

Задача 1.

$y' + 2y = 4x$ – это линейное дифференциальное уравнение, поэтому решение будем искать в виде $y = u \cdot v$, где u и v функции от x . Получаем:

$$y' + 2y = 4x, \quad (1)$$

$$y = u \cdot v, \quad (2)$$

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'. \quad (3)$$

(3) и (2) подставляем в (1). В результате получаем:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + 2u \cdot v = 4x \Leftrightarrow v(u' + 2u) + u \cdot v' = 4x \quad (4)$$

Найдем функцию u которая удовлетворяет условию $u' + 2u = 0$. Получаем:

$$\begin{aligned} u' + 2u = 0 &\Leftrightarrow \frac{du}{dx} = -2u \Leftrightarrow \frac{du}{u} = -2dx \Leftrightarrow \int \frac{du}{u} = -2 \int dx \Leftrightarrow \ln u = -2x \Rightarrow \\ &\Rightarrow u = e^{-2x} \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляем (5) в (4), получаем:

$$e^{-2x} \cdot v' = 4x \Leftrightarrow v' = \int 4x \cdot e^{2x} dx.$$

В последнем интеграле применим формулу интегрирования по частям

$$\int f \cdot dg = f \cdot g - \int g \cdot df.$$

Получаем:

$$\begin{aligned} &\left[f = 4x, dg = e^{2x} dx \Rightarrow df = 4dx, g = \frac{1}{2}e^{2x} \right] \Rightarrow \\ v = 2x \cdot e^{2x} - 2 \int e^{2x} dx &= 2x \cdot e^{2x} - e^{2x} + C \stackrel{(2)}{\Rightarrow} y = e^{-2x} (2x \cdot e^{2x} - e^{2x} + C) \Leftrightarrow \\ y &= 2x - 1 + Ce^{-2x}. \end{aligned}$$

Ответ: $y = 2x - 1 + Ce^{-2x}$.

Задача 2.

$y' + 2xy = x \cdot e^{-x^2}$ – это линейное дифференциальное уравнение, поэтому решение будем искать в виде $y = u \cdot v$, где u и v функции от x . Получаем:

$$y' + 2xy = x \cdot e^{-x^2}, \quad (1)$$

$$y = u \cdot v, \quad (2)$$

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'. \quad (3)$$

(3) и (2) подставляем в (1). В результате получаем:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + 2xu \cdot v = x \cdot e^{-x^2} \Leftrightarrow v(u' + 2xu) + u \cdot v' = x \cdot e^{-x^2} \quad (4)$$

Найдем функцию u которая удовлетворяет условию $u' + 2xu = 0$. Получаем:

$$\begin{aligned} u' + 2xu = 0 &\Leftrightarrow \frac{du}{dx} = -2xu \Leftrightarrow \frac{du}{u} = -2x dx \Leftrightarrow \int \frac{du}{u} = -2 \int x dx \Leftrightarrow \ln u = -x^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow u = e^{-x^2} \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляем (5) в (4), получаем:

$$e^{-x^2} \cdot v' = x \cdot e^{-x^2} \Leftrightarrow v = \int x dx = x^2 + C \xrightarrow{(2)} y = (x^2 + C) \cdot e^{-x^2}$$

Ответ: $y = (x^2 + C) \cdot e^{-x^2}$.

Задача 3.

$y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$ – это линейное дифференциальное уравнение, поэтому решение будем искать в виде $y = u \cdot v$, где u и v функции от x . Получаем:

$$y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1, \quad (1)$$

$$y = u \cdot v, \quad (2)$$

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'. \quad (3)$$

(3) и (2) подставляем в (1). В результате получаем:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + \frac{1-2x}{x^2}u \cdot v = 1 \Leftrightarrow v(u' + \frac{1-2x}{x^2}u) + u \cdot v' = 1 \quad (4)$$

Найдем функцию u которая удовлетворяет условию $u' + \frac{1-2x}{x^2}u = 0$. Получаем:

$$\begin{aligned} u' + \frac{1-2x}{x^2}u = 0 &\Leftrightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1-2x}{x^2}u \Leftrightarrow \frac{du}{u} = \frac{2x-1}{x^2}dx \Leftrightarrow \int \frac{du}{u} = \int \frac{2x-1}{x^2}dx \Leftrightarrow \\ \ln u &= 2 \ln x + \frac{1}{x} \Rightarrow u = x^2 e^{\frac{1}{x}} \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляем (5) в (4), получаем:

$$\begin{aligned} x^2 e^{\frac{1}{x}} \cdot v' &= 1 \Leftrightarrow v = \int \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx = \int e^{-\frac{1}{x}} d\left(-\frac{1}{x}\right) = e^{-\frac{1}{x}} + C \xrightarrow{(2)} \\ y &= x^2 e^{\frac{1}{x}} \left(e^{-\frac{1}{x}} + C\right) = x^2 + Cx^2 e^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Ответ: $y = x^2 + Cx^2 e^{\frac{1}{x}}$.

