac{\sin x}{(1-3\cos x)^3}\,dx.$
23. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{3\sin^2 x+4}.$
24. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos^2 x+2}}.$
25. $\int \sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}\,dx.$
26. $\int e^{4-x^2}x\,dx.$
27. $\int e^{\operatorname{ctg} x}\frac{dx}{\sin^2 x}.$
28. $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$
29. $\int x\cdot 3^{4-x^2}\,dx.$
30. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2-2x}}.$

Задача 9.3. Найдите неопределенные интегралы.

1. $\int \sin^2\frac{x}{2}\,dx.$
2. $\int e^{\sin x+1}\cos x\,dx.$
3. $\int x^2 e^{-x^3}\,dx.$
4. $\int 3^{\sin x}\cos x\,dx.$
5. $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx.$
6. $\int \frac{x^3+x}{x^4+1}\,dx.$
7. $\int x\cdot e^{x^2}\,dx.$
8. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$
9. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4}.$
10. $\int \frac{e^{-\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx.$
11. $\int e^x\cdot\sin(e^x)dx.$
12. $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx.$
13. $\int (e^x+e^{-x})^2 dx.$
14. $\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^8}}\,dx.$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}.$
16. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-2}}\,dx.$
17. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9-x^8}}.$
18. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}.$
19. $\int \frac{3^x dx}{\sqrt{9^x+1}}.$
20. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2+x^6}}.$
21. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+5}}.$
22. $\int \frac{x^5+x^2}{\sqrt{5+x^6}}\,dx.$
23. $\int \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}\,dx.$
24. $\int \frac{x^5 dx}{x^{12}-1}.$
25. $\int \frac{3x\,dx}{\sqrt{x^4+7}}.$
26. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}.$

27. $\int \sqrt[3]{3-x^3}\, x^2\, dx.$

28. $\int \frac{\sin 2x}{3+\sin^2 x}\, dx.$

29. $\int \frac{x+\frac{\ln x}{x}}{x^2+\ln^2 x}\, dx.$

30. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x+4\ln x+5}}.$

Задача 9.4. Найдите неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^3}{1+x^2}\, dx.$

2. $\int \frac{\arccos^3 x-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$

3. $\int \operatorname{tg} x \cdot (\ln\cos x)\, dx.$

4. $\int \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)}\, dx.$

5. $\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}\, dx.$

6. $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\, dx.$

7. $\int \frac{2\operatorname{arctg} x+x}{1+x^2}\, dx.$

8. $\int \frac{x-\cos x}{x^2-2\sin x}\, dx.$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{4-\operatorname{tg}^2 x}}.$

10. $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$

11. $\int \frac{x+\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}}\, dx.$

12. $\int \frac{1}{\cos^2(1+\ln x)}\frac{dx}{x}.$

13. $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}.$

14. $\int \frac{dx}{x(\ln x+5)}.$

15. $\int \frac{2x^2-x^5}{1+x^6}\, dx.$

16. $\int \frac{\ln^3 x+2}{x\ln x}\, dx.$

17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3+\ln^2 x}}.$

18. $\int \frac{2^{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}\, dx.$

19. $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x+4)}.$

20. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$

21. $\int \frac{dx}{\arccos^5 x\sqrt{1-x^2}}.$

22. $\int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\, dx.$

23. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx.$

24. $\int \frac{2+\ln x}{x}\, dx.$

25. $\int \frac{dx}{\arcsin^4 x\sqrt{1-x^2}}.$

26. $\int \frac{x^3+2x}{x^4-4}\, dx.$

27. $\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt{2+2e^x+e^{2x}}}.$

28. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}.$

29. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{9-x^4}}\, dx.$

30. $\int \frac{2^x\, dx}{4^x+2^{x+1}+1}.$

Задача 9.5. Найдите неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{1+\ln x}{x}\,dx.$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2-4x}}.$
3. $\int \frac{e^{2x}dx}{e^x-1}.$
4. $\int \cos^3 x \cdot \sin 2x\,dx.$
5. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx.$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}.$
7. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\,dx.$
8. $\int \frac{\ln 2x}{\ln 4x}\frac{dx}{x}.$
9. $\int \frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+x)^2}\,dx.$
10. $\int \frac{dx}{3e^x+1}.$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{6-4x-2x^2}}.$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+3}}.$
13. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3+x^4}}.$
14. $\int \frac{x-4}{\sqrt{x}+2}\,dx.$
15. $\int \frac{e^x-1}{3e^x+1}\,dx.$
16. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}.$
17. $\int \frac{e^{3x}dx}{e^{2x}-1}.$
18. $\int \frac{dx}{e^x+1}.$
19. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x-1}}.$
20. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x-1}}.$
21. $\int \frac{e^{2x}-2e^x}{e^{2x}+1}\,dx.$
22. $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx.$
23. $\int \frac{e^{2x}}{e^x-1}\,dx.$
24. $\int \frac{dx}{e^x-1}.$
25. $\int \frac{e^{2x}-3e^x}{e^{2x}+1}\,dx.$
26. $\int \frac{1}{x+1}\frac{dx}{\sqrt{x}}.$
27. $\int \frac{dx}{x\ln x\cdot \ln\ln x}.$
28. $\int \frac{dx}{\cos^2 x(4+\operatorname{tg}^2 x)}.$
29. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x+x^2}}.$
30. $\int \frac{x+\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}\,dx.$

Задача 9.6. Найдите неопределенные интегралы.

1. $\int (6-5x)e^{-3x}\,dx.$
2. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{8x-1}\,dx.$
3. $\int (6x-3)\cos 2x\,dx.$
4. $\int \ln(x^2+9)dx.$

5. $\int x \ln^2 x\, dx.$
6. $\int \frac{x\, dx}{\sin^2 x}.$
7. $\int x \cos^2 x\, dx.$
8. $\int x^2 \ln x\, dx.$
9. $\int \frac{\ln x}{x^3}\, dx.$
10. $\int x \operatorname{arctg} x\, dx.$
11. $\int x \arcsin x\, dx.$
12. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\, dx.$
13. $\int x \cdot 3^{\frac{x}{2}} dx.$
14. $\int x \operatorname{tg}^2 x\, dx.$
15. $\int \frac{x\, dx}{\sin^2 x}.$
16. $\int \sqrt{x} \ln x\, dx.$
17. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2})dx.$
18. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\, dx.$
19. $\int \arccos 2x\, dx.$
20. $\int \frac{\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}}\, dx.$
21. $\int \arcsin x\, dx.$
22. $\int x \ln\frac{1-x}{1+x}\, dx.$
23. $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x}\, dx.$
24. $\int \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\, dx.$
25. $\int \arccos x\, dx.$
26. $\int x^3 \ln(x+1)dx.$
27. $\int (x^3 - 4x + 5)\cos 3x\, dx.$
28. $\int e^{2x} \cos x\, dx.$
29. $\int \ln(x+2)x^2 dx.$
30. $\int \arccos x \cdot x\, dx.$

Задача 9.7. Найдите неопределенные интегралы.

1. $\int x^2 \cos 3x\, dx.$
2. $\int \ln^2 2x\, dx.$
3. $\int (x^2 - 2x + 5)e^{-x}\, dx.$
4. $\int (x+1)^2 \cos x\, dx.$
5. $\int x^3 \sin\frac{x}{3}\, dx.$
6. $\int \sqrt[3]{x} \ln^2 x\, dx.$
7. $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx.$
8. $\int \frac{x^2+2}{e^{3x}}\, dx.$
9. $\int (x^2 - 2)\cos x\, dx.$
10. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\, dx.$
11. $\int (x^2 + 3x - 7)e^{-2x} dx.$
12. $\int (\arcsin x)^2\, dx.$
13. $\int x \operatorname{arctg}^2 x\, dx.$
14. $\int x^2 e^x dx.$
15. $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\ln^2(x^2+1)dx.$
16. $\int x^2 \cos 2x\, dx.$
17. $\int x^2 \sin x\, dx.$
18. $\int x^2 \sin 2x\, dx.$

19. $\int x\ln^2 x\,dx.$
20. $\int (x^2+1)e^{-2x}dx.$
21. $\int (x^2+1)\cdot 3^x\,dx.$
22. $\int \arcsin^2 x\,dx.$
23. $\int x\ln^2 x\,dx.$
24. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx.$
25. $\int (x^2+15)\cdot 5^x\,dx.$
26. $\int (x^3+3x+2)\sin 2x\,dx.$
27. $\int \arccos^2 x\cdot x\,dx.$
28. $\int (4-3x^2+2x^3)\sin 2x\,dx.$
29. $\int (x^3-3x^2)e^{-3x}dx.$
30. $\int \frac{\ln x\,dx}{x^2}.$

Задача 9.8. Найдите неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}\,dx.$
2. $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx.$
3. $\int \frac{x^2dx}{(x+2)(x-1)^2}.$
4. $\int \frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+1)}.$
5. $\int \frac{dx}{x^3-2x^2+x}.$
6. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}.$
7. $\int \frac{2x-5}{(x-2)^2(x+1)}\,dx.$
8. $\int \frac{dx}{x^3+x^2}.$
9. $\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 dx.$
10. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx.$
11. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}.$
12. $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}\,dx.$
13. $\int \frac{x^3+6x^2+11x+7}{(x^2+3x+2)(x+2)}\,dx.$
14. $\int \frac{x^5-x^4+3x-2}{x^4-x^3}\,dx.$
15. $\int \frac{x^4-3x^3+9x-8}{x^3-4x^2+4x}\,dx.$
16. $\int \frac{x^4-3x^2+3x-1}{x^3-3x-2}\,dx.$
17. $\int \frac{x^3+x^2-x+2}{x^2(x-1)}\,dx.$
18. $\int \frac{x^3-4x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx.$
19. $\int \frac{2x^4+8x^3+x^2+x-20}{x^3(x+5)}\,dx.$
20. $\int \frac{x^4+2x^3-2x+x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,dx.$
21. $\int \frac{x^3-2x^2-12x-7}{x^3-3x-2}\,dx.$
22. $\int \frac{2x^3-2x^2-16x+32}{(x-2)(x^2-4)}\,dx.$
23. $\int \frac{x^4+2x^3+9x^2+5x+2}{x^2(x+1)}\,dx.$
24. $\int \frac{x^3+3x^2+8x+12}{(x^2+4x+4)(x-1)}\,dx.$
25. $\int \frac{x^3-3x^2+7x-1}{2x^3-x^2+3}\,dx.$
26. $\int \frac{x^3+x^2+2}{(x+1)(x^2+1)}\,dx.$

27. $\int \frac{x^3-1}{x^3+1}\,dx.$

28. $\int \frac{(x+1)dx}{x^3-6x^2+9x}.$

29. $\int \frac{x^4+1}{(x^2+1)(x^2-1)}\,dx.$

30. $\int \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \frac{dx}{x}.$

Задача 9.9. Найдите неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}.$

2. $\int \frac{x}{x^3+1}\,dx.$

3. $\int \frac{x\,dx}{x^3-1}.$

4. $\int \frac{(x+1)^3\,dx}{x^3-1}.$

5. $\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}\,dx.$

6. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)(x-1)}\,dx.$

7. $\int \frac{x-4}{(x-2)(x^2+1)}\,dx.$

8. $\int \frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}\,dx.$

9. $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}\,dx.$

10. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}.$

11. $\int \frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)}\,dx.$

12. $\int \frac{x^2}{1-x^4}\,dx.$

13. $\int \frac{2x-1}{x^3-1}\,dx.$

14. $\int \frac{3x\,dx}{x^3+x^2+2x+2}\,dx.$

15. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+2x}\,dx.$

16. $\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}\,dx.$

17. $\int \frac{x-2}{x^3+4x}\,dx.$

18. $\int \frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x+4}\,dx.$

19. $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}.$

20. $\int \frac{3x^2+11x+8}{(x+2)(x^2+2x+2)}\,dx.$

21. $\int \frac{dx}{x^3-8}.$

22. $\int \frac{x^3-2x+5}{x^4-1}\,dx.$

23. $\int \frac{dx}{x^4-1}.$

24. $\int \frac{dx}{x^3+8}.$

25. $\int \frac{dx}{x^3-64}.$

26. $\int \frac{x^3-3x^2+x-4}{(x^2+4)(x^2+9)}\,dx.$

27. $\int \frac{3x+1}{(x+1)^2(x^2+4)}\,dx.$

28. $\int \frac{x^4\,dx}{x^4-2x^2+1}.$

29. $\int \frac{dx}{x(x+2)^2}.$

30. $\int \frac{dx}{x^2(x^2-x+1)}.$

Задача 9.10. Найдите неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{\sqrt{x+9}}{x}\,dx.$

2. $\int x\cdot\sqrt{x+4}\,dx.$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$.
4. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+3}}$.
5. $\int x\cdot\sqrt{x-2}\,dx$.
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.
7. $\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx$.
8. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx$.
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$.
10. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$.
11. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}\,dx$.
12. $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$.
13. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+4\cos^2 x}$.
14. $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}$.
15. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$.
16. $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sin^4 x}$.
17. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x}$.
18. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.
19. $\int \frac{\sin^2 x\,dx}{1+\cos^2 x}$.
20. $\int \frac{1+\cos x}{\sin^3 x}\,dx$.
21. $\int \frac{dx}{2\sin x-3\cos x}$.
22. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.
23. $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+1}$.
24. $\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}$.
25. $\int \frac{dx}{\sin x-3\cos x}$.
26. $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$.
27. $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$.
28. $\int \sin^4 2x\,dx$.
29. $\int \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$.
30. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x^2}\,dx$.

Задача 9.11. Вычислите определенные интегралы.

1. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{\sin^2 x\,dx}{\cos^2 x-3\sin^2 x}$.
2. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-2\cos x+3\sin x}\,dx$.
3. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3\cos^2 x-5\sin^2 x}\,dx$.
4. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(1+\sin x)^2}\,dx$.
5. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x+\sin x}\,dx$.
6. $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{1+\sin x-\cos x}\,dx$.

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4+7\cos x}$.

8. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^4 2x}$.

9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2+\sin x}\,dx$.

10. $\int_0^{\operatorname{arctg}2} \frac{dx}{2\cos^2 x+3}$.

11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\,dx}{(1+\operatorname{tg}^2 x)\sin 2x}$.

12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1+\sin x+\cos x)^2}$.

13. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{4+5\sin 2x}$.

14. $\int_0^{\operatorname{arctg}2} \frac{(3\operatorname{tg}x-1)dx}{4\cos^2 x+\sin^2 x}$.

15. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos^4 x}\,dx$.

16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos x}{1+\cos x+\sin x}\,dx$.

17. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\operatorname{arctg}2} \frac{dx}{\sin^2 x(1-\cos x)}$.

18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2+\sin x}{2-\cos x}\,dx$.

19. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\operatorname{arctg}2} \frac{dx}{\sin^2 x(1+\cos x)}$.

20. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x+9\cos^2 x}$.

21. $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{dx}{\cos^4 3x}$.

22. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1-\sin^4 x}$.

23. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2+3\cos^2 x}$.

24. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$.

25. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{dx}{\cos x(1+\cos x)}$.

26. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}2} \frac{dx}{\sin^2 2x(2+\cos 2x)}$.

27. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\cos x+\sin x)^2}\,dx$.

28. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{5+3\sin x}\,dx$.

29. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x+2\sin^2 x}\,dx$.

30. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin x\,dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$.

Задача 9.12. Вычислите определенные интегралы.

1. $\int_0^{\sqrt{5}} x^5\sqrt{x^2+4}\,dx$.

2. $\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\,dx$.

3. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x^4}\,dx.$

4. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}.$

5. $\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}.$

6. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx.$

7. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2+1}\,dx}{x}.$

8. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}.$

9. $\int\limits_{2}^{4} \frac{\sqrt{x^2-4}\,dx}{x}.$

10. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{16-x^2}}.$

11. $\int\limits_{0}^{9} \frac{dx}{(81+x^2)\sqrt{81+x^2}}.$

12. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx.$

13. $\int\limits_{0}^{4} \sqrt{16-x^2}\,dx.$

14. $\int\limits_{0}^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(64-x^2)^3}}.$

15. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$

16. $\int\limits_{0}^{2\sqrt{2}} \frac{x^2\,dx}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}}.$

17. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{7}} \frac{dx}{x\sqrt{2+x^2}}.$

18. $\int\limits_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{4+x^2}\,dx}{x^3}.$

19. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}.$

20. $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}.$

21. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$

22. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}.$

23. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx.$

24. $\int\limits_{-4}^{4} x^2\sqrt{16-x^2}\,dx.$

25. $\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{-3dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$

26. $\int\limits_{2}^{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^4}\,dx.$

27. $\int\limits_{0}^{\frac{3}{2}} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx.$

28. $\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx.$

29. $\int\limits_{0}^{1} x^4\sqrt{4-x^2}\,dx.$

30. $\int\limits_{0}^{1,5} \sqrt{9-x^2}\,dx.$

Задача 9.13. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в декартовых или полярных координатах.

1. $y = 2x - x^2,\ y = -2x^2 + 4x.$

2. $\rho = 4\cos 2\varphi,\ \rho = 2,\ \rho \geq 2.$

3. $y=\sin^2 x, y=0, x=\frac{\pi}{2}$.
4. $\rho^2=3\cos 3\varphi$.
5. $y=e^{1-x}, y=0, x=0, x=1$.
6. $\rho=2\sin^2 2\varphi$.
7. $y=x^2, x=y^2$.
8. $\rho=\sin\varphi-\cos\varphi$.
9. $y=\sin^2 x\cdot\cos x, y=0, x=\frac{\pi}{2}$.
10. $\rho=4\sin\frac{3\varphi}{2}, \rho=2, \rho\geq 2$.
11. $y=x^2\sqrt{4-x^2}, y=0, x=1$.
12. $\rho=2\cos\varphi, \rho=\cos\varphi$.
13. $y=\sqrt{e^x-1}, y=0, x=\ln 5$.
14. $\rho=2-\cos\varphi$.
15. $y=\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}, y=0, x=e, x=e^4$.
16. $\rho=2\sin 3\varphi$.
17. $y=\ln x, y=\ln^2 x$.
18. $\rho=\sin\varphi, \rho=\cos\varphi, \varphi\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
19. $y=e^x, y=e^{-x}, x=1$.
20. $\rho=3-\sin\varphi$.
21. $y=2x-x^2+3, y=x^2-4x+3$.
22. $\rho^2=3\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)$.
23. $y=x\operatorname{tg}^2 x, y=0, x=\frac{\pi}{4}$.
24. $\rho=1+\sin 2\varphi$.
25. $y=2^x-1, y=\frac{3}{4}\cdot x(4-x)$.
26. $\rho=3-\sin\varphi$.
27. $y=\sin\frac{x}{2}, y=\cos\frac{x}{2}, x=0$.
28. $\rho=4\cos^2\left(2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$.
29. $y=x^2, x+y=2, x=0$.
30. $\rho=3\sin 4\varphi$.

Задача 9.14. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1. $\begin{cases} x=\cos t; \\ y=3+\sin t. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x=6\cos t; \\ y=\sqrt{3}\sin t, \end{cases}$ $x=3\sqrt{3}$ при $x\geq 3\sqrt{3}$.
3. $\begin{cases} x=2(t-\sin t); \\ y=2(1-\cos t), \end{cases}$ $y=1$ при $y\geq 1, 0\leq x\leq 4\pi$.
4. $\begin{cases} x=2+16\cos^3 t; \\ y=2\sin^3 t, \end{cases}$ $x=4$ при $x\geq 4$.
5. $\begin{cases} x=2\sqrt{2}\cos^3 t; \\ y=4\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $y=2$ при $y\geq 2$.
6. $\begin{cases} x=3(t-\sin t); \\ y=3(1-\cos t), \end{cases}$ $y=3$ при $y\geq 3,\ 0\leq x\leq 6\pi$.
7. $\begin{cases} x=6\cos t; \\ y=2\sin t, \end{cases}$ $y=\sqrt{3}$ при $y\leq\sqrt{3}$.

8. $\begin{cases} x = 16\cos^3 t; \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t); \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 3$ при $y \le 3, 0 \le x \le 4\pi$.

10. $\begin{cases} x = 8\sqrt{2}\cos^3 t; \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 4$ при $x \ge 4$.

11. $\begin{cases} x = 2\cos t; \\ y = 3 + 6\sin t, \end{cases}$ $y = 6$ при $y \ge 6$.

12. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t; \\ y = 2\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y = 3$ при $y \ge 3$.

13. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t); \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 0$ при $0 \le x \le 12\pi$.

14. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t; \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 3\sqrt{3}$ при $x \ge 3\sqrt{3}$.

15. $\begin{cases} x = 6\cos t; \\ y = 10\sin t, \end{cases}$ $y = 5\sqrt{3}$ при $y \ge 5\sqrt{3}$.

16. $\begin{cases} x = t; \\ y = t^2 + 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x = t; \\ y = 7 - t^2. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = 16\cos^3 t; \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 2$ при $x \ge 2$.

18. $\begin{cases} x = 3\cos t; \\ y = 2\sin t, \end{cases}$ $x = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ при $x \ge \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

19. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t; \\ y = 6\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 1$ при $x \ge 1$.

20. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t); \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 4$ при $y \ge 4, 0 \le x \le 8\pi$.

21. $\begin{cases} x = 4\cos t; \\ y = 9\sin t, \end{cases}$ $y = 3$ при $y \ge 3$.

22. $\begin{cases} x = 5\cos^3 t; \\ y = 5\sin^3 t. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = 3\cos t; \\ y = 8\sin t, \end{cases}$ $y = 4\sqrt{3}$ при $y \ge 4\sqrt{3}$.

24. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t; \\ y = 3\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = 2\cos t; \\ y = 6\sin t, \end{cases}$ $y = 3$ при $y \geq 3$.

26. $\begin{cases} x = 3\cos t; \\ y = 2\sin t, \end{cases}$ $y = 1$ при $y \geq 1$.

27. $\begin{cases} x = t; \\ y = t^2, \end{cases}$ $\begin{cases} x = t; \\ y = 3 - t^2. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = 2\cos t; \\ y = 6\sin t, \end{cases}$ $x = 1$ при $x \geq 1$.

29. $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos^3 t; \\ y = 2\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $y = 1$ при $y \geq 1$.

30. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t); \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 1$ при $y \geq 1, 0 \leq x \leq 4\pi$.

Задача 9.15. Вычислите длину дуги кривой.

1. $y^2 = 4x$ от ее вершины до точки $M(1; 2)$.
2. $y = 2\sqrt{x}$ при $0 \leq x \leq 1$.
3. $\begin{cases} x = 2(t\sin t + \cos t); \\ y = 2(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ при $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
4. $\rho = 1 + \sin\varphi$ при $\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.
5. $x = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$ при $0 \leq y \leq 3$.
6. $y = 4 - x^2$ между точками ее пересечения с осью $0x$.
7. $y = \ln(x - 1)$ при $2 \leq x \leq 3$.
8. $y = e^x$ при $\frac{1}{2}\ln 3 \leq x \leq \frac{1}{2}\ln 8$.
9. $\rho = 3(1 - \sin\varphi)$ при $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.
10. $y = 2 + \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ при $0 \leq x \leq 2$.
11. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x$ при $0 \leq x \leq \frac{8}{9}$.
12. $y = e^x + 3$ при $\ln\sqrt{8} \leq x \leq \ln\sqrt{15}$.
13. $\begin{cases} x = e^t\cos t; \\ y = e^t\sin t \end{cases}$ при $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
14. $y = \ln\sin x$ при $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

15. $y = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}$ при $0 \le x \le \frac{15}{16}$.

16. $\rho = 2\sin^3 \frac{\varphi}{3}$ при $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

17. $\begin{cases} x = 3\cos^3 t; \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$ при $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

18. $y = \ln\cos x$ при $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$.

19. $\rho = \sqrt{3}\, e^{\varphi}$ при $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$.

20. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ при $1 \le x \le 2$.

21. $\begin{cases} x = e^{2t}\sin t; \\ y = e^{2t}\cos t \end{cases}$ при $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$.

22. $\rho = 3(1-\cos\varphi)$ при $\frac{2\pi}{3} \le \varphi \le 2\pi$.

23. $y = e^{2x}$ при $0 \le x \le 1$.

24. $y = \ln x$ при $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$.

25. $y = 3 - \ln\sin x$ при $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

26. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t; \\ y = 6\sin^3 t \end{cases}$ при $\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{2}$.

27. $y^2 = (x-1)^3$ от точки $M(1;\ 0)$ до точки $N(2;\ -1)$.

28. $y = e^x$ при $0 \le x \le 1$.

29. $\rho = 6\cos^3 \frac{\varphi}{3}$ при $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

30. $\begin{cases} x = 2\cos^2 t; \\ y = 2\sin^2 t \end{cases}$ при $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$.

Задача 9.16. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг указанной оси координат фигуры, ограниченной заданными линиями.

1. $y = 2\sin x$, $y = 0$ при $0 \le x \le \pi$, вокруг оси $0x$.
2. $y^3 = 4x^2$, $y = 2$, вокруг оси $0y$.
3. $2y^2 = x^3$, $x = 4$, вокруг оси $0x$.
4. $y = x^2$, $y = 4$, вокруг оси $0y$.
5. $\begin{cases} x = 3\cos t; \\ y = 5\sin t, \end{cases}$ вокруг оси $0x$.
6. $y = x^2$, $x = y^2$, вокруг оси $0y$.

7. $y = 1 - \cos 2x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, вокруг оси $0x$.
8. $y = 1 - \frac{x^2}{2}$, $x + y = 1$, вокруг оси $0y$.
9. $y = x^2 + 1$, $x = \pm 2$, $y = 0$, вокруг оси $0x$.
10. $xy = 4$, $y = 1$, $y = 2$, $x = 0$, вокруг оси $0y$.
11. $y = 2^x$, $y = \frac{5 + 3x}{4}$, вокруг оси $0x$.
12. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, $y = \pm 6$, вокруг оси $0y$.
13. $\begin{cases} x = 3\cos^3 t; \\ y = 3\sin^3 t, \end{cases}$ вокруг оси $0x$.
14. $y^2 = 4 - x$, $x = 0$, вокруг оси $0y$.
15. $y = e^x$, $x = 0$, $x = \ln 2$, вокруг оси $0x$.
16. $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$, вокруг оси $0y$.
17. $(y - 1)^2 = x$, $x = 1$, вокруг оси $0x$.
18. $\begin{cases} x = \cos t; \\ y = 3\sin t, \end{cases}$ вокруг оси $0y$.
19. $y = x^2$, $x = y^2$, вокруг оси $0x$.
20. $y^2 = (x + 5)^3$, $x = 0$, вокруг оси $0y$.
21. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t); \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 0$, $0 \le x \le 6\pi$, вокруг оси $0x$.
22. $\begin{cases} x = \cos^3 t; \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ вокруг оси $0y$.
23. $xy = 4$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$, вокруг оси $0x$.
24. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$, $y = 0$, $x = 0$, вокруг оси $0y$.
25. $y = e^x$, $y = 1$, $x = 1$, вокруг оси $0x$.
26. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$, вокруг оси $0y$.
27. $y = \sin x$, $x = 0$, $y = \frac{2}{\pi}x$, вокруг оси $0x$.
28. $\begin{cases} x = t; \\ y = 2t^2, \end{cases}$ $y = 4$, вокруг оси $0y$.
29. $x^2 - y^2 = 9$, $x = \pm 6$, вокруг оси $0x$.
30. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t; \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ вокруг оси $0y$.

Задача 9.17. Вычислите несобственные интегралы или исследуйте их на сходимость.

1. $\int\limits_1^\infty \frac{\cos 3x}{x^3+2x-1}\,dx.$
2. $\int\limits_e^\infty \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^3-3x+7}}\,dx.$
3. $\int\limits_2^\infty \frac{2+\arcsin\frac{1}{x}}{3+x\sqrt[3]{x}}\,dx.$
4. $\int\limits_2^\infty \frac{x}{x^2-1}\,dx.$
5. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{(9+x^2)^{3/2}}\,dx.$
6. $\int\limits_2^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx.$
7. $\int\limits_0^\infty \frac{x}{9x^4+1}\,dx.$
8. $\int\limits_1^\infty \frac{1}{(3+x)\ln^2(3+x)}\,dx.$
9. $\int\limits_0^\infty xe^{-x}\,dx.$
10. $\int\limits_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+\sqrt{x^2+x}}}\,dx.$
11. $\int\limits_0^\infty \frac{x}{x^2-4x+7}\,dx.$
12. $\int\limits_1^\infty \frac{x}{\sqrt{8+x^2}}\,dx.$
13. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x^2+1}\,dx.$
14. $\int\limits_e^\infty \frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}\,dx.$
15. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(3+x^2)^5}}\,dx.$
16. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty x\cos 2x\,dx.$
17. $\int\limits_{\frac{2}{\pi}}^\infty \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx.$
18. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} 4x}{16x^2+1}\,dx.$
19. $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x(3+\ln x)}\,dx.$
20. $\int\limits_2^\infty \frac{1}{x^2-4x+5}\,dx.$
21. $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}x\,dx.$
22. $\int\limits_1^\infty \frac{x^2+1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx.$
23. $\int\limits_1^\infty \frac{x}{x^2-3x+7}\,dx.$
24. $\int\limits_0^\infty \frac{x^4}{\sqrt{(8+x^2)^3}}\,dx.$
25. $\int\limits_{e^2}^\infty \frac{1}{x\sqrt[4]{\ln x-1}}\,dx.$
26. $\int\limits_1^\infty \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{x^2\sqrt[3]{x+7}}\,dx.$
27. $\int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx.$
28. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos x}{5+3\sin x}\,dx.$
29. $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x^4+\sqrt{x^2+2x+1}}}\,dx.$
30. $\int\limits_0^\infty x^3e^{-x^2}\,dx.$

Задача 9.18. Вычислите несобственные интегралы или исследуйте их на сходимость.

1. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{3x}{x^2-1}\,dx.$
2. $\int\limits_{0}^{1} \ln x\,dx.$
3. $\int\limits_{1,5}^{2} \frac{1}{(2-x)\ln^2(2-x)}\,dx.$
4. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x)-1}}\,dx.$
5. $\int\limits_{0}^{e} \frac{\ln(x+1)}{(1+x^4)^{3/2}-1}\,dx.$
6. $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}\,dx.$
7. $\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{0} \frac{x}{81x^4-18x^2+1}\,dx.$
8. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx.$
9. $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx.$
10. $\int\limits_{1}^{2} \frac{1}{x^2-4x+4}\,dx.$
11. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x}{\sqrt[3]{8-x^3}}\,dx.$
12. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin x}{x^2+x\sqrt[3]{x}}\,dx.$
13. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x(2x^3+\sqrt{x^2+x})}}\,dx.$
14. $\int\limits_{1}^{3} \frac{1}{x\ln x}\,dx.$
15. $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[5]{\operatorname{arctg} x}}\,dx.$
16. $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x^3-1}\,dx.$
17. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}}\,dx.$
18. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x}\arcsin x}\,dx.$
19. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x\sqrt{x}}\,dx.$
20. $\int\limits_{2}^{5} \frac{x+5}{\sqrt{x^2-x-2}}\,dx.$
21. $\int\limits_{1,5}^{2} \frac{1}{(3-x)\sqrt[3]{\ln^2(3-x)}}\,dx.$
22. $\int\limits_{1}^{3} \frac{x^2-x+1}{x^2\sqrt{x^4-1}}\,dx.$
23. $\int\limits_{1}^{e} \frac{1}{x\sqrt[4]{\ln x}}\,dx.$
24. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{\sqrt{(3-x^2)^5}}\,dx.$
25. $\int\limits_{2}^{3} \frac{2x+3}{x^2+x-12}\,dx.$
26. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x^4+\sqrt{x^2+2x}}}\,dx.$
27. $\int\limits_{1}^{5} \frac{1}{\sqrt[3]{10x-25-x^2}}\,dx.$
28. $\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt[5]{\cos^3 2x}}\,dx.$
29. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arccos x}{x^2\sqrt[3]{2x+7}}\,dx.$
30. $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{e^{x^2}-1}}\,dx.$

ГЛАВА 10 Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Метрическое пространство R^n

Пусть заданы два множества, X и Y. *Прямым произведением* $X \times Y$ этих множеств называется множество всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$ и $y \in Y$.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.1 Упорядоченность пары (x, y) следует понимать в том смысле, что $(x, y) \neq (y, x)$.

Если R — множество всех вещественных чисел, то прямое произведение $\underbrace{R \times R \times \cdots \times R}_{n \text{ раз}}$, то есть множество всех упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из n вещественных чисел, называется *n-мерным пространством* и обозначается R^n. Элементы $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ называются точками пространства R^n и обозначаются $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Вещественные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *координатами точки M*.

Пример 10.1. $R \times R$, или пространство R^2 — это множество всех упорядоченных пар вещественных чисел. Если использовать метод координат, то можно установить взаимно однозначное соответствие между элементами $(x, y) \in R^2$ и точками $M(x; y)$ плоскости с выбранной на ней системой координат.

Расстоянием между точками $M_1(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ и $M_2(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)$ пространства R^n называется число $\rho(M_1, M_2)$, которое определяется по формуле

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1^1 - x_1^2)^2 + (x_2^1 - x_2^2)^2 + \ldots + (x_n^1 - x_n^2)^2}.$$

Расстояние $\rho(M_1, M_2)$ между точками M_1 и M_2 из пространства R^n удовлетворяет следующим соотношениям:

1) $\rho(M_1, M_2) \geq 0$.
2) $\rho(M_1, M_2) = 0 \Leftrightarrow M_1 = M_2$.
3) $\rho(M_1, M_2) = \rho(M_2, M_1)$.
4) $\rho(M_1, M_2) \leq \rho(M_1, M_3) + \rho(M_3, M_2)$.

Пространство R^n, в котором определено расстояние между двумя точками (метрика), называется *метрическим*.

Окрестности точек в пространстве R^n. Классификация точек. Открытые и замкнутые множества

Пусть $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in R^n$ и $\delta > 0$ — вещественное число. *δ-окрестностью* точки M_0 называется множество точек $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$, для которых справедливо $\rho(M_0, M) < \delta$. δ-окрестность точки M_0 обозначается $U_\delta(M_0)$.

Пример 10.2. Если точка $M_0 \in R^2$, то δ-окрестность этой точки $U_\delta(M_0)$ — открытый круг (граница не входит в это множество) с центром в точке M_0 и радиусом δ (рис. 10.1).

Пусть $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in R^n$ и $\delta > 0$. *Проколотой δ-окрестностью* точки M_0 называется множество $U_\delta(M_0) \setminus \{M_0\}$, то есть множество точек $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$, для которых справедливо $0 < \rho(M_0, M) < \delta$. Проколотая δ-окрестность точки M_0 обозначается $\dot{U}_\delta(M_0)$.

Точка $M_0 \in D \subset R^n$ называется *внутренней точкой множества D*, если $\exists U_\delta(M_0) \subset D$.

Точка M_0 называется *граничной точкой множества* $D \subset R^n$, если любая ее окрестность содержит как точки множества D, так и точки, не принадлежащие D.

Совокупность всех граничных точек множества называется его *границей*.

Точка M_0 называется *предельной точкой множества* $D \subset R^n$, если любая ее проколотая окрестность содержит хотя бы одну точку множества D.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.2 Граничные и предельные точки множества могут и не принадлежать этому множеству.

Пример 10.3. Пусть множество $D \subset R^2$ является объединением множества пар чисел $(x; y)$, для которых $x^2 + y^2 < 1$, и точки $M(2; 0)$. Все точки этого множества, кроме точки M, — внутренние и предельные. Точки (x, y), для которых $x^2 + y^2 = 1$ — граничные и предельные (рис. 10.2). Точка M не является ни внутренней, ни предельной, ни граничной — точка M называется *изолированной*.

