сливается с прямой $y = x$ (рис. 115). На рисунках 116–118 проиллюстрированы некоторые из важнейших эквивалентностей, о которых говорилось выше.

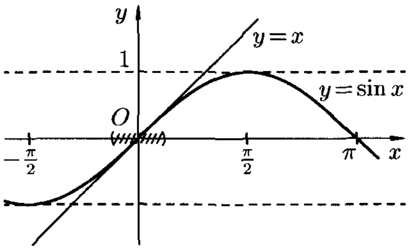

Рис. 115. $\sin x \approx x \ (x \to 0)$

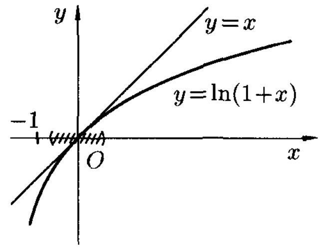

Рис. 116. $\ln(1+x) \approx x \ (x \to 0)$

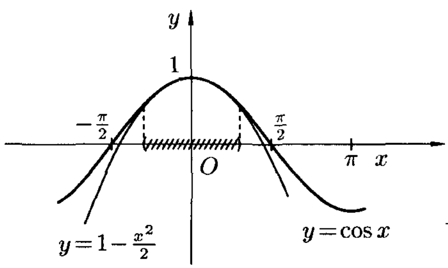

Рис. 117. $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} \ (x \to 0)$

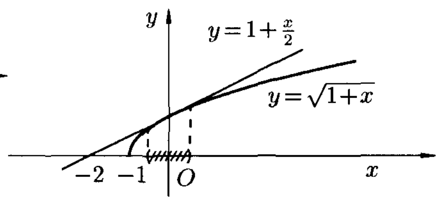

Рис. 118. $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} \ (x \to 0)$

Пример 18.12. Найти приближенное значение для $\ln 1{,}032$.

Решение: $\ln 1{,}032 = \ln(1 + 0{,}032) \approx 0{,}032$ Для сравнения результата по таблице логарифмов находим, что $\ln 1{,}032 = 0{,}031498\ldots$ ●

§ 19. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

19.1. Непрерывность функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т. е.

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).} \qquad (19.1)$$

Равенство (19.1) означает выполнение трех условий:

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в ее окрестности;

2) функция $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$;

3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, т. е. выполняется равенство (19.1).

Так как $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, то равенство (19.1) можно записать в виде

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x) = f(x_0). \tag{19.2}$$

Это означает, что *при нахождении предела непрерывной функции $f(x)$ можно перейти к пределу под знаком функции*, то есть *в функцию $f(x)$ вместо аргумента x подставить его предельное значение x_0*.

Например, $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}} = e$. В первом равенстве функция и предел поменялись местами (см. (19.2)) в силу непрерывности функции e^x.

Пример 19.1. Вычислить $A = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Решение:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) = \lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} =$$
$$= \ln\Big(\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\Big) = \ln e = 1.$$

Отметим, что $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$.

Можно дать еще одно определение непрерывности функции, опираясь на понятия приращения аргумента и функции.

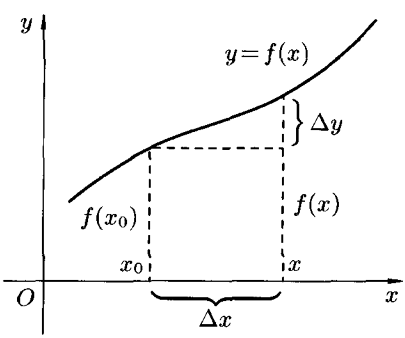

Рис. 119

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некотором интервале $(a;b)$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a;b)$. Для любого $x \in (a;b)$ разность $x-x_0$ называется *приращением аргумента x в точке x_0* и обозначается Δx («дельта x»): $\Delta x = x - x_0$. Отсюда $x = x_0 + \Delta x$.

Разность соответствующих значений функций $f(x)-f(x_0)$ называется *приращением функции $f(x)$ в точке x_0* и обозначается Δy (или Δf или $\Delta f(x_0)$): $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ или $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ (см. рис. 119).

Очевидно, приращения Δx и Δy могут быть как положительными, так и отрицательными числами.

