

Степенные ряды. Примеры решения задач.

1. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

2529.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{2n-1}}{(4n-3)^2}.$$

Применим признак Даламбера.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n x^{2n+1}}{(4n+1)^2} \cdot \frac{(4n-3)^2}{2^{n-1} x^{2n-1}} \right| = 2x^2$$

Ряд будет сходящимся при $2x^2 < 1$. Получаем:

$$2x^2 < 1 \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \text{интервал сходимости.}$$

Исследуем концы интервала сходимости. Пусть $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1}}{(4n-3)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} (-1)^{2n-1} \frac{1}{2^n} \sqrt{2}}{(4n-3)^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)^2} - \text{сходящийся ряд.}$$

Последний ряд сходится, т.к.

$$\frac{1}{(4n-3)^2} \sim \frac{1}{n^2} \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ (см. ряд Дирихле)}$$

Пусть $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1}}{(4n-3)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} \frac{1}{2^n} \sqrt{2}}{(4n-3)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)^2} - \text{сходящийся ряд.}$$

Последний ряд сходится, т.к.

$$\frac{1}{(4n-3)^2} \sim \frac{1}{n^2} \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ (см. ряд Дирихле)}$$

Ответ: Область сходимости есть

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

2. Найти суммы рядов:

2583.

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \dots + \frac{n}{x^n} + \dots$$

Проведем замену

$$\frac{1}{x} = t.$$

Получаем степенной ряд:

$$t + 2t^2 + 3t^3 + \dots + nt^n + \dots$$

Вынесем t за скобки. Получим:

$$t + 2t^2 + 3t^3 + \dots + nt^n + \dots = t(1 + 2t + 3t^2 + \dots + nt^{n-1} + \dots)$$

Выражение в скобках проинтегрируем. Получим:

$$\begin{aligned} \int (1 + 2t + 3t^2 + \dots + nt^{n-1} + \dots) dt &= t + t^2 + t^3 + \dots + t^n + \dots = \\ &= (1 + t + t^2 + t^3 + \dots + t^n + \dots) - 1 = \frac{1}{1-t} - 1 = \frac{1 - 1 + t}{1-t} = \frac{t}{1-t} \end{aligned}$$

Откуда получаем:

$$(1 + 2t + 3t^2 + \dots + nt^{n-1} + \dots) = \left(\frac{t}{1-t} \right)' = \frac{1-t-t \cdot (-1)}{(1-t)^2} = \frac{1}{(1-t)^2}$$

Откуда получаем:

$$t + 2t^2 + 3t^3 + \dots + nt^n + \dots = t(1 + 2t + 3t^2 + \dots + nt^{n-1} + \dots) = \frac{t}{(1-t)^2}$$

Перейдем в последнем равенстве от t к x . Получаем:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \dots + \frac{n}{x^n} + \dots = \frac{\frac{1}{x}}{(1 - \frac{1}{x})^2} = \frac{\frac{1}{x}}{(\frac{x-1}{x})^2} = \frac{x}{(x-1)^2}.$$

Ответ: Сумма ряда равна

$$\frac{x}{(x-1)^2}.$$

3. Исследовать сходимость ряда:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (2n+3)}{(n+1)!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+5}{2n+7} \right)^{4n}.$$

Решение. а) Применим признак Даламбера.

$$a_n = \frac{5^n (2n+3)}{(n+1)!}, \quad a_{n+1} = \frac{5^{n+1} (2(n+1)+3)}{(n+1+1)!} = \frac{5 \cdot 5^n (2n+5)}{(n+1)! \cdot (n+2)} \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 5^n (2n+5)}{(n+1)! \cdot (n+2)} \cdot \frac{(n+1)!}{5^n (2n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n+2} = 0 < 1.$$

Так как предел меньше единицы, то ряд сходится.

б) Применим радикальный признак Коши.

$$a_n = \left(\frac{3n+5}{2n+7} \right)^{4n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+5}{2n+7} \right)^{4n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+5}{2n+7} \right)^4 = \frac{81}{16} > 1.$$

Так как предел больше единицы, то ряд расходится.

Ответ: а) Ряд сходится; б) Ряд расходится.

4. Вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001:

$$\int_0^{0,5} \ln(1 + \sqrt[4]{x^3}) dx;$$

Решение. Известно, что

$$1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^n t^n + \dots = \frac{1}{1+t}, \quad |t| < 1.$$

Проинтегрируем последнее равенство.

$$\int (1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^n t^n + \dots) dt = \int \left(\frac{1}{1+t} \right) dt = \ln(1+t), \quad |t| < 1.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \ln(1+t) &= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} + \dots, \quad |t| < 1 \Rightarrow \\ \int_0^{0,5} \ln(1 + \sqrt[4]{x^3}) dx &= \int_0^{0,5} \left(\sqrt[4]{x^3} - \frac{(\sqrt[4]{x^3})^2}{2} + \frac{(\sqrt[4]{x^3})^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} (\sqrt[4]{x^3})^n}{n} + \dots \right) dx = \\ &= \left(\frac{4}{7} x^{7/4} - \frac{2}{10} x^{10/4} + \frac{4}{39} x^{13/4} - \dots + \frac{4(-1)^{n-1} x^{(3n+4)/4}}{3n+4} + \dots \right) \Big|_0^{0,5} = \\ &= \frac{4}{7} (0,5)^{7/4} - \frac{2}{10} (0,5)^{10/4} + \frac{4}{39} (0,5)^{13/4} - \dots + \frac{4(-1)^{n-1} (0,5)^{(3n+4)/4}}{3n+4} + \dots = \\ &= 0.169887 - 0.0353553 + 0.0107807 - 0.00390625 + 0.00156475 - 0.000563072 + \dots \approx \\ &\approx 0.169887 - 0.0353553 + 0.0107807 - 0.00390625 + 0.00156475 = 0.221494 \end{aligned}$$

Ответ: 0.221

5. Разложить функцию $y = f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(-l, l)$:

$$f(x) = x(x+1), \quad (-\pi, \pi).$$

Решение. Заметим, что функция $y = f(x)$ ни четная ни нечетная, т.к.

$$f(-x) = -x(-x+1) = x(x-1) \neq f(x), \quad f(-x) = x(x-1) \neq -f(x) = -x(x+1).$$

Ряд Фурье функции $y = f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right).$$

Вспомним формулы коэффициентов Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

В нашем случае $l = \pi$. Поэтому, получаем:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(x+1) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + x) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \left(\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^2}{2} \right) - \left(-\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{2\pi^3}{3}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + x) \cos nx dx = \left[\begin{array}{l} \text{Применим формулу интегрирования по частям:} \\ \int U dV = UV - \int V dU, \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} U = x^2 + x, \quad dV = \cos nx dx \Rightarrow dU = (2x + 1)dx, \quad V = \int \cos nx dx = \frac{1}{n} \sin nx \Big] = \\ = \frac{1}{\pi} \left((x^2 + x) \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} (2x + 1) \sin nx dx \right) = \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Опять применим формулу интегрирования по частям:} \\ \int U dV = UV - \int V dU, \end{array} \right.$$

$$U = 2x + 1, \quad dV = \sin nx dx \Rightarrow dU = 2dx, \quad V = \int \sin nx dx = -\frac{1}{n} \cos nx \Big] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left((2x + 1) \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \right) = (2x + 1) \frac{1}{\pi n^2} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$\begin{aligned} &= (2\pi + 1) \frac{1}{\pi n^2} \cos n\pi - (-2\pi + 1) \frac{1}{\pi n^2} \cos n\pi = \frac{1}{\pi n^2} \cos n\pi (2\pi + 1 + 2\pi - 1) = \\ &= \frac{4\pi}{\pi n^2} \cos n\pi = (-1)^n \frac{4}{n^2}. \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + x) \sin nx dx = \left[\begin{array}{l} \text{Применим формулу интегрирования по частям:} \\ \int U dV = UV - \int V dU, \end{array} \right.$$

$$U = x^2 + x, \quad dV = \sin nx dx \Rightarrow dU = (2x + 1)dx, \quad V = \int \sin nx dx = -\frac{1}{n} \cos nx \Big] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(-(x^2 + x) \frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} (2x + 1) \cos nx dx \right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n} ((\pi^2 + \pi) \cos n\pi - (\pi^2 - \pi) \cos n\pi) = -\frac{1}{\pi n} (-1)^n (\pi^2 + \pi - \pi^2 + \pi) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n}$$

Ответ:

$$x(x+1) = \frac{\pi^3}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx + (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx \right).$$