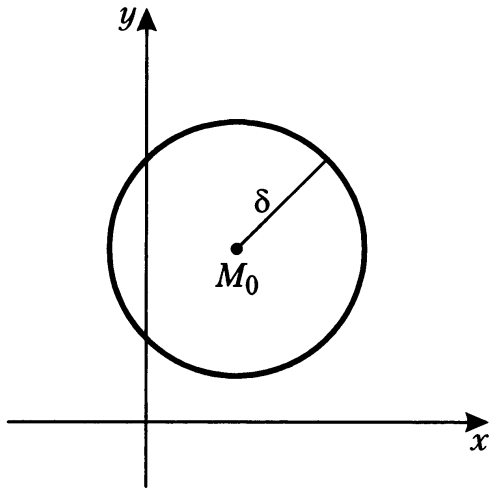


Рис. 10.1

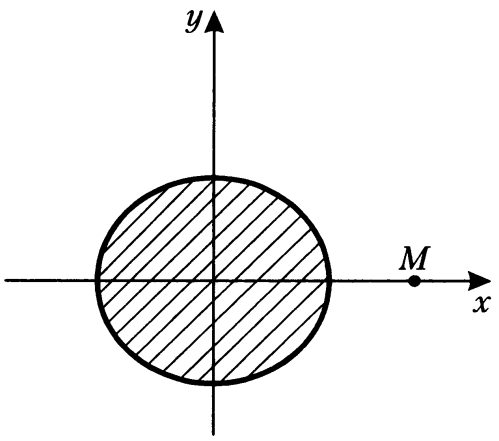


Рис. 10.2

Множество $D \subset R^n$ называется *открытым*, если все его точки — внутренние.

Множество $D \subset R^n$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Пример 10.4. Множество $E \subset R^2$, $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$, является открытым. Множество $D \subset R^2$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$, является замкнутым.

Множество называется *связным*, если любые две его точки можно соединить линией, целиком принадлежащей этому множеству.

Множество D в примере 10.3 не является связным. Оба множества, E и D, в примере 10.4 — связные.

Открытое связное множество пространства R^n называется *областью*.

Множество $D \subset R^n$ называется ограниченным, если все его точки принадлежат некоторому кругу с центром в начале координат и с радиусом r. Иначе говоря, можно указать такое число $r > 0$, что $D \subset E = \{(x, y) : x^2 + y^2 < r^2\}$.

Функции n переменных. Предел и непрерывность функции n переменных

Числовой функцией n переменных называется отображение некоторого множества $D \subset R^n$ на множество вещественных чисел R, то есть функция $f: R^n \to R$.

То, что функция f ставит в соответствие $\forall M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \subset R^n$ вещественное число w, обозначают $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, или $w = f(M)$.

Множество D называется областью определения функции, а множество $E = \{w \in R: w = f(M), M \in D\}$ — областью значений функции f.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.3 Если $D \subset R^2$, то f — функция двух переменных. Обычно для функции двух переменных используют обозначение $z = f(x, y)$.

В трехмерном евклидовом пространстве с введенной декартовой системой координат функция двух переменных $z = f(x, y)$ задает некоторую поверхность. Например, функция $z = x^2 + y^2$ задает параболоид вращения (рис. 10.3).

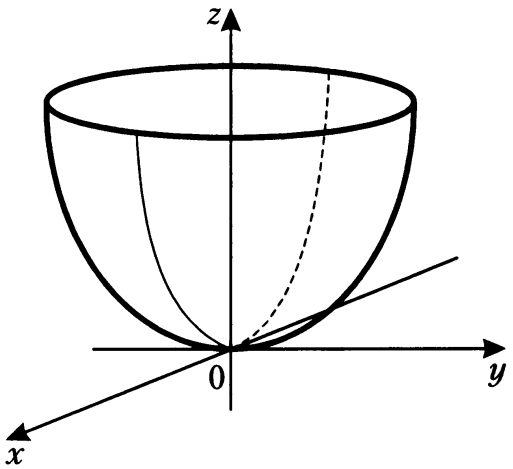


Рис. 10.3

Пример 10.5. Найти область определения и область значений функции двух переменных $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Решение: область определения заданной функции находится из условия $4 - x^2 - y^2 \ge 0$, или $x^2 + y^2 \le 4$. Из последнего неравенства следует, что область определения $D \subset R^2$ — это круг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = 4$.

Область значений функции найдем, записывая ее аналитическое выражение в виде

$$\begin{cases} z^2 = 4 - x^2 - y^2; \\ z \ge 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4; \\ z \ge 0. \end{cases}$$

Следовательно, функция задает верхнюю половину сферы с центром в начале координат и радиусом 2 (рис. 10.4). Из этого рисунка видно, что $0 \le z \le 2$, то есть областью значений функции является множество $E = [0, 2]$.

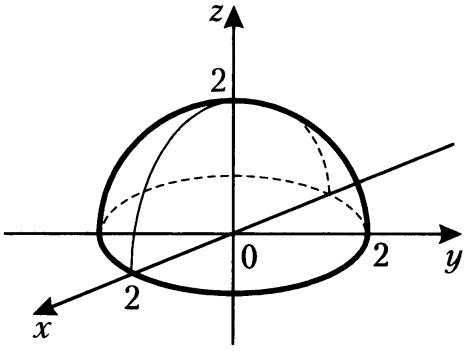


Рис. 10.4

Пусть на множестве $D \subset R^n$ задана функция $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и пусть $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — предельная точка множества D. Число A называют *пределом функции* $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке M_0 и записывают

$$\lim_{x_i \to x_i^0} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A, \text{ или } \lim_{M \to M_0} f(M) = A,$$

если для любой ε-окрестности точки A — $U_\varepsilon(A)$ найдется δ-окрестность точки M_0 — $U(M_0)$, для которой справедливо следующее: если точка $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \cap \dot{U}(M_0)$, то значение функции в этой точке $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U_\varepsilon(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.4 Учитывая определение окрестностей в пространстве R^n, определение предела для функции нескольких переменных можно записать в следующем виде: пусть функция $f(M)$ задана на множестве $D \subset R^n$ и $M_0 \in D$ — предельная точка D. Тогда $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$: $\forall\, M \in D$: $0 < \rho(M_0, M) < \delta \Rightarrow |f(M) - A| < \varepsilon$.

Пример 10.6. Задана функция двух переменных $f(x, y) = x^2 \sin\dfrac{1}{y} + y^2 \cos\dfrac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Показать, пользуясь определением, что $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = 0$.

Решение: в самом деле, поскольку

$$|f(x, y)| \le |x^2| \left|\sin\frac{1}{y}\right| + |y^2| \left|\cos\frac{1}{x}\right| \le x^2 + y^2,$$

то для произвольного числа $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Тогда для любой точки $M(x, y) \in \dot{U}_\delta(O)$ выполняется $0 < x^2 + y^2 < \delta^2 = \varepsilon$, откуда следует, что $|f(x, y)| < \varepsilon$.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.5 Все теоремы о пределах для функции одной переменной справедливы и для функций многих переменных.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.6 Для того чтобы функция $f(M)$ имела предел в точке M_0, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$, имеющей пределом точку M_0, существовал предел $\lim\limits_{n \to \infty} f(M_n)$ и был одинаковым для всех последовательностей $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

Пример 10.7. Функция $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ не имеет предела в точке $0(0; 0)$ — начале координат. Если задать последовательности точек, стремящихся к началу координат по прямым $x = mt$; $y = nt$, то

$$\lim_{t \to 0} \frac{m^2 n t^3}{m^4 t^4 + n^2 t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{m^2 n t}{m^4 t^2 + n^2} = 0.$$

Если же рассмотреть последовательность точек, сходящуюся к началу координат по параболе $\begin{cases} x = t; \\ y = t^2, \end{cases}$ то

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^4}{t^4+t^4}=\frac{1}{2}.$$

Пример 10.8. Пусть задана функция $f(x,\ y)=\dfrac{e^{xy}-\cos xy}{3xy}$. Предел этой функции в начале координат равен $\dfrac{1}{3}$. Это следует из того, что можно сделать замену переменных $xy = t$ и перейти к пределу функции одной переменной t, то есть

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{e^{xy}-\cos xy}{3xy}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-\cos t}{3t}=\lim_{t\to 0}\frac{(e^t-1)+(1-\cos t)}{3t}=\lim_{t\to 0}\frac{t+\frac{1}{2}t^2}{3t}=\frac{1}{3}.$$

Функция $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, определенная на множестве $D \subset R^n$, называется *непрерывной* в точке $M_0(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0) \in D$, если в этой точке существует конечный предел, равный значению функции в этой точке, то есть $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$. Функция $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, заданная на множестве $D \subset R^n$ и непрерывная в каждой точке $M_0 \in D$, называется *непрерывной на множестве D*.

Точка, в которой не выполнено условие непрерывности, называется *точкой разрыва* функции.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.7 Множества точек разрыва функции нескольких переменных могут иметь самую разнообразную структуру. В частности, они могут образовывать линии разрыва и поверхности разрыва.

Пример 10.9. Прямая $y = x$ является линией разрыва для функции $w=\dfrac{x+y}{x-y}$. Коническая поверхность $z^2 = x^2 + y^2$ является поверхностью разрыва для функции $w=\dfrac{3x}{x^2+y^2-z^2}$.

Для непрерывных функций n переменных справедлива следующая теорема.

Теорема 10.1. Функция $w = f(M)$, непрерывная на замкнутом и ограниченном множестве $D \subset R^n$, ограничена на этом множестве и достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значений.

Частные производные функции *n* переменных

Пусть функция $w = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots,\ x_n)$ определена на множестве $D \subset R^n$. Пусть точки $M_0(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_i^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ и $M_i(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_i^0 + \Delta x_i,\ \ldots,\ x_n^0)$ принадлежат этому множеству. *Частным приращением* функции $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots,\ x_n)$ по переменной x_i называется число, равное разности значений функции в этих точках, то есть

$$f(M_i)-f(M_0)=f(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_i^0+\Delta x_i,\ \ldots,\ x_n^0)-f(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_i^0,\ \ldots,\ x_n^0).$$

Частное приращение обозначается $\Delta_{x_i} f$ или $\Delta_{x_i} w$. В частности, для функции двух переменных $z=f(x,\ y)$ частные приращения в точке $M_0(x_0,\ y_0)$ по переменным x и y равны

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0);$$

$$\Delta_y z=f(x_0,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0).$$

Пусть функция $w=f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots,\ x_n)$ определена на множестве $D\subset R^n$ и пусть $M_0(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_i^0,\ \ldots,\ x_n^0)\in D$. Если существует и конечен $\lim\limits_{\Delta x_i\to 0}\dfrac{\Delta_{x_i} w}{\Delta x_i}$, то он называется *частной производной* функции f по переменной x_i и обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ или $\dfrac{\partial w}{\partial x_i}$.

В частности, для функции двух переменных $z=f(x,\ y)$ частные производные по x и y определяются как пределы:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)}{\Delta x};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)}{\Delta y},$$

если они существуют и конечны.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.8 Ясно, что частные производные функции n переменных, в свою очередь, являются функциями этих же переменных.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.9 Из определения частных производных следует, что при вычислении частной производной функции $w=f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots,\ x_n)$ по переменной x_i следует рассматривать ее как функцию одной переменной x_i, а все остальные переменные считать постоянными.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.10 При частном дифференцировании функции n переменных справедливы все правила дифференцирования, а также таблица производных, полученные для функции одной переменной.

Пример 10.10. Вычислить частные производные функции двух переменных $z=x^y$.

Решение: заданная функция является степенной относительно переменной x и показательной относительно переменной y, поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x.$$

Пример 10.11. Вычислить частные производные функции трех переменных $w=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+x^2yz$.

Решение: $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{y} + 2xyz$, $\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z} + x^2 z$, $\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} + x^2 y$.

Пример 10.12. Вычислить частные производные для функции двух переменных $\frac{1-xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y\sqrt{x^2+y^2} - (1-xy)\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{x^2+y^2} = \frac{-y\sqrt{x^2+y^2} - (1-xy)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2},$$

или после упрощений $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x+y^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$.

Поскольку переменные x и y входят в аналитическое выражение функции симметрично, то частную производную по переменной y можно получить, заменяя в частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ x на y, а y — на x, то есть

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y+x^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

Пример 10.13. Вычислить частные производные по переменным x и y функции

$$z = (\sin xy)^{\operatorname{tg}\frac{y}{x}} - \frac{1}{2}\arccos(1-\sqrt{xy}).$$

Решение: перепишем аналитическое выражение заданной функции, используя основное логарифмическое тождество, в виде $z = e^{\operatorname{tg}\frac{y}{x}\ln\sin xy} - \frac{1}{2}\arccos(1-\sqrt{xy})$ и вычислим обе частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\operatorname{tg}\frac{y}{x}\ln\sin xy}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{y}{x}}\frac{-y}{x^2}\ln\sin xy + \operatorname{tg}\frac{y}{x}\frac{1}{x\sin xy}\cos xy \cdot y\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-(1-\sqrt{xy})^2}}\frac{-\sqrt{y}}{2\sqrt{x}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{\operatorname{tg}\frac{y}{x}\ln\sin xy}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{y}{x}}\frac{1}{x}\ln\sin xy + \operatorname{tg}\frac{y}{x}\frac{1}{x\sin xy}\cos xy \cdot x\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-(1-\sqrt{xy})^2}}\frac{-\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}.$$

Геометрический смысл частных производных функций двух переменных

Теорема 10.2. Путь функция двух переменных $z = f(x, y)$ определена на множестве $D \subset R^2$ и точка $M_0(x_0; y_0) \in D$. Частная производная $\frac{\partial z}{\partial y}(M_0)$ равна $\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол между касательной, проведенной к пространственной кривой, заданной системой $\begin{cases} z = f(x, y); \\ x = x_0, \end{cases}$ в точке с координатами x_0, y_0, $f(x_0, y_0)$ и положительным направлением оси $0y$ (рис. 10.5).

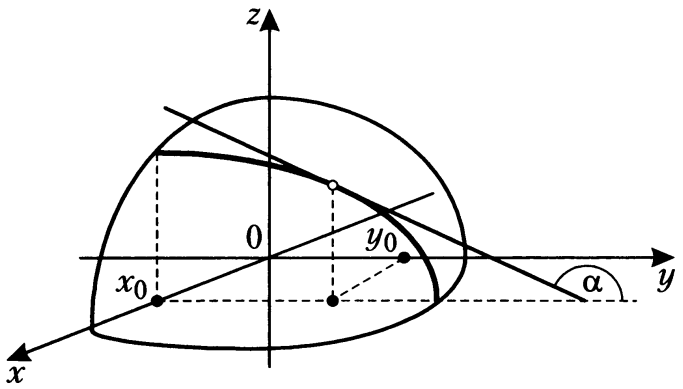


Рис. 10.5

Теорема 10.3. Пусть функция двух переменных $z = f(x, y)$ определена на множестве $D \subset R^2$ и точка $M_0(x_0; y_0) \in D$. Частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол между касательной, проведенной к пространственной кривой, заданной системой $\begin{cases} z = f(x, y); \\ y = y_0, \end{cases}$ в точке с координатами x_0, y_0, $f(x_0, y_0)$ и положительным направлением оси $0x$ (рис. 10.6).

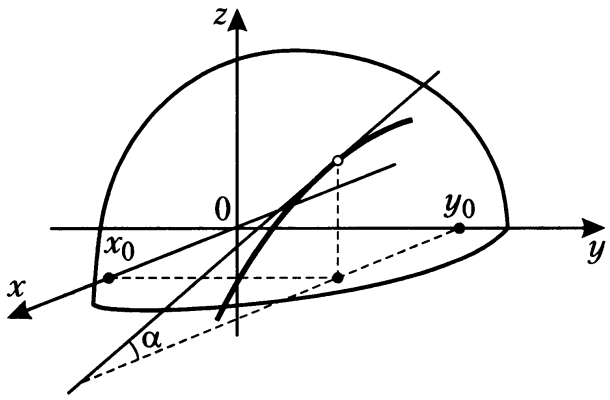


Рис. 10.6

Пример 10.14. Какой угол составляет касательная к кривой $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ x = 1 \end{cases}$ в точке $M_0(1; 1)$ с осью $0y$?

Решение: если α — искомый угол, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial z}{\partial y}(1;\ 1)$. Определим частную производную $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ и вычислим ее в точке M_0. Получим $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Следовательно, искомый угол $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Дифференцируемая функция *n* переменных. Условия дифференцируемости. Дифференциал

Пусть на множестве $D \subset R^n$ задана функция $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ и пусть $M_0(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0) \in D$. Пусть числа $\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \ldots,\ \Delta x_n$ таковы, что точка $M(x_1^0+\Delta x_1,\ x_2^0+\Delta x_2,\ \ldots,\ x_n^0+\Delta x_n) \in D$. *Полным приращением функции* $w = f(x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n)$ в точке M_0 называется число

$$\Delta w = f(M) - f(M_0).$$

Функция $w = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ называется *дифференцируемой* в точке $M_0(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0) \in D \subset R^n$, где D — область определения функции, если ее полное приращение Δw в этой точке можно представить в виде

$$\Delta w = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i}(M_0)\Delta x_i + \theta(\rho),$$

где $\theta(\rho)$ есть бесконечно малая при $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2} \to 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.11 Если функция n переменных дифференцируема в некоторой точке, то она имеет в этой точке конечные частные производные по всем переменным, причем частные производные непрерывны в некоторой окрестности этой точки.

Пример 10.15. Функция двух переменных $z = x^3\sqrt{y}$ определена на полуплоскости: $-\infty < x < +\infty$ и $0 \le y < +\infty$. Ее частные производные равны $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2\sqrt{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3}{2\sqrt{y}}$. Так как $\frac{\partial z}{\partial y}$ не существует при $y = 0$, то заданная функция не является дифференцируемой на луче $y = 0$, входящем в область определения.

Если функция $w = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots,\ x_n)$ дифференцируема в точке $M_0(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots, x_i^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ из ее области определения $D \subset R^n$, то линейная относительно приращений $\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \ldots,\ \Delta x_n$ часть полного приращения функции, то есть величина $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i}(M_0)\Delta x_i$, называется *дифференциалом функции* $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots,\ x_n)$ в точке M_0 и обозначается dw.

Формула для дифференциала в точке M_0 имеет вид

$$dw = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i}(M_0)\Delta x_i.$$

Поскольку для независимых переменных $\Delta x_i = dx_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то последнюю формулу для дифференциала в произвольной точке можно записать как

$$dw = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_i.$$

В частности, формула дифференциала дифференцируемой функции двух переменных $z = f(x, y)$ в каждой точке дифференцируемости имеет вид

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}(x, y)\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)\Delta y, \text{ или } dz = \frac{\partial z}{\partial x}(x, y)\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)dy.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10.12 Следует понимать, что дифференциал функции n переменных является функцией $2n$ переменных. Чтобы вычислить его значение в некоторой точке, мало задать координаты этой точки — следует еще задать значения приращений независимых переменных.

Пример 10.16. Найти значение дифференциала функции $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ в точке $M_0(1;\ 1)$, если приращения $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta y = -0{,}03$.

Решение: согласно формуле полного дифференциала,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y.$$

Частные производные равны

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\frac{1}{y};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{1 + \left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\frac{x}{y^2}.$$

Значения частных производных в точке M_0: $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1;\ 1) = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1;\ 1) = -\dfrac{1}{2}$. Подставляя эти значения, а также значения Δx и Δy в формулу дифференциала, получим: $dz = \dfrac{1}{2}\cdot 0{,}02 - \dfrac{1}{2}\cdot 0{,}03 = -0{,}005$.

Если $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ и $w = g(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ — функции n переменных, то при вычислении дифференциалов справедливы следующие правила:

1. $d(c \cdot u) = c \cdot du$, где $c = \text{const}$.
2. $d(u \pm w) = du \pm dw$.
3. $d(u \cdot w) = u \cdot dw + w \cdot du$.
4. $d\left(\dfrac{u}{w}\right) = \dfrac{du \cdot w - u \cdot dw}{w^2}$.
5. $df(w) = f'_w \cdot dw$.

Пример 10.17. Найти дифференциал функции трех переменных $w = 3^{xyz}$.

Решение: $dw = (3^{xyz})'_{xyz}\, d(xyz) = 3^{xyz} \cdot \ln 3 \cdot (yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz)$.

Производная сложной функции. Полная производная

Теорема 10.4. Пусть на множестве $D \subset R^n$ задана дифференцируемая по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ функция $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ и функции $x_1 = x_1(v_1, v_2, \ldots, v_m)$, $x_2 = x_2(v_1, v_2, \ldots, v_m)$, ..., $x_n = x_n(v_1, v_2, \ldots, v_m)$, в свою очередь, являются дифференцируемыми функциями m независимых переменных $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Тогда функция w является сложной дифференцируемой функцией независимых переменных $v_1, v_2, \ldots, v_m$, и частные производные от функции w по этим переменным равны

$$\frac{\partial w}{\partial v_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial v_j}, \text{ где } j = 1, 2, \ldots, m.$$

В частном случае для сложной функции двух переменных $z = f(x, y)$, где $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$, частные производные по независимым переменным u и v вычисляются по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Пример 10.18. Задана сложная функция $w = 2^{\frac{xy}{z}}$, где $x = \frac{u}{v}$, $y = \sqrt{u}$, $z = v^2 + 3v$. Вычислить частные производные $\frac{\partial w}{\partial u}$ и $\frac{\partial w}{\partial v}$.

Решение: используя формулу производной сложной функции $\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$ и вычислив частные производные по переменной x — $\frac{\partial w}{\partial x} = 2^{\frac{xy}{z}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{y}{z}$, по переменной y — $\frac{\partial w}{\partial y} = 2^{\frac{xy}{z}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{x}{z}$ и по переменной z — $\frac{\partial w}{\partial z} = -2^{\frac{xy}{z}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{xy}{z^2}$, а также частные производные от переменных x, y, z по независимой переменной u — $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{v}$, $\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$, $\frac{\partial z}{\partial u} = 0$, получим выражение для частной производной функции w по переменной u:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = 2^{\frac{xy}{z}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{y}{z}\frac{1}{v} + 2^{\frac{xy}{z}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{x}{z}\frac{1}{2\sqrt{u}}.$$

Аналогично, выражение для частной производной функции w по независимой переменной v получим, используя формулу производной сложной функции

$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$ и вычислив все входящие в нее частные производные $\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{u}{v^2}$, $\frac{\partial y}{\partial v}=0$, $\frac{\partial z}{\partial v}=2v+3$:

$$\frac{\partial w}{\partial v}=-2^{\frac{xy}{z}}\cdot\ln 2\cdot\frac{y}{z}\frac{u}{v^2}-2^{\frac{xy}{z}}\cdot\ln 2\cdot\frac{xy}{z^2}\cdot(2v+3).$$

Следствие. Если на множестве $D\subset R^n$ задана дифференцируемая по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ функция $w=f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ и если функции $x_1=x_1(t), x_2=x_2(t), \ldots, x_n=x_n(t)$ — дифференцируемые функции независимой переменной t, то функция w является сложной дифференцируемой функцией одной переменной t и ее *полная производная* по независимой переменной t равна

$$\frac{dw}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}.$$

Пример 10.19. Найти полную производную по переменной t от функции $z=\frac{\operatorname{arctg}(xy)}{\sqrt[3]{y}}$, если $x=t\cdot\ln t$, $y=\operatorname{tg}^3 t$.

Решение: согласно формуле полной производной,

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Так как

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt[3]{y}}\frac{1}{1+(xy)^2}y=\frac{\sqrt[3]{y^2}}{1+(xy)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{x}{1+(xy)^2}\sqrt[3]{y}-\operatorname{arctg}(xy)\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{y^2}}=\frac{\frac{3xy}{1+(xy)^2}-\operatorname{arctg}(xy)}{3\sqrt[3]{y^4}};$$

$$\frac{dx}{dt}=\ln t+t\frac{1}{t}=\ln t+1;\quad\frac{dy}{dt}=3\operatorname{tg}^2 t\frac{1}{\cos^2 t}=3\frac{\sin^2 t}{\cos^4 t},$$

то, подставляя вычисленные производные в формулу, получим:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\sqrt[3]{y^2}}{1+(xy)^2}(\ln t+1)+\frac{\frac{3xy}{1+(xy)^2}-\operatorname{arctg}(xy)}{3\sqrt[3]{y^4}}\cdot 3\frac{\sin^2 t}{\cos^4 t}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10.13 Иногда функция w явно зависит от переменной t, то есть

$$w=f(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)).$$

В этом случае формула для полной производной имеет вид

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}.$$

Здесь следует различать частную производную $\frac{\partial w}{\partial t}$, которая вычисляется в предположении, что $x_1, x_2, ..., x_n$ не зависят от переменной t, и полную производную $\frac{dw}{dt}$, которая учитывает и зависимость от t функций $x_1, x_2, ..., x_n$.

Пример 10.20. Дано $z = t \cdot \cos(t + x^2 + 2y^3)$, где $x = e^{-t}$, $y = \frac{1}{t^2}$. Вычислить полную производную $\frac{dz}{dt}$.

Решение: согласно формуле полной производной, $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$. Вычислим:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \cos(t + x^2 + 2y^3) - t\sin(t + x^2 + 2y^3); \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -2x\, t\sin(t + x^2 + 2y^3);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -6y^2 t\sin(t + x^2 + 2y^3); \quad \frac{dx}{dt} = -e^{-t}; \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{2}{t^3}$$

и подставим вычисленные производные в формулу полной производной. Получим:

$$\frac{dz}{dt} = \cos(t + x^2 + 2y^3) - t\sin(t + x^2 + 2y^3) + \left(-2x\, t\sin(t + x^2 + 2y^3)\right)(-e^{-t}) +$$

$$+ \left(-6y^2 t\sin(t + x^2 + 2y^3)\right)\left(-\frac{2}{t^3}\right).$$

Геометрический смысл дифференциала функции двух переменных. Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

Теорема 10.5. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $(x_0; y_0)$, то существует не параллельная оси $0z$ касательная к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ плоскость, уравнение которой имеет вид

$$z = z_0 + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

где $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Следствие 1. Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$ и функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $(x_0; y_0)$, то уравнение нормали к этой поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, имеет вид

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Следствие 2. Принимая в уравнении касательной плоскости

$$z = z_0 + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0), \; x - x_0 = \Delta x \text{ и } y - y_0 = \Delta y,$$

можно установить, что $dz = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y = z - z_0$, то есть дифференциал функции двух переменных равен *приращению аппликаты касательной плоскости.*

Пример 10.21. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $z = \ln(x + y^2)$, в точке (1; 0).

Решение: частные производные заданной функции равны

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x + y^2}.$$

Вычислим значения частных производных в точке (1; 0): $\frac{\partial z}{\partial x}(1; 0) = 1, \frac{\partial z}{\partial y}(1; 0) = 0.$

Значение функции в точке (1; 0) равно $z_0 = \ln 1 = 0$. Тогда уравнение касательной плоскости имеет вид $z = 0 + 1 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 0)$, или $z = x - 1$. Уравнение нормали $\frac{x - 1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}$.

Приближенные вычисления и оценка погрешностей

Пусть требуется вычислить значение дифференцируемой функции $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ в некоторой точке

$$M(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n)$$

и известно значение этой функции в точке $M_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. В тех случаях, когда модули приращений $|\Delta x_i|$ довольно малы, приближенное значение функции в точке M можно найти, заменяя приращение функции ее дифференциалом, то есть

$$f(M) = f(M_0) + \Delta w \approx f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + dw,$$

где $dw = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i}(M_0)\Delta x_i$. Погрешность, появляющаяся при такой замене, не превосходит $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2}$.

Пример 10.22. Вычислить приближенно $\sqrt{3{,}01^2 + 3{,}98^2}$.

Решение: рассмотрим функцию $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Необходимо вычислить ее значение в точке $M(3{,}01;\ 3{,}98)$. Представим $z = z_0 + \Delta z$, где $z_0 = f(x_0,\ y_0)$, $x_0 = 3$, $y_0 = 4$. Тогда $z_0 = 5$. Теперь представим $x = 3{,}01 = x_0 + \Delta x$ и $y = 3{,}98 = y_0 + \Delta y$. Так как $x_0 = 3$ и $y_0 = 4$, то $\Delta x = 0{,}01$, а $\Delta y = -0{,}02$. Поскольку Δx и Δy довольно малы, то заменим приращение функции Δz ее дифференциалом $dz = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,\ y_0)\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,\ y_0)\Delta y$. Для этого вычислим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ в точке $(3;\ 4)$. Получим $\frac{\partial z}{\partial x}(3;\ 4) = 0{,}6$ и $\frac{\partial z}{\partial y}(3;\ 4) = 0{,}8$. Тогда дифференциал в точке $(3;\ 4)$ при $\Delta x = 0{,}01$ и $\Delta y = -0{,}02$ равен

$$dz = 0{,}6 \cdot 0{,}01 + 0{,}8 \cdot (-0{,}02) = 0{,}006 - 0{,}016 = -0{,}01.$$

Следовательно, приближенное значение функции равно $z_0 + dz = 5 - 0{,}01 = 4{,}99$. При этом верхняя граница абсолютной погрешности Δ определяется из равенства

$$\Delta = \left|\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,\ y_0)\right| |\Delta x| + \left|\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,\ y_0)\right| |\Delta y|.$$

В рассмотренном примере $\Delta = 0{,}6 \cdot 0{,}01 + 0{,}8 \cdot 0{,}02 = 0{,}006 + 0{,}016 = 0{,}022$.

Пример 10.23. Оцените абсолютную и относительную погрешности при вычислении значения функции $z = \sqrt{\frac{y}{x}}$ в точке $(x;\ y)$, если $x = 1 \pm 0{,}2$, $y = 1 \pm 0{,}05$.

Решение: абсолютная погрешность

$$\Delta \le \left|\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,\ y_0)\right| |\Delta x| + \left|\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,\ y_0)\right| |\Delta y|.$$

Так как $x_0 = y_0 = 1$, $|\Delta x| = 0{,}2$, $|\Delta y| = 0{,}05$, то, вычислив

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{y}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{y}}{2x\sqrt{x}};\quad \frac{\partial z}{\partial x}(1;\ 1) = -\frac{1}{2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{xy}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}(1;\ 1) = \frac{1}{2},$$

получим $\Delta \le \left|-\frac{1}{2}\right| \cdot 0{,}2 + \left|\frac{1}{2}\right| \cdot 0{,}05 = 0{,}1 + 0{,}025 = 0{,}125$.

Частные производные и дифференциалы высших порядков функций нескольких переменных

Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ имеет частные производные в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0)$ из ее области определения $D \subset R^n$. Будем называть их частными производными первого порядка. Так как они являются функциями тех же переменных, что и данная функция, то у каждой из них могут существовать частные производные по любому из этих аргументов. Полученные таким образом частные производные называются *частными производными второго порядка.*

В частности, для функции двух переменных $z = f(x, y)$ можно составить четыре частных производных второго порядка, которые обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{x^2}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{y^2};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = z''_{xy}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = z''_{yx}.$$

Частные производные $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$ называются *смешанными.* Значения смешанных производных равны в точках, в которых эти производные непрерывны.

Пример 10.24. Найти частные производные второго порядка функции $z = e^{x^2y^2}$.

Вначале найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2y^2} 2xy^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2y^2} 2x^2 y.$$

Продифференцировав их еще раз, получим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x^2y^2} 4x^2y^4 + e^{x^2y^2} 2y^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{x^2y^2} 4x^4y^2 + e^{x^2y^2} 2x^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = e^{x^2y^2} 4x^3y^3 + e^{x^2y^2} 4xy; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = e^{x^2y^2} 4x^3y^3 + e^{x^2y^2} 4xy.$$

Сравнивая последние два выражения, видим, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

Вообще для каждой из частных производных второго порядка можно дать и строгое определение.

Если существует и конечен предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0 + \Delta x, y_0) - \dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

то он называется *частной производной второго порядка* в точке $(x_0;\ y_0)$ и обозначается $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ или z''_{x^2}.

Аналогично даются строгие определения для остальных частных производных второго порядка. Частные производные от частных производных второго порядка называются частными производными третьего порядка и т. д.

Для функции $w = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots,\ x_n)$ частная производная пятого порядка $\dfrac{\partial^5 w}{\partial^2 x_i\ \partial^2 x_j\ \partial x_n}$, если она существует, определяется как функция, полученная из данной путем двукратного дифференцирования по переменным x_i и x_j и однократного дифференцирования по x_n. Если все возникающиеся при этом частные производные непрерывны, то порядок дифференцирования не имеет значения.

Пример 10.25. Вычислить все частные производные второго порядка для функции $w = x \cdot z^2 + \cos\dfrac{x}{y}$.

Решение: можно установить, что существует шесть различных частных производных второго порядка для данной функции.

Частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = z^2 - \sin\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y};\quad \frac{\partial w}{\partial y} = \sin\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{y^2};\quad \frac{\partial w}{\partial z} = 2xz.$$

Частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\cos\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y^2};\quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\cos\frac{x}{y}\cdot\frac{x^2}{y^4} - \sin\frac{x}{y}\cdot\frac{2x}{y^3};\quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 2x;$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = \cos\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{y^3} + \sin\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y^2};\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z} = 2z;\quad \frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z} = 0.$$

Пусть функция $w = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots,\ x_n)$ дифференцируема и имеет дифференцируемые частные производные по всем переменным в каждой точке некоторой области $D \subset R^n$. Тогда существует дифференциал $dw = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial w}{\partial x_i}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)dx_i$, который также является дифференцируемой функцией переменных $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$. Будем в дальнейшем называть его *дифференциалом первого порядка*, или *первым дифференциалом*.

Рассматривая первый дифференциал как функцию переменных $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ при фиксированных $dx_1,\ dx_2,\ \ldots,\ dx_n$, определяют *дифференциал второго порядка*, или *второй дифференциал*, как дифференциал от ее первого дифференциала. Второй дифференциал обозначают d^2w.

Теорема 10.6. Если функция $w = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots,\ x_n)$ дифференцируема вместе со всеми частными производными по независимым переменным $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, то для второго дифференциала справедлива формула

$$d^2w = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_i\, dx_j.$$

В частности, для функции двух переменных $z = f(x, y)$, учитывая независимость частных производных от порядка дифференцирования, справедливо:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10.14 Аналогично определяются дифференциалы более высокого порядка. Дифференциал третьего порядка, или третий дифференциал — это дифференциал от второго дифференциала, и т. д.

При этом важно понимать, что для существования дифференциала n-го порядка функция должна иметь дифференцируемые частные производные по всем переменным до производных n-го порядка. Такие функции называются n раз дифференцируемыми.

Легко показать, что для функции двух переменных $z = f(x, y)$ формула для третьего дифференциала имеет вид

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(dx)^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}(dx)^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}dx(dy)^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}(dy)^3.$$

Формулы для второго дифференциала функции двух переменных $z = f(x, y)$ удобно записывать в символическом виде:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z,$$

где под обозначением $\frac{\partial}{\partial x}$ понимается операция взятия частной производной по переменной z, а под обозначением $\frac{\partial}{\partial y}$ понимается операция взятия частной производной по переменной y.

В общем случае для дифференциала n-го порядка функции двух переменных $z = f(x, y)$ справедлива формула

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10.15 Следует помнить, что эти формулы записаны в предположении, что x и y — независимые переменные. Если же $z = f(x, y)$ является сложной функцией, в которой x и y, в свою очередь, являются функциями двух переменных, то

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}d^2x + \frac{\partial z}{\partial x}d^2y.$$

Пример 10.26. Найти d^3z, если $z=(x+y)\cos(x-2y)$.

Решение: используем формулу третьего дифференциала

$$d^3z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(dx)^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}(dx)^2dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}dx(dy)^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}(dy)^3.$$

Производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos(x-2y)-(x+y)\sin(x-2y);\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\cos(x-2y)+2(x+y)\sin(x-2y).$$

Производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2\sin(x-2y)-(x+y)\cos(x-2y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\sin(x-2y)-4(x+y)\cos(x-2y).$$

Производные третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=-3\cos(x-2y)+(x+y)\sin(x-2y);$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=-12\cos(x-2y)-8(x+y)\sin(x-2y);$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=3\cos(x-2y)-2(x+y)\sin(x-2y);$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}=4(x+y)\sin(x-2y).$$

Подставляя вычисленные производные в формулу дифференциала, получим:

$$d^3z=(-3\cos(x-2y)+(x+y)\sin(x-2y))(dx)^3+$$
$$+3(3\cos(x-2y)-2(x+y)\sin(x-2y))(dx)^2dy+$$
$$+3(4(x+y)\sin(x-2y))dx(dy)^2+$$
$$+(-12\cos(x-2y)-8(x+y)\sin(x-2y))(dy)^3.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10.16 При вычислении дифференциалов высших порядков иногда удобно не пользоваться полученными формулами, а вычислять дифференциалы, проводя непосредственное дифференцирование, учитывая, что $d^n w=d(d^{n-1}w)$ и $d^n x_i=0$ при условии $n\geq 2$, если x_i — независимая переменная.

