

Тригонометрические ряды. Ряды Фурье

В науке и технике довольно часто приходится иметь дело с периодическими явлениями. Эти явления через определённый промежуток времени T , называемый **периодом**, возвращают систему в начальное состояние.

Простейшей периодической функцией является синусоида

$$A \sin(\omega t + \alpha),$$

где A – амплитуда, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – частота, α – начальная фаза. Очевидно, что сложение синусоид с разными амплитудами, одинаковыми частотами и фазами приводит к той же синусоиде с увеличенной амплитудой. Сложение же синусоид, различающихся амплитудами, частотами и фазами приводит к периодической функции, вид которой отличается от синусоиды.

Ряд вида

$$f(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + A_3 \sin(3\omega t + \alpha_3) + \dots + A_n \sin(n\omega t + \alpha_n) + \dots$$

называется **тригонометрическим рядом**.

Из определения тригонометрического ряда видно, что периодическая функция $f(t)$ может быть представлена в виде суммы синусоид с различающимися амплитудами, частотами и фазами, т.е. может быть разложена на простые гармонические колебания.

Отдельные составляющие функции $f(t)$ называются **гармоническими составляющими** или **гармониками**, а процесс разложения периодической функции на гармоники называется **гармоническим анализом**.

Если в качестве аргумента выбрать величину $x = \omega t$, то функция $g(x) = f\left(\frac{x}{\omega}\right)$ также будет периодической функцией, но уже со стандартным периодом $T = 2\pi$. Разложение этой функции в тригонометрический ряд имеет вид

$$g(x) = A_0 + A_1 \sin(x + \alpha_1) + A_2 \sin(2x + \alpha_2) + A_3 \sin(3x + \alpha_3) + \dots + A_n \sin(nx + \alpha_n) + \dots$$

Используя формулу $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$ и вводя обозначения $\frac{a_0}{2} = A_0$, $a_n = A_n \sin\alpha_n$ и $b_n = A_n \cos\alpha_n$, приведём тригонометрический ряд к виду

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Теорема 1. Если функция $g(x)$ определена и интегрируема на отрезке $[-\pi; \pi]$, разлагается в тригонометрический ряд

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

который равномерно сходится, то это разложение единственно.

Док-во: Интегрируя почленно тригонометрический ряд (это можно делать в силу его равномерной сходимости) получим

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx \right] = \frac{a_0}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - b_n \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = \frac{a_0}{2} 2\pi + 0 = \pi a_0. \end{aligned}$$

Откуда находим, что $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx$. Рассмотрим интегралы вида:

$$\text{а) } \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx; \quad \text{б) } \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) dx; \quad \text{в) } \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(nx) dx.$$

В случае $k \neq n$:

а) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx =$ (как интеграл от чётной функции по симметричному интервалу интегрирования

$$\begin{aligned} &= 2 \int_0^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx = \int_0^{\pi} \cos(k+n)x dx + \int_0^{\pi} \cos(k-n)x dx = \\ &= \frac{\sin(k+n)x}{k+n} \Big|_0^{\pi} + \frac{\sin(k-n)x}{k-n} \Big|_0^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

б) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) dx = 0$ (как интеграл от нечётной функции по симметричному интервалу интегрирования, Этот интеграл равен нулю и в случае $k = n$ по той же причине).

в) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(nx) dx =$ (как интеграл от чётной функции по симметричному интервалу интегрирования)

$$\begin{aligned} &= 2 \int_0^{\pi} \sin(kx) \sin(nx) dx = \int_0^{\pi} \cos(k-n)x dx - \int_0^{\pi} \cos(k+n)x dx = \\ &= \frac{\sin(k-n)x}{k-n} \Big|_0^{\pi} + \frac{\sin(k+n)x}{k+n} \Big|_0^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