Запишем равенство (19.1) в новых обозначениях. Так как условия $x \to x_0$ и $x - x_0 \to 0$ одинаковы, то равенство (19.1) принимает вид $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$ или

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.} \tag{19.3}$$

Полученное равенство (19.3) является еще одним определением непрерывности функции в точке: функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если она определена в точке x_0 и ее окрестности и выполняется равенство (19.3), т. е. бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Исследуя непрерывность функции в точке, применяют либо первое (равенство (19.1)), либо второе (равенство (19.3)) определение.

Пример 19.2. Исследовать на непрерывность функцию $y = \sin x$.

Решение: Функция $y = \sin x$ определена при всех $x \in \mathbb{R}$.

Возьмем произвольную точку x и найдем приращение Δy:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0} 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} = 0$, так как произведение ограниченной функции и б.м.ф. есть б.м.ф.

Согласно определению (19.3), функция $y = \sin x$ непрерывна в точке x. ●

Аналогично доказывается, что функция $y = \cos x$ также непрерывна.

19.2. Непрерывность функции в интервале и на отрезке

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в интервале* (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна в интервале (a, b) и в точке $x = a$ *непрерывна справа* $\left(\text{т. е. } \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a)\right)$, а в точке $x = b$ *непрерывна слева* $\left(\text{т. е. } \lim\limits_{x\to b-0} f(x) = f(b)\right)$.

19.3. Точки разрыва функции и их классификация

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются ***точками разрыва этой функции***. Если $x = x_0$ — точка разрыва функции $y = f(x)$, то в ней не выполняется по крайней мере одно из условий первого определения непрерывности функции, а именно:

1. Функция определена в окрестности точки x_0, но не определена в самой точке x_0.

Например, функция $y = \dfrac{1}{x-2}$ не определена в точке $x_0 = 2$ (см. рис. 120).

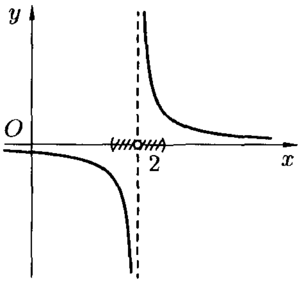

Рис. 120

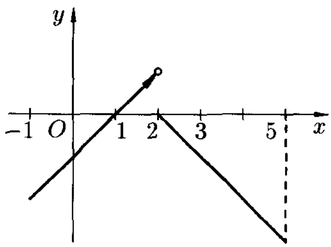

Рис. 121

2. Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, но не существует предела $f(x)$ при $x \to x_0$.

Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{если } \ -1 \leqslant x < 2, \\ 2-x, & \text{если } \ 2 \leqslant x \leqslant 5, \end{cases}$$

определена в точке $x_0 = 2$ $\ (f(2) = 0)$, однако в точке $x_0 = 2$ имеет разрыв (см. рис. 121), т. к. эта функция не имеет предела при $x \to 2$:

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = 1, \text{ а } \lim_{x \to 2+0} f(x) = 0.$$

3. Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, но этот предел не равен значению функции в точке x_0: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

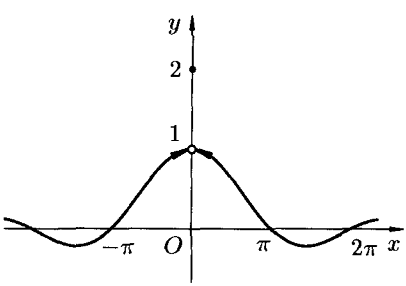

Рис. 122

Например, функция (см. рис. 122)

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{если } \ x \neq 0; \\ 2, & \text{если } \ x = 0. \end{cases}$$

Здесь $x_0 = 0$ — точка разрыва:

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

а $g(x_0) = g(0) = 2$.

Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода. Точка разрыва x_0 называется ***точкой разрыва первого рода*** функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа (односторонние пределы), т. е. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A_2$. При этом:

а) если $A_1 = A_2$, то точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва*; б) если $A_1 \neq A_2$, то точка x_0 называется *точкой конечного разрыва*. Величину $|A_1 - A_2|$ называют *скачком функции* в точке разрыва первого рода.