Пример 10.27. Вычислить d^3z, если $z=\cos(x-5y)$.

Решение: по формуле для дифференциала суперпозиции двух функций первый дифференциал можно записать в виде $dz=-\sin(x-5y)(dx-5dy)$. Поскольку вы-

ражение $dx-5dy$ не зависит от переменных x и y, то второй дифференциал имеет вид $d^2z=-\cos(x-5y)(dx-5dy)^2$.

Аналогично вычисляется третий дифференциал:

$$d^3z=\sin(x-5y)(dx-5dy)^3,$$

или

$$d^3z=\sin(x-5y)((dx)^3-15(dx)^2dy+75dx(dy)^2-125(dy)^3).$$

Пример 10.28. Вычислить d^2w, если $w=3^{xyz}$.

Решение:

$$dw=3^{xyz}\cdot\ln 3(yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz);$$

$$d^2w=\ln 3(d(3^{xyz})(yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz)+3^{xyz}d(yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz));$$

$$d^2w=3^{xyz}\ln^2 3(yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz)^2+$$

$$+3^{xyz}\ln 3((dy\,z+y\,dz)dx+(dx\,z+x\,dz)dy+(dx\,y+x\,dy)dz)).$$

Упрощая полученное выражение, запишем:

$$d^2w=3^{xyz}\ln^2 3(y^2z^2(dx)^2+x^2z^2(dy)^2+x^2y^2(dz)^2)+$$

$$+3^{xyz}2\ln 3(1+xyz\ln 3)(z\,dx\,dy+x\,dy\,dz+y\,dx\,dz).$$

Дифференцирование неявных функций

Уравнение $F(x,\ y,\ z)=0$ в окрестностях тех точек $(x_0,\ y_0,\ z_0)$, для которых уравнение $F(x_0,\ y_0,\ z)=0$ имеет хотя бы один корень z_0, задает неявную функцию $z=f(x,\ y)$, значения которой равны корням этого уравнения. При этом уравнение $F(x,\ y,\ z)=0$ иногда может быть разрешено относительно z, а иногда — нет.

Теорема 10.7. Пусть уравнение $F(x,\ y,\ z)=0$ задает в окрестности точки $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ однозначную дифференцируемую функцию $z=f(x,\ y)$, для которой справедливо $z_0=f(x_0,\ y_0)$, и в некоторой окрестности точки $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ функция $F(x,\ y,\ z)$ и все ее частные производные непрерывны, причем $\dfrac{\partial F}{\partial z}\neq 0$. Тогда функция $z=f(x,\ y)$ дифференцируема, и ее частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ вычисляются по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

Теорема 10.8. Если уравнение $F(x, y) = 0$ задает неявную функцию одной переменной $y = f(x)$, то в окрестности точки (x_0, y_0), в которой функция $F(x, y)$ и обе ее частные производные непрерывны, а $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ и $y_0 = f(x_0)$, функция $y = f(x)$ однозначная и дифференцируемая, а ее производная вычисляется по формуле

$$y'_x = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \Big/ \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right).$$

Пример 10.29. Выяснить, в каких точках дифференцируема функция $y = f(x)$, заданная неявно, и вычислите ее производную, если $\frac{x}{y} + e^{xy} = 0$.

Решение: $F(x, y) = \frac{x}{y} + e^{xy}$, поэтому функция дифференцируема во всех точках, за исключением тех, где $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$. Поскольку $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + e^{xy}x$, то функция дифференцируема везде, где выполняется условие $-\frac{x}{y^2} + e^{xy}x \neq 0$. Так как

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{y} + e^{xy}y,$$

то

$$y'_x = -\left(\frac{1}{y} + e^{xy}y\right) \Big/ \left(-\frac{x}{y^2} + e^{xy}x\right) = \frac{y + y^3 e^{xy}}{x - xy^2 e^{xy}}.$$

Пример 10.30. Выяснить, в каких точках дифференцируема функция $z = f(x, y)$, заданная неявно, и вычислить ее частные производные, если $\frac{x}{z} + z \cdot \cos(xy) = 0$.

Решение: так как $F(x, y, z) = \frac{x}{z} + z \cdot \cos(xy)$, то функция дифференцируема во всех точках, за исключением тех, в которых $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$. $\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{x}{z^2} + \cos(xy)$, следовательно, функция дифференцируема везде, где выполняется условие $-\frac{x}{z^2} + \cos(xy) \neq 0$. Учитывая, что $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{z} - \sin(xy)zy$ и $\frac{\partial F}{\partial y} = -\sin(xy)zx$, можно записать:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{1}{z} - \sin(xy)zy}{-\frac{x}{z^2} + \cos(xy)}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-\sin(xy)zx}{-\frac{x}{z^2} + \cos(xy)}.$$

Дифференцирование неявных функций, заданных системой уравнений

Если неявные функции $u(x,\ y)$ и $w(x,\ y)$ заданы системой $\begin{cases} F_1(x,\ y,\ u,\ w)=0; \\ F_2(x,\ y,\ u,\ w)=0, \end{cases}$

то определитель

$$I=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial w} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial w} \end{vmatrix}$$

называется *определителем Якоби.*

Имеет место следующая теорема, которая легко обобщается на случай большего числа переменных.

Теорема 10.9. Если задана система $\begin{cases} F_1(x,\ y,\ u,\ w)=0; \\ F_2(x,\ y,\ u,\ w)=0, \end{cases}$ где $F_1(x,\ y,\ u,\ w)$ и $F_2(x,\ y,\ u,\ w)$ — непрерывные и дифференцируемые по всем переменным в окрестности точки $M_0(x_0,\ y_0,\ u_0,\ w_0)$, являющейся решением системы, функции и если в точке M_0 определитель Якоби

$$I=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial w} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial w} \end{vmatrix}\neq 0,$$

то система определяет функции $u(x,\ y)$ и $w(x,\ y)$, которые являются дифференцируемыми в точке M_0.

Пример 10.31. Функции $u(x,\ y)$ и $w(x,\ y)$ заданы системой $\begin{cases} xy+u^2=-y; \\ uw+y^2=0. \end{cases}$

Вычислить частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial w}{\partial y}$.

Решение: продифференцируем оба уравнения системы по переменной x, получим:

$$\begin{cases} y+2u\dfrac{\partial u}{\partial x}=0; \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}w+u\dfrac{\partial w}{\partial x}=0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2u\dfrac{\partial u}{\partial x}=-y; \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}w+u\dfrac{\partial w}{\partial x}=0. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно неизвестных $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial w}{\partial x}$, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} -y & 0 \\ 0 & u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & 0 \\ w & u \end{vmatrix}}=\frac{-yu}{2u^2}=-\frac{y}{2u}; \quad \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} 2u & -y \\ w & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & 0 \\ w & u \end{vmatrix}}=\frac{yw}{2u^2} \quad \text{при } u\neq 0.$$

Теперь продифференцируем оба уравнения системы по переменной y, получим:

$$\begin{cases} x + 2u\dfrac{\partial u}{\partial y} = -1; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}w + u\dfrac{\partial w}{\partial y} + 2y = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2u\dfrac{\partial u}{\partial y} = -x - 1; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}w + u\dfrac{\partial w}{\partial y} = -2y. \end{cases}$$

Если решить эту систему относительно производных $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial w}{\partial y}$, то формулы для них будут иметь вид

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} -x-1 & 0 \\ -2y & u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & 0 \\ w & u \end{vmatrix}} = -\frac{x+1}{2u}; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} 2u & -x-1 \\ w & -2y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & 0 \\ w & u \end{vmatrix}} = \frac{-4yu + xw + w}{2u^2}.$$

Из полученных формул для частных производных $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ видно, что неявные функции $u(x,\ y)$ и $w(x,\ y)$ не являются дифференцируемыми в точках, в которых определитель Якоби $\begin{vmatrix} 2u & 0 \\ w & u \end{vmatrix} = 0$, или $u = 0$.

Пример 10.32. Определить, при каком условии система уравнений

$$\begin{cases} u^2 - w^2 + x^2 + y^2 = 0; \\ uw + xy = 0 \end{cases}$$

задает дифференцируемые функции $u(x,\ y)$ и $w(x,\ y)$, и вычислить du и dw.

Решение: вычислим определитель Якоби

$$I = \begin{vmatrix} 2u & -2w \\ w & u \end{vmatrix} = 2u^2 + 2w^2.$$

Поскольку $I = 0$ только при $u = w = 0$, то во всех точках, кроме начала координат, заданная система определяет две неявные дифференцируемые функции, $u(x,\ y)$ и $w(x,\ y)$.

Теперь вычислим du и dw, дифференцируя оба уравнения системы:

$$\begin{cases} d(x^2 + y^2 + u^2 - w^2) = 0; \\ d(uw + xy) = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2xdx + 2ydy + 2udu - 2wdw = 0; \\ u\,dw + w\,du + dx\,y + dy\,x = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2udu - 2wdw = -2xdx - 2ydy; \\ w\,du + u\,dw = -y\,dx - x\,dy. \end{cases}$$

Решая последнюю систему относительно du и dw, получим:

$$du = -\frac{xu + yw}{u^2 + w^2}dx - \frac{yu + xw}{u^2 + w^2}dy; \quad dw = \frac{-yu + xw}{u^2 + w^2}dx + \frac{-xu + yw}{u^2 + w^2}dy.$$

Экстремум функции двух переменных

Пусть функция $f(x, y)$ определена в области $D \subset R^2$, а $M_0(x_0, y_0)$ — внутренняя точка этой области. Точка M_0 называется *точкой минимума* функции $f(x, y)$, если

$$\exists U_\delta(M_0) : \forall M(x, y) \in \dot{U}_\delta(M_0) \Rightarrow f(x, y) > f(x_0, y_0).$$

Пусть функция $f(x, y)$ определена в области $D \subset R^2$, а $M_0(x_0, y_0)$ — внутренняя точка этой области. Точка M_0 называется *точкой максимума* функции $f(x, y)$, если

$$\exists U_\delta(M_0) : \forall M(x, y) \in \dot{U}_\delta(M_0) \Rightarrow f(x, y) < f(x_0, y_0).$$

Необходимое условие экстремума. Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и имеет в этой точке экстремум (максимум или минимум), то

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10.17 Условие равенства нулю частных производных в некоторой точке не является достаточным условием существования экстремума в этой точке.

Если хотя бы одна из частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ или $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, то в точке $M_0(x_0; y_0)$ нет экстремума. Значит, экстремум следует искать в тех точках, в которых обе частные производные равны нулю. Такие точки называются *стационарными*. Так же, как и для функции одной переменной, экстремум может быть и в точках, где функция не является дифференцируемой. Такие точки, а также стационарные точки в дальнейшем будем называть подозрительными на экстремум, или *критическими*.

Достаточные условия экстремума. Если $M_0(x_0; y_0)$ — стационарная точка дважды дифференцируемой функции $f(x, y)$ и если в некоторой окрестности этой точки второй дифференциал

$$d^2 f(M_0) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0)(dx)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}(M_0)\, dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0)(dy)^2$$

сохраняет знак при любых значениях dx и dy, не равных нулю одновременно, то функция в точке M_0 имеет экстремум. При этом если $d^2 f(x_0, y_0) > 0$, то этот экстремум — минимум, если $d^2 f(x_0, y_0) < 0$ — максимум.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.18 Если $d^2 f(x_0, y_0)$ меняет знак в окрестности точки M_0, то это еще не означает, что в этой точке нет экстремума.

Пример 10.33. Функция $z = x^4 + y^2 - 4x$ имеет в точке (1; 0) минимум. Это следует из того, что частные производные

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 4; \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y \end{cases}$$

определены и конечны на всей плоскости и обращаются в ноль

$$\begin{cases} 4x^3 - 4 = 0; \\ y = 0 \end{cases}$$

в единственной стационарной точке (1; 0). Если вычислить частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, а также их значения в стационарной точке $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1;\ 0) = 12$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1;\ 0) = 2$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1;\ 0) = 0$, то второй дифференциал $d^2 z(1;\ 0) = 12 \cdot (dx)^2 + 2 \cdot (dy)^2 \geq 0$.

Теорема 10.10. Если $M_0(x_0;\ y_0)$ — стационарная точка дважды дифференцируемой функции $z = f(x,\ y)$ и если

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0,\ y_0),\ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0,\ y_0),\ B = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0,\ y_0),$$

то функция имеет экстремум, если определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$, и не имеет экстремума, если $\Delta < 0$. При $\Delta > 0$ экстремум является максимумом, если $A < 0$, и минимумом, если $A > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.19 Если $\Delta = 0$, экстремум может быть, а может и не быть. Этот случай требует дополнительных исследований.

Пример 10.34. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$.

Решение:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 9y; \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 9x; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 - 9y = 0; \\ 3y^2 - 9x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 3y; \\ 9y^2 - 27x = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 3y; \\ x^4 - 27x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 3y; \\ x(x^3 - 27) = 0. \end{cases}$$

Системе удовлетворяют две стационарные точки, (0; 0) и (3; 3).

Вычислим частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -9$ и найдем их значения в стационарных точках.

Для первой стационарной точки (0; 0): $A = C = 0$, $B = -9$, $\Delta = AC - B^2 = -81 < 0$. Значит, в этой точке нет экстремума.

Для второй стационарной точки (3; 3): $A = C = 18$, $B = -9$, $\Delta = AC - B^2 = 324 - 81 > 0$, а так как $A > 0$, то это точка минимума.

Экстремум функций n переменных

Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена в области $D \subset R^n$, а $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — внутренняя точка этой области. Точка M_0 называется *точкой минимума* функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если

$$\exists U_\delta(M_0) : \forall M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \dot{U}_\delta(M_0) \Rightarrow f(M) > f(M_0).$$

Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена в области $D \subset R^n$, а $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — внутренняя точка этой области. Точка M_0 называется *точкой минимума* функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если

$$\exists U_\delta(M_0) : \forall M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \dot{U}_\delta(M_0) \Rightarrow f(M) < f(M_0).$$

Необходимое условие экстремума. Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируема в окрестности точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ и имеет в этой точке экстремум (максимум или минимум), то $\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0) = 0$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Достаточные условия экстремума. Если $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — стационарная точка дважды дифференцируемой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и если в некоторой окрестности этой точки второй дифференциал

$$d^2 f(M_0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)\, dx_i\, dx_j$$

сохраняет знак при любых значениях dx_i и dx_j, не равных нулю одновременно, то функция в точке M_0 имеет экстремум. При этом если $d^2 f(M_0) > 0$, то этот экстремум — минимум, если $d^2 f(M_0) < 0$ — максимум.

Пример 10.35. Исследовать на экстремум функцию $w = x^4 + y^2 + z^2 - 2z$.

Решение: функция дифференцируема на всей плоскости. Стационарные точки определяются из системы

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} = 4x^3 = 0; \\ \frac{\partial w}{\partial y} = 2y = 0; \\ \frac{\partial w}{\partial z} = 2z - 2 = 0, \end{cases}$$

из которой видно, что единственная стационарная точка $M_0(0;\ 0;\ 1)$. Вычислим все частные производные второго порядка: $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 12x^2$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 2$, $\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 2$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 0$. Тогда второй дифференциал в стационарной точке равен

$$d^2w = 12x^2(dx)^2 + 2(dy)^2 + 2(dz)^2 + 2\cdot 0\cdot dx\,dy + 2\cdot 0\cdot dx\,dz + 2\cdot 0\cdot dy\,dz =$$

$$= 2\cdot((dz)^2 + (dy)^2) \geq 0,$$

следовательно, точка M_0 — точка минимума.

Условный экстремум

Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена в области $D \subset R^n$, а $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — внутренняя точка этой области. Точка M_0 называется точкой *условного минимума (максимума)* функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если существует окрестность этой точки $U_\delta(M_0)$, такая, что для всех точек $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \dot{U}_\delta(M_0)$ и удовлетворяющих условиям $\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ при всех $k = 1, 2, \ldots, m$ выполняется $f(M) > f(M_0)$ или, соответственно, $f(M) < f(M_0)$.

Если ставится задача исследовать на экстремум функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при условиях $\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, то составляют так называемую *функцию Лагранжа* $L = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, в которой числа λ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, называются *множителями Лагранжа.*

Функцию Лагранжа рассматривают как функцию $n+m$ переменных $L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$. Необходимые и достаточные условия условного экстремума функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ совпадают с соответствующими условиями безусловного экстремума функции Лагранжа.

Необходимое условие экстремума. Если функция

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$$

дифференцируема в окрестности точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0)$ и имеет в этой точке экстремум (максимум или минимум), то

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i}(M_0) = 0; \\ \varphi_k(M_0) = 0 \end{cases}$$

при всех $i = 1, 2, \ldots, n$ и $k = 1, 2, \ldots, m$.

Достаточные условия экстремума. Если $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0)$ — стационарная точка дважды дифференцируемой функции

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$$

и если в некоторой окрестности этой точки второй дифференциал $d^2 f(M_0) > 0$, то функция Лагранжа имеет в этой точке минимум, а функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — условный минимум.

Если в некоторой окрестности точки M_0 второй дифференциал $d^2 f(M_0) < 0$, то функция Лагранжа имеет в этой точке максимум, а функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — условный максимум.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.20 Если функция Лагранжа не имеет в точке M_0 экстремума, то это еще не означает, что у функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ при условиях $\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, нет экстремума.

Условный экстремум функции двух переменных. Для функции двух переменных $f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$ функция Лагранжа имеет вид $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$.

Стационарные точки определяются из системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0; \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Если $M_0(x_0; y_0)$ — стационарная точка, соответствующая множителю Лагранжа λ_0, то функция $f(x, y)$ имеет в точке M_0 условный экстремум, если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_0) & \varphi'_y(M_0) \\ \varphi'_x(M_0) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, y_0, \lambda_0) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \varphi'_y(M_0) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, \lambda_0) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Функция $f(x, y)$ имеет в точке M_0 условный минимум, если $\Delta < 0$, и условный максимум, если $\Delta > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.21 Если определитель $\Delta = 0$, то экстремум может быть, а может и не быть.

Наименьшее и наибольшее значения функции нескольких переменных

Теорема 10.11. Непрерывная функция $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданная на ограниченном и замкнутом множестве, принимает на этом множестве наибольшее и наименьшее значения.

Наибольшее и наименьшее значения могут достигаться в точках экстремума и на границе области, поэтому для их отыскания поступают следующим образом:

- определяют стационарные точки функции и вычисляют значения функции в тех стационарных точках, которые содержатся внутри заданного множества;
- вычисленные значения функции сравнивают между собой и со значениями функции на границе области. Среди них находят наибольшее и наименьшее.

Пример 10.36. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$ в области, ограниченной координатными осями и прямой $x + y = 3$.

Решение: стационарные точки функции определяются из системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - y - 1 = 0; \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y - x - 1 = 0. \end{cases}$$

Решение системы $\begin{cases} x = 1; \\ y = 1. \end{cases}$ Стационарная точка $M_1(1;\ 1)$ находится внутри заданной области (рис. 10.7). Значение функции в этой точке равно $z(M_1) = -1$.

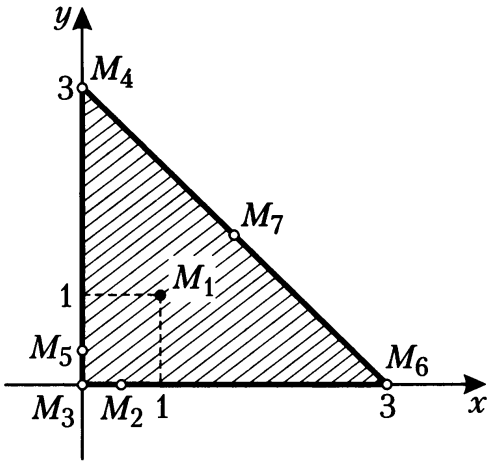


Рис. 10.7

Граница области задается следующими уравнениями:

1. $x = 0,\ 0 \le y \le 3$. На этой части границы $z = y^2 - y$ — функция одной переменной. Так как $z' = 2y - 1 = 0$ при $y = 0{,}5$, то наименьшее и наибольшее значения функции могут быть в точке $M_5(0;\ 0{,}5)$, а также в граничных точках $M_3(0;\ 0)$ и $M_4(0;\ 3)$. Вычислим значения во всех этих точках: $z(M_5) = -0{,}25$, $z(M_3) = 0$, $z(M_4) = 6$.
2. $y = 0,\ 0 \le x \le 3$. На этой части границы $z = x^2 - x$. Так как $z' = 2x - 1 = 0$ при $x = 0{,}5$, то наименьшее и наибольшее значения функции могут быть в точке $M_2(0{,}5;\ 0)$, а также в граничных точках $M_3(0;\ 0)$ и $M_6(3;\ 0)$. Вычислим значения во всех этих точках: $z(M_2) = -0{,}25$, $z(M_6) = 6$.
3. $y = 3 - x,\ 0 \le x \le 3$. На этой части границы $z = 2x^2 + (3-x)^2 - 3x - 3$. Так как $z' = 4x - 2(3-x) - 3 = 6x - 9 = 0$ при $x = 1{,}5$, то наибольшее и наименьшее значения могут быть в точках $M_7(1{,}5;\ 1{,}5)$ и в граничных точках $M_4(0;\ 3)$ и $M_6(3;\ 0)$. Вычислим $z(M_7) = -0{,}75$.

Следовательно, наибольшее значение функции $z_{наиб} = 6$ в точках $M_4(0;\ 3)$ и $M_6(3;\ 0)$, а наименьшее $z_{наим} = -1$ — в стационарной точке $M_1(1;\ 1)$.

Пример 10.37. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy$ в области $x^2 + y^2 \le 1$.

Решение: вычислим частные производные

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = y = 0; \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x = 0. \end{cases}$$

Стационарная точка $M_1(0;\ 0)$ принадлежит области $x^2 + y^2 \le 1$ (рис. 10.8). Значение функции в этой точке $z(M_1) = 0$.

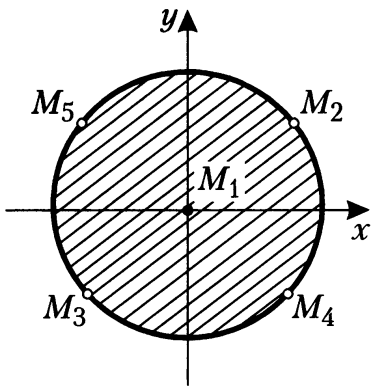


Рис. 10.8

Исследование функции на границе области — задача условного экстремума функции $z = xy$ при условии $x^2 + y^2 = 1$. Функция Лагранжа имеет вид $L(x,\ y,\ \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. Стационарные точки определяются из системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = y + 2\lambda x = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = x + 2\lambda y = 0; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим: $(y - x) - 2\lambda(y - x) = 0$, $(y - x)(1 - 2\lambda) = 0$. Подставляя $y = x$ в третье уравнение, получим точки $M_2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $M_3\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Не выясняя, будет ли в этих точках экстремум, вычислим $z(M_2) = z(M_3) = \dfrac{1}{2}$.

При $\lambda = \dfrac{1}{2}$ $y = -x$. Подставляя это значение в третье уравнение, получим точки $M_4\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $M_5\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Значения функции в этих точках $z(M_4) = z(M_5) = -\dfrac{1}{2}$.

Следовательно, наибольшее значение функции $z_{\text{наиб}} = \dfrac{1}{2}$ в точках $M_2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $M_3\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, а наименьшее $z_{\text{наим}} = -\dfrac{1}{2}$ — в стационарных точках $M_4\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $M_5\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Пример 10.38. На эллипсе $x^2 + 9y^2 = 9$ найти точки, наиболее и наименее удаленные от прямой $4x + 9y = 16$.

Решение: расстояние от точки до прямой вычисляется по формуле

$$r = \left| \frac{4}{\sqrt{97}} x + \frac{9}{\sqrt{97}} y - \frac{16}{\sqrt{97}} \right|.$$

Все точки эллипса и начало координат находятся по одну сторону от прямой (рис. 10.9), значит, под знаком модуля положительное число.

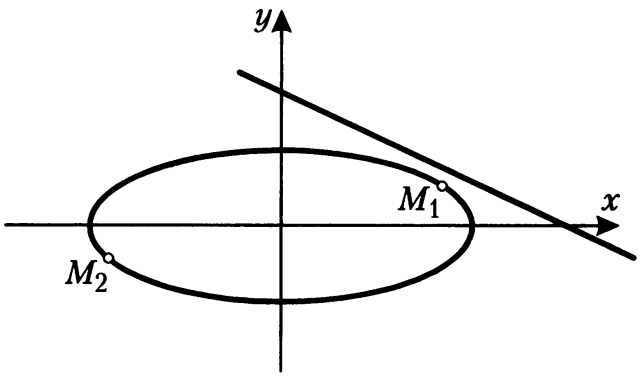


Рис. 10.9

Исследуем на условный экстремум функцию $z(x, y) = -\frac{4}{\sqrt{97}}x - \frac{9}{\sqrt{97}}y + \frac{16}{\sqrt{97}}$ при условии $x^2 + 9y^2 = 9$. Функция Лагранжа имеет вид

$$L(x, y, \lambda) = -\frac{4}{\sqrt{97}}x - \frac{9}{\sqrt{97}}y + \frac{16}{\sqrt{97}} + \lambda(x^2 + 9y^2 - 9).$$

Для стационарных точек справедлива система

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = -\dfrac{4}{\sqrt{97}} + 2\lambda x = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -\dfrac{9}{\sqrt{97}} + 18\lambda y = 0; \\ x^2 + 9y^2 = 9. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений системы найдем $x = \frac{2}{\sqrt{97}\lambda}$, $y = \frac{1}{2\sqrt{97}\lambda}$. Подставив эти выражения в третье уравнение, найдем множители Лагранжа $\lambda = \pm\frac{5}{6\sqrt{97}}$ и определим $x = \pm\frac{12}{5}$ и $y = \pm\frac{3}{5}$. Стационарные точки $M_1\left(\frac{12}{5}; \frac{3}{5}\right)$ при $\lambda = \frac{5}{6\sqrt{97}}$ и $M_2\left(-\frac{12}{5}; -\frac{3}{5}\right)$ при $\lambda = -\frac{5}{6\sqrt{97}}$.

Используем достаточные условия условного экстремума. Поскольку $\varphi'_x = 2x$, $\varphi'_y = 18y$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 18\lambda$, а $\frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial y} = 0$, то определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 18y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 18y & 0 & 18\lambda \end{vmatrix} = -648\lambda y^2 - 72\lambda x^2 = -72\lambda(9y^2 + x^2).$$

Следовательно, функция имеет условный максимум при $\lambda = -\frac{5}{6\sqrt{97}} < 0$ и условный минимум при $\lambda = \frac{5}{6\sqrt{97}} > 0$. Следовательно, точка $M_1\left(\frac{12}{5}; \frac{3}{5}\right)$ наименее удалена от данной прямой, а точка $M_2\left(-\frac{12}{5}; -\frac{3}{5}\right)$ — наиболее удалена.

Задачи для типовых расчетов

Задача 10.1. Вычислите частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

1. $z = \left(\sin\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^{\cos\frac{x}{y}} - \frac{1}{4}\arccos\frac{\sqrt{y}}{2y-x}$.
2. $z = (\ln(x-y))^{\operatorname{tg}\frac{y}{x}} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{y}}$.
3. $z = (\ln(y-2x))^{\sin\frac{y}{x}} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{x+2y}$.
4. $z = \left(\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^{\sin(xy)} - \arcsin\left(\frac{x+y}{\sqrt{x}}\right)$.
5. $z = (\sin xy)^{\operatorname{tg}\frac{x}{y}} + \arcsin\sqrt{1-xy}$.
6. $z = \left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)^{\cos xy} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{y}-1}$.
7. $z = \left(\operatorname{tg}\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^{\ln(x-y)} + \arcsin\frac{\sqrt{x}}{2x+y}$.
8. $z = (\sin\sqrt{xy})^{\ln(x^2+y^2)} + \arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$.
9. $z = [\ln\sqrt{y-x}]^{\sin\sqrt{y-x}} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{y3}}{2x}$.
10. $z = (\cos xy)^{\ln(x^2+y)} + \arccos\sqrt{xy}$.
11. $z = (\operatorname{tg} xy)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{1-y}} + \arccos\frac{\sqrt{y}+3x}{2y-x}$.
12. $z = \left(\operatorname{ctg}\frac{x}{y}\right)^{\ln(x^3-y^3)} - \arccos\sqrt{xy}$.
13. $z = \left(\sin\frac{2x}{y}\right)^{\ln\frac{x}{y}} - \operatorname{arctg}(x-\sqrt{y})$.
14. $z = \left(\operatorname{tg}\frac{y}{x}\right)^{\cos(xy)} - \frac{1}{4}\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}$.
15. $z = \left(\cos\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^{\operatorname{tg} xy} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}+x}$.
16. $z = (\ln(x^2-y^2))^{\sin xy} + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x-y}}$.
17. $z = (\operatorname{tg}\sqrt{xy})^{\ln\frac{x}{y}} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y^2}$.
18. $z = [\cos(xy)]^{\ln\sqrt{x^2-y^2}} - \operatorname{tg}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{xy}$.
19. $z = [\operatorname{tg}(1-xy)]^{\ln\frac{y}{x}} - \arcsin\frac{yx}{1-\sqrt{x}}$.
20. $z = \left(\operatorname{ctg}\frac{y}{x}\right)^{\ln(x^2-y^3)} + \operatorname{arctg}\left(\frac{x\sqrt{y}}{x+y}\right)$.
21. $z = [\operatorname{tg}(x-\sqrt{xy})]^{\sin\frac{y}{x}} - \operatorname{arctg}\frac{x-2y}{3\sqrt{x}}$.
22. $z = (\operatorname{tg} xy)^{\cos\frac{x}{y}} + \arcsin(x\sqrt{y-3x})$.

23. $z=\left(\sin\frac{y}{x}\right)^{\cos(xy)}+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2\sqrt{xy}}$.

24. $z=(\ln(x+y))^{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}+\operatorname{arctg}(x\sqrt{y-x})$.

25. $z=\left(\operatorname{tg}\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^{\sin(xy)}-\arccos\frac{x+y}{2\sqrt[3]{y}}$.

26. $z=\left(\operatorname{ctg}\frac{y}{x}\right)^{\cos(x+y)}+\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{x-y}}\right)$.

27. $z=\left(\operatorname{ctg}\frac{y}{2x}\right)^{\ln\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)}-\arcsin\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{2x}$.

28. $z=(\cos yx)^{\ln^2\left(\frac{x}{y}\right)}+\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x+y}}\right)$.

29. $z=(\cos(xy))^{\operatorname{tg}(xy)}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{xy}}{2x-3y}$.

30. $z=(\ln(x-y))^{\sin^2\frac{x}{y}}+\operatorname{arctg}\frac{2x+y}{\sqrt{x}}$.

Задача 10.2. Оцените абсолютную и относительную погрешности при вычислении значения функции $z(x, y)$ в точке $(x; y)$.

1. $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, $x=1\pm0{,}2$, $y=1\pm0{,}03$.
2. $z=\frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{y}}$, $x=7\pm0{,}1$, $y=9\pm0{,}1$.
3. $z=x^y$, $x=2\pm0{,}1$, $y=3\pm0{,}3$.
4. $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=3\pm0{,}1$, $y=4\pm0{,}2$.
5. $z=\sin x\cdot\cos y$, $x=30°\pm2°$, $y=60°\pm1°$.
6. $z=\sqrt[3]{x^2+y}$, $x=4\pm0{,}01$, $y=11\pm0{,}02$.
7. $z=\ln\frac{x}{y}$, $x=e\pm0{,}1$, $y=1\pm0{,}01$.
8. $z=\sqrt[3]{2x^2+y}$, $x=2\pm0{,}02$, $y=1\pm0{,}03$.
9. $z=\frac{x}{\sqrt{y+1}}$, $x=2\pm0{,}01$, $y=3\pm0{,}05$.
10. $z=\sin^2 x\cdot\operatorname{tg} y$, $x=\frac{\pi}{2}\pm0{,}02$, $y=\frac{\pi}{4}\pm0{,}03$.
11. $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=4\pm0{,}05$, $y=3\pm0{,}07$.
12. $z=(x+y)e^{xy}$, $x=1\pm0{,}2$, $y=1\pm0{,}01$.
13. $z=x\ln\frac{y}{x}$, $x=1\pm0{,}2$, $y=e\pm0{,}1$.
14. $z=e^y\cdot\sin x$, $x=\frac{\pi}{2}\pm0{,}01$, $y=1\pm0{,}02$.
15. $z=\sqrt{x^2+2xy}$, $x=2\pm0{,}01$, $y=15\pm0{,}2$.
16. $z=\frac{y}{x}-\frac{x}{y}$, $x=3\pm0{,}3$, $y=4\pm0{,}4$.
17. $z=\sqrt[3]{y^2-x^3}$, $x=2\pm0{,}05$, $y=4\pm0{,}08$.

18. $z=\sin^2(x-y)$, $x=60°\pm1°$, $y=30°\pm2°$.
19. $z=\sin x\cos 2y$, $x=\frac{\pi}{2}\pm0{,}05$, $y=\frac{\pi}{6}\pm0{,}1$.
20. $z=y^x$, $x=2\pm0{,}01$, $y=5\pm0{,}02$.
21. $z=\operatorname{tg}x\cdot\cos y$, $x=45°\pm1°$, $y=60°\pm0{,}5°$.
22. $z=\sqrt{2x+y^2}$ $x=2\pm0{,}01$, $y=4\pm0{,}02$.
23. $z=e^{xy}$, $x=5\pm0{,}1$, $y=0\pm0{,}05$.
24. $z=\sqrt{x^2-y^2}$, $x=5\pm0{,}1$, $y=4\pm0{,}05$.
25. $z=y\ln\frac{x}{y}$, $x=1\pm0{,}05$, $y=e\pm0{,}1$.
26. $z=e^x\cos y$, $x=1\pm0{,}05$, $y=\frac{\pi}{4}\pm0{,}01$.
27. $z=\sqrt{2x^2-3y^2+3}$, $x=3\pm0{,}1$, $y=2\pm0{,}2$.
28. $z=x^y$, $x=3\pm0{,}1$, $y=2\pm0{,}4$.
29. $z=\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}y$, $x=\frac{\pi}{4}\pm0{,}01$, $y=\frac{\pi}{4}\pm0{,}1$.
30. $z=\sin x+\cos y$, $x=\frac{\pi}{6}\pm0{,}1$, $y=\frac{\pi}{3}\pm0{,}2$.

Задача 10.3. Напишите формулы для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial s}$ для функции $u(t,\ s)$.

1. $u=e^{\frac{x+y}{z}}+\operatorname{arctg}x^3y^2z$, если $x=x(t,\ s)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$.
2. $u=\sin(x-y+z)+2\cdot\frac{z-x}{y}$, если $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t,\ s)$.
3. $u=\frac{1}{4}\cos\left(\frac{x+y}{z}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}}$, если $x=x(t)$, $y=y(t,\ s)$, $z=z(s)$.
4. $u=2\operatorname{tg}\left(\frac{z}{x-y}\right)+x^3y^4z^2$, если $x=x(s)$, $y=y(t,\ s)$, $z=z(t)$.
5. $u=3\cdot\frac{x-y}{2z}-\arcsin(x+y-z)$, если $x=x(s)$, $y=y(t)$, $z=z(t,\ s)$.
6. $u=e^{\frac{z}{x+y}}+\ln(z-x)$, если $x=x(t,\ s)$, $y=y(s)$, $z=z(t)$.
7. $u=\operatorname{arctg}\frac{z}{2x}+\sin(x+y)$, если $x=x(t,\ s)$, $y=y(s)$, $z=z(t,\ s)$.
8. $u=5^{\frac{z}{x-y}}+\arccos\left(\frac{x+2y}{z}\right)$, если $x=x(t)$, $y=y(s)$, $z=z(s,\ t)$.
9. $u=e^{\frac{2x-y}{\sqrt{z}}}+\operatorname{tg}\frac{z}{x}$, если $x=x(s)$, $y=y(t)$, $z=z(s)$.

