§ 10. ГАММА-ФУНКЦИЯ. БЕТА-ФУНКЦИЯ

1. Гамма-функция. *Гамма-функцией* (или *интегралом Эйлера второго рода*) называется интеграл вида

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx. \tag{1}$$

Интеграл (1) — функция параметра p — является несобственным, так как верхний предел равен бесконечности и, кроме того, при $x \to 0$ и $p<1$ подынтегральная функция неограниченно возрастает. Интеграл (1) сходится при $p>0$ и расходится при $p \leqslant 0$. Гамма-функция является одной из важнейших (после элементарных) функций для анализа и его приложений.

Основные свойства гамма-функции

1°. Функция $\Gamma(p)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $\Gamma'(p)$ для $p>0$.

2°. Имеет место равенство

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p). \tag{2}$$

3°. После n-кратного применения формулы (2) получается соотношение

$$\Gamma(p+n)=(p+n-1)(p+n-2)\ldots(p+1)\,p\cdot\Gamma(p). \tag{3}$$

4°. Если в формуле (3) положить $p=1$ и учесть, что $\Gamma(1)=\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx=1$, то получится равенство

$$\Gamma(n+1)=n!. \tag{4}$$

Если $n=0$, то $0!=\Gamma(1)=1$.

5⁰. Функция $\Gamma(p)$ дает возможность распространить понятие факториала $n!$, определенного лишь для натуральных значений n, на область любых положительных значений аргумента. Из формулы (2) следует, что если $p\longrightarrow 0$, то $\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+1)}{p}\longrightarrow+\infty$, т. е. $\Gamma(0)=+\infty$.

6⁰. При $p=-n$ из формулы (2) следует, что

$$\Gamma(-n)=\frac{\Gamma(-n+1)}{-n}=\frac{\Gamma(-n+2)}{n(n-1)}=-\frac{\Gamma(-n+3)}{n(n-1)(n-2)}=$$
$$=\ldots=(-1)^n\frac{\Gamma(0)}{n!}=(-1)^n\cdot\infty,$$

т. е. $\Gamma(-n)=(-1)^n\cdot\infty \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

7⁰. Вообще, функцию $\Gamma(p)$ можно распространить на случай отрицательных значений аргумента p. Так как $\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+1)}{p}$, то $\Gamma(p+1)$ имеет смысл при $-1<p<0$.

Если $-n<p<-(n-1)$, то из формулы (3) следует, что

$$\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+n)}{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)}.$$

С помощью подстановки $p+n=\alpha$, откуда $p=-n+\alpha$, последняя формула преобразуется к виду

$$\Gamma(\alpha-n)=\frac{(-1)^n\,\Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)} \tag{5}$$

и для $-n<p<-(n-1)$ знак $\Gamma(p)$ определяется множителем $(-1)^n$.

8⁰. Используя формулу (2), можно получить значения $\Gamma(p)$ для полуцелого аргумента:

$$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left[1+\left(m-\frac{1}{2}\right)\right]=\left(m-\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(m-\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\left(m-\frac{1}{2}\right)\left(m-\frac{3}{2}\right)\cdot\Gamma\left(m-\frac{3}{2}\right)=\ldots$$
$$\ldots=\left(m-\frac{1}{2}\right)\left(m-\frac{3}{2}\right)\ldots\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\frac{(2m-1)(2m-3)\ldots5\cdot3\cdot1}{2^m}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

или

$$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2m-1)!!}{2^m}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2m)!}{m!2^{2m}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \tag{6}$$

9⁰. Имеет место *формула дополнения*

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi} \quad (0<p<1). \tag{7}$$

Если в этой формуле положить $p=1/2$, то $[\Gamma(1/2)]^2=\pi/\sin(\pi/2)=\pi$, т. е. $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.

137. Вычислить интеграл Эйлера—Пуассона $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}dx$.

△ Произведем подстановку $x^2=t$, откуда $x=\sqrt{t}$, $dx=dt/(2\sqrt{t})$ и, следовательно,

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} e^{-t}t^{-1/2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} e^{-t}t^{1/2-1}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \ ▲$$

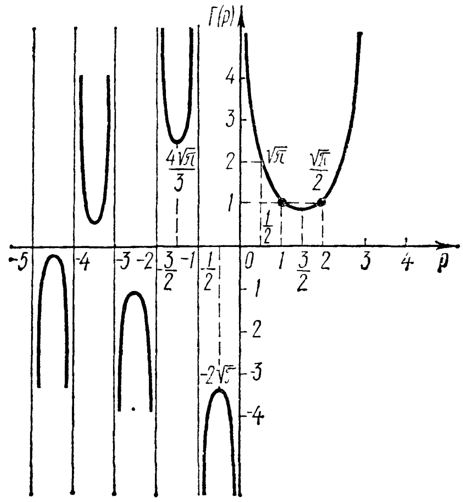

Рис. 21

138. Вычислить $\Gamma(-1/2)$.