Точка разрыва x_0 называется ***точкой разрыва второго рода*** функции $y = f(x)$, если по крайней мере один из односторонних пределов (слева или справа) не существует или равен бесконечности.

1. Обратимся к функциям, рассмотренным выше (см. рис. 120). $y = \frac{1}{x-2}$, $x_0 = 2$ — точка разрыва второго рода.

2. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{если} \quad -1 \leqslant x < 2, \\ 2 - x, & \text{если} \quad 2 \leqslant x \leqslant 5, \end{cases}$$

$x_0 = 2$ является точкой разрыва первого рода, скачок функции равен $|1 - 0| = 1$.

3. Для функции

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 2 & \text{при} \quad x = 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$ является точкой устранимого разрыва первого рода. Положив $g(x) = 1$ (вместо $g(x) = 2$) при $x = 0$, разрыв устранится, функция станет непрерывной.

Пример 19.3. Дана функция $f(x) = \dfrac{|x-3|}{x-3}$. Найти точки разрыва, выяснить их тип.

○ Решение: Функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x = 3$. Очевидно, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 3, \\ -1 & \text{при } x < 3. \end{cases}$ Следовательно, $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = 1$, а $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = -1$. Поэтому в точке $x = 3$ функция имеет разрыв первого рода. Скачок функции в этой точке равен $1 - (-1) = 2$. ●

19.4. Основные теоремы о непрерывных функциях. Непрерывность элементарных функций

Теоремы о непрерывности функций следуют непосредственно из соответствующих теорем о пределах.

Теорема 19.1. Сумма, произведение и частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная (для частного за исключением тех значений аргумента, в которых делитель равен нулю)

❑ Пусть функция $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на некотором множестве X и x_0 — любое значение из этого множества. Докажем, например, непрерывность произведения $F(x) = f(x) \cdot \varphi(x)$. Применяя теорему о пределе произведения, получим:

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = f(x_0) \cdot \varphi(x_0) = F(x_0).$$

Итак, $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$, что и доказывает непрерывность функции $f(x) \cdot \varphi(x)$ в точке x_0. ■

Теорема 19.2. Пусть функции $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $f(\varphi(x))$, состоящая из непрерывных функций, непрерывна в точке x_0.

❑ В силу непрерывности функции $u = \varphi(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$, т. е. при $x \to x_0$ имеем $u \to u_0$. Поэтому вследствие непрерывности функции $y = f(u)$ имеем:

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0) = f(\varphi(x_0)).$$

Это и доказывает, что сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0. ■

Теорема 19.3. Если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $[a; b]$ оси Ox, то обратная функция $y = \varphi(x)$ также непрерывна и монотонна на соответствующем отрезке $[c; d]$ оси Oy (без доказательства).

Так, например, функция $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, в силу теоремы 19.1, есть функция непрерывная для всех значений x, кроме тех, для которых $\cos x = 0$, т. е. кроме значений $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Функции $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, $\arccos x$, $\operatorname{arcctg} x$, в силу теоремы 19.3, непрерывны при всех значениях x, при которых эти функции определены.

Можно доказать, что ***все основные элементарные функции непрерывны при всех значениях x, для которых они определены.***

Как известно, *элементарной* называется такая функция, которую можно задать одной формулой, содержащей конечное число арифметических действий и суперпозиций (операции взятия функции от функции) основных элементарных функций. Поэтому из приведенных выше теорем вытекает: ***всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.***

Этот важный результат позволяет, в частности, легко находить пределы элементарных функций в точках, где они определены.

Пример 19.4. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} 2^{\operatorname{ctg} x}$.

Решение: Функция $2^{\operatorname{ctg} x}$ непрерывна в точке $x = \frac{\pi}{4}$, поэтому

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} 2^{\operatorname{ctg} x} = 2^{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}} = 2^1 = 2.$$

19.5. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Непрерывные на отрезке функции имеют ряд важных свойств. Сформулируем их в виде теорем, не приводя доказательств.