10. $u=\sin\left(\frac{z}{x+y}\right)-\frac{1}{2}\ln(x+y-z)$, если $x=x(t)$, $y=y(s)$, $z=z(s,\ t)$.

11. $u=\ln(\sqrt{x}-\sqrt{y}+z)-\sin(x-z+y)$, если $x=x(t)$, $y=y(s)$, $z=z(t,\ s)$.

12. $u=e^{\frac{x+27}{y}}+\cos\left(\frac{z}{y-x}\right)$, если $x=x(t,\ s)$, $y=y(t)$, $z=z(t,\ s)$.

13. $u=\frac{z}{3^{x-y}}+\ln(x+y-z)$, если $x=x(t,\ s)$, $y=y(t,\ s)$, $z=z(t,\ s)$.

14. $u=\operatorname{tg}\left(\frac{x+y}{z}\right)-\frac{1}{4}e^{y-zx}$, если $x=x(t)$, $y=y(t,\ s)$, $z=z(s)$.

15. $u=\ln(2x-\sqrt{z})+\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, если $x=x(s)$, $y=y(t)$, $z=z(t,\ s)$.

16. $u=ye^{z-x}+\arccos\frac{z}{x-y}$, если $x=x(s)$, $y=y(t,\ s)$, $z=z(t,\ s)$.

17. $u=\frac{1}{5}\ln(y-3z)+\arcsin\frac{x}{2z}$, если $x=x(s)$, $y=y(t)$, $z=z(t,\ s)$.

18. $u=\frac{x^3y^2}{z}-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{y}{x+z}$, если $x=x(t,\ s)$, $y=y(s)$, $z=z(t)$.

19. $u=e^{x-y+z}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{z}{x-y}$, если $x=x(s)$, $y=y(t)$, $z=z(t,\ s)$.

20. $u=\left(\frac{1}{3}\right)^{z-2x}+\cos\left(\frac{y+x}{2z}\right)$, если $x=x(s)$, $y=y(t,\ s)$, $z=z(t,\ s)$.

21. $u=\ln(x^2-y^2+z)-\sin(x+y-z^2)$, если $x=x(s)$, $y=y(t,\ s)$, $z=z(t,\ s)$.

22. $u=\cos\left(\frac{xz}{y-x}\right)-e^{\frac{x+z}{y}}$, если $x=x(s)$, $y=y(t)$, $z=z(t,\ s)$.

23. $u=\frac{1}{4}\sin\left(\frac{y+x}{z}\right)+z\ln(\sqrt{x}-\sqrt{y})$, если $x=x(s)$, $y=y(t,\ s)$, $z=z(t)$.

24. $u=x\cos(yz)-\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{z^3}{x-y^2}\right)$, если $x=x(t)$, $y=y(t,\ s)$, $z=z(s)$.

25. $u=\frac{1}{y}\operatorname{tg}\left(\frac{z}{x}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{z^2-x}{y}}$, если $x=x(t,\ s)$, $y=y(t,\ s)$, $z=z(t)$.

26. $u=\frac{e^{2y-x}}{z}+\cos\left(\frac{z-x}{y}\right)$, если $x=x(t,\ s)$, $y=y(t)$, $z=z(s)$.

27. $u=\frac{\sin(2x-y)}{z}-2^{\frac{3z}{y-x}}$, если $x=x(t,\ s)$, $y=y(t,\ s)$, $z=z(t)$.

28. $u=\frac{z^2}{\cos(xy)}-e^{z-x+y}$, если $x=x(s)$, $y=y(t)$, $z=z(t,\ s)$.

29. $u=\frac{1}{2}\ln(x-y+z^2)+\frac{\sin(x+2y)}{2z}$, если $x=x(t)$, $y=y(t,\ s)$, $z=z(t,\ s)$.

30. $u=\frac{1}{4}e^{x-y+z^2}+\cos\frac{z-x}{2y}$, если $x=x(t,\ s)$, $y=y(s)$, $z=z(t)$.

Задача 10.4. Вычислите все частные производные второго порядка для функции $u(x,\ y,\ z)$.

1. $u=x^3y^2z+z^4y^3x+y^4x^2z$.
2. $u=\ln(x+y^2+z)+z^4x^5y^3$.
3. $u=e^{x^2y-z^3}+\frac{1}{5}x^5y^6z^7$.
4. $u=z\cdot\sin(xy)+\frac{xy}{1-z}$.
5. $u=x^{y^z}+x^6y^7z^8$.
6. $u=xe^{yz}-\cos(x+y-z)$.
7. $u=(\cos yx)^z-\frac{z^2}{x-y}$.
8. $u=(\sin yz)^{x^2}-\frac{\sqrt{y-x}}{1-z}$.
9. $u=\ln(xy-z^2)+\frac{1}{2}\sqrt{x-\sqrt{y-\sqrt{z}}}$.
10. $u=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{y+z}\right)+\sqrt{x^2-yz}$.
11. $u=\frac{xy}{y-2z^2}-\sin(xy-z^2)$.
12. $u=\cos^2(xyz)-\frac{1}{5}\frac{z}{x-y}$.
13. $u=x^{yz}+y^{xy}+z^{xy}$.
14. $u=\sin^2(x+yz)+2^x\cdot3^y\cdot4^z$.
15. $u=\sin^2(xy-z)+\frac{z-\sqrt{x}}{2y}$.
16. $u=\cos^2(zxy)+z^{xy}$.
17. $u=2^{xyz}-\sin\left(\frac{\sqrt{x-y}}{z}\right)$.
18. $u=\cos^2(\sqrt{x}-yz)-x^{yz}$.
19. $u=\frac{1}{2}\sin^2(1-xyz)+\frac{x}{y-3z}$.
20. $u=z^{x^y}+\sqrt{x-\sqrt{y-\sqrt{z}}}$.
21. $u=\sqrt{x^2-y^3z^4}-4^{xyz}$.
22. $u=3\cos^2(xyz)-\frac{\sqrt{z}}{x-2y}$.
23. $u=(\cos z)^{xy}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x-y}}{z}$.
24. $u=z^{y^x}-\sqrt{\sin(y\sqrt{x}-z)}$.
25. $u=\frac{\operatorname{tg}(xy)}{1-x}-\frac{2z-y}{\sqrt{x}}$.
26. $u=2x^{\sin\frac{y}{x}}-\frac{\sqrt{y}-\sqrt[3]{x}}{3z}$.
27. $u=x\cos(yz^2)-\frac{\sqrt{x-2y}}{\sqrt[3]{z}}$.
28. $u=z^2\sin\left(\frac{y}{x}\right)-\sqrt[3]{1-xyz}$.
29. $u=\cos(xy-z^2)-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y-z^2}}$.
30. $u=\frac{x-y^2}{3\sqrt{z}}-\sin^2(xyz)$.

Задача 10.5. Вычислите дифференциал третьего порядка d^3u для функции $u(x,\ y)$.

1. $u=(x+y)e^{x+y}$.
2. $u=(x+2y)e^{x-y}$.
3. $u=x^4y^5+\frac{x}{y}$.
4. $u=y\sin(2x-y)$.

5. $u = x^2 e^{xy}$.
6. $u = e^{x-y} x$.
7. $u = (x-2y)\sin(xy)$.
8. $u = \sin^2(x-2y)$.
9. $u = \cos(x-y)x$.
10. $u = \dfrac{x}{y}$.
11. $u = \dfrac{y^2}{3x}$.
12. $u = \dfrac{x}{x-y}$.
13. $u = e^{x^2+y^2}$.
14. $u = (x-y)e^{x^2+y}$.
15. $u = e^{x-y}(x-2y^2)$.
16. $u = \cos^2(x-2y)$.
17. $u = xy^6 - \cos(x^4 y^3)$.
18. $u = \sin^2(3x+y)$.
19. $u = (x+y)e^{\frac{x}{y}}$.
20. $u = (x+y)e^{\frac{2y}{x}}$.
21. $u = (x-y)e^{\frac{x}{y}}$.
22. $u = \dfrac{2x}{y-1}$.
23. $u = \sin\left(\dfrac{x}{y}\right)(x^2+y^2)$.
24. $u = \cos\left(\dfrac{y}{x}\right)(x^2-y^2)$.
25. $u = (2x+y)\cos(xy)$.
26. $u = 3xy\sin(x-y)$.
27. $u = y\ln(x+y)$.
28. $u = e^{2x-3y}(x-4y)$.
29. $u = \dfrac{1}{3}\sin^2(xy)$.
30. $u = \dfrac{y}{x} + x^4\sqrt{y}$.

Задача 10.6. Вычислите y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявной зависимостью.

1. $y = 2x\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}$.
2. $y = 3x^2\sqrt{1-\sin(xy)}$.
3. $y = \sqrt{y-x}\sin(xy)$.
4. $y = \sin(xy)\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$.
5. $y = \dfrac{\mathrm{tg}\,x^2 y^3}{1-x}$.
6. $y = \dfrac{\sin(x-y)}{x-y}$.
7. $y = e^{xy}\sqrt{x^2+2y^2}$.
8. $y = 2^{xy}\sqrt{x^2-y^2}$.
9. $y = 3x^2\sin(yx)$.
10. $y = \dfrac{1}{2}\cdot 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{\sqrt{y}}{x}$.
11. $y = \dfrac{x}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{y}\right)$.
12. $y = \dfrac{2}{x}\,\mathrm{arcctg}\left(\dfrac{x}{1-y}\right)$.
13. $y = x^2\,\mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x}$.
14. $y = e^y\,\mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x}$.
15. $y = \dfrac{1}{2}x^2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}$.
16. $y = e^{xy} + x^2$.
17. $y = \sqrt{x^2-y^2}\cos y$.
18. $y = e^x\sqrt{y^2-x^2}$.
19. $y = \mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{y-1}\right) + x^2$.
20. $y = \cos\left(\dfrac{y}{x}\right) + \sqrt{x+y}$.

21. $y = x^y \sqrt{x^2 - y^2}$.
22. $y = x^2 \ln(x - y)$.
23. $y = x \cdot 2\ln(x - y)$.
24. $y = \sqrt{x}\arcsin\sqrt{x - y}$.
25. $y = \sqrt[3]{x - y} \cdot e^{\frac{y}{x}}$.
26. $y = \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\sqrt{y - x}$.
27. $y = 4^{xy}\sqrt{x + y}$.
28. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{y}}{1 - x}\right)$.
29. $y = \frac{1}{3}x^2 e^{\frac{y}{x}}$.
30. $y = \frac{1}{\sqrt{x - y}}\sin(1 - xy)$.

Задача 10.7. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функции $z(x, y)$, заданной неявно.

1. $\ln(x + y + z) = x + y + z$.
2. $x + y + z = e^z$.
3. $\sin(x + y + z) = x^2 + z$.
4. $\sin(x - y + z) = x^2 + y + 3z$.
5. $e^{x+y+z} = z - y$.
6. $2^{x-y+2z} = z - y + x$.
7. $\ln(x - 2y + z) = x - z$.
8. $\sin(x + z) = 3z + x - y$.
9. $x - y + 3z = e^{xyz}$.
10. $e^{z-x} = 2z + x^2 + y^2$.
11. $\ln(x - y - z) = 2x - y + z$.
12. $\sin(x - y + z) = z + 2y - x$.
13. $\cos(z - x) = y + 3z - x$.
14. $\sin(2x - y + z) = x + y - z$.
15. $\cos(x - y^2 + z) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+z}$.
16. $e^{\frac{xz}{y}} = x + y - z$.
17. $\frac{1}{5^{z-y}} = x^2 - y - z$.
18. $\ln(y - z^2 x) = \frac{1}{z - y + 4x}$.
19. $3^{x-y+z} = y - 2x + 3z$.
20. $4^{y-z} = x^2 + y^2 + z^2$.
21. $\ln(z + x - y) = z^2 + y^2 - x^2$.
22. $z = 2y - x + \sin(4x - y^2 + z)$.
23. $3x - y + z = 4^{x+y^2-2z}$.
24. $e^{x^2+y+2z} = z^2 + y - x$.
25. $\ln(x + 2y - z) = x + 3y - 2z^2$.
26. $\cos(y^2 + z) + x^2 - z^3 + y = 0$.
27. $\ln(y - z - 2x) = x - y^2 + 3z$.
28. $\ln(y - x + z) = 5x + y - 2z$.
29. $z = y - 2x + \sin(zx)$.
30. $\cos(y + 2x - 3z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Задача 10.8. Вычислите $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ для функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, заданных системой уравнений.

1. $\begin{cases} u + v = x; \\ u - yv = 0. \end{cases}$
2. $\begin{cases} xv - u = y; \\ u - yv = 0. \end{cases}$
3. $\begin{cases} u - v = 2x; \\ ux + vu = 0. \end{cases}$
4. $\begin{cases} xu - yv = 0; \\ yu + xv = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} v-u=y; \\ ux+yv=0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} ux+vy=2; \\ u-vx=y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} ye^{\frac{u}{x}}=1; \\ xe^{\frac{v}{y}}=2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} xe^{\frac{u}{y}}=1; \\ ye^{\frac{v}{x}}=2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} e^{\frac{u}{x}}y=x; \\ e^{\frac{v}{y}}x=1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \sin(ux)=y; \\ \cos(vy)=2x. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \sin(ux)=y; \\ \cos(vy)=x. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \cos(x-u)=yv; \\ \sin(v-y)=xu. \end{cases}$

13. $\begin{cases} ux-vy=0; \\ 2^{\frac{u}{x}}=3\dfrac{v}{y}. \end{cases}$

14. $\begin{cases} vx+uy=2; \\ \dfrac{x}{u}-\dfrac{y}{v}=3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} xu+yv=1; \\ \dfrac{u}{y}-\dfrac{v}{x^2}=0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2^{u-x}=3y; \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{u}{x}}=v-y. \end{cases}$

17. $\begin{cases} e^{\frac{u}{x}}-vy=1; \\ e^{\frac{u}{y}}-vx=2. \end{cases}$

18. $\begin{cases} ux+vy=0; \\ \dfrac{u}{x}+\dfrac{v}{y}=1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} uy-vx=2; \\ \cos(ux)=\sin(vy). \end{cases}$

20. $\begin{cases} u-xv=2; \\ v+yu=3. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2xu-v=y; \\ yv-x=1. \end{cases}$

22. $\begin{cases} uy-vx=1; \\ e^{\frac{u}{x}}-e^{\frac{y}{v}}=x. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \sin(xu)=3y; \\ e^{\frac{v}{y}}=x. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \cos(xu)=vy; \\ \sin(y-v)=\dfrac{u}{x}. \end{cases}$

25. $\begin{cases} e^{\frac{u}{x}}y=x; \\ e^{\frac{y}{v}}x=1. \end{cases}$

26. $\begin{cases} e^{\frac{v}{x}}=y; \\ e^{\frac{u}{y}}=x+2. \end{cases}$

27. $\begin{cases} e^{\frac{u}{y}}=y+v; \\ e^{\frac{v}{2x}}=2x-u. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \cos(u-x)=2y; \\ \sin(vy)=x. \end{cases}$

29. $\begin{cases}\sin(xv)=1+y;\\ \cos(uy)=v-x.\end{cases}$ 30. $\begin{cases}2^{u-x}=0;\\ 2^{vy}=x-u.\end{cases}$

Задача 10.9. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности в точке M_0.

1. $z-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=0,\ M_0\left(1;\ 1;\ \frac{\pi}{8}\right)$.
2. $z=y\operatorname{tg}\frac{x}{a},\ M_0\left(\frac{\pi a}{4};\ a;\ a\right)$.
3. $\sin x\cdot\cos y=z,\ M_0\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4};\ \frac{1}{2}\right)$.
4. $z=e^x\cdot\cos y,\ M_0(1;\ \pi;\ -e)$.
5. $z^3-4xz+y^2-4=0,\ M_0(1;\ -2;\ 2)$.
6. $z=y+\ln\frac{x}{y},\ M_0(1;\ 1;\ 1)$.
7. $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ M_0\left(1;\ 1;\ \frac{\pi}{4}\right)$.
8. $z=\ln(x^2+y^2),\ M_0(1;\ 0;\ 0)$.
9. $x(y+z)(xy-z)=-8,\ M_0(2;\ 1;\ 3)$.
10. $z=x^2+y^2,\ M_0(1;\ 2;\ 5)$.
11. $\frac{1}{3}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})=1,\ M_0(1;\ 1;\ 1)$.
12. $2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}=8,\ M_0(2;\ 2;\ 1)$.
13. $z-2x+\ln\frac{y}{x}+1=0,\ M_0(1;\ 1;\ 1)$.
14. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1,\ M_0(0;\ 0;\ 4)$.
15. $z=1+x^2+y^2,\ M_0(1;\ 1;\ 3)$.
16. $z=e^{\frac{x}{y}}+e^{\frac{x}{z}}-y,\ M_0(0;\ 1;\ 1)$.
17. $x^2+y^2-z^2=-1,\ M_0(2;\ 2;\ 3)$.
18. $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y},\ M_0\left(1;\ 1;\ \frac{\pi}{4}\right)$.
19. $z^2+4z+x^2=0,\ M_0(0;\ 1;\ -4)$.
20. $x^2+y^2+z^2=3,\ M_0(1;\ 1;\ 1)$.
21. $x^2+y^2+z^2=169,\ M_0(3;\ 4;\ 12)$.
22. $z=x\operatorname{tg}\frac{y}{2},\ M_0\left(1;\ \frac{\pi}{2};\ 1\right)$.

23. $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$, $M_0(1;\ 1;\ 1)$.
24. $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy + yz - 2xz + 16 = 0$, $M_0(1;\ 2;\ 3)$.
25. $2x^2 + y^2 - z^2 + xy - yz + 2xz = 2$, $M_0(1;\ 0;\ 0)$.
26. $x(x-y) + y(x-z) + z(x+y) - 2 = 0$, $M_0(1;\ 0;\ 1)$.
27. $x^2 + y^2 + xy - yz + z^2 + xz = 3$, $M_0(1;\ 1;\ 0)$.
28. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 6$, $M_0(1;\ 0;\ 1)$.
29. $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 1$, $M_0(1;\ 1;\ 0)$.
30. $x^2 + y^2 - z^2 + 3xy + 3yz - 2xz = 4$, $M_0(1;\ 1;\ 3)$.

Задача 10.10. Исследуйте заданную функцию на экстремум.

1. $z = e^{x^2-y}(5 - 2x + y)$, $y > 0$, $x > 0$.
2. $z = xy^2(1 - x - y)$.
3. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.
4. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.
5. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.
6. $z = (2x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.
7. $z = x^2 + (y-1)^2$.
8. $z = (x - y + 1)^2$.
9. $z = xy\ln(x^2 + y^2)$.
10. $z = x^2 - (y-2)^2$.
11. $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.
12. $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.
13. $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.
14. $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.
15. $z = 3y^2 + (2x-1)^2$.
16. $z = e^{x+2y}(x^2 - xy + 2y^2)$.
17. $z = x^3 + y^3 - 6xy$.
18. $z = y^2x^3(4 - y - x)$.
19. $z = y^2 + x^2 - xy + 2x - y$.
20. $z = e^{x-2y}(2x + y)$.
21. $z = y^2 + 3x^2 + y - x$.
22. $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.
23. $z = 2x^2 - x + (y+1)^2$.
24. $z = x^2y(2 - x + y)$.
25. $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.
26. $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.
27. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.
28. $z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$.
29. $z = x^2 + y^2 + (x + y - 2)^2$.
30. $z = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$.

Задача 10.11. Найдите значения функции $z(x,\ y)$, заданной неявной зависимостью, в стационарных точках.

1. $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$.
2. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$.
3. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$.
4. $x^2 + 3y^2 + 4z^2 - x + y - xy + xz - 1 = 0$.
5. $2x^2 + y^2 + 2z^2 + x - y + 2z - 6xy - 3 = 0$.
6. $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + y - x + 6xy - yz - 4 = 0$.
7. $x^2 + y^2 + 4z^2 + x + 2y + 3z + xy - 2 = 0$.
8. $3x^2 + y^2 + 3z^2 + z - y + xy - 4 = 0$.
9. $4x^2 + 2y + z^2 + y + 2z - xy - xz - yz = 0$.
10. $x^2 + y^2 + 2z^2 - y - x - z + xz + 8 = 0$.

11. $x^2+10y^2-z+xz+4yz+4=0.$
12. $x^2+4z^2-x+xy+6yz+2=0.$
13. $x^2+2y^2+z^2+x-y-z+2yz=0.$
14. $2x^2+y^2+3y+z^2-x-z+3yz=0.$
15. $x^2+4y^2+z^2-2x+3y-z+yz-yx=0.$
16. $4x^2+y^2+z^2-x-y-xy-4=0.$
17. $x^2+y^2+z^2-y-z-2yz-1=0.$
18. $4x^2+y^2+2z^2+x+y+z+2=0.$
19. $x^2+y^2+4z^2-x-y+z+yz=0.$
20. $x^2+2y^2+z^2+x+y+z+xz=0.$
21. $x^2+4y^2+2z^2+x-y+2yz+1=0.$
22. $x^2+2y^2+z^2-x+y+yz+2=0.$
23. $x^2+y^2+3z^2+x+y-xz+4=0.$
24. $3x^2+2y^2+z^2+z+xy+yz+3=0.$
25. $x^2+4y^2+2z^2+x-y+z+2=0.$
26. $2x^2+y^2+3z^2+y-xz+yz-4=0.$
27. $x^2+y^2+z^2+8xz-z+4=0.$
28. $2x^2+2y^2+z^2+6yz-z+6=0.$
29. $x^2+y^2+4z^2+4xz-2z+2=0.$
30. $2x^2+2y^2+z^2+4xz+z-2=0.$

Задача 10.12. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z(x, y)$ в заданной области.

1. $z=x^3+y^3-9xy+27, 0\le x\le 4, 0\le y\le 4.$
2. $z=x-2y-3, 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le x+y\le 1.$
3. $z=x^2+y^2-12x+16y, x^2+y^2\le 25.$
4. $z=x^2+y^2+xy, |x|+|y|\le 1.$
5. $z=4x^2+y^2-2y, -1\le x\le 1, 0\le y-x\le 1, 0\le x+y\le 1.$
6. $z=x+2y, 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2,\ 0\le x+y\le 2.$
7. $z=3x+4y-2, -1\le x\le 1,\ 0\le y-x\le 1,\ 0\le x+y\le 1.$
8. $z=2x^2-y^2, x^2+y^2\le 16.$
9. $z=y^2-x^2, x^2+y^2\le 9.$
10. $z=x^2+y^2-2xy, |x|+|y|\le 1.$
11. $z=y-x, -1\le x\le 0,\ 0\le y\le 1.$
12. $z=x^2-y^2, |x|+|y|\le 2.$
13. $z=x^2+y^2+2xy, 0\le x\le 3,\ 0\le y\le 3,\ 0\le x+y\le 3.$
14. $z=2y+x, y\ge x^2,\ y-2x\le 3.$
15. $z=y^2-2x^2, x^2+y^2\ge 1,\ x^2+y^2\le 100.$
16. $z=x^2+y^2-xy+1, y\ge x^2-1,\ y\le 4.$

17. $z = 1 - x - y,\ x^2 + y^2 \le 4.$
18. $z = x - x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \le 9.$
19. $z = 5x - 3y,\ y \ge x,\ \ y \ge -x,\ \ y \le 4.$
20. $z = 2x^2 + y^2 - 4x + y,\ x^2 + 4y^2 \le 4.$
21. $z = \frac{1}{2}x^2 - y^2 + 5x - y,\ 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1.$
22. $z = 4 - 3x + 2y,\ x^2 + y^2 \le 9.$
23. $z = 2x^2 + 4y^2 - xy,\ 0 \le x \le 1,\ \ -1 \le y \le 0.$
24. $z = 10 - x - y,\ x^2 + y^2 \le 64.$
25. $z + 2 = x^2 - 5y^2,\ 0 \le x \le 2,\ \ y - x \le 0.$
26. $z - 4 = 5x + 4y,\ x^2 + y^2 \le 4.$
27. $z + 1 = x^2 + x + y^2 - 4y,\ -1 \le x \le 0,\ \ y - x \le 1.$
28. $z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \le 100.$
29. $z = x^2 + 2y^2 - x,\ x^2 + y^2 \le 100,\ \ y \ge 0.$
30. $1 - z = 3y^2 + x^2,\ 0 \le x \le 1,\ \ -1 \le y \le 0,\ \ 0 \le x - y \le 1.$

Задача 10.13

1. Данное положительное число A разложите на N положительных сомножителей так, чтобы сумма обратных их величин была наименьшей.
2. При каких размерах открытая прямоугольная ванна данной вместимости V имеет наименьшую поверхность?
3. При каких размерах открытая цилиндрическая ванна с полукруглым поперечным сечением, площадь поверхности которой равна S, имеет наибольшую вместимость?
4. На сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ найдите точку, сумма квадратов расстояний до которой от n данных точек $M_i(x_i;\ y_i;\ z_i)$, $i = 1, \ldots, n$, будет минимальной.
5. Тело состоит из прямого кругового цилиндра, завершенного прямым конусом. При данной полной поверхности тела, равной Q, определите его измерения так, чтобы объем тела был наибольшим.
6. Найдите прямоугольник данного периметра $2p$, который вращением вокруг одной из сторон образует тело наибольшего объема.
7. При каких размерах открытая цилиндрическая ванна с круглым поперечным сечением, поверхность которой равна Q, имеет наибольшую вместимость?
8. В полушар радиуса R впишите прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.
9. В данный прямой круговой конус с радиусом основания R и высотой H впишите прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.
10. Данное положительное число a разложите на три слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.
11. На плоскости даны три материальные точки, $P_1(x_1;\ y_1)$, $P_2(x_2;\ y_2)$, $P_3(x_3;\ y_3)$, с массами, равными m_1, m_2, m_3 соответственно. При каком поло-

жении точки $P(x;\ y)$ момент инерции системы относительно этой точки будет наименьшим?

12. В эллипсоид $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{9}=1$ впишите прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.
13. Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих данную сумму длины ребер $12a$, найдите параллелепипед наибольшего объема.
14. Внутри четырехугольника найдите точку, сумма квадратов расстояний до которой от вершин была бы наименьшей.
15. Из всех треугольников с основанием a и углом α при вершине найдите треугольник наибольшей площади.
16. Определите наружные размеры закрытого ящика с заданной толщиной стенок δ и внутренней емкостью V, на изготовление которого было затрачено наименьшее количество материала.
17. Найдите прямоугольный параллелепипед с длиной диагонали d, имеющий наибольший объем.
18. Из всех треугольников, вписанных в круг, найдите тот, площадь которого наибольшая.
19. Из всех прямоугольников с заданной площадью S найдите такой, периметр которого имеет наименьшее значение.
20. Из всех треугольников, имеющих данный периметр P, найдите наибольший по площади.
21. На гиперболе $x^2-y^2=4$ найти точку, наименее удаленную от точки $P(0;\ 2)$.
22. В эллипс $x^2+3y^2=12$ впишите равнобедренный треугольник с основанием, параллельным большой оси эллипса, так, чтобы площадь треугольника была наибольшей.
23. На параболе $y^2=4x$ найдите точку, наименее удаленную от прямой $x-y+4=0$.
24. Какой сектор следует вырезать из круга радиуса R, чтобы из оставшейся части можно было свернуть воронку наибольшей вместимости?
25. Тело представляет собой прямой круговой цилиндр, завершенный сверху полушаром. При каких линейных размерах это тело будет иметь наименьшую полную поверхность, если объем его равен V?
26. На параболе $y=2x^2+1$ найдите точку, наименее удаленную от точки $P(10;\ 0)$.
27. Найдите прямоугольный треугольник наибольшей площади, если сумма его катета и гипотенузы постоянна.
28. В шар радиуса R впишите цилиндр наибольшего объема.
29. В прямой круговой конус с углом 2α в осевом сечении и радиусом основания R впишите цилиндр с наибольшей полной поверхностью.
30. Найдите наименьшее значение суммы m-й и n-й степеней ($m>0,\ \ n>0$) двух положительных чисел, произведение которых постоянно и равно a.

ГЛАВА 11 Ряды

Числовой ряд. Сходимость числового ряда

Пусть задана числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Построим новую последовательность чисел $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ по следующему правилу:

$$S_1 = a_1;\ S_2 = a_1 + a_2;\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3;\ \ldots;\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Пара последовательностей, заданная $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и построенная $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, называется *числовым рядом* и обозначается $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. При этом члены последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a_1, a_2, ..., a_n называются *членами ряда*. Последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *последовательностью частичных сумм ряда*, а ее члены: S_1, S_2, ..., S_n — *частичными суммами ряда.*

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм, то есть существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. В противном случае ряд называется *расходящимся*. Конечное число S называется *суммой сходящегося ряда.*

Пример 11.1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ и в случае его сходимости вычислить сумму ряда.

Решение: если представить члены ряда в виде суммы двух слагаемых:

$$a_n = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)};\ a_{n-1} = \frac{1}{2(2n-3)} - \frac{1}{2(2n-1)};\ \ldots;\ a_3 = \frac{1}{10} - \frac{1}{14};$$

$$a_2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{10};\ a_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6},$$

то n-я частичная сумма ряда может быть записана в виде

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}\right) = \frac{1}{2}$. Ряд сходится, и его сумма равна $\frac{1}{2}$.

Необходимый признак сходимости рядов. Свойства сходящихся рядов

Необходимый признак сходимости рядов. Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 11.1 Данный признак не является достаточным, то есть из условия $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ не следует сходимость ряда. Примером этого является обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ при всех $p > 0$, однако сходится этот ряд только при $p > 1$.

Следствие. Если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Пример 11.2. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{5n-1}$ расходится, поскольку

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{5n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{5n} = \frac{2}{5} \neq 0.$$

Пусть задан числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ряд $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$, который получен из заданного отбрасыванием k первых членов, называется *k-м остатком ряда.*

Свойства сходящихся рядов:

1. Числовой ряд и любой из его остатков сходятся или расходятся одновременно.
2. Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c\,a_n$, где $c \neq 0$, тоже сходится, и его сумма равна cS.
3. Если числовые ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и их суммы равны S_1 и S_2 соответственно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ также сходится, и его сумма равна $S_1 + S_2$.
4. Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ расходится.

ЗАМЕЧАНИЕ 11.2 Если числовые ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ может расходиться, а может оказаться сходящимся. Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1$, составленный из единиц, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)$, все члены которого равны -1, являются расходящимися. Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-1) = \sum_{n=1}^{\infty} 0$ сходится, и его сумма $S = 0$.

Достаточные признаки сходимости положительных рядов

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, члены которого $a_n \geq 0$ при всех n, называется *положительным*.

Признак сравнения положительных рядов: если для членов положительных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ справедливо неравенство $a_n \geq b_n$ при всех n, больших некоторого номера N_0, то:

- из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$;
- из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

При использовании признака сравнения в качестве эталонных рядов, с которыми проводится сравнение исследуемых рядов, рассматривают **геометрический ряд**

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n - \begin{cases} \text{сходится} & \text{при } 0 < q < 1; \\ \text{расходится} & \text{при } q \geq 1 \end{cases}$$

и **обобщенный гармонический** ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} - \begin{cases} \text{сходится} & \text{при } p > 1; \\ \text{расходится} & \text{при } p \leq 1. \end{cases}$$

Пример 11.3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^3}$.

Решение: так как $\frac{\sin^2 n}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$ при всех n и обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ сходится, то ряд с меньшими членами $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^3}$ является сходящимся.

Пример 11.4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\ln n}{\sqrt{n}}$.

Решение: так как $\ln n \geq 0$ при $n \geq 1$, то $\frac{1+\ln n}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ при $n \geq 1$. Обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится, следовательно, ряд с большими членами $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\ln n}{\sqrt{n}}$ также расходится.

Предельный признак сравнения положительных рядов: если для положительных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ существует $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = q$, то:

- при $q = 0$ из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;
- при $q = \infty$ из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$;
- при $q \neq 0$ и $q \neq \infty$ ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример 11.5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n}{5^n + 3n}$.

Решение: поскольку $a_n = \frac{2^n + n}{5^n + 3n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2^n}{5^n} = \left(\frac{2}{5}\right)^n$, то заданный ряд и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ ведут себя одинаково, так как $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ сходится, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n}{5^n + 3n}$ также сходится.

Следствие. Если для n-го члена числового положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ можно при $n \to \infty$ выделить главную часть, то есть $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{c}{n^p}$, то при $p > 1$ ряд сходится, а при $p \leq 1$ — расходится.

Пример 11.6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{\sqrt[3]{n^5 + 3n + \sqrt{n}}}$.

Решение: можно выделить главную часть n-го члена заданного ряда:

$$a_n = \frac{n+3}{\sqrt[3]{n^5 + 3n + \sqrt{n}}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n}{n^{\frac{5}{3}}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}.$$

Порядок $p = \frac{2}{3} < 1$, поэтому ряд расходится.

Пример 11.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}}{3 + 2\sqrt[5]{n^4}}$.

Решение: выделим главную часть n-го члена ряда:

$$a_n = \frac{1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}}{3 + 2\sqrt[5]{n^4}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{2n}}{2n^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{4n^{\frac{9}{5}}}.$$

Порядок $p = \frac{9}{5} > 1$, ряд сходится.

Пример 11.8. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+3n}{n^2+2\ln n}$.

Решение: $a_n=\frac{1+3n}{n^2+2\ln n}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{3n}{n^2}=\frac{3}{n}$. Порядок $p=1$, ряд расходится.

Интегральный признак Коши

Пусть функция $f(x)$ непрерывная, положительная и монотонно убывающая при $x\geq 1$ и пусть $f(n)=a_n$ при всех $n\in N$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и несобственный интеграл $\int_c^{+\infty}f(x)dx$, $c\geq 1$, сходятся или расходятся одновременно.

Пример 11.9. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p(\alpha n)}$, где α — положительное число, $\alpha n\neq 1$ и $p>0$.

Решение: функция $f(x)=\frac{1}{x\ln^p(\alpha x)}$ удовлетворяет условиям интегрального признака Коши. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p(\alpha x)}dx$$

и сделаем в нем замену $\ln(\alpha x)=t$, $\frac{1}{x}dx=dt$. Получим интеграл

$$\int_{\ln\alpha}^{+\infty}\frac{1}{t^p}dt,$$

который сходится при $p>1$ и расходится при $p\leq 1$. Следовательно, по интегральному признаку Коши, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p(\alpha n)}$$

сходится при $p>1$ и расходится при $p\leq 1$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p(\alpha n)}$, где α — положительное число, $\alpha n\neq 1$ и $p>0$, также можно использовать как эталонный в признаках сравнения.

Пример 11.10. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(3n+1)}$.

Решение: так как $a_n=\frac{1}{(2n+3)\ln^2(3n+1)}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{2n\ln^2(3n)}$, то существует конечный предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{2}$, где b_n — n-й член сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n\ln^2(3n)}$ (см. при-

мер 11.9). Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(3n+1)}$ сходится по предельному признаку сравнения.

Радикальный признак Коши

Пусть для положительного числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$. Тогда при $q<1$ ряд сходится, а при $q>1$ (в частности, при $q=\infty$) ряд расходится. При $q=1$ ряд может и сходиться, и расходиться.

Пример 11.11. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^n}arctg^n n$.

Решение: рассмотрим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\pi^n}arctg^n n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} n\right)=\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}<1.$$

Ряд сходится по радикальному признаку Коши.

Пример 11.12. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{5n+2}\right)^n$.

Решение: рассмотрим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{5n+2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{5n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{5n}=\frac{2}{5}<1.$$

Ряд сходится по радикальному признаку Коши.

Признак Даламбера

Если члены положительного числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ таковы, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$, то при $q<1$ ряд сходится, а при $q>1$ (в частности, при $q=\infty$) — расходится. При $q=1$ ряд может и сходиться, и расходиться.

Пример 11.13. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n n!}{(n+1)^n}$.