△ Пользуясь формулой $\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+1)}{p}$, получим

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(-1/2+1)}{(-1/2)}=\frac{\Gamma(1/2)}{(-1/2)}=-2\sqrt{\pi}. \ ▲$$

139. Вычислить $\Gamma(-9/2)$.

△ Используя формулу (5) при $\alpha=1/2$ и $n=5$, получим

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-5\right)=\Gamma\left(-\frac{9}{2}\right)=\frac{(-1)^5\cdot\Gamma(1/2)}{(1-1/2)(2-1/2)\ldots(5-1/2)}=$$

$$=\frac{-\sqrt{\pi}}{(1/2)\cdot(3/2)\cdot(5/2)\cdot(7/2)\cdot(9/2)}=-\frac{32\sqrt{\pi}}{945}. \ ▲$$

140. Вычислить $\Gamma(5/2)$.

△ Полагая $m=2$ в формуле (6), имеем

$$\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{4!\,\Gamma(1/2)}{2!\cdot 2^4}=\frac{24\sqrt{\pi}}{2\cdot 16}=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$

2. Бета-функция. *Бета-функцией* (или *интегралом Эйлера первого рода*) называется интеграл

$$\mathrm{B}(p,\ q)=\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx. \qquad (1)$$

Интеграл (1) есть функция двух параметров p и q; он сходится при $p>0$, $q>0$.

Функция B является симметричной относительно параметров, т. е. $\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,\ p)$.

Если сделать замену переменной интегрирования, полагая $x=\sin^2 t$, $dx=2\sin t\cos t\,dt$, причем t изменяется от 0 до $\pi/2$, то формула (1) примет вид

$$\mathrm{B}(p,\ q)=2\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}t\cos^{2q-1}t\,dt,$$

или

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2},\ \frac{n+1}{2}\right) \quad (m > 0,\ n > 0). \tag{2}$$

К интегралам (1) и (2) приводятся многие интегралы, встречающиеся в прикладных задачах.

Для вычисления значений бета-функции пользуются следующей зависимостью между бета- и гамма-функцией:

$$\mathrm{B}(p,\ q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{3}$$

Если $q = 1-p$, то $\mathrm{B}(p,\ 1-p) = \dfrac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)} = \dfrac{\pi}{\sin p\pi}$ $(0 < p < 1)$.

Используя бета-функцию, легко найти значение $\Gamma(1/2)$. Пусть $p = q = 1/2$; тогда $\mathrm{B}(1/2,\ 1/2) = \dfrac{[\Gamma(1/2)]^2}{\Gamma(1)}$. Так как $\mathrm{B}(1/2,\ 1/2) = \mathrm{B}(1/2,\ 1-1/2) = \pi/\sin(\pi/2) = \pi$, а $\Gamma(1) = 1$, то $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

158. Вычислить $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^8 x\, dx$.

△ Используя формулу (2) при $m = 6$ и $n = 8$, получим

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^8 x\, dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{7}{9},\ \frac{9}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(7/12)\,\Gamma(9/2)}{\Gamma(8)} = \frac{5\pi}{2^{12}}$$

(значения $\Gamma(7/2)$ и $\Gamma(9/2)$ вычислены по формуле (6) п. 1 при $m = 3$ и $m = 4$, а $\Gamma(8) = 7!$). ▲

159. Вычислить $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{3-\cos t}}$.

△ Положим $\cos t = 1 - 2\sqrt{u}$; тогда $dt = \dfrac{du}{2\sqrt[4]{u^3}\sqrt{1-\sqrt{u}}}$, $\sqrt{3-\cos t} = \sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{u}}$, причем t изменяется от 0 до 1. Тогда получим

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{3-\cos t}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int\limits_0^1 u^{-3/4}\,(1-u)^{-1/2}\, du =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{\Gamma(1/4)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/4)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{[\Gamma(1/4)]^2}{\Gamma(3/4)\,\Gamma(1/4)}.$$

Так как $\Gamma\left(\dfrac{3}{4}\right)\cdot\Gamma\left(\dfrac{1}{4}\right) = \Gamma\left(\dfrac{1}{4}\right)\cdot\Gamma\left(1-\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi/4)} = \pi\sqrt{2}$, а $\Gamma\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{\Gamma(1{,}25)}{1/4} = 4\cdot 0{,}9064 = 3{,}6256$, то

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{3-\cos t}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{(3{,}6256)^2}{\pi\sqrt{2}} = \frac{(3{,}6256)^2}{4\sqrt{\pi}} = 1{,}8545. \ ▲$$

160. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt[5]{x^2}}}$.

