Ряд
$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots,} \tag{60.8}$$
где $p > 0$ — действительное число, называется *обобщенным гармоническим рядом.* Для исследования ряда (60.8) на сходимость применим интегральный признак Коши (признаки Даламбера и Коши ответа о сходимости не дают).

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Эта функция непрерывна, монотонно убывает на промежутке $[1; +\infty)$ и $f(n) = \frac{1}{n^p} = u_n$. При $p \neq 1$ имеем:
$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{a \to \infty} \int_1^a x^{-p}\, dx = \lim_{a \to \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\bigg|_1^a =$$
$$= \lim_{a \to \infty} \left(\frac{a^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{если } p > 1, \\ \infty, & \text{если } p < 1. \end{cases}$$

При $p = 1$ имеем гармонический ряд $u_n = \frac{1}{n}$, который расходится (второй способ: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty$). Итак, ряд (60.8) сходится при $p > 1$, расходится при $p \leqslant 1$. В частности, ряд $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$ сходится (полезно знать).

Рассмотренные признаки сходимости (есть и другие) знакоположительных рядов позволяют судить о сходимости практически любого положительного ряда. Необходимые навыки приобретаются на практике.

§ 61. ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ И ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

61.1. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Рассмотрим важный класс рядов, называемых знакочередующимися. *Знакочередующимся рядом* называется ряд вида
$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n, \tag{61.1}$$
где $u_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (т. е. ряд, положительные и отрицательные члены которого следуют друг за другом поочередно).

Для знакочередующихся рядов имеет место *достаточный* признак сходимости (установленный в 1714 г. Лейбницем в письме к И. Бернулли).

Теорема 61.1 (признак Лейбница). Знакочередующийся ряд (61.1) сходится, если:

1. Последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает, т. е. $u_1 > u_2 > u_3 > \cdots > u_n > \ldots$;
2. Общий член ряда стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

При этом сумма S ряда (61.1) удовлетворяет неравенствам

$$0 < S < u_1. \tag{61.2}$$

❑ Рассмотрим сначала частичную сумму четного числа ($2m$) членов ряда (61.1). Имеем

$$S_{2m} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2m-1} - u_{2m} =$$
$$= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Выражение в каждой скобке, согласно первому условию теоремы, положительно. Следовательно, сумма $S_{2m} > 0$ и возрастает с возрастанием номера $2m$.

С другой стороны, S_{2m} можно переписать так:

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

Легко видеть, что $S_{2m} < u_1$. Таким образом, последовательность $S_2, S_4, S_6, \ldots, S_{2m}, \ldots$ возрастает и ограничена сверху. Следовательно, она имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2m} = S$, причем $0 < S < u_1$.

Рассмотрим теперь частичные суммы нечетного числа ($2m+1$) членов ряда (61.1). Очевидно, что $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$. Отсюда следует, что

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} (S_{2m} + u_{2m+1}) = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + 0 = S,$$

т. к. $\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$ в силу второго условия теоремы. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ как при четном n, так и при нечетном n. Следовательно, ряд (61.1) сходится, причем $0 < S < u_1$. ■

Замечания.

1. Исследование знакочередующегося ряда вида

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots \tag{61.3}$$

(с отрицательным первым членом) сводится путем умножения всех его членов на (-1) к исследованию ряда (61.1).

Ряды (61.1) и (61.3), для которых выполняются условия теоремы Лейбница, называются *лейбницевскими* (или рядами Лейбница).

2. Соотношение (61.2) позволяет получить простую и удобную оценку ошибки, которую мы допускаем, заменяя сумму S данного

ряда его частичной суммой S_n. Отброшенный ряд (остаток) представляет собой также знакочередующийся ряд $(-1)^{n+1}(u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots)$, сумма которого по модулю меньше первого члена этого ряда, т. е. $S_n < u_{n+1}$. Поэтому ошибка меньше модуля первого из отброшенных членов.

Пример 61.1. Вычислить приблизительно сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^n}.$$

○ Решение: Данный ряд лейбницевского типа. Он сходится. Можно записать: $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \cdots = S$. Взяв пять членов, т. е. заменив S на

$$S_5 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} + \frac{1}{3125} \approx 0{,}7834,$$

сделаем ошибку, меньшую, чем $\frac{1}{6^6} = \frac{1}{46656} < 0{,}00003$. Итак, $S \approx 0{,}7834$. ●

61.2. Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов

Знакочередующийся ряд является частным случаем знакопеременного ряда. Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, содержащий бесконечное множество положительных и бесконечное множество отрицательных членов, называется ***знакопеременным***.