Решение: так как $a_n=\frac{5^n n!}{(n+1)^n}$, $a_{n+1}=\frac{5^{n+1}(n+1)!}{(n+2)^{n+1}}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}(n+1)!(n+1)^n}{5^n n!(n+2)^{n+1}}=5\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+2)^n(n+2)}=$$

$$=5\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^n=5\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)}=\frac{5}{e},$$

так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(-\frac{1}{n+2}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{-n}=-1.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{5}{e}>1$, то, согласно признаку Даламбера, ряд расходится.

ЗАМЕЧАНИЕ 11.3 Учитывая свойства сходящихся рядов, все теоремы для положительных рядов справедливы и для рядов, все члены которых $a_n \le 0$, а также для рядов, для которых неравенство $a_n \ge 0$ выполняется, начиная с некоторого номера N.

Знакопеременный ряд

Если ряд содержит бесконечное число положительных и бесконечное число отрицательных членов, то ряд называется *знакопеременным*. Частным случаем знакопеременных рядов являются *знакочередующиеся* ряды. В знакочередующемся ряду любые два соседних члена имеют разные знаки.

При исследовании сходимости знакопеременного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ обязательно исследуют сходимость ряда, составленного из абсолютных величин его членов, то есть ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$, который является положительным. В зависимости от того, как ведет себя ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$, различают два типа сходимости знакопеременного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$: абсолютную и условную.

Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ называется *условно сходящимся*, если он сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится.

Признак абсолютной сходимости

Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$, то знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится абсолютно.

Пример 11.14. Исследовать на сходимость знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2+3n+2}$ и указать тип сходимости.

Решение: составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n^2+3n+2}.$$

Этот ряд сходится по признаку сравнения, поскольку

$$\frac{|\cos n|}{n^2+3n+2} < \frac{1}{n^2},\ n = 1,\ 2,\ 3\ldots,$$

а обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится. По признаку абсолютной сходимости знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2+3n+2}$ сходится абсолютно.

Пример 11.15. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{tg\frac{\pi}{n}}{n+3}$$

и указать тип сходимости.

Решение: ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{tg\frac{\pi}{n}}{n+3}$$

сходится по следствию из предельного признака сравнения, поскольку

$$\frac{tg\frac{\pi}{n}}{n+3} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\pi}{n^2},\ p = 2 > 1.$$

По признаку абсолютной сходимости знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{tg\frac{\pi}{n}}{n+3}$$

сходится абсолютно.

Признак Лейбница

Если для членов знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, где $a_n \geq 0$, выполнены два условия:

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;
- $a_{n+1} < a_n$, начиная с некоторого номера $n > N_0$,

то ряд сходится и его сумма удовлетворяет неравенству $S < a_1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 11.4 Признак Лейбница не дает ответа на вопрос о типе сходимости знакочередующегося ряда. Но поскольку его используют, только если абсолютной сходимости нет, то признак Лейбница иногда называют признаком условной сходимости.

Пример 11.16. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt[3]{\ln(n+2)}}$. Если ряд сходится, то укажите тип сходимости.

Решение: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln(n+2)}}$ расходится, согласно предельному признаку сравнения, так как $\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln(n+2)}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n\ln^{\frac{1}{3}} n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{\frac{1}{3}} n}$ расходится. Следовательно, абсолютно ряд сходиться не будет.

Поскольку ряд знакочередующийся, используем признак Лейбница:

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln(n+2)}} = \frac{1}{\infty} = 0$;
- $a_n = \frac{1}{n\sqrt[3]{\ln(n+2)}}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{\ln(n+3)}}$, значит, $a_{n+1} < a_n$, $= 1, 2, 3..$

По признаку Лейбница ряд сходится, и сходимость эта условная.

Пример 11.17. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{n}$. Если ряд сходится, то укажите тип сходимости.

Решение: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n}$ расходится по признаку сравнения, так как

$$\frac{\ln(n+1)}{n} > \frac{\ln 2}{n},\ n = 1, 2, 3\ldots,$$

а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ и, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln 2}{n}$ расходятся.

По признаку Лейбница:

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$;
- $a_n = \frac{\ln(n+1)}{n}$, $a_{n+1} = \frac{\ln(n+2)}{n+1}$.

Докажем, что $a_{n+1} < a_n$. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$. Поскольку ее производная

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+1}x - \ln(x+1)}{x^2} = \frac{x\left(1-\ln(x+1)\right) - \ln(x+1)}{x^2(x+1)} < 0$$

при $x \geq 1$, то функция $f(x)$ убывает при $x \geq 1$. Члены ряда a_n и a_{n+1} являются значениями этой функции при $x_1 = n$ и $x_2 = n+1$. Так как $x_2 > x_1$, то $a_n > a_{n+1}$. По признаку Лейбница ряд сходится, и сходимость эта условная.

Признак Лейбница можно использовать и при приближенном вычислении суммы ряда.

Пример 11.18. Вычислите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n}$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решение: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{18} - \frac{1}{81} + \frac{1}{324} - \frac{1}{1215} + R_5$, где R_5 — сумма остатка ряда после пятого члена. Модуль пятого члена $|a_5| = \frac{1}{1215} < \varepsilon$, а так как члены ряда убывают по модулю, то и все последующие члены меньше ε. Тогда по признаку Лейбница сумма остатка ряда $R_5 < a_5 < \varepsilon$. Следовательно, сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n} \approx -\frac{1}{3} + \frac{1}{18} - \frac{1}{81} + \frac{1}{324} = -\frac{31}{108}.$$

Функциональный ряд и его область сходимости

Пусть задана последовательность функций $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и все ее члены определены на одном и том же промежутке $[a; b]$. Заданная функциональная последовательность и новая последовательность функций $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, построенная по правилу

$$S_1(x) = u_1(x);$$
$$S_2(x) = u_1(x) + u_2(x);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x),$$

называются *функциональным рядом* и обозначаются

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \qquad (11.1)$$

Для любого значения $x = x_0$, где $x_0 \in [a; b]$ функциональный ряд является числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$. Если этот ряд сходится, то говорят, что функциональный ряд (11.1) сходится в точке x_0.

Множество значений x, при которых функциональный ряд (11.1) сходится, называется *областью сходимости* этого ряда. Область сходимости функционального ряда обычно удается найти с помощью известных признаков сходимости.

Пример 11.19. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}$.

Решение: все члены ряда определены при $x \neq 0$. Если принять x равным какому-нибудь числу, то полученный числовой ряд в общем случае является знакопере-

менным. Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{x^n}\right|$, который является положительным, и исследуем его сходимость с помощью признака Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x^n|}{|x^{n+1}|}=\frac{1}{|x|}.$$

При $\frac{1}{|x|}<1$, то есть в области $|x|>1$, ряд сходится абсолютно, при $|x|<1$ и $x\neq 0$ ряд расходится.

При $x=1$ и $x=-1$ числовые ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}1=1+1+1+\ldots \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)=-1+1-1+1-\ldots$$

расходятся, так как для них не выполняется необходимый признак сходимости. Следовательно, областью сходимости (абсолютной) ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x^n}$ является множество значений $x\in(-\infty;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$.

Пример 11.20. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$.

Решение: область определения всех членов ряда есть множество $(-\infty;\ +\infty)$. Данный ряд представляет собой обобщенный гармонический ряд, который сходится при $x>1$. Следовательно, луч $(1;\ +\infty)$ является областью сходимости данного ряда.

Как и в случае числовых рядов, сумма $S(x)$ функционального ряда определяется через предел последовательности $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ его частичных сумм:

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x),$$

где $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)$. Таким образом, сумма $S(x)$ функционального ряда является функцией от x, причем областью определения этой функции является область сходимости ряда.

Пример 11.21. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\ldots$.

Решение: все члены ряда определены на всей числовой оси. Это геометрический ряд со знаменателем $q=x$. Если $|x|<1$, то ряд сходится. Следовательно, интервал $(-1;\ 1)$ есть область сходимости данного ряда, и его сумма равна $S(x)=\frac{1}{1-x}$. Областью ее определения является область сходимости ряда, то есть интервал $(-1;\ 1)$.

Степенные ряды

Степенным рядом называется функциональный ряд, определенный на последовательности степенных функций вида $\{a_n(x-x_0)^n\}_{n=1}^{\infty}$, где $x_0\in R$, а $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность вещественных чисел.

Степенной ряд обозначают $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. В частности, при $x_0=0$ степенной ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ сходится в точке $x=x_1\neq 0$, то он сходится абсолютно при всех x таких, что $|x-x_0|<|x_1|$. Если же этот степенной ряд расходится в точке $x=x_1$, то он расходится при всех x таких, что $|x-x_0|>|x_1|$.

Следствие. Для степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ существует такое положительное число R, которое называется радиусом сходимости и для которого справедливо следующее:

- при x, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<R$, ряд сходится абсолютно;
- при x, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|>R$, ряд расходится.

Радиус сходимости R степенного ряда определяется по формуле $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$.

Область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ имеет вид $(x_0-R;\ x_0+R)$, где R — радиус сходимости. В частности, для степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ область сходимости $(-R;\ R)$.

Если $R=0$, то степенной ряд сходится только в точке x_0. Если $R=\infty$, то степенной ряд сходится абсолютно на всей числовой оси.

ЗАМЕЧАНИЕ 11.5 В точках $x=x_0\pm R$ ряд может сходиться, а может расходиться. Эти точки следует исследовать отдельно.

Пример 11.22. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3x^n}{(n+1)!}$.

Решение: радиус сходимости

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n^3}{(n+1)!}}{\dfrac{(n+1)^3}{(n+2)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(n+2)!}{(n+1)!(n+1)^3}.$$

Проводя сокращение под знаком предела и выделяя главные части бесконечно больших, получаем:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(n+2)}{n^3}=\lim_{n\to\infty}(n+2)=\infty.$$

Следовательно, ряд сходится абсолютно на всей числовой оси.

При определении области сходимости степенного ряда можно не искать радиус сходимости, а определять интервал сходимости, используя признак Даламбера.

Пример 11.23. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+1)^n}{3^n}$.

Решение: по признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)!(x+1)^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{n!(x+1)^n}{3^n}}\right| = \frac{|x+1|}{3}\lim_{n\to\infty}(n+1) = \begin{cases}\infty, x \neq -1;\\ 0, x = -1.\end{cases}$$

Значит, ряд сходится абсолютно только в точке $x = -1$.

Пример 11.24. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-2)^n}{5^n\sqrt{2n+1}}$.

Решение:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-2)^{n+1}}{5^{n+1}\sqrt{2n+3}}}{\frac{(x-2)^n}{5^n\sqrt{2n+1}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}5^n\sqrt{2n+1}}{(x-2)^n 5^{n+1}\sqrt{2n+3}}\right| = \frac{|x-2|}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n}} = \frac{|x-2|}{5}.$$

По признаку Даламбера ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(x-2)^n}{5^n\sqrt{2n+1}}\right|$$

сходится, если $\frac{|x-2|}{5} < 1$, или $|x-2| < 5$, или $-5 < x-2 < 5$, или $-3 < x < 7$. Значит, заданный ряд в интервале $-3 < x < 7$ сходится абсолютно. Исследуем концы интервала сходимости.

При $x = -3$ получим степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(-5)^n}{5^n\sqrt{2n+1}},$$

который после упрощений можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{\sqrt{2n+1}} \text{ или } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Поскольку $a_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}n^{\frac{1}{2}}}$, $p = \frac{1}{2} < 1$, то ряд расходится.

При $x=7$ получим степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(5)^n}{5^n\sqrt{2n+1}}$, который после упрощений можно записать в виде $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$. Положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

расходится. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$ знакочередующийся, то можно использовать признак Лейбница.

По признаку Лейбница, так как $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=\frac{1}{\infty}=0$, $a_n=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{2n+3}}\Rightarrow a_n<a_{n+1}$, $n=1,\ 2,\ 3\ldots$, ряд сходится и сходимость условная. Следовательно, область сходимости степенного ряда $(-3;\ 7]$ (рис. 11.1).

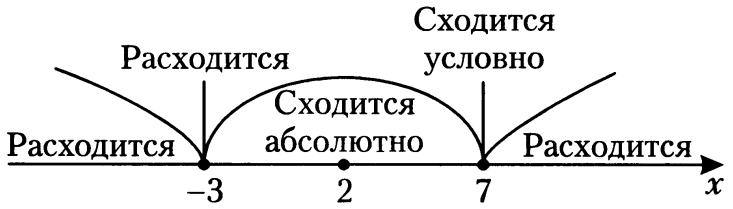


Рис. 11.1

Пример 11.25. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n n^n}{n!}$.

Решение:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x+1)^{n+1}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(x+1)^n n^n}{n!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}(n+1)^{n+1}n!}{n^n(x+1)^n(n+1)!}\right|=|x+1|\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)}=$$

$$=|x+1|\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n(n+1)}{n^n(n+1)}=|x+1|\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=|x+1|e.$$

Поэтому по признаку Даламбера ряд сходится абсолютно при $|x+1|e<1$ или при $-\frac{1}{e}-1<x<\frac{1}{e}-1$.

При $x=\frac{1}{e}-1$ числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{e^n n!}$ расходится, так как

$$a_n = \frac{n^n}{e^n n!} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^n}{e^n\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, n^{\frac{1}{2}}}$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

расходится. Здесь использована *формула Стирлинга*:

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

При $x = -\frac{1}{e} - 1$ знакочередующийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{e^n n!}$ может сходиться только условно, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n n!}$ расходится. Поскольку ряд знакочередующийся, то можно использовать признак Лейбница:

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{e^n n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{e^n\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = 0;$
- $a_n = \frac{n^n}{e^n n!}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}(n+1)!}$.

Рассмотрим

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}(n+1)!}}{\frac{n^n}{e^n n!}} = \frac{1}{e}\frac{(n+1)^n (n+1)}{n^n (n+1)} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Известно, что последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ монотонно возрастает и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Следовательно, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$ при всех n. Тогда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{e}e = 1$$

и $a_{n+1} < a_n$ при всех n.

Значит, по признаку Лейбница ряд сходится, и сходимость эта условная. Областью сходимости является промежуток $\left[-1-\frac{1}{e};\ -1+\frac{1}{e}\right)$ (рис. 11.2).

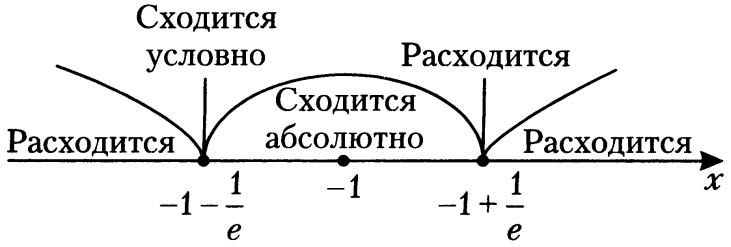


Рис. 11.2

Пример 11.26. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}x^n$.

Решение: найдем интервал сходимости степенного ряда, используя радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}x^n\right|}=|x|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}=|x|\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=|x|\frac{1}{e}.$$

По радикальному признаку Коши ряд сходится абсолютно при $|x|\frac{1}{e}<1$ или при $-e<x<e$. Исследуем сходимость на концах промежутка.

При $x=\pm e$ числовые ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}e^n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}e^n$$

расходятся, так как для них не выполняется необходимый признак сходимости

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}e^n=\lim_{n\to\infty}e^n e^{n^2\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{n-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=e,$$

поскольку предел показателя

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(1-n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\theta\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(1-1+\frac{1}{n}+\theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)=1.$$

Следовательно, интервалом сходимости является промежуток $(-e;\ e)$ (рис. 11.3).

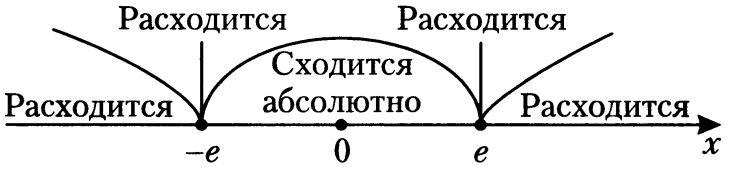


Рис. 11.3

Ряд Тейлора и ряд Маклорена

Рядом Тейлора для функции $f(x)$ называется степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$, где коэффициенты c_n определяются по формулам

$$c_0 = f(x_0);\ c_1 = \frac{f'(x_0)}{1!};\ c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!};\ \ldots;\ c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

При $x_0 = 0$ степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, где коэффициенты c_n определяются по формулам

$$c_0 = f(0);\ c_1 = \frac{f'(0)}{1!};\ c_2 = \frac{f''(0)}{2!};\ \ldots;\ c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

называется *рядом Маклорена.*

Запись

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

называется разложением функции $f(x)$ в ряд Тейлора.

Запись

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

называется разложением функции $f(x)$ в ряд Маклорена.

ЗАМЕЧАНИЕ 11.6 Как всякий степенной ряд, ряд Тейлора сходится равномерно на любом промежутке, лежащем внутри интервала сходимости.

Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена

Рассмотрим способы разложения основных элементарных функций в ряд Маклорена:

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$, интервал сходимости $(-\infty;\ +\infty)$.
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$, интервал сходимости $(-\infty;\ +\infty)$.

- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$, интервал сходимости $(-\infty;\ +\infty)$.
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \ldots$, интервал сходимости $(-1;\ 1]$
- $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots$, интервал сходимости $[-1;\ 1)$.
- $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$, интервал сходимости $[-1;\ 1]$
- $(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots$ (биномиальный ряд), интервал сходимости $(-1;\ 1)$, $\alpha \in R$, $\alpha \notin N$.

При $\alpha = n \in N$ функция $f(x) = (1+x)^n$ раскладывается по биному Ньютона в многочлен, и разложение является верным на всей числовой оси.

При $\alpha = -1$ (частный случай биномиального ряда) $(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$.

Пример 11.27. Найти область сходимости степенного ряда и его сумму $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n+1}$.

Решение: сделаем замену $x - 3 = y$ и запишем ряд в виде $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n+1}$. Область сходимости данного ряда определяется по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{y^{n+1}}{n+2}}{\frac{y^n}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{y(n+1)}{n+2}\right| = |y|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n} = |y|.$$

Ряд сходится абсолютно при $|y| < 1$. При $y = 1$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ расходится, а при $y = -1$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ сходится условно, следовательно, область сходимости $[-1;\ 1)$.

На любом промежутке $(\alpha;\ \beta) \subset [-1;\ 1)$ ряд сходится равномерно.

Чтобы найти сумму ряда, сделаем следующие преобразования:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^{n-1}}{n}=\frac{1}{y}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n}=-\frac{\ln(1-y)}{y}=-\frac{\ln(4-x)}{x-3}$$

при $x\neq 3$. При $x=3$ сумма ряда равна нулю.

Пример 11.28. Разложить функцию $f(x)=\sqrt[3]{27-x}$ в ряд Маклорена. Используя полученное разложение, вычислить приближенно $\sqrt[3]{28}$, взяв три члена разложения. Оценить полученную погрешность.

Решение: представим функцию в виде $f(x)=3\left(1-\frac{x}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$ и используем биномиальный ряд:

$$3\left(1-\frac{x}{27}\right)^{\frac{1}{3}}=3\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\cdots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}\frac{(-x)^n}{27^n}\right).$$

Проделав все упрощения, получим:

$$3\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\frac{1\cdot2\cdot5\cdots(3n-4)}{3^n n!}\frac{x^n}{3^{3n}}\right)=3\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot2\cdot5\cdots(3n-4)}{3^{4n}n!}x^n\right)=$$

$$=3-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot2\cdot5\cdots(3n-4)}{3^{4n-1}n!}x^n=3-\frac{1}{3^3 1!}x-\frac{1\cdot2}{3^7 2!}x^2-\frac{1\cdot2\cdot5}{3^{11}3!}x^3-\ldots.$$

Приняв в полученном разложении $x=-1$ и взяв три члена в этом разложении, получим:

$$\sqrt[3]{28}=3+\frac{1}{3^3 1!}-\frac{1\cdot2}{3^7 2!}+R_3=3+\frac{1}{27}-\frac{1}{2187}+R_3\approx 3{,}037.$$

Абсолютная погрешность $\Delta\le|R_3|<0{,}00046$.

Пример 11.29. Вычислить приближенно $\sqrt[4]{e}$ с точностью $\varepsilon=0{,}001$.

Решение: требуется вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции $f(x)=e^x$ в точке $x=\frac{1}{4}$. Представим функцию e^x рядом Маклорена.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots$$

и примем $x=\frac{1}{4}$. Получим:

$$e^{\frac{1}{4}}=1+\frac{1}{4\cdot1!}+\frac{1}{4^2\cdot2!}+\frac{1}{4^3\cdot3!}+\frac{1}{4^4\cdot4!}+\frac{1}{4^5\cdot5!}+\frac{1}{4^6\cdot6!}+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{384}+R_4,$$

где

$$R_4 = \frac{1}{4^4 \cdot 4!} + \frac{1}{4^5 \cdot 5!} + \frac{1}{4^6 \cdot 6!} + \ldots = \frac{1}{4^4 \cdot 4!}\left(1 + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{4^2 5 \cdot 6} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{1}{4^4 \cdot 4!}\left(1 + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{4^2 \cdot 5^2} + \ldots\right) = \frac{1}{256 \cdot 24} \frac{1}{1 - \frac{1}{20}} = \frac{1}{256 \cdot 24} \frac{20}{19} = \frac{5}{256 \cdot 6 \cdot 19} < \varepsilon.$$

Тогда с точностью ε получим: $\sqrt[4]{e} \approx 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{384} \approx 1{,}284.$

Пример 11.30. Вычислить приближенно $\int_0^{0{,}8} \frac{\sin x}{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0{,}0001$.

Решение:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots; \quad \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots;$$

$$\int_0^{0{,}8} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{0{,}8} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{0{,}8} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right) dx = \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \ldots\right)\Bigg|_8^{0{,}8} =$$

$$= 0{,}8 - \frac{0{,}8^3}{3 \cdot 3!} + \frac{0{,}8^5}{5 \cdot 5!} - \ldots = 0{,}8 - \frac{0{,}512}{18} + \frac{0{,}32768}{600} + R_3,$$

где

$$|R_3| < |a_4| = \frac{0{,}8^7}{7 \cdot 7!} < \varepsilon.$$

Тогда с точностью ε получим: $\int_0^{0{,}8} \frac{\sin x}{x} dx \approx 0{,}8 - 0{,}0287 + 0{,}00055 \approx 0{,}7718.$

Задачи для типовых расчетов

Задача 11.1. Исследуйте ряд на сходимость.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{\sqrt{n^4 + n \operatorname{arctg} \frac{1}{n}}}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{\sqrt[4]{n^5 + \sqrt{n+1}}}.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{arctgn}{\sqrt{n^3 + n\sqrt{n+1}}}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{\sqrt{n^2+4}}}{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \cdot arctg \frac{1}{n^3}.$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{4n+3}}} - 1\right).$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+3}\ln\frac{n^2+1}{n^2+n+2}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+\sqrt{n+1}}}\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+\sqrt{n^3+1}}\ln\frac{n^2+5}{n^2+4}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n+2}}}\sin\frac{1}{n+3}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+3)^2\sin^2(3n)}{n^6+1}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}\cos^2 n}{n^3+\sqrt{n+2}}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[4]{n^4+n^3+1}\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n+1}}\operatorname{arctg}\frac{n}{n^2+1}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arcsin\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+\ln^2 n}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[4]{n^4+n^3+2}}\sin\frac{n+1}{n\sqrt[4]{n+5}}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{\sqrt{n}}{n^3-1}}-1\right)\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{1+n^2}\sin\frac{n+2}{n^3+1}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-\cos\frac{1}{n^2}\right)n^2}{\sqrt{n+\sqrt{n+1}}}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+2}}\operatorname{arctg}\frac{n+1}{n^2+2}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{\sqrt[3]{n^4+n\sqrt{n+1}}}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}{n^2+\ln n}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}{n+\ln n}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n+1}}{\sqrt[3]{n^5-n+1}}\cos^2 n$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n^5+3}}\sin\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.

27. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n-2}}\ln\frac{n+4}{n+3}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+\ln n}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}}{\sqrt{n^2+\operatorname{arctg} n}}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}^2 n}{\sqrt[4]{n^5+\sqrt{n+1}}}$.

Задача 11.2. Исследуйте ряд на сходимость.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n^2+1)}{(n+1)!}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)\cdot 2^n}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!2^n}{(2n)!\sqrt{n}}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2^n n!}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{(n+5)\cdot 3^n}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)}{(n+1)!}\sin\frac{1}{2^n}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\frac{2}{n}}{(n+1)!}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(n+1)!\sqrt{n}}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{(n+1)!}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3n)!}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\sqrt{n+1}}{(2n)!}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2\cdot 6^n}{n!}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{4^n}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty}n!\sin\frac{\pi}{2^n}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arcsin\frac{n+1}{n^2+1}}{(n+1)!}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\operatorname{arctg}\left(n^2+n+4\right)}{(n+2)!}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\left(n^3+1\right)}{n!}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{\sqrt{2^n+5}}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n(n+1)!}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n(n+1)!}{(2n)!}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{4^n}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^4+n^2+1}}{(n+1)!}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}\operatorname{tg}\frac{1}{3^n}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n^2+1}}{(n+1)!}$.

26. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arcsin\frac{n+1}{n^2+1}}{(n+1)!}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\left(n^3+1\right)}{n!}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n4^n}$.

Задача 11.3. Исследуйте ряд на сходимость.

1. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n^2+1}{\left(n^3+4\right)\ln(n-1)}$.

2. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(n+1)}$.

3. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{\left(n^2+2\right)\ln^2(3n+1)}$.

4. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln^2(2n+1)}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{(2n^2+3)\ln^2(2n+1)}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+4}}{\sqrt{9n^3+4}\ln^2(5n+2)}$.

7. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+2}}{(n^2+5)\ln^2(n+1)}$.

8. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{(n^3+2)\ln(3n-1)}}$.

9. $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2-1}}{(n^2-2)\sqrt{\ln(n-3)}}$.

10. $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{n}}{\sqrt{\ln(n-2)}}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arcsin\frac{1}{n}}{\ln^2(n+1)}$.

12. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{e^{1/n}-1}{\ln^2(n+7)}$.

13. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{\sin\frac{1}{n^2}}}{\ln^2 n}$.

14. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}{\ln n}$.

15. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln^2(2n-1)}$.

16. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(e^{1/\sqrt{n}}-1\right)^2}{\ln^2(3n+1)}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}{\ln^2(n+2)}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\frac{n+1}{n}}{\sqrt{\ln(n+2)}}$.

19. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{\ln(n-1)}}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+2}\ln(n+1)}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{\sqrt{n+2}}}{\ln^2(n+2)}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+3}\ln^2(n+3)}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/\sqrt{n}}-1}{\sqrt{n+2}\ln^2(n+2)}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{\sqrt{n^2+1}\ln^2(n+4)}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)\ln^2(2n+1)}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{(n+2)\ln^2(n+3)}$.

27. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{tg\left(\frac{4}{n^2}\right)}}{\ln n}$.

28. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(e^{1/\sqrt{n}}-1\right)^2}{\ln^2(3n+1)}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{(n^4+1)\ln(n+2)}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)\ln^2(n+2)}$.

Задача 11.4. Исследуйте ряд на абсолютную и условную сходимость.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n^4-n^2+1}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin\frac{\pi}{\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+1}}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(n+1)}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n!}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n tg\frac{1}{n}$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\cdot 2^{2n}}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n}}{(n+1)\cdot 3^{2n}}$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+3)}{\ln(n+4)}$.
11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{5n-1}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4\sqrt{n}}$.
12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2\left(n\sqrt{n}\right)}{n\sqrt{n}}$.
13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n(\ln\ln n)}$.
14. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.
15. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$.
16. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$.
17. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\sin\frac{1}{n^2}$.
18. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.
19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}$.
20. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}$.
21. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$.
22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$.
23. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(n+1)}$.
24. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{\pi}{6n}$.
25. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt[4]{2n+3}}$.
26. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\ln n}$.
27. $\sum_{=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 3^n}{3^n}$.
28. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$.
29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+2}}$.
30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n^2+1)}$.

Задача 11.5. Вычислите приближенно сумму ряда с заданной точностью ε. Укажите N — наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}, \varepsilon = 10^{-3}.$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2(n+3)}, \varepsilon = 10^{-3}.$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, \varepsilon = 10^{-3}.$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}, \varepsilon = 10^{-3}.$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{3^n}, \varepsilon = 10^{-2}.$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, \varepsilon = 10^{-3}.$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(-\frac{2}{5}\right)^n, \varepsilon = 10^{-3}.$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(-\frac{2}{3}\right)^n, \varepsilon = 10^{-3}.$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n!}, \varepsilon = 10^{-3}.$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n)!n!}, \varepsilon = 10^{-3}.$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n n!}, \varepsilon = 10^{-4}.$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{3^n(n+1)}, \varepsilon = 10^{-3}.$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^n}, \varepsilon = 10^{-3}.$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)}{n^3}, \varepsilon = 10^{-3}.$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}, \varepsilon = 10^{-3}.$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n^2}, \varepsilon = 10^{-3}.$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n n!}, \varepsilon = 10^{-4}.$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n)!}, \varepsilon = 10^{-3}.$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!2n}, \varepsilon = 10^{-3}.$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}, \varepsilon = 10^{-3}.$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{7^n}, \varepsilon = 10^{-3}.$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!!}, \varepsilon = 10^{-3}.$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}, \varepsilon = 10^{-3}.$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}, \varepsilon = 10^{-3}.$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)^3}, \varepsilon = 10^{-3}.$
26. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n^3(n+1)}, \varepsilon = 10^{-3}.$
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2(n+3)}, \varepsilon = 10^{-3}.$
28. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n^2}, \varepsilon = 10^{-3}.$
29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+2)}, \varepsilon = 10^{-3}.$
30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3(n+3)}, \varepsilon = 10^{-3}.$

Задача 11.6. Найдите интервал сходимости степенного ряда. Исследуйте поведение ряда на границах интервала.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n (n+1)^{3/2}}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)\ln(n+1)}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)\ln(n+1)}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{2^{n-1} \cdot 3^n}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln^2 (n+1)}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n (2n-1)}$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\operatorname{ctg} \frac{1}{\sqrt{n}}}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(5^n + 1)}$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(3^n + 1)}$.
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}\sqrt[3]{n^3 + 3}}$.
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n} \cdot 3^n}$.
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{\sqrt{n^4 + 1}}$.
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n (n+1)\ln(n+1)}$.
15. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n \ln n}$.
16. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{4^n n \ln^2 n}$.
17. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{1}{n^2}$.
18. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg}^2 \frac{1}{n}$.
19. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin \frac{1}{n}$.
20. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin^2 \frac{1}{n}$.
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{(n+1)^2 \cdot 2^n}$.
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)x^n}{n^2 \cdot 2^{n+1}}$.
23. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$.
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln(n+1)}$.
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \sqrt{(n+1)^3}}$.
26. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln(n+1)}}{n+1} x^n$.
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} x^n$.
28. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{4^n n \ln^2 n}$.
29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n (n+2)^{3/2}}$.
30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)3^{n-1}}$.

Задача 11.7. Найдите интервал сходимости степенного ряда. Исследуйте поведение ряда на границах интервала.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+3)^n}{n^n}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{4^n \cdot 2n}$.
4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^{n-1}}{3^n n \ln n}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n\ln(n+1)}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}\sqrt[3]{n^3+3}}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n\sqrt{n^2+4}}$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{\sqrt{n^3+n+1}}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-3)^n}{(n+1)^2 \cdot 2^n}$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)^3}(x+2)^n$.
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1}(x+1)^n$.
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1}(x-1)^n$.
13. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n n\ln n}$.
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n\sqrt{n+4}}$.
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}\cdot 5^n}$.
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}(x+2)^n$.
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{\sqrt{n^4+1}}$.
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(x-3)^n}{n^2 \cdot 2^{n+1}}$.
19. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n n\ln n}$.
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3^n(n+1)\ln^2(n+1)}$.
21. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n(n+1)\ln n}$.
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{(n+3)\ln(n+3)}$.
23. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n n\ln^2 n}$.
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)(x-3)^n}{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}}$.
25. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n\sqrt{\ln n}}$.
26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^n}$.
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n\sqrt{n^2+n+2}}$.
28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{\sqrt{n^4+1}}$.
29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+3)\ln(n+3)}$.
30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!(x+3)^n}{(n+1)^n}$.

Задача 11.8. Разложите функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Найдите интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложе-

ния вычислите приближенно значение функции $f(x)$ в точке x_1, оставляя в разложении только n членов. Оцените погрешность, допускаемую при этом вычислении.

1. $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $x_0=-1$, $x_1=-1{,}5$, $n=3$.
2. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0=1$, $x_1=1{,}3$, $n=5$.
3. $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $x_0=1$, $x_1=1{,}5$, $n=3$.
4. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0=1$, $x_1=1{,}5$, $n=4$.
5. $f(x)=\ln x$, $x_0=1$, $x_1=1{,}2$, $n=4$.
6. $f(x)=\cos x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$, $x_1=-\frac{\pi}{4}$, $n=4$.
7. $f(x)=e^{-4x}$, $x_0=0$, $x_1=1$, $n=4$.
8. $f(x)=\sqrt[3]{27-x^3}$, $x_0=0$, $x_1=1$, $n=3$.
9. $f(x)=\sqrt[3]{8-x^3}$, $x_0=0$, $x_1=0{,}5$, $n=4$.
10. $f(x)=\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$, $x_1=\frac{\pi}{4}$, $n=3$.
11. $f(x)=\sin^2 x$, $x_0=0$, $x_1=1$, $n=4$.
12. $f(x)=\cos^2 x$, $x_0=0$, $x_1=1$, $n=4$.
13. $f(x)=\sqrt[3]{8+x}$, $x_0=0$, $x_1=-1$, $n=4$.
14. $f(x)=e^{-x^2}$, $x_0=0$, $x_1=2$, $n=4$.
15. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0=1$, $x_1=1{,}5$, $n=4$.
16. $f(x)=\sqrt[3]{125+x}$, $x_0=0$, $x_1=-2$, $n=4$.
17. $f(x)=\sqrt{9-x^2}$, $x_0=0$, $x_1=-1$, $n=4$.
18. $f(x)=\sqrt{16+x^2}$, $x_0=0$, $x_1=-1$, $n=4$.
19. $f(x)=\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}$, $x_0=0$, $x_1=1$, $n=4$.
20. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}}$, $x_0=1$, $x_1=\frac{1}{2}$, $n=4$.
21. $f(x)=\ln x$, $x_0=1$, $x_1=\frac{1}{2}$, $n=4$.
22. $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{27-x}}$, $x_0=0$, $x_1=\frac{1}{2}$, $n=4$.

23. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3x+4}}$, $x_0=2$, $x_1=1$, $n=4$.

24. $f(x)=\sqrt[3]{27+x^2}$, $x_0=0$, $x_1=2$, $n=4$.

25. $f(x)=e^{-x^3}$, $x_0=0$, $x_1=2$, $n=4$.

26. $f(x)=\sqrt{16+x^2}$, $x_0=0$, $x_1=-1$, $n=4$.

27. $f(x)=\sqrt{25+x}$, $x_0=0$, $x_1=-2$, $n=4$.

28. $f(x)=\sqrt[3]{125+x}$, $x_0=0$, $x_1=5$, $n=4$.

29. $f(x)=\ln(x+2)$, $x_0=-1$, $x_1=-1{,}5$, $n=4$.

30. $f(x)=\ln(x-1)$, $x_0=2$, $x_1=2{,}5$, $n=5$.