Теорема 19.4 (Вейерштрасса). Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

Изображенная на рисунке 123 функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, принимает свое наибольшее значение M в точке x_1, а наименьшее m — в точке x_2. Для любого $x \in [a; b]$ имеет место неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Следствие 19.1. Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

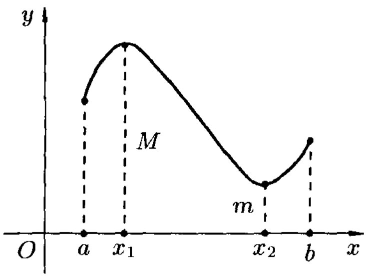

Рис. 123

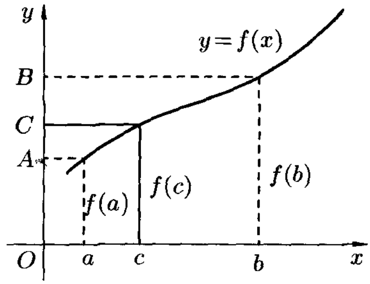

Рис. 124

> **Теорема 19.5 (Больцано-Коши).** Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на его концах неравные значения $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то на этом отрезке она принимает и все промежуточные значения между A и B.

Геометрически теорема очевидна (см. рис. 124).

Для любого числа C, заключенного между A и B, найдется точка c внутри этого отрезка такая, что $f(c) = C$. Прямая $y = C$ пересечет график функции по крайней мере в одной точке.

> **Следствие 19.2.** Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка $[a; b]$ найдется хотя бы одна точка c, в которой данная функция $f(x)$ обращается в нуль: $f(c) = 0$.

Геометрический смысл теоремы: если график непрерывной функции переходит с одной стороны оси Ox на другую, то он пересекает ось Ox (см. рис. 125).

Следствие 19.2 лежит в основе так называемого *«метода половинного деления»*, который используется для нахождения корня уравнения $f(x) = 0$.

Утверждения теорем 19.4 и 19.5, вообще говоря, делаются неверными, если нарушены какие-либо из ее условий: функция непрерывна не на отрезке $[a; b]$, а в интервале $(a; b)$, либо функция на отрезке $[a; b]$ имеет разрыв.

Рисунок 126 показывает это для следствия теоремы 19.5: график разрывной функции не пересекает ось Ox.

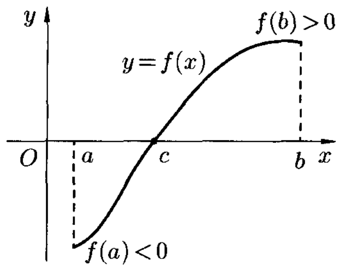

Рис. 125

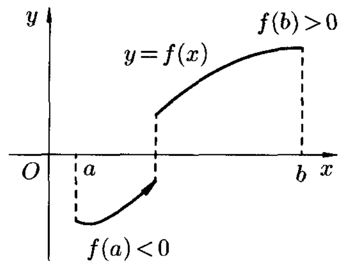

Рис. 126

Пример 19.5. Определить с точностью до $\varepsilon = 0{,}00001$ корень уравнения $e^{2x+1} + x^2 - 5 = 0$, принадлежащий отрезку $[0; 1]$, применив метод половинного деления.

Решение: Обозначим левую часть уравнения через $f(x)$.

Шаг 1. Вычисляем $\varphi = f(a)$ и $\psi = f(b)$, где $a = 0$, $b = 1$.

Шаг 2. Вычисляем $x = \frac{a+b}{2}$.

Шаг 3. Вычисляем $y = f(x)$. Если $f(x) = 0$, то x — корень уравнения.

Шаг 4. При $f(x) \neq 0$ если $y \cdot \varphi < 0$, то полагаем $b = x$, $\psi = y$, иначе полагаем $a = x$, $\varphi = y$.

Шаг 5. Если $b - a - \varepsilon < 0$ то задача решена. В качестве искомого корня (с заданной точностью ε) принимается величина $x = \frac{a+b}{2}$. Иначе процесс деления отрезка $[a; b]$ пополам продолжаем, возвращаясь к шагу 2.

В результате произведенных действий получим: $x = 0{,}29589$. ●

§ 20. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

20.1. Задачи, приводящие к понятию производной

Понятие производной является одним из основных математических понятий. Производная широко используется при решении целого ряда задач математики, физики, других наук, в особенности при изучении скорости разных процессов.