В случае $k = n$:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx &= (\text{как интеграл от чётной функции по симметричному} \\ &\text{интервалу интегрирования}) = 2 \int_0^{\pi} \cos^2(nx) dx = \int_0^{\pi} dx + \int_0^{\pi} \cos(2nx) dx = x \Big|_0^{\pi} + \\ &+ \frac{\sin(2nx)}{2n} \Big|_0^{\pi} = \pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx &= (\text{как интеграл от чётной функции по симметричному} \\ &\text{интервалу интегрирования}) = 2 \int_0^{\pi} \sin^2(nx) dx = \int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi} \cos(2nx) dx = x \Big|_0^{\pi} - \\ &- \frac{\sin(2nx)}{2n} \Big|_0^{\pi} = \pi. \end{aligned}$$

Умножим тригонометрический ряд на $\cos(kx)$, и проинтегрируем его на отрезке $[-\pi; \pi]$, получим:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(kx) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(nx) dx \right] = \end{aligned}$$

(с учётом полученных результатов)

$$= \frac{a_0}{2} \cdot \frac{\sin(kx)}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} + a_k \pi = \frac{a_0}{2} \cdot 0 + a_k \pi = \pi a_k.$$

Отсюда находим, что
$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx) dx.$$

Умножим тригонометрический ряд на $\sin(kx)$ и проинтегрируем его на отрезке $[-\pi; \pi]$, получим:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(kx) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(nx) dx \right] = \end{aligned}$$

(с учётом полученных результатов)

$$= -\frac{a_0}{2} \frac{\cos(kx)}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} + b_k \pi = \frac{a_0}{2} 0 + b_k \pi = \pi b_k.$$

Отсюда находим, что
$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx) dx.$$

Итак, коэффициенты тригонометрического ряда однозначно определяются формулами:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx) dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx) dx,$$

т.е. разложение функции в тригонометрический ряд единственно.

Тригонометрический ряд с коэффициентами, которые вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx) dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx) dx,$$

называется **рядом Фурье**.

Пример 1. Разложить в **ряд Фурье** функцию $f(x) = e^{ax}$ ($a = \text{const} \neq 0$) на отрезке $[-\pi; \pi]$.

Для того чтобы разложить в **ряд Фурье** функцию

$$f(x) = e^{ax} \quad (a = \text{const} \neq 0)$$

на отрезке $[-\pi; \pi]$, необходимо и достаточно вычислить коэффициенты этого ряда:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{e^{ax}}{a} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{\pi a} - e^{-\pi a}}{\pi a} = \frac{2 \operatorname{sh}(\pi a)}{\pi a};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \cos(nx) dx =$$

$$= \frac{e^{ax}}{\pi(a^2 + n^2)} [a \cos(nx) + n \sin(nx)] \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^n 2a \operatorname{sh}(a\pi)}{\pi(a^2 + n^2)};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \sin(nx) dx =$$

$$= \frac{e^{ax}}{\pi(a^2 + n^2)} [a \sin(nx) + n \cos(nx)] \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^{n-1} 2n \operatorname{sh}(a\pi)}{\pi(a^2 + n^2)}.$$

Следовательно, разложение в **ряд Фурье** функции $f(x) = e^{ax}$ имеет вид:

$$e^{ax} = \frac{2 \operatorname{sh}(a\pi)}{\pi} \left\{ \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2} [a \cos(nx) - n \sin(nx)] \right\}.$$

Если функция $f(x)$ периодическая с периодом $T=2\pi$ и разлагается в ряд Фурье, то её можно разложить на любом интервале длиной 2π , например, $[0; 2\pi]$, $[\pi; 3\pi]$ или $[-4\pi; -2\pi]$. *****

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ на отрезке $[0; 2\pi]$.

Вычислим коэффициенты ряда Фурье

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (\pi - x) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\pi x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (\pi - x) \cos(nx) dx = \frac{(\pi - x) \sin(nx)}{2\pi n} \Big|_0^{2\pi} = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (\pi - x) \sin(nx) dx = \frac{(\pi - x) \cos(nx)}{2\pi n} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{n}.$$

Таким образом, $\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$.

Ряд Фурье для чётных и нечётных функций

Функция $F(x)$, определённая на всей числовой оси и периодическая с периодом $T=2\pi$, называется **периодическим продолжением функции** $f(x)$, если на отрезке $[-\pi; \pi]$ $F(x) = f(x)$.