Задача 11.9. Вычислите приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение функции в степенной ряд. Укажите N — наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность:

1. $\sqrt{e}$, $\varepsilon=10^{-3}$.
2. $\cos 1^\circ$, $\varepsilon=10^{-4}$.
3. $\sin 10^\circ$, $\varepsilon=10^{-4}$.
4. $\cos 10^\circ$, $\varepsilon=10^{-4}$.
5. $\sqrt[3]{e}$, $\varepsilon=10^{-3}$.
6. $\ln 1{,}003$, $\varepsilon=10^{-3}$.
7. $\sqrt[4]{e}$, $\varepsilon=10^{-3}$.
8. $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$, $\varepsilon=10^{-4}$.
9. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$, $\varepsilon=10^{-3}$.
10. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$, $\varepsilon=10^{-4}$.
11. $\sqrt[4]{17}$, $\varepsilon=10^{-3}$.
12. $\sqrt[4]{15}$, $\varepsilon=10^{-3}$.
13. $\ln 5$, $\varepsilon=10^{-3}$.
14. $\sqrt[3]{28}$, $\varepsilon=10^{-3}$.
15. $\sqrt[4]{19}$, $\varepsilon=10^{-3}$.
16. $\ln 6$, $\varepsilon=10^{-3}$.
17. $\sin 36^\circ$, $\varepsilon=10^{-3}$.
18. $\ln 1{,}002$, $\varepsilon=10^{-4}$.
19. $\sqrt[3]{25}$, $\varepsilon=10^{-3}$.
20. $\sqrt[5]{e}$, $\varepsilon=10^{-3}$.
21. $\dfrac{1}{\sqrt[8]{e}}$, $\varepsilon=10^{-3}$.
22. $\sqrt[6]{e}$, $\varepsilon=10^{-3}$.
23. $\cos 18^\circ$, $\varepsilon=10^{-4}$.
24. $\sin 18^\circ$, $\varepsilon=10^{-4}$.
25. $\sqrt[3]{29}$, $\varepsilon=10^{-3}$.
26. $\ln 7$, $\varepsilon=10^{-3}$.
27. $\ln 3$, $\varepsilon=10^{-3}$.
28. $\sin 19^\circ$, $\varepsilon=10^{-3}$.
29. $\cos 20^\circ$, $\varepsilon=10^{-3}$.
30. $\cos 19^\circ$, $\varepsilon=10^{-4}$.

Задача 11.10. Вычислите приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд.

1. $\displaystyle\int_0^{0{,}2}\frac{\sin x}{x}\,dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.
2. $\displaystyle\int_0^{0{,}1}\frac{e^x-1}{x}\,dx$, $\varepsilon=10^{-4}$.
3. $\displaystyle\int_0^{0{,}1}\frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.
4. $\displaystyle\int_0^{0{,}5}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.

5. $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx,\ \varepsilon = 10^{-3}.$

6. $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx,\ \varepsilon = 10^{-3}.$

7. $\int_0^1 \sqrt[3]{x}\cos x\,dx,\ \varepsilon = 10^{-3}.$

8. $\int_0^1 \sqrt{x}\sin x\,dx,\ \varepsilon = 10^{-3}.$

9. $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}\,dx,\ \varepsilon = 10^{-3}.$

10. $\int_0^{0,25} \sqrt{1+x^3}\,dx,\ \varepsilon = 10^{-3}.$

11. $\int_0^{0,5} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx,\ \varepsilon = 10^{-4}.$

12. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}},\ \varepsilon = 10^{-3}.$

13. $\int_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x}\,dx,\ \varepsilon = 10^{-4}.$

14. $\int_0^1 \cos\left(x^2\right)dx,\ \varepsilon = 10^{-3}.$

15. $\int_0^{0,5} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx,\ \varepsilon = 10^{-4}.$

16. $\int_0^{0,2} e^{-3x^2}\,dx,\ \varepsilon = 10^{-3}.$

17. $\int_0^{0,2} \frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x^2}\,dx,\ \varepsilon = 10^{-3}.$

18. $\int_0^1 x^2 e^{-2x^2}\,dx,\ \varepsilon = 10^{-3}.$

19. $\int_0^{0,2} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x}\,dx,\ \varepsilon = 10^{-3}.$

20. $\int_0^1 \sin\frac{x^2}{4}\,dx,\ \varepsilon = 10^{-3}.$

21. $\int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}},\ \varepsilon = 10^{-3}.$

22. $\int_0^{0,5} \sin(x^2)\,dx,\ \varepsilon = 10^{-4}.$

23. $\int_0^{0,3} e^{-2x^2}\,dx,\ \varepsilon = 10^{-4}.$

24. $\int_0^{0,2} e^{-3x^2}\,dx,\ \varepsilon = 10^{-4}.$

25. $\int_0^{0,2} \frac{1-\cos x}{2x^2}\,dx,\ \varepsilon = 10^{-3}.$

26. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}},\ \varepsilon = 10^{-3}.$

27. $\int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}},\ \varepsilon = 10^{-3}.$

28. $\int_0^{0,2} e^{-3x^2}\,dx,\ \varepsilon = 10^{-3}.$

29. $\int_0^{0,1} \frac{e^{x^2}-1}{x}\,dx,\ \varepsilon = 10^{-3}.$

30. $\int_0^{0,1} \frac{e^{4x^3}-1}{x^2}\,dx,\ \varepsilon = 10^{-3}.$

Задача 11.11. Найдите сумму ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n!}.$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}.$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(2n)!}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n-1}}{n}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{n}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n-1}}{n}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{3n}}{n}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$.

16. $\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n+2}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n-1}}{n}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n!}$.

20. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^{4n}}{(2n)!}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+3}}{(2n)!}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+3}}{(2n)!}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}$.

25. $\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)x^{n+2}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n}}{n}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+2}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{n!}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-3}}{(n+1)!}$.

ГЛАВА 12 Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

Двойной интеграл в прямоугольных координатах

Пусть функция $f(M) = f(x,y)$ задана в некоторой ограниченной замкнутой области D на плоскости $0xy$. Разобьем область D произвольным образом на n непересекающихся частей $D_1, D_2, \ldots, D_n$ площадями Δs_i $(i = 1, \ldots, n)$. Внутри каждой частичной области D_i выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i)$ и составим сумму $\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i$, которая называется *интегральной суммой.*

Расстояние между наиболее удаленными точками области называется ее диаметром. Обозначим через λ_i диаметр частичной области D_i, через $\lambda = \max \lambda_i$ — наибольший из диаметров частичных областей данного разбиения.

Двойным интегралом $\iint\limits_D f(M)ds = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ от функции $f(x,y)$ по области D называется предел последовательности интегральных сумм при $\lambda \to 0$ и $n \to \infty$, т. е. при неограниченном увеличении частичных областей, когда все частичные области стягиваются в точку:

$$\iint\limits_D f(M)ds = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i.$$

Если функция $f(x,y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области D, то такой предел существует и не зависит от способа разбиения области D на частичные области и от выбора точек M_i. Функция $f(x,y)$ называется интегрируемой в области D. В дальнейшем будем рассматривать только непрерывные функции.

Основные свойства двойных интегралов:

- $\iint\limits_D (f_1(M) + f_2(M))ds = \iint\limits_D f_1(M)ds + \iint\limits_D f_2(M)ds.$
- $\int\limits_D C\, f(M)ds = C \int\limits_D f(M)ds$, где $C = \text{const}$.
- Если область D разбивается на две непересекающиеся области D_1 и D_2 (т. е. $D = D_1 \cup D_2$, где $D_1 \cap D_2 = \varnothing$), то

$$\iint\limits_D f(M)\,ds = \iint\limits_{D_1} f(M)\,ds + \iint\limits_{D_2} f(M)\,ds.$$

Геометрический смысл двойного интеграла (вычисление объема тел и площадей плоских фигур)

Пусть на плоскости $0xy$ задана область D и в каждой точке $M(x,y) \in D$ задана функция $f(x,y) \geq 0$. Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = V,$$

где V — объем цилиндрического тела, ограниченного областью D, поверхностью $z = f(x,y)$ и цилиндрической поверхностью, проходящей через контур области D параллельно оси Oz (рис. 12.1).

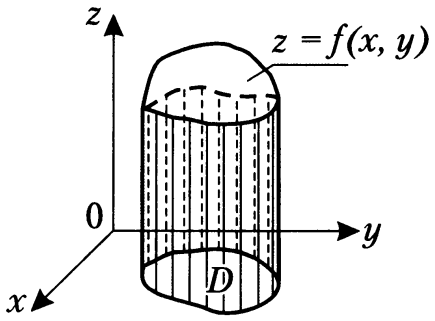


Рис. 12.1

Если $f(x, y) \equiv 1$, то интеграл по области D равен площади этой области, т. е.

$$\iint\limits_D ds = \iint\limits_D dxdy = S,$$

где S — площадь области D.

Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

Изобразим область D на плоскости $0xy$ (рис. 12.2). Предположим, что любая прямая $x = \text{const}$ пересекает линию границы области D не более чем в двух точках.

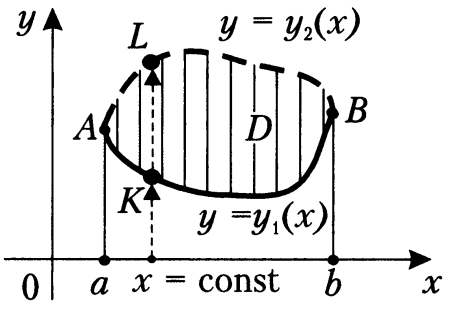


Рис. 12.2

Проведем прямые $x = a$ и $x = b$ — касательные к границе области D. Тогда линия границы будет разбита на части, уравнения которых $y = y_1(x)$ (нижняя линия AKB), и $y = y_2(x)$ (верхняя линия ALB), причем $y_1(x) \leq y_2(x)$ для любых $x \in [a;b]$.

Для рассматриваемой области двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (12.1)$$

Интеграл в правой части этой формулы называется *повторным* или *двукратным*.

Интеграл $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ называется *внутренним*. Он вычисляется в предположении, что переменная x рассматривается как постоянная и подынтегральная функция $f(x,y)$ является функцией только одной переменной y. В результате вычисления этого интеграла получится функция переменной x. После того как эта функция определена, надо выполнить внешнее интегрирование — проинтегрировать полученную функцию по переменной x.

Таким образом, по формуле (12.1) сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной y, а x считается постоянной. Затем вычисляется внешний интеграл по переменной x.

Пример 12.1. Вычислить интеграл $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} \left(x + y^2 + \frac{1}{x} \right) dy$.

Решение: вычислим внутренний интеграл по y, считая x постоянной:

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} \left(x + y^2 + \frac{1}{x} \right) dy = \int_0^1 dx \left(xy + \frac{y^3}{3} + \frac{y}{x} \right) \Bigg|_{x^2}^{x} = \int_0^1 dx \left(x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x}{x} - x^3 - \frac{x^6}{3} - \frac{x^2}{x} \right).$$

Далее вычислим внешний интеграл, преобразовав подынтегральное выражение

$$\int_0^1 \left(x^2 - \frac{2x^3}{3} + 1 - \frac{x^6}{3} - x \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^4}{3 \cdot 4} + x - \frac{x^7}{3 \cdot 7} - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{13}{21}.$$

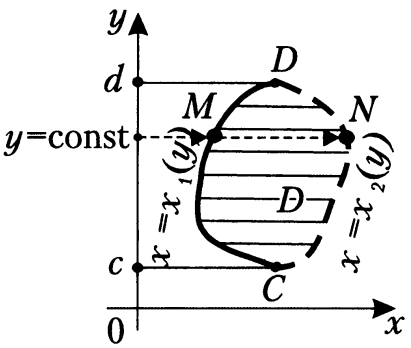


Рис. 12.3

Пусть теперь всякая прямая $y = \text{const}$ пересекает линию границы области D не более чем в двух точках (рис. 12.3) и область D определяется неравенствами $x_1(y) \le x \le x_2(y)$, $c \le y \le d$, где $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$ — уравнения левой (CMD) и правой (CND) линий границы области соответственно.

Тогда двойной интеграл будет вычисляться по формуле:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx, \qquad (12.2)$$

где $y = c$ и $y = d$ — прямые, проецирующие область D на ось Oy.

По формуле (12.2) сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной x, а y считается постоянной. Затем вычисляется внешний интеграл по переменной y.

ЗАМЕЧАНИЕ 12.1 Пределы внешних интегралов в формулах (12.1) и (12.2) — всегда постоянные числа. Пределы же внутренних интегралов постоянны лишь в том случае, когда область интегрирования представляет собой прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям.

ЗАМЕЧАНИЕ 12.2 Значение двойного интеграла не зависит от порядка интегрирования. На практике выбирается такой порядок, который требует минимума вычислительной работы.

ЗАМЕЧАНИЕ 12.3 В общем случае область может не относиться к рассмотренным типам, тогда ее всегда можно разбить прямыми, параллельными координатным осям, на области, для которых следует применить формулы (12.1) и (12.2) повторного интегрирования.

Пример 12.2. Вычислить интеграл $\iint\limits_D \left(xy^2+1\right)dxdy$, где область D ограничена линиями $y=2x$, $y=x^2$ и $x=1$.

Решение: область интегрирования D изображена на рис. 12.4. Она имеет нижнюю границу $y=x^2$ и верхнюю границу $y=2x$, поэтому по формуле (12.1) перейдем к повторному интегралу

$$\iint\limits_D \left(xy^2+1\right)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{2x} \left(xy^2+1\right)dy.$$

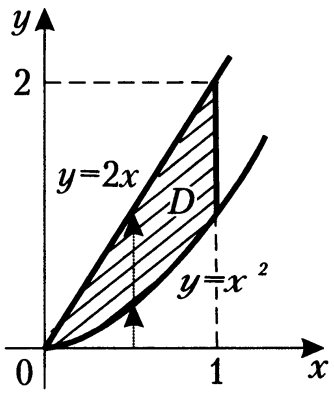


Рис. 12.4

Пределы интегрирования в повторном интеграле получены так:

1. Область D спроецирована на ось $0x$, получен отрезок $[0;\ 1]$. Этим были определены нижний предел 0 и верхний предел 1 изменения переменной x во внешнем интеграле.
2. На отрезке $[0;\ 1]$ оси $0x$ выбрана произвольная точка, через которую проведен луч, параллельный оси $0y$. Луч входит в область D, пересекая ее нижнюю границу $y=x^2$, и выходит из области, пересекая верхнюю границу $y=2x$. Этим были определены нижний предел x^2 и верхний предел $2x$ изменения переменной y во внутреннем интеграле.

Вычисление повторного интеграла следует начинать с его внутреннего интеграла, в котором величина x рассматривается как постоянная. Затем вычисляется внешний интеграл.

Обычно внутренний интеграл отдельно не вычисляют, а все выкладки записывают в одну строку следующим образом:

$$\iint\limits_D \left(xy^2+1\right)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{2x} \left(xy^2+1\right)dy = \int\limits_0^1 dx\left(x\frac{y^3}{3}+y\right)\Bigg|_{x^2}^{2x} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x\frac{8x^3}{3}+2x-\frac{x^7}{3}-x^2\right)dx = \left(\frac{8}{3}\frac{x^5}{5}+2\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3}\frac{x^8}{8}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{8}{15}+1-\frac{1}{24}-\frac{1}{3} = \frac{139}{120}.$$

Вычислим теперь тот же двойной интеграл, изменив порядок интегрирования: внутреннее интегрирование будем производить по переменной x, а внешнее — по переменной y.

Из рис. 12.5 видно, что левая граница области D — одна линия $x=\frac{y}{2}$, а правая граница состоит из двух линий: $x=\sqrt{y}$ и $x=1$ (уравнения линий, ограничивающих область D, должны быть разрешены относительно той переменной, по которой вычисляется внутренний интеграл). В этом случае область D надо разбить на две части: D_1 и D_2.

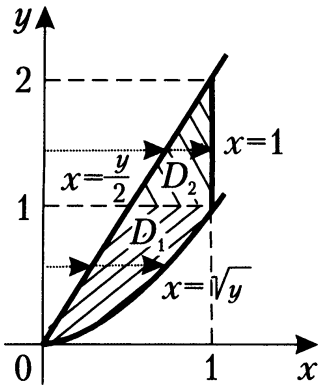


Рис. 12.5

Тогда интеграл представляется как сумма интегралов:

$$\iint\limits_D \left(xy^2+1\right)dxdy = \iint\limits_{D_1} \left(xy^2+1\right)dxdy + \iint\limits_{D_2} \left(xy^2+1\right)dxdy =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} \left(xy^2+1\right)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{1} \left(xy^2+1\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 dy\left(\frac{x^2y^2}{2}+x\right)\Bigg|_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} + \int\limits_1^2 dy\left(\frac{x^2y^2}{2}+x\right)\Bigg|_{\frac{y}{2}}^{1} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{y^3}{2}+\sqrt{y}-\frac{y^4}{8}-\frac{y}{2}\right)dy + \int\limits_1^2 \left(\frac{y^2}{2}+1-\frac{y^4}{8}-\frac{y}{2}\right)dy =$$

$$= \left(\frac{y^4}{8}+\frac{2\sqrt{y^3}}{3}-\frac{y^5}{40}-\frac{y^2}{4}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{y^3}{6}+y-\frac{y^5}{40}-\frac{y^2}{4}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{8}+\frac{2}{3}-\frac{1}{40}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{8}{6}+2-\frac{32}{40}-\frac{4}{4}-\frac{1}{6}-1+\frac{1}{40}+\frac{1}{4}\right)=\frac{139}{120}.$$

Результаты вычислений совпали, но из этого примера видно, что, рационально выбрав порядок интегрирования, можно сократить вычисления.

Пример 12.3. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{3}{2}x}^{4-(-1)^2} f(x,y)dy.$$

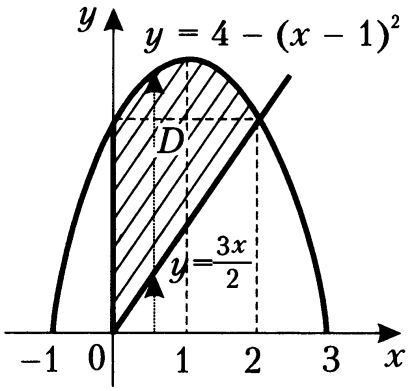


Рис. 12.6

Решение: прежде всего восстановим по пределам интегрирования вид области D, по которой берется двойной интеграл. Область D находится в полосе между прямыми $x=0$ и $x=2$ и ограничена снизу линией $y=\frac{3x}{2}$, а сверху линией $y=4-(x-1)^2$ (рис. 12.6).

Теперь область D проецируем на ось $0y$ и находим уравнения прямых $y=0$ и $y=4$, ограничивающих снизу и сверху полосу, в которой расположена область D. Затем находим левую и правую границы области D. Для этого решаем уравнение параболы $y=4-(x-1)^2$ относительно x. Получаем $x=1\pm\sqrt{4-y}$, причем линия AB определяется уравнением , а линия BC — уравнением $x=1+\sqrt{4-y}$. Уравнение прямой $y=\frac{3x}{2}$ также разрешаем относительно x, получаем $x=\frac{2y}{3}$.

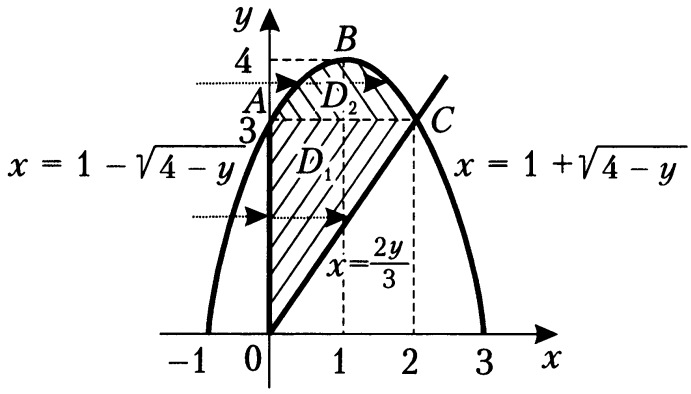


Рис. 12.7

Из рис. 12.7 видно, что левая и правая границы области интегрирования D — это две линии. Следовательно, область D следует разбить на части D_1 и D_2. Эти области задаются неравенствами:

- D_1 —

$$\begin{cases} 0 \le y \le 3; \\ 0 \le x \le \dfrac{2y}{3}; \end{cases}$$

- D_2 —

$$\begin{cases} 3 \le x \le 4; \\ 1-\sqrt{4-y} \le x \le 1+\sqrt{4-y}. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_0^2 dx \int_{\frac{3}{2}x}^{4-(x-1)^2} f(x,y)\,dy = \int_0^3 d \int_0^{\frac{2}{3}y} f(x,y)\,d + \int_3^4 d \int_{1-\sqrt{4-y}}^{1+\sqrt{4-y}} f(x,y)\,dy.$$

Пример 12.4. Вычислить площадь области, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ (рис. 12.8).

Решение: вычислим:

$$S = \iint_D dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \int_0^1 dxy \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}$$

$$= \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \left(\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

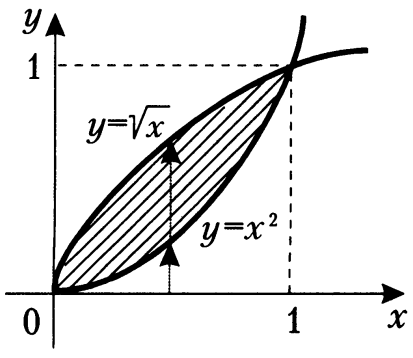


Рис. 12.8

Пример 12.5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$, $y=0$, $z=0$, $y=x$ $(z\geq 0)$ (рис. 12.9).

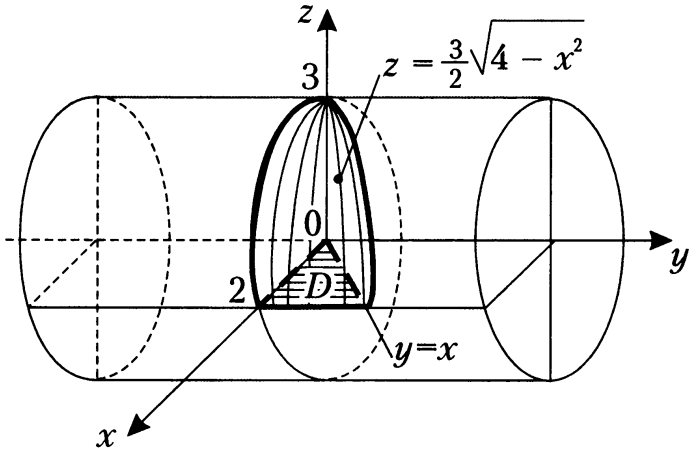


Рис. 12.9

Решение: данное тело сверху ограничено цилиндрической поверхностью $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ или $z=\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$, поэтому

$$V=\iint\limits_D z\,dxdy=\frac{3}{2}\iint\limits_D\sqrt{4-x^2}\,dxdy,$$

где область D есть треугольник, ограниченный в плоскости $0xy$ прямыми $y=x$, $y=0$ и $x=2$. Вычислим полученный интеграл:

$$V=\iint\limits_D z\,dxdy=\frac{3}{2}\iint\limits_D\sqrt{4-x^2}\,dxdy=\frac{3}{2}\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^x\sqrt{4-x^2}\,dy=\frac{3}{2}\int\limits_0^2 dx\,\sqrt{4-x^2}\;y\Big|_0^x=$$

$$=\frac{3}{2}\int\limits_0^2\sqrt{4-x^2}\,x\,dx=\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\int\limits_0^2\left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(4-x^2\right)=-\frac{3}{4}\frac{\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2=0+\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}=4.$$

Двойной интеграл в полярных координатах

Если область интегрирования D такова, что уравнения ограничивающих ее линий проще записываются в полярных координатах, чем в декартовых, то целесообразно применить формулу

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\,\rho d\rho d\varphi,$$

где D' — область изменения полярных координат.

Если область D (рис. 12.10) заключена между лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ и любой луч $\varphi = c\,(\alpha < c < \beta)$ входит в область D через линию $\rho = \rho_1(\varphi)$ и выходит через линию $\rho = \rho_2(\varphi)$, то по аналогии с двойным интегралом в декартовых координатах можно написать формулу

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho d\rho.$$

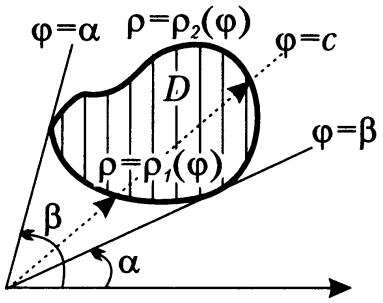


Рис. 12.10

Пример 12.6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностями $x^2 + y^2 - 4y = 0$ и $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

Решение: напомним, что прямоугольные координаты (x, y) любой точки плоскости (рис. 12.11) связаны с *полярными координатами* (ρ, φ) следующими формулами:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$$

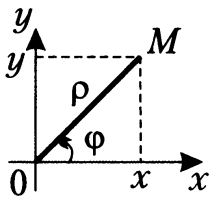


Рис. 12.11

где $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Подставим их в уравнение окружности $x^2 + y^2 - 4y = 0$, получим:

$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi - 4\rho\sin\varphi = 0 \Leftrightarrow \rho^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 4\rho\sin\varphi \,|\, :\rho.$$

Следовательно, полярное уравнение первой окружности $\rho = 4\sin\varphi$. Аналогично получаем полярное уравнение второй окружности $\rho = 2\sin\varphi$.

Для вычисления площади фигуры (рис. 12.12) воспользуемся ее симметричностью.

Итак,

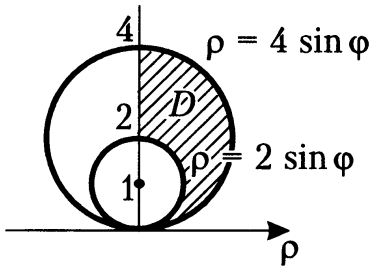


Рис. 12.12

$$S = 2\iint\limits_D dxdy = 2\iint\limits_D \rho d\rho d\varphi = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} \rho d\rho =$$

$$= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(16\sin^2\varphi - 4\sin^2\varphi\right)d\varphi = 12\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{12}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\varphi)\,d\varphi = 6\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 3\pi.$$

Механические приложения двойных интегралов

Приведем примеры применения двойных интегралов.

- Если $\delta(x,y)$ — поверхностная плотность пластины, занимающей область D на плоскости $0xy$, то масса m пластины определяется формулой

$$m = \iint_D \delta(x, y)dxdy.$$

- Статические моменты M_x, M_y пластины относительно координатных осей $0x$ и $0y$ определяют по формулам

$$M_x = \iint_D y\,\delta(x, y)dxdy;\quad M_y = \iint_D x\,\delta(x, y)dxdy\,.$$

- Координаты центра тяжести x_c, y_c пластины находят из соотношений:

$$x_c = \frac{M_y}{m};\ y_c = \frac{M_x}{m}.$$

- Моменты инерции I_x, I_y пластины относительно координатных осей $0x$ и $0y$ определяют по формулам

$$I_x = \iint_D y^2\delta(x, y)dxdy;\ I_y = \iint_D x^2\delta(x, y)dxdy.$$

- Полярный момент инерции I_0 пластины относительно начала координат 0 выражается формулой

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\delta(x,y)dxdy.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 12.4 Для однородных пластин $\delta = \text{const}$, и для простоты будем считать $\delta = 1$.

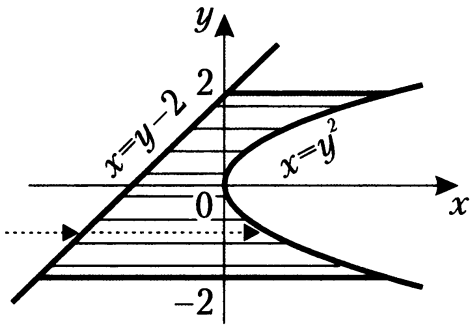


Рис. 12.13

Пример 12.7. Найти статический момент относительно оси $0x$ однородной пластины, ограниченной линиями $y = x + 2$, $y = 2$, $y = -2$ и $x = y^2$.

Решение: статический момент относительно оси $0x$ однородной пластины

$$M_x = \iint_D y\,dxdy,$$

где область интегрирования D ограничена слева прямой $x = y - 2$, справа параболой $x = y^2$, снизу прямой $y = -2$ и сверху прямой $y = 2$ (рис. 12.13).

Выбирая внутреннее интегрирование по переменной y, вычислим интеграл

$$M_x = \iint\limits_D y\,dxdy = \int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{y-2}^{y^2} y dx = \int\limits_{-2}^{2} y\,dy\, x\Big|_{y-2}^{y^2} \int\limits_{-2}^{2} y\left(y^2 - y + 2\right) dy =$$

$$= \left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{3} + 2\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = 4 - \frac{8}{3} + 4 = 5\frac{1}{3}.$$

Тройной интеграл в прямоугольных координатах

Под областью V, на которую распространен тройной интеграл, понимается замкнутая пространственная область, ограниченная снизу поверхностью $z = z_1(x,y)$, сверху поверхностью $z = z_2(x,y)$ $(z_1 \le z_2)$, а по бокам — цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси $0z$ (рис. 12.14). В частном случае образующие цилиндрической поверхности могут быть равны нулю.

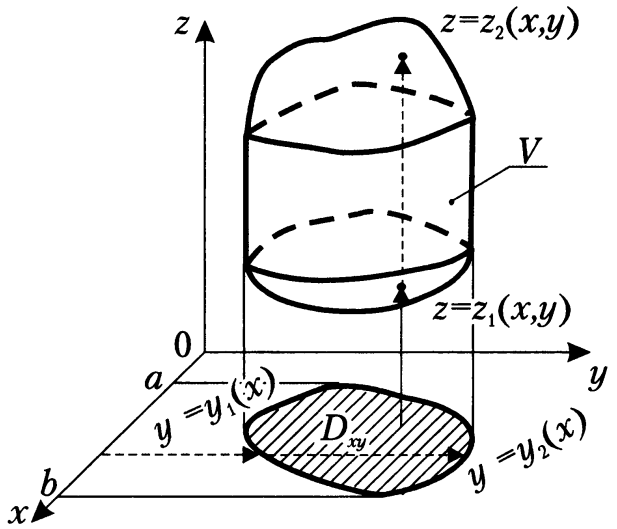


Рис. 12.14

Переменные x и y изменяются в плоской области D_{xy}, которая является проекцией области V на координатную плоскость $0xy$.

Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в области V, то тройной интеграл в декартовых координатах записывается так:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dv = \iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz.$$

Основные свойства тройных интегралов аналогичны свойствам двойных интегралов. Вычисляется тройной интеграл по формуле

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz.$$

Если область D_{xy} ограничена непрерывными кривыми $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ $(y_1(x) \le y_2(x))$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, то вычисление тройного интеграла сводится к трем последовательным интегрированиям по формуле

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz. \qquad (12.3)$$

Порядок вычисления тройного интеграла в декартовых координатах:

1. Проецируем область V на плоскость $0xy$. Получаем область D_{xy}.
2. Через произвольную точку, лежащую в области D_{xy}, проводим прямую, параллельную оси $0z$. Определяем уравнение поверхности $z = z_1(x,y)$, через которую прямая входит в область V, и уравнение поверхности $z = z_2(x,y)$, через которую прямая выходит из области V. Сводим вычисление тройного интеграла к двойному, причем, вычисляя внутренний интеграл, следует считать x и y постоянными:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

3. Записываем двойной интеграл в виде повторного и вычисляем полученный трехкратный интеграл:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 12.5 Иногда удобнее проецировать область V не на плоскость $0xy$, а на другие ($0xz$ или Oyz) координатные плоскости.

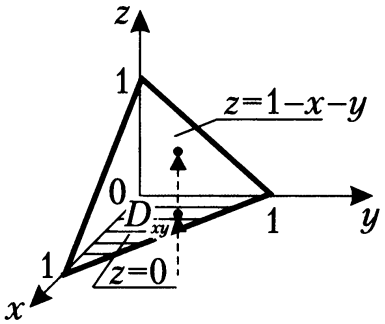


Рис. 12.15

Пример 12.8. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x + y + z)\,dxdydz$, где V — область, ограниченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$ (рис. 12.15).

Решение: область V имеет нижнюю границу $z = 0$ и верхнюю границу $x + y + z = 1$ или, что то же самое, $z = 1 - x - y$. Вычислим данный интеграл по формуле (12.3):

$$\iiint\limits_V (x + y + z)\,dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_0^{1-x-y} (x + y + z)\,dz.$$

Область D_{xy} проецируется в отрезок $[0; 1]$ на оси $0x$ и имеет границы $y = 0$ и $y = 1 - x$ (получаем из уравнения плоскости $x + y + z = 1$ при $z = 0$). Переходя к повторному интегрированию, получим:

$$\iiint\limits_V (x + y + z)\,dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} (x + y + z)\,dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left((x+y)z + \frac{z^2}{2} \right) \Bigg|_0^{1-x-y} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left((x+y)(1-x-y) + \frac{(1-x-y)^2}{2} \right) dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left((x+y) - (x+y)^2 + \frac{(1-x-y)^2}{2} \right) dy =$$

$$= \int_0^1 dx \left(\frac{(x+y)^2}{2} - \frac{(x+y)^3}{3} - \frac{(1-x-y)^3}{6} \right) \Bigg|_0^{1-x} =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3} + \frac{x^3}{3} + \frac{(1-x)^3}{6} \right) dx = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x}{3} + \frac{x^4}{12} - \frac{(1-x)^4}{24} \Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{12-4-8+2+1}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}.$$

Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах

Тройной интеграл в цилиндрических координатах

Положение точки M в пространстве (рис. 12.16) можно определить *цилиндрическими координатами* ρ, φ, z, где ρ, φ ($\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$) — полярные координаты проекции точки M_1 на плоскость $0xy$, а z ($-\infty < z < +\infty$) — ее аппликата.

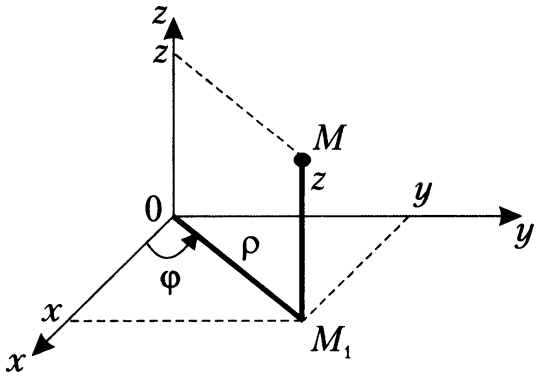


Рис. 12.16

Связь между прямоугольными (x, y, z) и цилиндрическими (ρ, φ, z) координатами точки выражается формулами:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi; \\ y = \rho \sin \varphi; \\ z = z. \end{cases}$$

Переход в тройном интеграле от декартовых координат к цилиндрическим осуществляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(\rho\cos\varphi;\ \rho\sin\varphi;\ z)\ \rho d\rho d\varphi dz,$$

где V' — область изменения цилиндрических координат.

Для расстановки пределов интегрирования в повторном интеграле предположим, что поверхность, ограничивающая область V, такова, что прямая, параллельная оси $0z$, пересекает ее не более чем в двух точках. Уравнения входа этой прямой в область V и выхода из нее считаем заданными в цилиндрических координатах:

$$z = z_1(\rho, \varphi);\ z = z_2(\rho, \varphi).$$

Если область V проецируется на плоскость $0xy$ в плоскую область D, то тройной интеграл

$$\iiint\limits_{V'} f(\rho\cos\varphi;\ \rho\sin\varphi;\ z)\ \rho d\rho d\varphi dz = \iint\limits_D \rho\ d\rho d\varphi \int\limits_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} f(\rho\cos\varphi;\ \rho\sin\varphi;\ z)dz.$$

После вычисления внутреннего интеграла по переменной z (ρ и φ считаем постоянными) вычисляем двойной интеграл по плоской области D в полярных координатах. Окончательно получаем:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho\ d\rho \int\limits_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} f(\rho\cos\varphi;\ \rho\sin\varphi;\ z)dz.$$

Пример 12.9. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right) dxdydz$, где область V ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = 2z$ и $z = 1$.

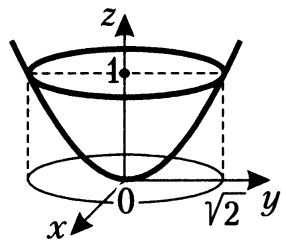


Рис. 12.17

Решение: построим область V, которая снизу ограничена параболоидом $x^2 + y^2 = 2z$, а сверху — плоскостью $z = 1$ (рис. 12.17). Введем цилиндрические координаты ρ, φ, z, для которых

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi; \\ z = z. \end{cases}$$

Поскольку $x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2$, то уравнение параболоида в цилиндрических координатах примет вид $\rho^2 = 2z$ или $z = \dfrac{\rho^2}{2}$.

В области V координата z меняется от параболоида $z = \dfrac{\rho^2}{2}$ до плоскости $z = 1$.