Для знакопеременных рядов имеет место следующий *общий достаточный признак сходимости*.

Теорема 61.2. Пусть дан знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{61.4}$$

Если сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots, \tag{61.5}$$

составленный из модулей членов данного ряда, то сходится и сам знакопеременный ряд (61.4).

❑ Рассмотрим вспомогательный ряд, составленный из членов рядов (61.4) и (61.5):

$$(u_1 + |u_1|) + (u_2 + |u_2|) + \ldots + (u_n + |u_n|) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(u_n + |u_n|).$$

Очевидно, что $0 \leqslant u_n + |u_n| \leqslant 2|u_n|$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2|u_n|$ сходится в силу условия теоремы и свойства 1 числовых рядов (п. 59.1) . Следовательно, на основании признака сравнения (п. 59.3) сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n + |u_n|)$. Поскольку данный знакопеременный ряд (61.4) представляет собой разность двух сходящихся рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(u_n + |u_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|,$$

то, на основании свойства 2 числовых рядов, он (ряд (61.4)) сходится. ■

Отметим, что обратное утверждение несправедливо: если сходится ряд (61.4), то это не означает, что будет сходиться ряд (61.5).

Пример 61.2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$.

❍ Решение: Это знакочередующийся ряд, для которого выполнены условия признака Лейбница. Следовательно, указанный ряд сходится. Однако ряд, составленный из модулей членов данного ряда, т. е. ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

расходится (гармонический ряд). ●

61.3. Абсолютная и условная сходимости числовых рядов. Свойства абсолютно сходящихся рядов

Знакопеременный ряд называется ***абсолютно сходящимся***, если ряд, составленный из модулей его членов, сходится.

Знакопеременный ряд называется ***условно сходящимся***, если сам он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.

Так, ряд, показанный в примере (61.2), условно сходящийся. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!}$$

абсолютно сходится, т. к. ряд, составленный из модулей его членов, сходится (см. пример 60.4).

Среди знакопеременных рядов абсолютно сходящиеся ряды занимают особое место: на такие ряды переносятся основные свойства конечных сумм (переместительность, сочетательность, распределительность).

Основные свойства абсолютно сходящихся рядов приводим без доказательства.

1. Если ряд абсолютно сходится и имеет сумму S, то ряд, полученный из него перестановкой членов, также сходится и имеет ту же сумму S, что и исходный ряд (теорема Дирихле).

2. Абсолютно сходящиеся ряды с суммами S_1 и S_2 можно почленно складывать (вычитать). В результате получается абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна $S_1 + S_2$ (или соответственно $S_1 - S_2$).

3. Под произведением двух рядов $u_1 + u_2 + \ldots$ и $v_1 + v_2 + \ldots$ понимают ряд вида

$$(u_1 v_1) + (v_1 v_2 + u_2 v_1) + (u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1) + \ldots \\ \ldots + (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \ldots + u_n v_1) + \ldots$$

Произведение двух абсолютно сходящихся рядов с суммами S_1 и S_2 есть абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна $S_1 \cdot S_2$.

Таким образом, абсолютно сходящиеся ряды суммируются, вычитаются, перемножаются как обычные ряды. Суммы таких рядов не зависят от порядка записи членов.

В случае условно сходящихся рядов соответствующие утверждения (свойства), вообще говоря, не имеют места.

Так, переставляя члены условно сходящегося ряда, можно добиться того, что сумма ряда изменится. Например, ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ условно сходится по признаку Лейбница. Пусть его сумма равна S. Перепишем его члены так, что после одного положительного члена будут идти два отрицательных. Получим ряд

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots = \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots = \\ = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots\right) = \frac{1}{2}S.$$

Сумма уменьшилась вдвое!

Более того, путем перестановки членов условно сходящегося ряда можно получить сходящийся ряд с заранее заданной суммой или расходящийся ряд (теорема Римана).

Поэтому действия над рядами нельзя производить, не убедившись в их абсолютной сходимости. Для установления абсолютной сходимости используют все признаки сходимости знакоположительных рядов, заменяя всюду общий член ряда его модулем.