Очевидно, что если на отрезке $[-\pi; \pi]$ ряд Фурье сходится к функции $f(x)$, то он сходится на всей числовой оси к функции $F(x)$. В связи с этим рассмотрим теорему о сумме ряда Фурье на всей числовой оси.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ и её производная $f'(x)$ непрерывны на отрезке $[-\pi; \pi]$ или имеют на этом интервале конечное число точек разрыва первого рода. Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится на отрезке $[-\pi; \pi]$, причём в каждой точке $x \in [-\pi; \pi]$, в которой функция $f(x)$ непрерывна сумма ряда равна $f(x)$; в каждой точке разрыва первого рода x_0 функции $f(x)$ сумма ряда будет равна

$$\frac{1}{2} [f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)],$$

где $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ и $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$; на концах отрезка $[-\pi; \pi]$

сумма ряда будет равна

$$\frac{1}{2} [f(-\pi) + f(+\pi)].$$

Если функция $F(x)$ является периодическим продолжением функции $f(x)$, то аналогичные утверждения имеют место и для функции $F(x)$ на всей числовой оси.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье периодическое продолжение функции $f(x) = x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$.

Так как $f(x) = x$, то её периодическое продолжение $F(x)$ имеет вид (рис. 4).

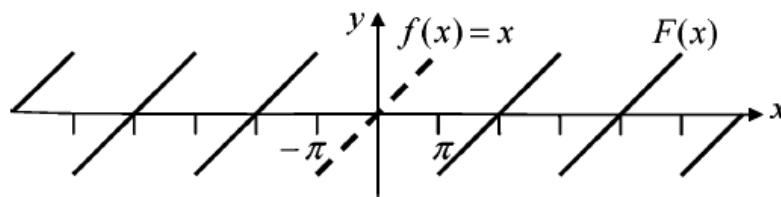


Рис. 4. Периодическое продолжение $F(x)$ функции $f(x) = x$, заданной на интервале $[-\pi; \pi]$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0 \quad a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = (\text{как интеграл от чётной функции по симметричному интервалу интегрирования})$$

$$= -\frac{2}{\pi} \frac{x \cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Таким образом, ряд Фурье имеет вид $x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(nx)}{n}$.

Ряд Фурье для чётных и нечётных функций

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[-\pi; \pi]$ и является **чётной** функцией, т.е. $f(-x) = f(x)$, тогда в её ряде Фурье все коэффициенты $b_n = 0$. Действительно

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = 0 \quad (\text{как интеграл от нечётной функции по симметричному интервалу интегрирования})$$

С учётом чётности функции $f(x)$ остальные коэффициенты вы-

числяются по формулам

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) dx \quad \text{и} \quad a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx,$$

где был использован факт, что *определённый интеграл от чётной функции по симметричному интервалу интегрирования равен*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) dx.$$

Для **нечётной** на отрезке $[-\pi; \pi]$ функции ($f(-x) = -f(x)$) коэффициенты **ряда Фурье** определяются формулами

$$\boxed{a_0 = a_n = 0} \quad \text{и} \quad \boxed{b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx}.$$

- Если функция $f(x)$ чётная, то в её **ряде Фурье** содержатся только **косинусы**; в этом случае говорят, что функция разложена в **ряд Фурье по косинусам** или чётным образом. Если функция $f(x)$ нечётная, то в её **ряде Фурье** содержатся только **синусы**; в этом случае говорят, что функция разложена в **ряд Фурье по синусам** или нечётным образом. ○
- Если функция $f(x)$ задана на полуинтервале, например $[0; \pi]$, и её необходимо разложить **по синусам** (т.е. нечётным образом), то график функции продлевается на полуинтервал $[-\pi; 0]$ **нечётным образом**, т.е. симметрично относительно начала координат (рис. 5а). Если разложение функции происходит по косинусам, то график функции продлевается на оставшийся полуинтервал **чётным образом** (симметрично относительно оси ординат, рис. 5б):