Область V проецируется на плоскость $0xy$ в плоскую область D, ограниченную окружностью $x^2 + y^2 = 2$. Последнее уравнение получено в результате решения системы уравнений плоскости $z = 1$ и параболоида $x^2 + y^2 = 2z$. Уравнение ок-

ружности $x^2 + y^2 = 2$ в полярных координатах имеет вид $\rho = \sqrt{2}$. В области D координата φ меняется от 0 до 2π, а ρ — от 0 до уравнения окружности $\rho = \sqrt{2}$.

Итак,

$$\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right) dxdydz = \iiint\limits_{V'} \rho^2 \rho d\rho d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \rho^3 d\rho \int\limits_{\frac{\rho^2}{2}}^{1} dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \left(1 - \frac{\rho^2}{2}\right) d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{12}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = 2\pi\left(1 - \frac{8}{12}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Тройной интеграл в сферических координатах

В *сферических координатах* положение точки M в пространстве определяется числами r, φ и θ, где $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ и $0 \leq \theta \leq \pi$ (рис. 12.18).

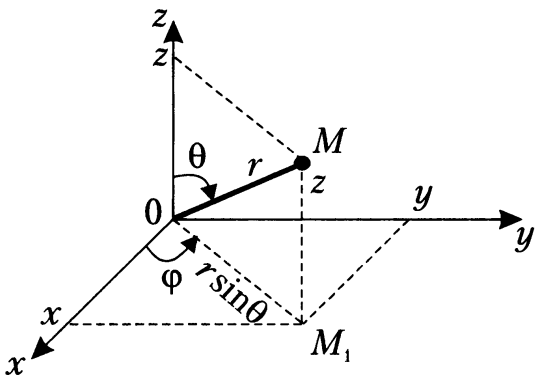


Рис. 12.18

Связь между прямоугольными (x, y, z) и сферическими (r, φ, θ) координатами точки выражается формулами

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta; \\ y = r\sin\varphi\sin\theta; \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

Переход в тройном интеграле от декартовых координат к сферическим осуществляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f\left(r\cos\varphi\sin\theta;\, r\sin\varphi\sin\theta;\, r\cos\theta\right) r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr,$$

где V' — область изменения сферических координат.

Пределы интегрирования в повторном интеграле находят после того, как уравнения границ области V будут записаны в сферических координатах. Тогда

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \sin\theta\, d\theta \int\limits_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)} f\left(r\cos\varphi\sin\theta;\, r\sin\varphi\sin\theta;\, r\cos\theta\right) r^2 dr.$$

Рассмотрим вычисление тройного интеграла в сферических координатах на примере.

Пример 12.10. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$, где область V ограничена поверхностью $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 = a^2\left(x^2+y^2\right)$.

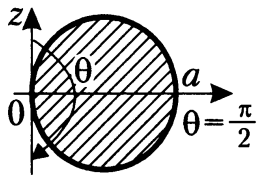


Рис. 12.19

Решение: для того чтобы представить вид поверхности, перейдем к сферическим координатам. При использовании формул

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta; \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta; \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

и с учетом того, что $x^2+y^2+z^2 = r^2$, уравнение поверхности примет вид $r = a\sin\theta$. В плоскости $0z\theta$ уравнение $r = a\sin\theta$ представляет собой границу круга (рис. 12.19).

Поскольку в уравнении поверхности φ отсутствует, то поверхность получена вращением этого круга вокруг оси $0z$. Следовательно,

$$\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz = \iiint\limits_{V'} r^2 r^2\sin\theta\, d\varphi d\theta dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{a\sin\theta} r^4\, dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \left.\frac{r^5}{5}\right|_0^{a\sin\theta} = 2\pi\frac{1}{5}\int\limits_0^{\pi} a^5\sin^6\theta\, d\theta = \frac{2\pi a^5}{5}\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{2^3}\left(1-\cos 2\theta\right)^3 d\theta =$$

$$= \frac{\pi a^5}{20}\int\limits_0^{\pi}\left(1-3\cos 2\theta+3\cos^2 2\theta+\cos^3\theta\right)d\theta =$$

$$= \frac{\pi a^5}{20}\int\limits_0^{\pi}\left(1-3\cos 2\theta+\frac{3}{2}\left(1+\cos 4\theta\right)+\cos^2\theta\cos\theta\right)d\theta =$$

$$= \frac{\pi a^5}{20}\left[\left(\theta-\frac{3}{2}\sin 2\theta+\frac{3}{2}\theta+\frac{3}{8}\sin 4\theta\right)\Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi}\left(1-\sin^2\theta\right)d\sin\theta\right] =$$

$$= \frac{\pi a^5}{20}\left(\frac{5}{2}\pi+\left(\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}\right)\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{\pi a^5}{20}\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi^2 a^5}{8}.$$

Приложения тройных интегралов

Приведем примеры применения тройных интегралов.

- Объем тела, занимающего область V в пространстве, вычисляется по формулам:
  - в декартовых координатах:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz;$$

- в цилиндрических координатах:

$$V = \iiint_{V'} \rho \, d\varphi d\rho dz;$$

- в сферических координатах:

$$V = \iiint_{V'} r^2 \sin\theta \, d\varphi d\theta dr.$$

- Если $\delta(x,y,z)$ — плотность тела, занимающего область V в пространстве, то масса m тела определяется по формуле

$$m = \iiint_{V} \delta(x, y, z) \, dxdydz.$$

- Статические моменты M_{xy}, M_{yz} и M_{xz} тела относительно координатных плоскостей $0xy$, $0yz$ и $0xz$ определяют по формулам

$$M_{xy} = \iiint_{V} z \, \delta(x,y,z) \, dxdydz; \; M_{yz} = \iiint_{V} x \, \delta(x,y,z) \, dxdydz;$$
$$M_{xz} = \iiint_{V} y \, \delta(x,y,z) \, dxdydz.$$

- Координаты центра тяжести x_c, y_c, z_c тела находят из соотношений

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}; \; y_c = \frac{M_{xz}}{m}; \; z_c = \frac{M_{xy}}{m}.$$

- Моменты инерции I_{xy}, I_{yz} и I_{xz} тела относительно координатных плоскостей $0xy$, $0yz$ и $0xz$ определяют по формулам

$$I_{xy} = \iiint_{V} z^2 \delta(x,y,z) \, dxdydz; \; I_z = \iiint_{V} x^2 \delta(x,y,z) \, dxdydz;$$
$$I_{xz} = \iiint_{V} y^2 \delta(x,y,z) \, dxdydz.$$

- Моменты инерции I_x, I_y и I_z тела относительно координатных осей $0x$, $0y$ и $0z$ определяют по формулам

$$I_x = \iiint_{V} (y^2 + z^2) \delta(x,y,z) \, dxdydz; \; I_y = \iiint_{V} (x^2 + z^2) \, \delta(x,y,z) \, dxdydz;$$
$$I_z = \iint_{D} (x^2 + y^2) \, \delta(x,y,z) dxdydz.$$

- Полярный момент инерции I_0 тела относительно начала координат 0 определяется по формуле

$$I_0 \iint_{D} (x^2 + y^2 + z^2) \delta(x, y, z) dxdydz.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 12.6 Для однородных тел $\delta = \text{const}$, и для простоты мы будем считать $\delta = 1$.

Пример 12.11. Найти массу шара $x^2 + y^2 + (z-2)^2 \le 4$, если его плотность в каждой точке равна расстоянию от этой точки до начала координат.

Решение: в сферических координатах плотность шара определяется формулой $\delta(x,y,z) = r$, а уравнение поверхности шара — $r = 4\cos\theta$.

Масса шара вычисляется с помощью тройного интеграла:

$$m = \iiint\limits_V \delta(x,y,z)\, dxdydz,$$

или, переходя к сферическим координатам, по формуле

$$m = \iiint\limits_V \delta(r,\varphi,\theta)\, r^2 \sin\theta\, d\varphi d\theta dr =$$

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{4\cos\theta} r^3\, dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{4\cos\theta} =$$

$$= 2\pi 64 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos^4\theta\, d\theta = -128\pi \left.\frac{\cos^5\theta}{5}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{128\pi}{5}.$$

Криволинейный интеграл по длине дуги (I рода)

Кривая называется *гладкой*, если в каждой ее точке существует касательная, непрерывно изменяющаяся вдоль кривой.

Пусть функция $f(M) = f(x, y, z)$ непрерывна в каждой точке $M(x, y, z)$ гладкой кривой L. Разобьем кривую L произвольным образом на n частей длиной Δl_1, Δl_2, ..., Δl_n. Обозначим $\max \Delta l_i = \lambda$. В каждой части возьмем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, тогда предел последовательности интегральных сумм $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i$ при $\lambda \to 0$ и $n \to \infty$ называется *криволинейным интегралом по длине дуги*, или *криволинейным интегралом I рода*:

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i = \int\limits_L f(x, y, z)\, dl.$$

Основные свойства криволинейных интегралов I рода:

- Криволинейный интеграл не зависит от направления пути интегрирования, т. е.

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)\, dl = \int\limits_{BA} f(x, y, z)\, dl.$$

- Если кривая AB разбита на части AC и CB, то

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)\, dl = \int\limits_{AC} f(x, y, z)\, dl + \int\limits_{CB} f(x, y, z)\, dl.$$

- Если $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ — непрерывные функции на L и α, β — постоянные числа, то

$$\int_L \big(\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)\big)dl = \alpha \int_L f(x, y, z)dl + \beta \int_L g(x, y, z)dl.$$

Вычисление криволинейного интеграла I рода

Вычисление криволинейного интеграла I рода зависит от того, каким образом задана кривая интегрирования.

- Если пространственная кривая L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, то

$$\int_L f(x,y,z)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t);y(t);z(t))\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}\,dt.$$

- В частности, для плоской кривой L: $x = x(t)$; $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$,

$$\int_L f(x,y)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t);y(t))\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt.$$

- Если плоская кривая L определена уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$, то

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f(x;y(x))\sqrt{1 + (y'_x)^2}\,dx. \qquad (12.4)$$

- Если кривая L задана полярным уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, то

$$\int_L f(x,y)dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'_\varphi)^2}\,d\varphi. \qquad (12.5)$$

Пример 12.12. Вычислить интеграл $\int_L x^2 dl$, где L — отрезок прямой AB, $A(3; 1)$, $B(2; 3)$.

Решение: найдем уравнение прямой AB:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A};\ \frac{x-3}{2-3} = \frac{y-1}{3-1};\ \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2}.$$

Отсюда уравнение прямой AB будет иметь вид $y = -2x + 7$, где $2 \le x \le 3$. По формуле (12.4) вычислим интеграл:

$$\int_L x^2 dl = \int_2^3 x^2\sqrt{1 + \big((-2x+7)'\big)^2}\,dx = \int_2^3 x^2\sqrt{5}\,dx = \sqrt{5}\,\frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = \frac{19\sqrt{5}}{3}.$$

Пример 12.13. Вычислить интеграл $\int_L \sqrt{x^2 + y^2}\,dl$, где L — окружность $x^2 + y^2 = 2x$.

Решение: изобразим окружность L, преобразовав ее уравнение:

$$x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

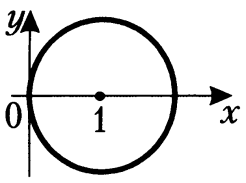


Рис. 12.20

Это окружность с центром в точке (1; 0) и радиусом 1 (рис. 12.20).

Перейдем к полярным координатам в уравнении окружности, получим: $\rho = 2\cos\varphi$, где $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Вычислим криволинейный интеграл по формуле (12.5), учитывая равенство $x^2 + y^2 = \rho^2$:

$$\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho\sqrt{\rho^2 + \left((2\cos\varphi)'\right)^2}\,d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\varphi\sqrt{4\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi}\,d\varphi = 2\sqrt{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi = 4\sin\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4(1+1) = 8.$$

Криволинейный интеграл по координатам (II рода)

Пусть функция $f(M) = f(x,y,z)$ непрерывна в каждой точке $M(x, y, z)$ гладкой кривой L. Разбив произвольным образом кривую L на n частей l_1, l_2, ..., l_n и выбрав в каждой из них произвольно точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, построим интегральные суммы:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i; \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta y_i; \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta z_i,$$

где Δx_i, Δy_i, Δz_i — длины проекций частичных дуг l_i, $i = 1, \ldots, n$, на соответствующие координатные оси. Тогда пределы

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\Delta x_i = \int_L f(x,y,z)dx;$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\Delta y_i = \int_L f(x,y,z)dy;$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta z_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\Delta z_i = \int_L f(x,y,z)dz$$

называются *криволинейными интегралами по координатам*, или *криволинейными интегралами II рода*.

Сумма интегралов $\int\limits_L P(x,y,z)\,dx + \int\limits_L Q(x,y,z)\,dy + \int\limits_L R(x,y,z)\,dz$ обозначается как криволинейный интеграл

$$\int\limits_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz.$$

Если кривая замкнутая, то обозначают

$$\oint\limits_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz.$$

Основные свойства криволинейных интегралов II рода:

При изменении направления интегрирования интеграл меняет свой знак:

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = -\int\limits_{BA} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Сказанное верно и для замкнутой кривой, при этом выбор точки начала обхода безразличен. Положительным направлением обхода считается то, при котором область, ограниченная этой кривой, остается слева (для плоской кривой это движение против часовой стрелки (рис. 12.21)).

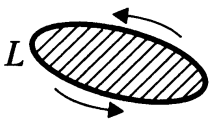


Рис. 12.21

Остальные свойства такие же, как и у криволинейного интеграла I рода.

Вычисление криволинейного интеграла II рода

Рассмотрим различные случаи задания кривой интегрирования.

- Если пространственная кривая L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, причем перемещение от точки A к точке B происходит при изменении параметра t от t_1 до t_2, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} \big[P\big(x(t);y(t);z(t)\big)x'(t) +$$

$$+Q\big(x(t);y(t);z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t);y(t);z(t)\big)z'(t)\big]dt. \qquad (12.6)$$

- В частном случае для плоской кривой L $x = x(t)$, $y = y(t)$, причем перемещение от точки A к точке B происходит при изменении параметра t от t_1 до t_2. Криволинейный интеграл вычисляется по формуле

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} \big[P\big(x(t);y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t);y(t)\big)y'(t)\big]\,dt. \qquad (12.7)$$

- Если плоская кривая L определена уравнением $y = y(x)$, причем перемещение от точки A к точке B происходит при изменении x от a до b, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} \big[P\big(x;y(x)\big) + Q\big(x;y(x)\big)y'(t)\big]\,dx.$$

Пример 12.14. Вычислить интеграл $\int\limits_L xdx + ydy + (x + y - 1)\,dz$, где L — отрезок прямой AB, $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 4)$.

Решение: найдем уравнение прямой AB в параметрическом виде:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} = t;$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3} = t; \begin{cases} x = t + 1; \\ y = 2t + 1; \\ z = 3t + 1. \end{cases}$$

Найдем дифференциалы переменных:

$$\begin{cases} dx = 1dt; \\ dy = 2dt; \\ dz = 3dt. \end{cases}$$

На прямой (AB) x изменяется от 1 до 2, тогда t будет изменяться от 0 до 1. В этом случае по формуле (12.6):

$$\int\limits_L xdx + ydy + (x + y - 1)\,dz = \int\limits_0^1 \left[(t+1)\cdot 1 + (2t+1)\cdot 2 + (t + 1 + 2t + 1 - 1)\cdot 3\right] dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (14t + 6)\,dt = \left(7t^2 + 6t\right)\Big|_0^1 = 13.$$

Пример 12.15. Вычислить интеграл $\int \left(x^2 - 2xy\right) dx + \left(y^2 - 2xy\right) dy$, где L — дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(-1; 1)$ до точки $B(1; 1)$.

Решение: поскольку $y = x^2$, то $y' = 2x$. На дуге (AB) x изменяется от -1 до 1, тогда, используя формулу (12.7), получим:

$$\int\limits_L \left(x^2 - 2xy\right) dx + \left(y^2 - 2xy\right) dy = \int\limits_{-1}^1 \left[\left(x^2 - 2x\left(x^2\right)\right) + \left(\left(x^2\right)^2 - 2x\left(x^2\right)\right)2x\right] dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^1 \left(2x^5 - 4x^4 - 2x^3 + x^2\right) dx = \left(\frac{x^6}{3} - \frac{4x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^1 = -\frac{14}{15}.$$

Формула Грина

Интеграл по замкнутому контуру L можно преобразовать в двойной интеграл по области D, ограниченной этим контуром, и наоборот, используя *формулу Грина*

$$\oint\limits_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

где функции $P(x;y)$, $Q(x;y)$ и их частные производные первого порядка должны быть непрерывными в области D и на контуре L.

При этом обход контура L выбирается таким образом, что область D остается слева.

Пример 12.16. Вычислить интеграл $\oint\limits_L 2\left(x^2+y^2\right)dx+(x+y)^2dy$, где L — контур треугольника ABC с вершинами в точках $A(1;1)$, $B(2;2)$, $C(1;3)$, пробегаемый против хода часовой стрелки (рис. 12.22).

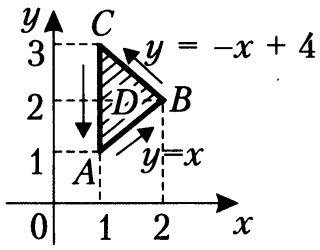


Рис. 12.22

Решение: здесь $P(x;y)=2\left(x^2+y^2\right)$, $Q(x;y)=(x+y)^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x+2y$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=4y$.

Подставляя эти значения в формулу Грина, получим:

$$\oint\limits_L 2\left(x^2+y^2\right)dx+(x+y)^2dy=\iint\limits_D(2x+2y-4y)\,dxdy=2\int\limits_1^2 dx\int\limits_x^{-x+4}(x-y)dy=$$

$$=2\int\limits_1^2 dx\left(xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_x^{-x+4}=2\int\limits_1^2\left(-x^2+4x-\frac{(4-x)^2}{2}-x^2+\frac{x^2}{2}\right)dx=$$

$$=2\int\limits_1^2\left(-2x^2+8x-8\right)dx=-4\int\limits_1^2(x-2)^2dx=-4\frac{(x-2)^3}{3}\Bigg|_1^2=-\frac{4}{3}.$$

Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Для того чтобы криволинейный интеграл $\int P(x;y)dx+Q(x;y)dy$ не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Если же, кроме того, L есть замкнутая кривая, то

$$\int\limits_L P(x;y)dx+Q(x;y)dy=0.$$

Пример 12.17. Вычислить интеграл $\int\limits_L x^2dx+y^2dy$, где L — верхняя половина окружности $x^2+y^2=4$, пробегаемая по часовой стрелке (рис. 12.23).

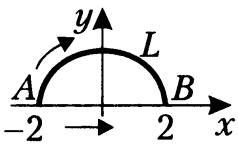


Рис. 12.23

Решение: здесь $P(x;y)=x^2$, $Q(x;y)=^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=0$ и $\dfrac{\partial P}{\partial y}=0$. Таким образом, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$. Следовательно, интеграл не зависит от пути интегрирования

и можно интегрировать по отрезку прямой AB, уравнение которого $y = 0$ при $-2 \le x \le 2$. Учитывая, что $dy = 0$, получим

$$\int_L x^2\,dx + y^2\,dy = \int_{AB} x^2\,dx + y^2\,dy = \int_{-2}^{2} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 12.7 Если интеграл зависит не от пути интегрирования, а только от начальной точки $M_0(x_0; y_0)$ и конечной точки $M(x; y)$ (рис. 12.24), то его принято записывать так:

$$\int_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = \int_{x_0}^{x} P(x;y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x;y)\,dy,$$

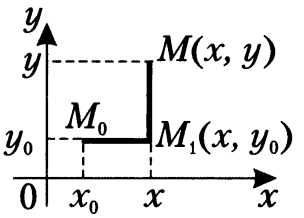


Рис. 12.24

т. е. интегрирование ведется по ломаной M_0M_1M.

ЗАМЕЧАНИЕ 12.8 Для того чтобы криволинейный интеграл $\int_L P(x;y;z)\,dx + Q(x;y;z)\,dy + R(x;y;z)\,dz$ по пространственной кривой L не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$.

Аналогично имеет место формула

$$\int_{(x_0;y_0;z_0)}^{(x;y;z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{x_0}^{x} P(x;y_0;z_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x;y;z_0)\,dy + \int_{z_0}^{z} R(x;y;z)\,dz.$$

Приложения криволинейных интегралов

Приведем примеры применения криволинейных интегралов.

- Длину дуги l плоской или пространственной линии AB определяют по формуле

$$l = \int_{AB} dl. \qquad (12.8)$$

- Если $\delta(x,y,z)$ — линейная плотность вещества в точках дуги, то массу $\delta(x,y,z)$ дуги mAB определяют по формуле

$$m = \int_{AB} \delta(x;y;z)\,dl.$$

- Координаты центра тяжести x_c, y_c, z_c дуги AB находят из соотношений

$$x_c = \frac{\int_{AB} \delta(x;y;z)\,dl}{m};\quad y_c = \frac{\int_{AB} \delta(x;y;z)\,dl}{m};\quad z_c = \frac{\int_{AB} z\delta(x;y;z)\,dl}{m}.$$

- Статические моменты M_x и M_y плоской дуги AB относительно координатных осей $0x$ и $0y$ определяют по формулам

$$M_x = \int_{AB} y\,\delta(x;y)\,dl;\ M_y = \int_{AB} x\,\delta(x;y)\,dl,$$

где $\delta(x,y)$ — линейная плотность вещества в точках плоской дуги.

- Моменты инерции I_x, I_y плоской дуги AB относительно координатных осей $0x$ и $0y$ определяют по формулам

$$I_x = \int_{AB} y^2\,\delta(x,y)\,dl;\ I_y = \int_{AB} x^2\,\delta(x,y)\,dl. \qquad (12.9)$$

- Полярный момент инерции I_0 плоской дуги AB относительно начала координат 0 определяют по формуле

$$I_0 = \int_{AB} (x^2 + y^2)\,\delta(x,y)\,dl.$$

- Площадь S фигуры, расположенной в плоскости $0xy$ и ограниченной замкнутой линией L, вычисляют по формуле

$$S = \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx.$$

- Работу E, совершаемую силой $\vec{F} = \{P(x,y,z);\ Q(x,y,z);\ R(x,y,z)\}$, приложенной в точке $M(x;y;z)$ при перемещении ее по дуге AB, вычисляют по формуле

$$E = \int_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 12.9 Для однородных линий $\delta = \text{const}$, и для простоты будем считать $\delta = 1$.

Пример 12.18. Найти момент инерции относительно оси $0x$ четверти однородной окружности $x^2 + y^2 = 9$, расположенной в первом квадранте.

Решение: плотность окружности $\delta = 1$, следовательно, по формуле (12.9)

$$I_x = \int_{AB} y^2\,dl.$$

Для удобства вычислений перейдем к параметрическим уравнениям окружности $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$. Тогда

$$I_x = \int_{AB} y^2\,dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\sin^2 t\,\sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t}\,dt = 27\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt =$$

$$= 27\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{27}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{27\pi}{4}.$$

Поверхностный интеграл по площади поверхности (I рода)

Пусть S — гладкая поверхность, $f(M) = f(x; y; z)$ — непрерывная функция на поверхности S. Разобьем произвольным образом поверхность S на n поверхностей, площади которых ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n. На каждой поверхности S_i возьмем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$.

Обозначим λ_i диаметр поверхности S_i, а $\lambda = \max \lambda_i$ — наибольший из диаметров всех поверхностей S_i данного разбиения. Тогда предел последовательности интегральных сумм $\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$ при $\lambda \to 0$ и $\to \infty$, т. е. при неограниченном увеличении частичных поверхностей, когда все частичные поверхности стягиваются в точку, называется *поверхностным интегралом по площади поверхности* или *поверхностным интегралом I рода*:

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i = \iint_S f(M)dS.$$

Основные свойства поверхностных интегралов I рода:

- Поверхностный интеграл не зависит от выбора стороны поверхности интегрирования, т. е.

$$\iint_{S^+} f(M)\,dS = \iint_{S^-} f(M)dS,$$

где S^+ и S^- — стороны поверхности S.

- Если поверхность S разбита на непересекающиеся части S_1 и S_2, то

$$\iint_S f(M)\,dS = \iint_{S_1} f(M)\,dS + \iint_{S_2} f(M)\,dS.$$

- Если $f(M)$ и $g(M)$ — непрерывные функции на S и α, β — постоянные числа, то

$$\iint_S \big(\alpha f(M) + \beta g(M)\big)dS = \alpha \iint_S f(M)dS + \beta \iint_S g(M)dS.$$

Вычисление поверхностного интеграла I рода

Если поверхность S задана уравнением $z = \varphi(x; y)$, однозначно проецируется на какую-либо координатную плоскость, например плоскость $0xy$, и область D_{xy} является проекцией поверхности S на плоскость $0xy$ (рис. 12.25), то поверхностный интеграл I рода можно вычислить по формуле

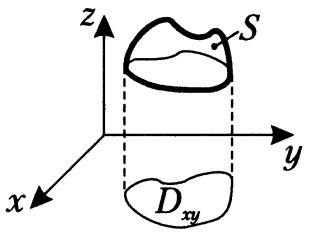


Рис. 12.25

$$\iint_S f(x; y; z)dS =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} f\left(x; y; \varphi(x; y)\right)\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

Пример 12.19. Вычислить интеграл $\iint\limits_S \frac{dS}{(3-x-z)^2}$, где S — часть плоскости $x+2y+z=1$, расположенная в 1-м октанте.

Решение: поверхность интегрирования S есть треугольник ABC (рис. 12.26). Проекцией D_{xy} поверхности S на координатную плоскость $0xy$ является треугольник $0AB$. Уравнение поверхности однозначно разрешимо относительно z: $z=1-x-2y$, отсюда $\frac{\partial z}{\partial x}=-1$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-2$. Пользуясь формулой (12.8), преобразуем данный поверхностный интеграл в двойной интеграл по области D_{xy}:

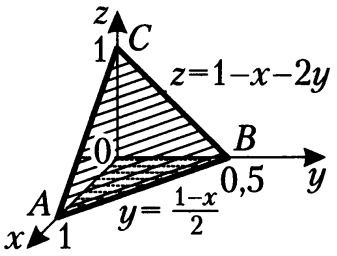


Рис. 12.26

$$\iint\limits_S \frac{dS}{(3-x-z)^2} = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{\sqrt{1+(-1)^2+(-2)^2}}{\left(3-x-(1-x-2y)\right)^2}dxdy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\frac{1-x}{2}} \frac{\sqrt{6}dy}{(2+2y)^2} = -\frac{\sqrt{6}}{4}\int\limits_0^1 dx \frac{1}{1+y}\Bigg|_0^{\frac{1-x}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{4}\int\limits_0^1\left(\frac{2}{3-x}-1\right)dx =$$

$$= -\frac{\sqrt{6}}{4}\left(-2\ln(3-x)-x\right)\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{6}}{4}(2\ln 2+1-2\ln 3) = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(2\ln\frac{2}{3}+1\right).$$

Поверхностный интеграл по координатам (II рода)

Пусть S — гладкая поверхность, на которой выбрана одна из двух сторон, определяемая направлением нормали $\vec{n}\{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$, функция $f(M)=f(x,y,z)$ непрерывна в каждой точке $M(x, y, z)$ поверхности S. Разбив произвольным образом поверхность S на n поверхностей S_1, S_2, ..., S_n и выбрав на каждой из них произвольно точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, построим интегральные суммы:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i;y_i;z_i)\left(\Delta\sigma_{yz}\right)_i;\ \sum_{i=1}^n f(x_i;y_i;z_i)\left(\Delta\sigma_{xz}\right)_i;\ \sum_{i=1}^n f(x_i;y_i;z_i)\left(\Delta\sigma_{xy}\right)_i,$$

где $(\Delta\sigma_{yz})_i$, $(\Delta\sigma_{xz})_i$, $(\Delta\sigma_{xy})_i$ — площади проекций поверхностей S_i, $i=1, \ldots, n$ на соответствующие координатные плоскости. Тогда пределы

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^n f(x_i;y_i;z_i)\left(\Delta\sigma_{yz}\right)_i = \iint\limits_S f(x;y;z)dydz,$$

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)(\Delta\sigma_{xz})_i = \iint_S f(x;y;z)dxdz,$$

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)(\Delta\sigma_{xy})_i = \iint_S f(x;y;z)dxdy$$

называются *поверхностными интегралами по координатам*, или *поверхностными интегралами II рода.*

Сумма интегралов $\iint_S P(x,y,z)\,dydz + \iint_S Q(x,y,z)\,dxdz + \iint_S R(x,y,z)\,dxdy$ обозначается как поверхностный интеграл

$$\iint_S P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dxdz + R(x,y,z)\,dxdy.$$

Если поверхность замкнутая, то обозначают

$$\oiint_S P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dxdz + R(x,y,z)\,dxdy.$$

Поверхностный интеграл по координатам обладает свойствами, аналогичными свойствам интеграла по площади, за исключением одного: при изменении стороны поверхности поверхностный интеграл II рода меняет свой знак, например:

$$\iint_{S^+} R(x;y;z)dxdy = -\iint_{S^-} R(x;y;z)\,dxdy,$$

где S^+ и S^- — стороны поверхности S.

Вычисление поверхностных интегралов II рода

Пусть $z = \varphi(x;y)$ — уравнение поверхности S и пусть S однозначно проецируется в область D_{xy} на плоскости $0xy$, тогда

$$\iint_S R(x;y;z)\,dxdy = \pm\iint_{D_{xy}} R\big(x;y;\varphi(x;y)\big)\,dxdy, \qquad (12.10)$$

где знак «+» берется в том случае, если на выбранной стороне поверхности $\cos\gamma > 0$, и знак «-» — если $\cos\gamma < 0$, γ — угол между нормалью к поверхности и осью $0z$.

Аналогично,

$$\iint_S Q(x;y;z)\,dxdz = \pm\iint_{D_{xz}} Q\big(x;\psi(x;z);z\big)\,dxdz, \qquad (12.11)$$

где $y = \psi(x;z)$ — уравнение поверхности S; D_{xz} — проекция поверхности на плоскость $0xz$; знак «+» берется, если $\cos\beta > 0$, и знак «–» — если $\cos\beta < 0$, β — угол между нормалью к поверхности и осью $0y$.

Аналогично,

$$\iint_S P(x;y;z)\,dydz = \pm\iint_{D_{yz}} P\big(\chi(y;z);y;z\big)\,dydz, \qquad (12.12)$$

где $x = \chi(y;z)$ — уравнение поверхности S; D_{yz} — проекция поверхности на плоскость $0yz$; знак «+» берется, если $\cos\alpha > 0$, и знак «-» — если $\cos\alpha < 0$, α — угол между нормалью к поверхности и осью $0x$.

Зависимость между поверхностными интегралами I и II рода

Зависимость между поверхностными интегралами I и II рода выражается формулой

$$\iint\limits_{S^+} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_{S} [P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma]dS,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали $\vec{n}$ к выбранной стороне поверхности S. Если поверхность S задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, то

$$\cos\alpha = \pm\frac{F'_x}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}};\ \cos\beta = \pm\frac{F'_y}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}};$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{F'_z}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}},$$

где знак перед дробью выбирается в зависимости от стороны поверхности.

Пример 12.20. Вычислить интеграл $I = \iint\limits_S 2zdxdy + ydxdz - xydydz$, где поверхность S представляет собой верхнюю сторону треугольника с вершинами в точках $A(1; 0; 0)$, $B(0; -1; 0)$ и $C(0; 0; 1)$ (рис. 12.27).

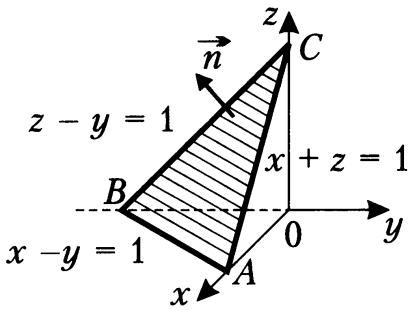


Рис. 12.27

Решение: уравнение поверхности интегрирования имеет вид $x - y + z = 1$. Нормаль $\vec{n}\{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$ составляет острый угол с осью $0z$ ($\cos\gamma > 0$), тупой угол с осью $0y$ ($\cos\beta < 0$) и острый угол с осью $0x$ ($\cos\alpha > 0$).

Разобьем данный поверхностный интеграл по координатам на три слагаемых интеграла:

$$I = \iint\limits_S 2zdxdy + ydxdz - xydydz = 2\iint\limits_S zdxdy + \iint\limits_S ydxdz - \iint\limits_S xydydz$$

и вычислим каждый из них.

Для вычисления первого интеграла из уравнения поверхности выразим $z = 1 - x + y$ и подставим в интеграл. Учитывая, что $\cos\gamma > 0$, выбираем знак «+». Следовательно, по формуле (12.10)

$$I_1 = \iint\limits_S zdxdy = \overset{(\cos\gamma>0)}{+} \iint\limits_{D_{xy}:ABO} (1 - x + y)\,dxdy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 (1-x+y)dy = \int_0^1 dx \left(y(1-x) + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x-1}^0 = \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{2} dx =$$

$$= \frac{(x-1)^3}{6} \Big|_0^1 = -\frac{1}{6}.$$

По формуле (12.11), учитывая, что $y = x + z - 1$ и $\cos\beta < 0$, получим:

$$I_2 = \iint_S y dx dz = \overset{(\cos\beta<0)}{+} \iint_{D_{xz}:AOC} (x+z-1)dxdz = -\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+z-1)dz =$$

$$= -\int_0^1 dx \left(xz + \frac{z^2}{2} - z \right) \Big|_0^{1-x} = -\int_0^1 \left(x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} - (1-x) \right) dx =$$

$$= -\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{(1-x)^3}{6} + \frac{(1-x)^2}{2} \right) \Big|_0^1 = -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6}.$$

По формуле (12.12), учитывая, что $x = y - z + 1$ и $\cos\alpha > 0$, получим:

$$I_3 = \iint_S xy dy dz = \overset{(\cos\alpha>0)}{+} \iint_{D_{yz}:BOC} (y-z+1)y dy dz =$$

$$= \int_{-1}^0 dy \int_0^{1+y} (y-z+1)y dz = \int_{-1}^0 dy \left(y^2 z - y\frac{z^2}{2} + yz \right) \Big|_0^{1+y} =$$

$$= \int_{-1}^0 \left(y^2(1+y) - \frac{y(1+y)^2}{2} + y(1+y) \right) dy =$$

$$= \left(\frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} - \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{8} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{24}.$$

Итак, данный интеграл равен

$$I = 2I_1 + I_2 - I_3 = 2\left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{24}\right) = -\frac{1}{8}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 12.10 Если поверхность S нельзя однозначно спроецировать ни на одну из координатных плоскостей, т. е. ее уравнение $F(x, y, z) = 0$ однозначно неразрешимо относительно любой из переменных, то поверхность S разбивается на части, а интеграл — на сумму интегралов по этим частям.

Пример 12.21. Вычислить интеграл $\iint_S z^2 dxdy$, где S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Решение: разобьем данный интеграл на сумму интегралов по верхней и нижней полусферам и вычислим их, преобразуя в двойные интегралы. При этом следует учесть, что внешняя нормаль $\vec{n}$ (рис. 12.28) к верхней полусфере составляет острый угол с осью $0z$ ($\cos\gamma > 0$), а к нижней полусфере — тупой угол с осью $0z$ ($\cos\gamma < 0$).