Скорость прямолинейного движения

Пусть материальная точка (некоторое тело) M движется неравномерно по некоторой прямой. Каждому значению времени t соответствует определенное расстояние $OM = S$ до некоторой фиксированной точки O. Это расстояние зависит от истекшего времени t, т. е. $S = S(t)$.

Это равенство называют *законом движения точки.* Требуется найти скорость движения точки.

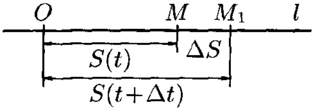

Рис 127

Если в некоторый момент времени t точка занимает положение M, то в момент времени $t+\Delta t$ (Δt — приращение времени) точка займет положение M_1, где $OM_1 = S + \Delta S$ (ΔS — приращение расстояния) (см. рис. 127). Таким образом, перемещение точки M за время Δt будет $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$

Отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ выражает *среднюю скорость* движения точки за время Δt:

$$V_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Средняя скорость зависит от значения Δt: чем меньше Δt, тем точнее средняя скорость выражает скорость движения точки в данный момент времени t.

Предел средней скорости движения при стремлении к нулю промежутка времени Δt называется *скоростью движения точки в данный момент времени* (или мгновенной скоростью). Обозначив эту скорость через V, получим

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad \text{или} \quad V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}. \qquad (20\,1)$$

Касательная к кривой

Дадим сначала общее определение касательной к кривой.

Возьмем на непрерывной кривой L две точки M и M_1 (см. рис. 128).

Прямую MM_1, проходящую через эти точки, называют *секущей.*

Пусть точка M_1, двигаясь вдоль кривой L, неограниченно приближается к точке M. Тогда секущая, поворачиваясь около точки M, стремится к некоторому предельному положению MT.

Касательной к данной кривой в данной точке M называется предельное положение MT секущей MM_1, проходящей через точку M, когда вторая точка пересечения M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M_1.

Рассмотрим теперь график непрерывной кривой $y = f(x)$, имеющий в точке $M(x; y)$ невертикальную касательную. Найдем ее угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол касательной с осью Ox.

Для этого проведем через точку M и точку M_1 графика с абсциссой $x + \Delta x$ секущую (см. рис. 129). Обозначим через φ — угол между секущей MM_1 и осью Ox На рисунке видно, что угловой коэффициент секущей равен

$$k_{\text{сек}} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

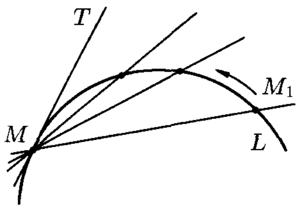

Рис 128

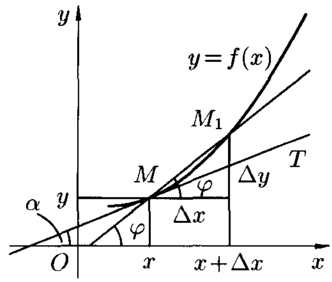

Рис 129

При $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции приращение Δy тоже стремится к нулю; поэтому точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M, а секущая MM_1, поворачиваясь около точки M, переходит в касательную. Угол $\varphi \to \alpha$, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi = \alpha$.

Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha$.

Поэтому угловой коэффициент касательной равен

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (20.2)$$

К нахождению пределов вида (20.1) и (20.2) приводят решения и множества других задач. Можно показать, что:

– если $Q = Q(t)$ — количество электричества, проходящего через поперечное сечение проводника за время t, то *сила тока в момент времени t* равна

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t}; \qquad (20.3)$$

– если $N = N(t)$ — количество вещества, вступающего в химическую реакцию за время t, то *скорость химической реакции в момент времени t* равна

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}; \qquad (20.4)$$

– если $m = m(x)$ — масса неоднородного стержня между точками $O(0;0)$ и $M(x;0)$, то *линейная плотность стержня в точке x* есть

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x}. \qquad (20.5)$$

Пределы (20.1)–(20.5) имеют одинаковый вид; везде требуется найти предел отношения приращения функции к приращению аргумента. Этот предел называют *производной*. Эти пределы можно записать так:

$$V = S'_t; \quad \operatorname{tg} \alpha = y'_x; \quad I = Q'_t; \quad V = N'_t; \quad S = m'_x$$

(читается «V равно S штрих по t», «тангенс α равен y штрих по x» и т. д.).