Задача 4.

$y' = \frac{1}{2x-y^2} \Leftrightarrow x' = 2x - y^2$ — это линейное дифференциальное уравнение относительно x , поэтому решение будем искать в виде $x = u \cdot v$, где u и v функции от y . Получаем:

$$x' = 2x - y^2, \quad (1)$$

$$x = u \cdot v, \quad (2)$$

$$x' = u' \cdot v + u \cdot v'. \quad (3)$$

(3) и (2) подставляем в (1). В результате получаем:

$$u' \cdot v + u \cdot v' - 2u \cdot v = -y^2 \Leftrightarrow v(u' - 2u) + u \cdot v' = -y^2 \quad (4)$$

Найдем функцию u которая удовлетворяет условию $u' - 2u = 0$. Получаем:

$$\begin{aligned} u' - 2u = 0 &\Leftrightarrow \frac{du}{dy} = 2u \Leftrightarrow \frac{du}{u} = 2dy \Leftrightarrow \int \frac{du}{u} = \int 2dy \Leftrightarrow \\ \ln u = 2y &\Rightarrow u = e^{2y} \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляем (5) в (4), получаем:

$$e^{2y} \cdot v' = -y^2 \Leftrightarrow v = \int -y^2 e^{-2y} dy.$$

В последнем интеграле применим формулу интегрирования по частям

$$\int f \cdot dg = f \cdot g - \int g \cdot df.$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \left[f = -y^2, dg = e^{-2y} dy \Rightarrow df = -2y dy, g = -\frac{1}{2} e^{-2y} \right] &\Rightarrow \\ v = \frac{1}{2} y^2 e^{-2y} - \int y e^{-2y} dy & \\ \left[f = y, dg = e^{-2y} dy \Rightarrow df = dy, g = -\frac{1}{2} e^{-2y} \right] &\Rightarrow \\ v = \frac{1}{2} y^2 e^{-2y} - \frac{1}{2} y e^{-2y} - \frac{1}{2} \int e^{-2y} dy = \frac{1}{2} y(y-1) e^{-2y} + \frac{1}{4} e^{-2y} + C & \end{aligned}$$

Ответ: $x = \frac{1}{2} y(y-1) + \frac{1}{4} + C e^{2y}.$

Задача 5.

$xy' - \frac{y}{x+1} = x$, $y(1) = 0$ – это линейное дифференциальное уравнение, поэтому решение будем искать в виде $y = u \cdot v$, где u и v функции от x . Получаем:

$$y' - \frac{y}{x(x+1)} = 1, \quad (1)$$

$$y = u \cdot v, \quad (2)$$

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'. \quad (3)$$

(3) и (2) подставляем в (1). В результате получаем:

$$u' \cdot v + u \cdot v' - \frac{1}{x(x+1)}u \cdot v = 1 \Leftrightarrow v(u' - \frac{1}{x(x+1)}u) + u \cdot v' = 1 \quad (4)$$

Найдем функцию u которая удовлетворяет условию $u' - \frac{1}{x(x+1)}u = 0$. Получаем:

$$\begin{aligned} u' - \frac{1}{x(x+1)}u = 0 &\Leftrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x(x+1)}u \Leftrightarrow \frac{du}{u} = \frac{1}{x(x+1)}dx \Leftrightarrow \\ \int \frac{du}{u} &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \Leftrightarrow \ln u = \ln x - \ln |x+1| \Rightarrow \\ &\Rightarrow u = \frac{x}{x+1} \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляем (5) в (4), получаем:

$$\frac{x}{x+1} \cdot v' = 1 \Leftrightarrow v = \int \frac{x+1}{x} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx = x + \ln x + C \xrightarrow{(2)}$$

$$y = \frac{x}{x+1}(x + \ln x + C) - \text{общее решение}$$

Так как $y(1) = 0$, то $0 = \frac{1}{1+1}(1 + \ln 1 + C)$, откуда получаем, что $C = -1$.

Ответ: $y = \frac{x}{x+1}(x + \ln x - 1)$.

Задача 6.