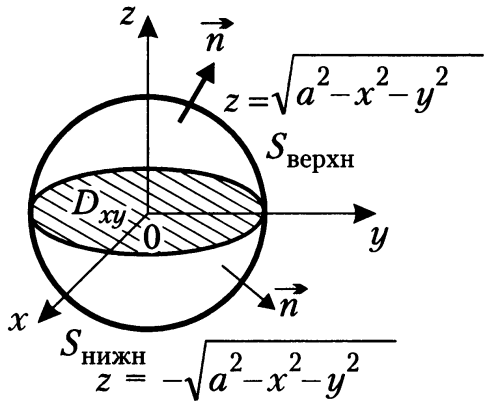


Рис. 12.28

Следовательно, учитывая, что $z^2 = a^2 - x^2 - y^2$, получим:

$$\iint\limits_S z^2\,dxdy = \iint\limits_{S_в} z^2\,dxdy + \iint\limits_{S_н} z^2\,dxdy =$$

$$= \overset{(\cos\gamma>0)}{+} \iint\limits_{D_{xy}} \left(a^2 - x^2 - y^2\right) dxdy \overset{(\cos\gamma<0)}{-} \iint\limits_{D_{xy}} \left(a^2 - x^2 - y^2\right) dxdy = 0.$$

Пример 12.22. Вычислить интеграл $\iint\limits_S zdxdy$, где S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Решение: из уравнения сферы найдем $z = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, причем знак «+» соответствует верхней полусфере (см. рис. 12.28), а знак «-» — нижней. Разобьем интеграл на сумму интегралов по верхней и нижней полусферам:

$$\iint\limits_S zdxdy = \iint\limits_{S_в} zdxdy + \iint\limits_{S_н} zdxdy =$$

$$= \overset{(\cos\gamma>0)}{+} \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy \overset{(\cos\gamma<0)}{-} \iint\limits_{D_{xy}} -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy =$$

$$= 2\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - \rho^2}\,\rho d\rho =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - \rho^2}\,d\rho^2 = -2\pi \left.\frac{\left(a^2 - \rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^a = -\frac{4\pi}{3}\left(0 - a^3\right) = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Формула Стокса

Формула Стокса позволяет свести вычисление криволинейного интеграла по контуру L к вычислению поверхностного интеграла по незамкнутой поверхности S, «натянутой» на контур L.

Теорема Стокса. Если функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ и их частные производные первого порядка непрерывны в некоторой области, содержащей S, то

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

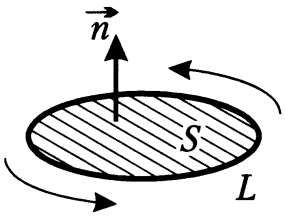


Рис. 12.29

Направление обхода контура L и нормали к поверхности S должны быть согласованы по правилу правого винта. Это значит, что если человек, идущий по той стороне поверхности S, по которой выполняется интегрирование, перемещается вдоль кривой L в направлении криволинейного интегрирования, то поверхность S должна быть слева (рис. 12.29).

Пример 12.23. Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_L e^x dx + z\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}} dy + yz^3 dz,$$

где L — линия пересечения поверхностей $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$.

Решение: линией пересечения конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и плоскостей $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$ является замкнутая кривая $0ABC0$ (рис. 12.30).

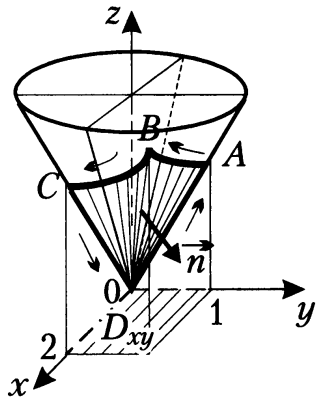


Рис. 12.30

В качестве поверхности S, «натянутой» на заданный контур L, возьмем часть конуса с границей $OABCO$. Тогда по формуле Стокса

$$\oint_L e^x dx + z\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}} dy + yz^3 dz =$$

$$= \iint\limits_S \left(\frac{\partial\left(yz^3\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(z\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial\left(e^x\right)}{\partial z} - \frac{\partial\left(yz^3\right)}{\partial x} \right) dxdz +$$

$$+ \left(\frac{\partial\left(z\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(e^x\right)}{\partial y} \right) dxdy =$$

$$= \iint\limits_S z^3 - \left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} dydz + 0dxdz + z\frac{3}{2}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}} 2xdxdy.$$

Учитывая, что $\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} = z^3$, получим:

$$\oint\limits_L e^x dx + z\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} dy + yz^3 dz = 3\iint\limits_S zx\sqrt{x^2+y^2}\, dxdy.$$

Проецируем поверхность S на плоскость $0xy$. Нормаль $\vec{n}$ к поверхности составляет тупой угол с осью $0z$, поэтому выбираем знак «–». Тогда, подставляя $z = \sqrt{x^2+y^2}$, имеем

$$\oint\limits_L e^x dx + z\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} dy + yz^3 dz = 3\iint\limits_S zx\sqrt{x^2+y^2}\, dxdy =$$

$$= -3\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{x^2+y^2}\, x\sqrt{x^2+y^2}\, dxdy = -3\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^1 \left(x^3+xy^2\right)dy =$$

$$= -3\int\limits_0^2 dx\left(x^3y + \frac{xy^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = -3\int\limits_0^2 \left(x^3+\frac{x}{3}\right)dx = -3\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{6}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= -3\left(4+\frac{2}{3}\right) = -14.$$

Формула Остроградского—Гаусса

Теорема Остроградского. Если функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$ и $R(x;y;z)$ непрерывны в пространственной области V вместе со своими частными производными первого порядка, то

$$\oiint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz,$$

где поверхность S — граница области V и интегрирование по замкнутой поверхности S производится по ее внешней стороне.

Пример 12.24. Вычислить интеграл: $\oiint x^3\,dydz - y^4\,dxdz + z^3\,dxdy$, где S — полная поверхность цилиндра, ограниченного поверхностями: $x^2 + z^2 = 16$, $y = 0$, $y = 2$ (рис. 12.31).

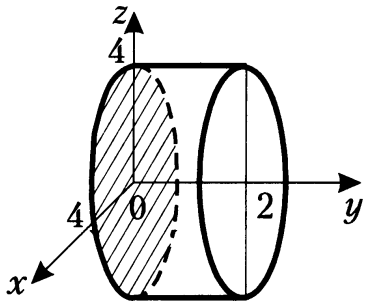


Рис. 12.31

Решение: здесь $P(x;y;z) = x^3$, $Q(x;y;z) = -y^4$ и $R(x;y;z) = z^3$. Отсюда $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 3x^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = -4y^3$ и $\dfrac{\partial R}{\partial z} = 3z^2$.

По формуле Остроградского

$$\oiint_S x^3\,dydz - y^4\,dxdz + z^3\,dxdy = \iiint_V \left(3x^2 - 4y^3 + 3z^2\right)dxdydz.$$

Введем цилиндрические координаты ρ, φ, y, для которых

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = y; \\ z = \rho\sin\varphi, \end{cases}$$

тогда

$$\oiint_S x^3\,dydz - y^4\,dxdz + z^3\,dxdy = \iiint_V \left(3x^2 - 4y^3 + 3z^2\right)dxdydz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho\,d\rho \int_0^2 \left(3\rho^2\cos^2\varphi - 4^3 + 3\rho^2\sin^2\varphi\right)dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho\,d\rho \int_0^2 \left(3\rho^2 - 4y^3\right)d =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho\,d\rho\left(3\rho^2 y - y^4\right)\Big|_0^2 = 2\pi\int_0^4 \left(6\rho^3 - 16\rho\right)d\rho =$$

$$= 4\pi\left(3\frac{\rho^4}{4} - 8\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_0^4 = 4\pi(192 - 64) = 512\pi.$$

Приложения поверхностных интегралов

Приведем примеры применения поверхностных интегралов.

- Площадь поверхности S определяют по формуле

$$S = \iint_S dS.$$

- Если $\delta(x,y,z)$ — поверхностная плотность вещества в точках поверхности, то масса m поверхности S определяют по формуле

$$m = \iint\limits_S \delta(x;y;z)dS.$$

- Статические моменты M_{xy}, M_{yz} и M_{xz} поверхности S относительно координатных плоскостей $0xy$, $0yz$ и $0xz$ определяют по формулам

$$M_{xy} = \iint\limits_S z\delta(x;y;z)dS;\ M_{yz} = \iint\limits_S x\delta(x;y;z)dS;\ M_{xz} = \iint\limits_S y\delta(x;y;z)dS.$$

- Координаты центра тяжести x_c, y_c, z_c поверхности S находят из соотношений

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m};\ y_c = \frac{M_{xz}}{m};\ z_c = \frac{M_{xy}}{m}.$$

- Моменты инерции I_{xy}, I_y и I_z поверхности S относительно координатных осей $0x$, $0y$ и $0z$ определяют по формулам

$$I_x = \iint\limits_S \left(y^2 + z^2\right)\delta(x;y;z)\,dS;\ I_y = \iint\limits_S \left(x^2 + z^2\right)\delta(x;y;z)\,dS;$$
$$I_{xz} = \iint\limits_S \left(x^2 + y^2\right)\delta(x;y;z)dS.$$

- Моменты инерции I_x, I_{yz} и I_{xz} поверхности S относительно координатных плоскостей $0xy$, $0yz$ и $0xz$ определяют по формулам

$$I_{xy} = \iint\limits_S z^2\ \delta(x;y;z)\,dS;\ I_{yz} = \iint\limits_S x^2\ \delta(x;y;z)\,dS,$$
$$I_{xz} = \iint\limits_S y^2\ \delta(x;y;z)\,dS.$$

- Полярный момент инерции I_0 поверхности S относительно начала координат 0 определяют по формуле

$$I_0 = \iint\limits_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\delta(x;y;z)dS.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 12.11 Для однородных поверхностей $\delta = \text{const}$, и для простоты будем считать $\delta = 1$.

Пример 12.25. Найти статический момент относительно плоскости $0xz$ части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ (рис. 12.32), если поверхностная плотность в каждой ее точке равна $\delta(x, y, z) = z$.

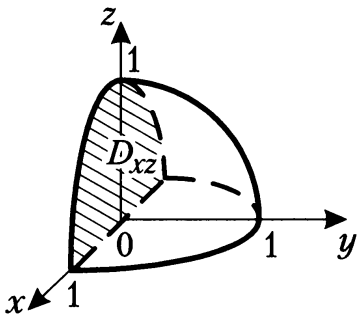


Рис. 12.32

Решение: статический момент вычислим по формуле

$$M_{xz} = \iint\limits_S y\delta(x;y;z)dS,$$

где поверхность S определяется уравнением $y = \sqrt{1 - x^2 - z^2}$. Тогда

$$M_{xz} = \iint\limits_S y\delta(x;y;z)dS = \iint\limits_{D_{xz}} \sqrt{1 - x^2 - z^2}\, z \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dxdz,$$

где D_{xz} — круг $x^2 + z^2 \leq 1$ в плоскости $0xz$.

Частные производные найдем из уравнения сферы $x^2+y^2+z^2-1=0$:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\left(x^2+y^2+z^2-1\right)'_x}{\left(x^2+y^2+z^2-1\right)'_y}=-\frac{x}{y}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-z^2}},$$

$$\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{\left(x^2+y^2+z^2-1\right)'_z}{\left(x^2+y^2+z^2-1\right)'_y}=-\frac{z}{y}=-\frac{z}{\sqrt{1-x^2-z^2}}.$$

Следовательно,

$$M_{xz}=\iint\limits_S y\delta(x;y;z)dS=$$

$$=\iint\limits_{D_{xz}}\sqrt{1-x^2-z^2}\,z\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-z^2}+\frac{z^2}{1-x^2-z^2}}\,dxdz=$$

$$=\iint\limits_{D_{xz}}\sqrt{1-x^2-z^2}\,z\sqrt{\frac{1}{1-x^2-z^2}}dxdz=\iint\limits_{D_{xz}}z\,dxdz.$$

Далее вычислим двойной интеграл, введя полярные координаты по формулам $x=\rho\cos\varphi$, $z=\rho\sin\varphi$. Получим:

$$M_{xz}=\iint\limits_{D_{xz}}x\,dxdz=\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho\sin\varphi\;\rho d\rho=-\cos\varphi\Big|_0^{\pi}\;\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}.$$

Задачи для типовых расчетов

Задача 12.1. Измените порядок интегрирования в повторных интегралах.

1. $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}}f(x,y)\,dy+\int\limits_2^8 d\int\limits_{x-4}^{\sqrt{2x}}f(x,y)\,dy.$

2. $\int\limits_1^2 dx\int\limits_{\frac{2}{x}}^{2x}f(x,y)\,dy.$

3. $\int\limits_{-1}^0 dx\int\limits_{x^2}^{2-x^2}f(x,y)\,dy.$

4. $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}}dy\int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\,dx+\int\limits_{-\sqrt{3}}^{-1}dy\int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{1}f(x,y)\,dx+\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{-\sqrt{3}}^{1}f(x,y)\,dx.$

5. $\int\limits_{-4}^{-2}dx\int\limits_{-\sqrt{-x^2-4x}}^{\sqrt{-x^2-4x}}f(x,y)\,dy+\int\limits_{-2}^{\sqrt{8}}dx\int\limits_{-\sqrt{8-x^2}}^{\sqrt{8-x^2}}f(x,y)\,dy.$

6. $\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{x}f(x,y)\,dy+\int\limits_1^{\sqrt{2}}dx\int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}f(x,y)\,dy.$

7. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy.$

8. $\int\limits_2^4 dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x}} f(x,y)\,dy.$

9. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{4-x^2}{4}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy.$

10. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{2^{-2x}}^{4} f(x,y)\,dy + \int\limits_0^2 dx \int\limits_{2^x}^{4} f(x,y)\,dx.$

11. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{0,5y}^{2y} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{0,5y}^{\frac{2}{y}} f(x,y)\,dx.$

12. $\int\limits_1^4 dx \int\limits_{x^2}^{2x^2} f(x,y)\,dy.$

13. $\int\limits_{-2}^{4} d \int\limits_{\frac{1}{2}y^2}^{+4} f(x,y)\,dx$

14. $\int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{\frac{2}{3}y} f(x,y)\,dx + \int\limits_3^4 dy \int\limits_{1-\sqrt{4-y}}^{1+\sqrt{4-y}} f(x,y)\,dx.$

15. $\int\limits_{e^{-2}}^{1} dy \int\limits_{-\ln y}^{2} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^{e^2} dy \int\limits_{\ln y}^{2} f(x,y)dx.$

16. $\int\limits_0^{\frac{a}{2}} dx \int\limits_{a-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\,dy.$

17. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{e^x} f(x,y)\,dy\ .$

18. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f(x,y)\,dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x}^{0} f(x,y)\,dy.$

19. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{x} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^{\frac{4}{3}} dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{2-x} f(x,y)\,dy.$

20. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{0} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2-x}}^{0} f(x,y)\,dy.$

21. $\int\limits_0^6 dx \int\limits_{-\sqrt{6x-x^2}}^{\sqrt{6x}} f(x,y)\,dy.$

22. $\int\limits_1^3 dy \int\limits_{y^2+3}^{4y} f(x,y)\,dx.$

23. $\int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int\limits_3^9 dy \int\limits_{\frac{y-3}{2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx.$

24. $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)\,dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)\,dy.$

25. $\int\limits_0^a dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{a+\sqrt{a^2+x^2}} f(x,y)\,dy.$

26. $\int\limits_2^5 dx \int\limits_{x+3}^{9-(x-4)^2} f(x,y)\,dy.$

27. $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{2a} f(x,y)\,dy.$

28. $\int\limits_1^7 dy \int\limits_{\frac{1}{2}\cdot(y-1)}^{y-1} f(x,y)\,dx.$

29. $\int\limits_0^3 dy \int\limits_{\frac{y^2}{6}}^{3-\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_0^3 dy \int\limits_{3+\sqrt{9-y^2}}^{6} f(x,y)dx + \int\limits_3^6 dy \int\limits_{\frac{y^2}{6}}^{6} f(x,y)\,dx.$

30. $\int\limits_0^{\ln 2} dx \int\limits_1^{e^x} f(x,y)\,dy + \int\limits_{\ln 2}^1 dx \int\limits_1^2 f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_x^2 f(x,y)\,dy.$

Задача 12.2

1. Найдите массу пластины, ограниченной линиями $y=0$, $x^2+y^2=a^2$, $y\ge 0$, если $\delta(x,y)=e^{x^2+y^2}$ — поверхностная плотность пластины в точке.

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линией $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$.

3. Найдите массу пластины, ограниченной линиями $y=\sqrt{a^2-x^2}$, $y=\sqrt{\frac{a^2}{4}-x^2}$, $y=0$, $x\ge 0$, если $\delta(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ — поверхностная плотность пластины в точке.

4. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $z = x + y + 1$, $y^2 = x$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.
5. Найдите массу пластины, имеющей форму кольца и ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 25$, если $\delta(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$ — поверхностная плотность пластины в точке.
6. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 2x$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ и $y \geq \frac{1}{\sqrt{3}}x$.
7. Найдите массу пластины, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$, $x = 0$, $y \geq 0$, если $\delta(x,y) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ — поверхностная плотность пластины в точке.
8. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x = 2y^2$, $x + 2y + z = 4$, $y = 0$, $z = 0$.
9. Найдите массу пластины, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = ax$, $x^2 + y^2 = 2ax$, $y = 0$, $y \geq 0$, если $\delta(x,y) = x^2 + y^2$ — поверхностная плотность пластины в точке.
10. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = a^2$, $x + y + z = 3a$, $z = 0$.
11. Найдите массу пластины, ограниченной линиями $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, $x^2 + y^2 = a^2$, $x = 0$, $x \geq 0$, если $\delta(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ — поверхностная плотность пластины в точке.
12. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $x + y$ $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
13. Найдите массу пластины, ограниченной линиями $y = x$, $y = 0$, $x^2 + y^2 = a^2$, если $\delta(x,y) = 1 + \frac{y^2}{x^2}$ — поверхностная плотность пластины в точке.
14. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $z = 4 - x^2$, $2x + y = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
15. Найдите массу пластины, имеющей форму кольца и ограниченной линиями $x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{9}$, $x^2 + y^2 = \pi^2$, если $\delta(x,y) = \frac{\sin\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ — поверхностная плотность пластины в точке.
16. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $z = 4x^2 + 2y^2 + 1$, $x + y - 3 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
17. Найдите массу пластины, ограниченной линиями $y = x$, $x = 0$, $x^2 + y^2 = ay$, если $\delta(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ — поверхностная плотность пластины в точке.
18. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $y + z = 2$, $y = x^2$, $z = 0$.

19. Найдите массу пластины, ограниченной линиями $y=0$, $x^2+y^2=ax$, $y>0$, если $\delta(x,y)=y$ — поверхностная плотность пластины в точке.
20. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $z=x^2$, $x+y=2$, $z=0$, $y=0$, $x>0$.
21. Найдите массу пластины, ограниченной линией $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$, $x\geq 0$, если $\delta(x,y)=x^2+y^2$ — поверхностная плотность пластины в точке.
22. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=z$, $y=x^2$, $z=0$, $y=1$.
23. Найдите массу пластины, ограниченной линиями $x^2+(y-1)^2=1$, $x^2+y^2=4y$, $x=0$, $x\geq 0$, если $\delta(x,y)=xy^2$ — поверхностная плотность пластины в точке.
24. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $z=x+y$, $y^2=x$, $y^2=2-x$, $z=0$.
25. Найдите массу пластины, ограниченной линиями $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$, $y=0$, $x>0$, $y>0$, если $\delta(x,y)=x^2-y^2$ — поверхностная плотность пластины в точке.
26. Найдите массу пластины, ограниченной линиями $x^2+y^2=Rx$, $y=0$, $y>0$, если $\delta(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ — поверхностная плотность пластины в точке.
27. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $z=6-x^2$, $x+2y=6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.
28. Найдите массу пластины, ограниченной линией $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$, $x>0$, $y>0$, если $\delta(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ — поверхностная плотность пластины в точке.
29. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $y+z=8$, $y=2x^2$, $z=0$.
30. Найдите массу пластины, ограниченной линиями $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=4y$, если $\delta(x,y)=x^2+y^2$ — поверхностная плотность пластины в точке.

Задача 12.3

1. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x=0$, $y=0$, $z=1$, $z=a^2-x^2+1$ $(a>2)$, $x^2+y^2=a^2$.
2. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2+z^2=16$, $z=0$, если $\delta(x,y,z)=z$ — плотность тела в точке.
3. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2+z^2=b^2$ $(0<a^2<b^2)$, $x^2+y^2=z^2$ $(z\geq 0)$.
4. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2=a^2z^2$ (внутри конуса).
5. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2$, $z=1$, если $\delta(x,y,z)=x^2$ — плотность тела в точке.
6. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=z^2$, $z=0$ $(z\geq 0)$.

7. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $z = 2$ (между параболоидами).
8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $2 - z = x^2 + y^2$, если $\delta(x,y,z) = x^2 + y^2$ — плотность тела в точке.
9. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $4z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ (внутри параболоида).
10. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ $(b > a > 0)$, $x = y$, $y = 0$, $x^2 + y^2 = z^2$ (вне конуса).
11. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = 3z^2$, $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{3}$ $(z \geq 0)$ (между конусами).
12. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $z = 0$, если $\delta(x,y,z) = 3z$ — плотность тела в точке.
13. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $y = b$, $a^2 y = x^2 + z^2$.
14. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $z = a^2 - x^2$, $x + y = a$, $y = 2x$, $y = 0$, $z = 0$.
15. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z - y = -1$.
16. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $y = 0$ $(y \geq 0)$.
17. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями $y = x^2 + z^2$, $y = 1$, если $\delta(x,y,z) = x^2$ — плотность тела в точке.
18. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = x$, $x = 0$ $(x \geq 0)$, $3x^2 + 3y^2 = z^2$ (внутри конуса), $z \geq 0$.
19. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x^2 + y^2 + z^2 - 8z = 0$.
20. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$, $x^2 + y^2 = 2 - z$ (внутри параболоида).
21. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $x^2 + y^2 = 3z^2$, $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{3}$ $(0 < a < b)$.
22. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 3z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
23. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z = 1$ $(z > 1)$.
24. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x^2 + y^2 = 4$ (внутри цилиндра), если $\delta(x,y,z) = \frac{4}{\sqrt{16 - x^2 y^{-2}}}$ — плотность тела в точке.
25. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$, $z = 1$ $(z < 1)$.

26. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=z$, $x^2+y^2=2z-4$.

27. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$, $y=\sqrt{3}x$.

28. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ (вне конуса).

29. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=4z$, $z=3$ $(z\geq 3)$.

30. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=2z$, $x^2+y^2=z^2$ (внутри конуса).

Задача 12.4

1. Найдите центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(\geq 0,\ \geq 0,\ z\geq 0)$.

2. Найдите момент инерции относительно оси $0x$ однородного тела, ограниченного поверхностями $x=y^2+z^2$, $x=1$.

3. Найдите центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $az=a^2-x^2-y^2$, $z=0$.

4. Найдите момент инерции относительно оси $0z$ однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=(z-1)^2$, $z=0$.

5. Найдите центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+4z^2=4y$, $y=2$.

6. Найдите момент инерции относительно оси $0z$ однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2$ (внутри конуса).

7. Найдите центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=2$.

8. Найдите момент инерции относительно оси $0z$ однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2+z^2=b^2$ $(0<a<b)$, $z=0$ $(z\geq 0)$.

9. Найдите центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z=0$ $(z\geq 0)$.

10. Найдите момент инерции относительно оси $0z$ однородного тела, ограниченного поверхностями $y^2=2pz$, $x^2+y^2=a^2$, $z=0$.

11. Найдите центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2$ (внутри конуса).

12. Найдите момент инерции относительно оси $0z$ однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2$, $y=0$ $(y\geq 0)$.

13. Найдите центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=z$, $z=4$.

14. Найдите момент инерции относительно оси $0z$ однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=4$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

15. Найдите центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=2z$, $z=1$ $(z\geq 1)$.

16. Найдите статический момент относительно плоскости $z=0$ однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=25$, $x^2+y^2=16$, $z=0$ $(z\geq 0)$.

17. Найдите центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=4$, $z=1$ $(z\geq 1)$.

18. Найдите статический момент относительно плоскости $z=0$ однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=z^2$, $z\geq 0$ (внутри конуса).

19. Найдите центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0)$.

20. Найдите статический момент относительно плоскости $z=0$ однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=a^2$, $3\left(x^2+y^2\right)=z^2$, $x^2+y^2=3z^2$, $x=0$, $y=0$ $(x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0)$.

21. Найдите центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $z=0$ $(z\geq 0)$.

22. Найдите статический момент относительно плоскости $x=0$ однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=25$, $x^2+y^2+z^2=16$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

23. Найдите центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2=r^2$ $(r<R)$, $z=0$ $(z\geq 0)$.

24. Найдите статический момент относительно плоскости $z=0$ однородного тела, ограниченного поверхностью $x^2+y^2+z^2=2Rz$.

25. Найдите центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2=r^2$ $(r<R)$, $x^2+y^2=z^2$ $(z\geq 0)$.

26. Найдите статический момент относительно плоскости $z=0$ однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=2z$, $x^2+y^2=3-z$.

27. Найдите центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=1$ (внутри цилиндра), $z=0$ $(z\geq 0)$.

28. Найдите момент инерции относительно оси $0y$ однородного тела, ограниченного поверхностями $y=x^2+z^2$, $y=4$.

29. Найдите центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=a^2, =0\ (y\geq 0)$.
30. Найдите момент инерции относительно оси $0y$ однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=9, y=\sqrt{x^2+z^2}, x=0, y=0, z=0$.

Задача 12.5

1. Вычислите момент инерции относительно оси $0x$ однородного участка линии $\begin{cases} x=a(t-\sin t); \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ (первая арка).
2. Вычислите массу отрезка прямой AB, где $A(0;0;-2)$, $B(4;0;0)$, если линейная плотность в каждой точке равна $\delta(x,y,z)=\dfrac{1}{x-z}$.
3. Вычислите массу дуги параболы $y^2=2px$, отсеченной параболой $x^2=2py$, если линейная плотность в каждой точке равна ординате этой точки.
4. Вычислите массу контура прямоугольника $ABCD$ с вершинами в точках $A(0;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;4;2)$, $D(0;0;2)$ если линейная плотность в каждой его точке определяется выражением $\delta(x,y,z)=yz$.
5. Вычислите длину дуги кривой $\begin{cases} x=3t; \\ y=3t^2; \\ z=2t^3 \end{cases}$ от точки $O(0;0;0)$ до точки $A(3;3;2)$.
6. Вычислите массу участка линии $\begin{cases} x=a(\cos t+t\cdot\sin t); \\ y=a(\sin t-t\cdot\cos t), \end{cases} t\in[0,2\pi]$ если линейная плотность в каждой точке равна ее расстоянию до начала координат.
7. Вычислите момент инерции относительно начала координат однородного первого витка винтовой линии $\begin{cases} x=a\cos t; \\ y=a\sin t; \\ z=bt. \end{cases}$
8. Вычислите массу части окружности $\begin{cases} x=a\cos t; \\ y=a\sin t \end{cases}$ в первой четверти, если линейная плотность в каждой точке равна $\delta(x,y)=xy$.
9. Вычислите статический момент относительно оси $0x$ однородного контура $\begin{cases} y^2+z^2=4y; \\ x=0. \end{cases}$
10. Вычислите массу контура треугольника ABC, где $A(-1;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$, если линейная плотность в каждой его точке равна $\delta(x,y)=xy$.
11. Вычислите момент инерции относительно оси $0y$ однородного участка линии $y=\ln x$ от точки $A\left(x_1=\sqrt{3}\right)$ до точки $B\left(x_2=\sqrt{8}\right)$.
12. Вычислите массу контура $L\ x^2+y^2=4x$, если линейная плотность в каждой его точке равна $\delta(x,y)=x-y$.

13. Вычислите статический момент относительно оси $0x$ однородной части кривой $y = 2\sqrt{x}, 0 \le x \le 1$.

14. Вычислите массу дуги линии $\begin{cases} x = t; \\ y = \dfrac{t^2}{\sqrt{2}}; \\ z = \dfrac{t^3}{3} \end{cases}$ от точки $A\left(1; \dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{3}\right)$ до точки $B\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$, если линейная плотность в каждой ее точке равна $\delta(x, y, z) = \dfrac{y}{3}$.

15. Найдите массу контура правого лепестка лемнискаты $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$, если линейная плотность в каждой его точке равна $\delta(x, y) = x + y$.

16. Вычислите длину дуги кривой $\begin{cases} x = t; \\ y = \dfrac{\sqrt{3}\, t^2}{2}; (0 \le t \le 1). \\ z = t^3 \end{cases}$

17. Вычислите массу прямолинейного стержня AB, где $A(-1; 0)$, $B(0; 1)$, если линейная плотность в каждой его точке равна $\delta(x, y) = -4\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{y}$.

18. Вычислите момент инерции относительно оси $0y$ верхней половины однородной окружности $x^2 + y^2 = a^2$.

19. Вычислите массу первого витка винтовой линии $\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = a\sin t; \\ z = at, \end{cases}$ если линейная плотность в каждой ее точке равна $\delta(x, y, z) = \dfrac{z^2}{x^2 + y^2}$.

20. Найдите центр тяжести однородной дуги окружности радиуса a при центральном угле, равном 2φ.

21. Вычислите массу прямолинейного стержня AB, где $A(0; -2)$, $B(4; 0)$, если линейная плотность в каждой его точке обратно пропорциональна расстоянию от точки до начала координат.

22. Вычислите длину дуги линии $y = 1 - \ln(\cos x)$ при $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$.

23. Вычислите массу контура треугольника $0AB$, где $O(0; 0)$, $A(-1; 0)$, $B(0; 1)$, если линейная плотность в каждой его точке равна $\delta(x, y) = x + y$.

24. Вычислите момент инерции относительно начала координат участка однородной линии $\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t); \\ y = 2(\sin t - t\cos t), \end{cases} 0 \le t \le 2\pi.$

25. Вычислите массу контура $x^2 + y^2 = 4x$, если линейная плотность в каждой его точке равна расстоянию от точки до начала координат.

26. Вычислите длину дуги цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ при $0 < x < a$.

27. Найдите координаты центра тяжести однородной кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

28. Вычислите момент инерции относительно оси $0y$ части эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$, лежащей в первой четверти, если линейная плотность в каждой его точке равна $\delta(x, y) = y$.

29. Вычислите массу дуги окружности $x^2 + y^2 = r^2$, лежащей в первой четверти, если линейная плотность в каждой ее точке равна $\delta(x, y) = x^2 y$.

30. Найдите статический момент относительно оси $0x$ однородной первой арки циклоиды $\begin{cases} x = 3(t - \sin t); \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} 0 \le t \le 2\pi.$

Задача 12.6

1. Вычислите площадь части поверхности $z = x^2 + y^2$, отсеченной плоскостью $z = 4$.

2. Вычислите статический момент относительно оси $0z$ однородного участка поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 4$.

3. Вычислите моменты инерции относительно координатных плоскостей однородной треугольной пластинки $x + y + z = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

4. Найдите координаты центра тяжести части однородной поверхности конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$.

5. Вычислите массу участка поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, ограниченного плоскостями $z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, если поверхностная плотность к каждой ее точке $\delta = xy$.

6. Вычислите момент инерции относительно оси $0z$ однородной сферической оболочки $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \ge 0$.

7. Вычислите массу участка поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, отсеченной плоскостью $z = 1$, если поверхностная плотность к каждой ее точке $\delta(x, y, z) = z^2$.

8. Вычислите статические моменты относительно координатных плоскостей однородной треугольной пластинки $x + y + z = a$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

9. Вычислите массу участка поверхности $9z = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 1$, если поверхностная плотность в каждой ее точке $\delta(x, y, z) = \frac{9z}{\sqrt{9 + 4z}}$.

10. Вычислите площадь участка поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 2y$, $z \ge 0$.

11. Вычислите массу полусферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\ge 0$, если поверхностная плотность в каждой ее точке $\delta(x, y, z)=\frac{z}{a}$.

12. Вычислите момент инерции относительно оси $0z$ однородного участка поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le 1$.

13. Найдите массу параболической оболочки $z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$, $0\le z\le 1$, если поверхностная плотность в каждой ее точке равна $\delta(x, y, z)=z$.

14. Найдите площадь участка поверхности $x^2+y^2+z^2=4$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=2y$.

15. Вычислите момент инерции относительно плоскости $0yz$ полусферы $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, если поверхностная плотность в каждой ее точке $\delta(x, y, z)=y^2$.

16. Вычислите массу однородного участка поверхности $z^2=x^2+y^2$, вырезанного цилиндром $x^2+y^2=2x$.

17. Найдите координаты центра тяжести однородной параболической оболочки $2z=x^2+y^2$, $0\le z\le a$.

18. Найдите массу участка поверхности $z^2=x^2+y^2$, $0\le z\le 1$, если поверхностная плотность в каждой ее точке $\delta(x, y, z)=z$.

19. Вычислите площадь участка поверхности $z^2=2xy$ при $z>0, 0<x<a, 0<y<b$.

20. Вычислите массу части сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, находящейся в первом октанте ($x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$), если поверхностная плотность в каждой ее точке равна расстоянию от точки до оси $0z$.

21. Вычислите момент инерции относительно оси $0z$ однородной сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, расположенной в первом октанте.

22. Найдите координаты центра тяжести однородной части сферической поверхности $x^2+y^2+z^2=a^2$, лежащей в первом октанте.

23. Найдите момент инерции относительно оси $0z$ однородной части поверхности конуса $z^2=4\cdot\left(x^2+y^2\right)$ при $0<z<2$.

24. Найдите площадь участка поверхности $x^2=2pz$ при $0<x<2$, $x<y<2x$.

25. Вычислите момент инерции однородной сферической поверхности радиуса a относительно ее диаметра.

26. Найдите координаты центра тяжести однородного сферического сегмента $x^2+y^2+z^2=16$ при $3\le z\le 4$.

27. Найдите площадь поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, заключенной внутри цилиндра $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>b$.

28. Найдите площадь поверхности цилиндра $x^2+y^2=16$, заключенной между плоскостями $y+z=0$ и $z=0$.

29. Найдите массу поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = 25$, заключенной между плоскостями $z = 0$ и $z = 5$, если поверхностная плотность в каждой ее точке обратно пропорциональна квадрату расстояния от нее до начала координат.
30. Вычислите момент инерции относительно плоскости $0yz$ поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, отсеченной плоскостью $z = 4$, если поверхностная плотность в каждой ее точке равна квадрату ее ординаты.

Список рекомендуемой и использованной литературы

1. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1985.
2. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1987.
3. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1988.
4. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
5. *Запорожец Г. И.* Руководство к решению задач по математическому анализу. М.: Высш. шк., 1966.
6. *Кудрявцев В. А., Демидович Б. П.* Краткий курс высшей математики. М.: Наука, 1989.
7. *Кузнецов Л. А.* Сборник заданий по высшей математике. М.: Высш. шк., 1983.
8. *Марон И. А.* Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах (функции одной переменной). М.: Наука, 1973.
9. *Немыцкий В., Слудская М., Черкасов А.* Курс математического анализа. М.: Наука, 1987.
10. *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике. М.: Айрис пресс, 2004.
11. Линейная алгебра и основы математического анализа: Сборник задач по математике для втузов / Под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. М.: Наука, 1981.
12. Специальные разделы математического анализа: Сборник задач по математике для втузов / Под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. М.: Наука, 1981.
13. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Ч. 1–3 / Под ред. А. П. Рябушко. Минск: Выш. шк., 1991.
14. *Шипачев В. С.* Высшая математика. М.: Высш. шк., 2003.



САЛД

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
АНТИВИРУСНАЯ
ЛАБОРАТОРИЯ
ДАНИЛОВА

www.SALD.ru
8 (812) 336-3739

Антивирусные
программные продукты

Учебное пособие по высшей математике для студентов и преподавателей технических и экономических вузов. Содержит справочный материал по разделам высшей математики, методические рекомендации по решению задач, типовые задания с подробными решениями и разбором характерных ошибок, варианты типовых заданий (типовых расчетов) по курсу высшей математики технического университета, выполнение которых является требованием образовательного стандарта. Студентам эта книга вполне заменит репетитора, а преподавателю сэкономит время на подготовку практических и домашних заданий. Второе издание учебного пособия дополнено материалами по числовым рядам, а также кратным, криволинейным и поверхностным интегралам.

Допущено Научно-методическим советом по математике вузов Северо-Запада в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по направлениям 550000 «Технические науки», 650000 «Техника и технологии».

ПИТЕР®

Заказ книг:

197198, Санкт-Петербург, а/я 127
тел.: (812) 703-73-74, postbook@piter.com

61093, Харьков-93, а/я 9130
тел.: (057) 758-41-45, 751-10-02, piter@kharkov.piter.com

www.piter.com — вся информация о книгах и веб-магазин

ISBN: 978-5-496-00012-3