

Задача 10(а). Необходимо разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на интервале $[-\pi; \pi]$:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Применим формулы (смотрите теорию по рядам Фурье):

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx.$$

Получаем:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = -\frac{x}{\pi} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{x^2}{2\pi} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} - 1, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \cdot \cos(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \cos(nx) dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{Применим формулу интегрирования по частям:} \\ U = x, dV = \cos(nx) dx \Rightarrow dU = dx, V = \frac{1}{n} \sin(nx) \end{array} \right| = \\ &= \frac{x}{\pi n} \sin(nx) \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi n^2} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi n^2} (\cos(\pi n) - \cos 0) = \frac{1}{\pi n^2} ((-1)^n - 1). \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что

$$b_n = \frac{1 + (-1)^n + \pi(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

В результате получаем:

$$f(x) = \frac{\pi - 2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) \cos(nx) + \frac{1 + (-1)^n + \pi(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin(nx) \right)$$

Ответ:

$$f(x) = \frac{\pi - 2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) \cos(nx) + \frac{1 + (-1)^n + \pi(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin(nx) \right).$$