$y' + 2xy = 2x^3y^3$ – это дифференциальное уравнение Бернулли, поэтому решение будем искать в виде $y = u \cdot v$, где u и v функции от x . Получаем:

$$y' + 2xy = 2x^3y^3, \quad (1)$$

$$y = u \cdot v, \quad (2)$$

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'. \quad (3)$$

(3) и (2) подставляем в (1). В результате получаем:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + 2xu \cdot v = 2x^3u^3v^3 \Leftrightarrow v(u' + 2xu) + u \cdot v' = 2x^3u^3v^3 \quad (4)$$

Найдем функцию u которая удовлетворяет условию $u' + 2xu = 0$. Получаем:

$$\begin{aligned} u' + 2xu = 0 &\Leftrightarrow \frac{du}{dx} = -2xu \Leftrightarrow \frac{du}{u} = -2xdx \Leftrightarrow \\ \int \frac{du}{u} &= \int (-2x) dx \Leftrightarrow \ln u = -x^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow u = e^{-x^2} \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляем (5) в (4), получаем:

$$e^{-x^2} \cdot v' = 2x^3e^{-3x^2}v^3 \Leftrightarrow \int \frac{dv}{v^3} = \int 2x^3e^{-2x^2}dx \Leftrightarrow -\frac{1}{2}v^{-2} = \int 2x^3e^{-2x^2}dx.$$

В последнем интеграле применим формулу интегрирования по частям

$$\int f \cdot dg = f \cdot g - \int g \cdot df.$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \left[f = 2x^2, dg = xe^{-2x^2}dx \Rightarrow df = 4xdx, g = -\frac{1}{4} \int e^{-2x^2}d(-2x^2) = -\frac{1}{4}e^{-2x^2} \right] &\Rightarrow \\ -\frac{1}{2}v^{-2} &= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x^2} + \int xe^{-2x^2}dx = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x^2} - \frac{1}{4} \int e^{-2x^2}d(-2x^2) = \\ &= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x^2} - \frac{1}{4}e^{-2x^2} - \frac{C}{4} = -\frac{1}{4}e^{-2x^2}(2x^2 + 1 + Ce^{2x^2}) \Rightarrow \\ v^2 &= \frac{2e^{2x^2}}{2x^2 + 1 + Ce^{2x^2}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2e^{2x^2}}{2x^2 + 1 + Ce^{2x^2}}} \xrightarrow{(2)} \\ y &= e^{-x^2} \sqrt{\frac{2e^{2x^2}}{2x^2 + 1 + Ce^{2x^2}}} = \sqrt{\frac{2}{2x^2 + 1 + Ce^{2x^2}}} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } y = \sqrt{\frac{2}{2x^2 + 1 + Ce^{2x^2}}}.$$

Задача 7.

$y' + \frac{2}{x}y = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$ – это дифференциальное уравнение Бернулли, поэтому решение будем искать в виде $y = u \cdot v$, где u и v функции от x . Получаем:

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}, \quad (1)$$

$$y = u \cdot v, \quad (2)$$

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'. \quad (3)$$

(3) и (2) подставляем в (1). В результате получаем:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + \frac{2}{x}u \cdot v = \frac{2\sqrt{u}\sqrt{v}}{\cos^2 x} \Leftrightarrow v(u' + \frac{2}{x}u) + u \cdot v' = \frac{2\sqrt{u}\sqrt{v}}{\cos^2 x} \quad (4)$$

Найдем функцию u которая удовлетворяет условию $u' + \frac{2}{x}u = 0$. Получаем:

$$\begin{aligned} u' + \frac{2}{x}u = 0 &\Leftrightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{2}{x}u \Leftrightarrow \frac{du}{u} = -\frac{2}{x}dx \Leftrightarrow \\ \int \frac{du}{u} &= \int \left(-\frac{2}{x}\right) dx \Leftrightarrow \ln u = -2 \ln x \Rightarrow \\ &\Rightarrow u = \frac{1}{x^2} \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляем (5) в (4), получаем:

$$\frac{1}{x^2} \cdot v' = \frac{2\sqrt{v}}{x \cos^2 x} \Rightarrow \frac{dv}{\sqrt{v}} = \frac{2x dx}{\cos^2 x} \Rightarrow 2\sqrt{v} = \int \frac{2x dx}{\cos^2 x}$$

В последнем интеграле применим формулу интегрирования по частям

$$\int f \cdot dg = f \cdot g - \int g \cdot df.$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \left[f = 2x, dg = \frac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow df = 2dx, g = \operatorname{tg} x \right] &\Rightarrow \\ 2\sqrt{v} &= 2x \operatorname{tg} x - 2 \int \operatorname{tg} x dx = 2x \operatorname{tg} x + 2 \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = 2x \operatorname{tg} x + 2 \ln |\cos x| + 2C \Rightarrow \\ v &= (x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C)^2 \xrightarrow{(2)} y = \frac{1}{x^2} (x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C)^2 \end{aligned}$$

Ответ: $y = \frac{1}{x^2} (x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C)^2$.