$\triangle$ Перепишем данный интеграл в виде $\int\limits_0^1 (1-x^{2/5})^{-1/2}\,dx$. Воспользуемся подстановкой $x^{2/5}=t$; тогда $x=t^{5/2}$, $dx=(5/2)\,t^{3/2}\,dt$ и, следовательно,

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt[5]{x^2}}}=\frac{5}{2}\int\limits_0^1 t^{3/2}(1-t)^{-1/2}\,dt=$$

$$=\frac{5}{2}\,B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}\,\frac{\Gamma(5/2)\cdot\Gamma(1/2)}{\Gamma(3)}=\frac{15\pi}{16}. \ \blacktriangle$$

161. Доказать, что если $I_1=\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ и $I_2=\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$, то $I_1I_2=\frac{\pi}{4}$.

$\triangle$ Положим $x^4=t$, откуда $dx=(1/4)\,t^{1/4-1}\,dt$. Тогда получим

$$I_1=\frac{1}{4}\int\limits_0^1 t^{1/4-1}(1-t)^{-1/2}\,dt=\frac{1}{4}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma(1/4)\cdot\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/4)};$$

$$I_2=\frac{1}{4}\int\limits_0^1 t^{3/4-1}(1-t)^{-1/2}\,dt=\frac{1}{4}\,\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\,\frac{\Gamma(3/4)\cdot\Gamma(1/2)}{\Gamma(5/4)}=\frac{\Gamma(3/4)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4)},$$

так как $\Gamma(5/4)=(1/4)\,\Gamma(1/4)$. Следовательно,

$$I_1I_2=\frac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma(1/4)\cdot\Gamma(3/4)\cdot[\Gamma(1/2)]^2}{\Gamma(3/4)\,\Gamma(1/4)}=\frac{1}{4}\,(\sqrt{\pi})^2=\frac{\pi}{4}. \ \blacktriangle$$

Таблица I

Значения гамма-функции Г(*p*) (при $1 \leqslant p \leqslant 2$)

p	Г(*p*)	*p*	Г(*p*)	*p*	Г(*p*)	*p*	Г(*p*)
1,00	1,0000	1,25	0,9064	1,50	0,8862	1,75	0,9191
1,01	0,9943	1,26	9044	1,51	8866	1,76	9214
1,02	9888	1,27	9025	1,52	8870	1,77	9238
1,03	9835	1,28	9007	1,53	8876	1,78	9262
1,04	9784	1,29	8990	1,54	8882	1,79	9288
1,05	9735	1,30	8975	1,55	8889	1,80	9314
1,06	9687	1,31	8960	1,56	8896	1,81	9341
1,07	9642	1,32	8946	1,57	8905	1,82	9368
1,08	9597	1,33	8934	1,58	8914	1,83	9397
1,09	9555	1,34	8922	1,59	8924	1,84	9426
1,10	9514	1,35	8912	1,60	8935	1,85	9456
1,11	9474	1,36	8902	1,61	8947	1,86	9487
1,12	9436	1,37	8893	1,62	8959	1,87	9518
1,13	9399	1,38	8885	1,63	8972	1,88	9551
1,14	9364	1,39	8879	1,64	8986	1,89	9584
1,15	9330	1,40	8873	1,65	9001	1,90	9618
1,16	9298	1,41	8868	1,66	9017	1,91	9652
1,17	9267	1,42	8864	1,67	9033	1,92	9688
1,18	9237	1,43	8860	1,68	9050	1,93	9724
1,19	9209	1,44	8858	1,69	9068	1,94	9761
1,20	9182	1,45	8857	1,70	9086	1,95	9799
1,21	9156	1,46	8856	1,71	9106	1,96	9837
1,22	9131	1,47	8856	1,72	9126	1,97	9877
1,23	9108	1,48	8857	1,73	9147	1,98	9917
1,24	9085	1,49	8859	1,74	9168	1,99	9958
						2,00	1,0000