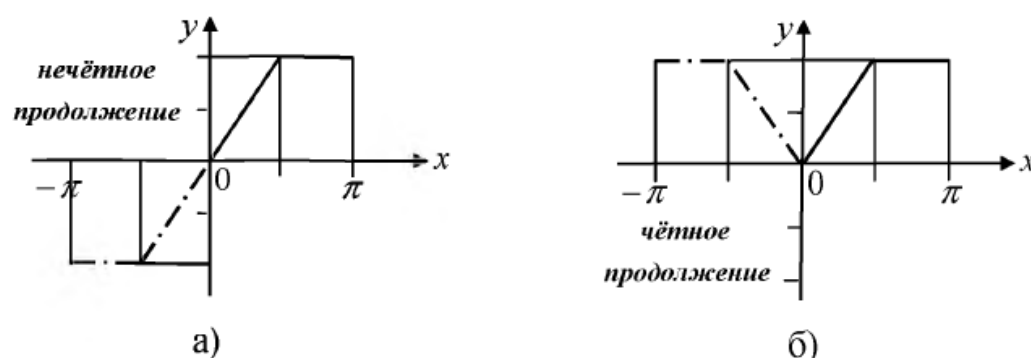


Рис. 5. Продолжение функции $f(x)$, заданной на полуинтервале $[0; \pi]$, на весь интервал $[-\pi; \pi]$ нечётным (а) и чётным (б) образом. ○

Пример 2. Разложить в **ряд Фурье** $f(x) = x^2$ на отрезке $[-\pi; \pi]$.

Так как функция $f(x) = x^2$ чётная, то в её **ряде Фурье** все коэффициенты $b_n = 0$. Найдём оставшиеся коэффициенты **ряда Фурье**:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2x^3}{3\pi} \Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3};$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{(-1)^n 4}{n^2} \quad (\text{вычислить самостоятельно}).$$

Итак, ряд Фурье имеет вид: $x^2 = \frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}.$

Ряд Фурье для функций с периодом $2l$ и $b-a$

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[-l; l]$ и удовлетворяет всем требованиям теоремы Фурье, тогда её можно разложить в ряд Фурье. Если ввести новую переменную $x = \frac{l\xi}{\pi}$ и рассмотреть функцию $\varphi(\xi) = f\left(\frac{l\xi}{\pi}\right) = f(x)$. Очевидно, что функция $\varphi(\xi)$ определена на отрезке $[-\pi; \pi]$ и её разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \varphi(\xi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\xi) + b_n \sin(n\xi)) \Rightarrow$$
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \right),$$

где коэффициенты ряда определяются формулами

$$a_0 = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx; \quad b_n = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx.$$

Если функция $f(x)$ определена на произвольном отрезке $[a; b]$, периодическая с периодом $T = b - a$ и удовлетворяет условиям теоремы Фурье, то её можно разложить в ряд Фурье, имеющий вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{b-a}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{b-a}\right) \right),$$

где коэффициенты ряда определяются формулами

$$a_0 = \frac{2}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx; \quad a_n = \frac{2}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{b-a}\right) dx;$$
$$b_n = \frac{2}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{b-a}\right) dx.$$

Задания для самостоятельного решения

10, 11. а) Разложить в ряд Фурье заданные функции $f(x)$ в указанных интервалах; б) разложить в ряд Фурье данные функции в указанных интервалах либо по косинусам, либо по синусам (указано в скобках).

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}; \quad \text{б) } f(x) = 5x + 1; \quad x \in (0; \pi] \text{ (по косинусам).}$$

$$11. \text{ а) } f(x) = \begin{cases} 2x, & -2 < x \leq 0 \\ 0, & 0 < x \leq 2 \end{cases}; \quad \text{б) } f(x) = x^2; \quad x \in (0; 2) \text{ (по синусам).}$$

10, 11. а) Разложить в ряд Фурье заданные функции $f(x)$ в указанных интервалах; б) разложить в ряд Фурье данные функции в указанных интервалах либо по косинусам, либо по синусам (указано в скобках).

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi < x \leq 0 \\ \pi - x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}; \quad \text{б) } f(x) = x + \pi; \quad x \in (0; \pi] \text{ (по синусам).}$$

$$11. \text{ а) } f(x) = x + 2; \quad x \in (-2; 2]; \quad \text{б) } f(x) = x; \quad x \in (0; 1] \text{ (по косинусам).}$$