20.2. Определение производной; ее механический и геометрический смысл. Уравнение касательной и нормали к кривой

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале $(a; b)$. Проделаем следующие операции:

– аргументу $x \in (a; b)$ дадим приращение Δx: $x + \Delta x \in (a; b)$;

– найдем соответствующее приращение функции: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;

– составим отношение приращения функции к приращению аргумента: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;

– найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$: $\lim\limits_{\Delta x} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если этот предел существует, то его называют производной функции $f(x)$ и обозначают одним из символов f'_x, $f'(x)$; y'; $\frac{dy}{dx}$; y'_x.

Производной функции $y = f(x)$ ***в точке*** x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Итак, по определению

$$\boxed{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{или} \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.}$$

Производная функции $f(x)$ есть некоторая функция $f'(x)$, *произведенная* из данной функции.

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a; b)$, называется ***дифференцируемой*** в этом интервале; операция нахождения производной функции называется ***дифференцированием.***

Значение производной функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ обозначается одним из символов: $f'(x_0)$, $y'\big|_{x=x_0}$ или $y'(x_0)$.

Пример 20.1. Найти производную функции $y = C$, $C = \text{const}$.

Решение:

– Значению x даем приращение Δx;

– находим приращение функции Δy: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$;

– значит, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$;

– следовательно, $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$, т. е. $(c)' = 0$. ●

Пример 20.2. Найти производную функции $y = x^2$.

Решение:

– Аргументу x даем приращение Δx;

– находим Δy: $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$;

– составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$;

– находим предел этого отношения:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Таким образом, $(x^2)' = 2x$.

В задаче про скорость прямолинейного движения было получено $V = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$.

Это равенство перепишем в виде $V = S'_t$, т. е. *скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от пути S по времени t.* В этом заключается *механический смысл производной.*

Обобщая, можно сказать, что если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то ***производная y' есть скорость протекания этого процесса.*** В этом состоит ***физический смысл производной.***

В задаче про касательную к кривой был найден угловой коэффициент касательной $k = \operatorname{tg} \alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Это равенство перепишем в виде $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha = k$, т. е. ***производная $f'(x)$ в точке x равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке, абсцисса которой равна x.*** В этом заключается ***геометрический смысл производной.***

Если точка касания M имеет координаты $(x_0; y_0)$ (см. рис. 130), то угловой коэффициент касательной есть $k = f'(x_0)$. Пользуясь уравнением прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении $(y - y_0 = k(x - x_0))$, можно записать ***уравнение касательной***: $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

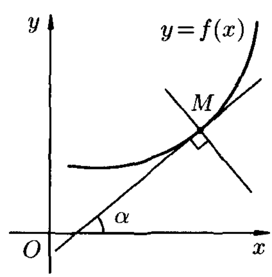

Рис. 130

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется ***нормалью к кривой.***

Так как нормаль перпендикулярна касательной, то ее угловой коэффициент

$$k_{\text{норм.}} = -\frac{1}{k_{\text{кас}}} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Поэтому *уравнение нормали* имеет вид $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$ (если $f'(x_0) \neq 0$).

20.3. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

> **Теорема 20.1.** Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней

❑ Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

Отсюда, по теореме 17.5 о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, имеем $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то есть $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$

Переходя к пределу, при $\Delta x \to 0$, получаем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. А это и означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x. ■

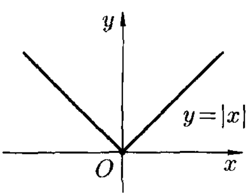

Рис 131

Обратная теорема неверна. непрерывная функция может не иметь производной Примером такой функции является функция

$$y = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Изображенная на рисунке 131 функция непрерывна в точке $x = 0$, но не дифференцируема в ней.

Действительно, в точке $x = 0$ имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta x > 0, \\ -1, & \text{если } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ не существует, т е функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$, график функции не имеет касательной в точке $O(0; 0)$.

Замечания: 1. Существуют односторонние пределы функции $y = |x|$ в точке $x = 0$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$. В таких случаях говорят, что функция имеет ***односторонние производные*** (или «производные слева и справа»), и обозначают соответственно $f'_{-}(x)$ и $f'_{+}(x)$.