

§ 41. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

41.1. Схемы применения определенного интеграла

Пусть требуется найти значение какой-либо геометрической или физической величины A (площадь фигуры, объем тела, давление жидкости на вертикальную пластину и т. д.), связанной с отрезком $[a; b]$ изменения независимой переменной x . Предполагается, что эта величина A аддитивна, т. е. такая, что при разбиении отрезка $[a; b]$ точкой $c \in (a; b)$ на части $[a; c]$ и $[c; b]$ значение величины A , соответствующее всему отрезку $[a; b]$, равно сумме ее значений, соответствующих $[a; c]$ и $[c; b]$.

Для нахождения этой величины A можно руководствоваться одной из двух схем: I схема (или метод *интегральных сумм*) и II схема (или метод *дифференциала*).

Первая схема базируется на определении определенного интеграла.

1. Точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ разбить отрезок $[a; b]$ на n частей. В соответствии с этим, интересующая нас величина A разобьется на n «элементарных слагаемых» ΔA_i ($i = 1, \dots, n$): $A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \dots + \Delta A_n$.

2. Представить каждое «элементарное слагаемое» в виде произведения некоторой функции (определяемой из условия задачи), вычисленной в произвольной точке соответствующего отрезка на его длину: $\Delta A_i \approx f(c_i) \Delta x_i$.

При нахождении приближенного значения ΔA_i допустимы некоторые упрощения: дугу на малом участке можно заменить хордой, стягивающей ее концы; переменную скорость на малом участке можно приближенно считать постоянной и т. д.

Получим приближенное значение величины A в виде интегральной суммы:

$$A \approx f(c_1) \Delta x_1 + \dots + f(c_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

3. Искомая величина A равна пределу интегральной суммы, т. е.

$$A = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\lambda \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

Указанный «метод сумм», как видим, основан на представлении *интеграла как о сумме бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых*.

Схема I была применена для выяснения геометрического и физического смысла определенного интеграла.

Вторая схема представляет собой несколько видоизмененную схему I и называется «метод дифференциала» или «метод отбрасывания бесконечно малых высших порядков»:

1) на отрезке $[a; b]$ выбираем произвольное значение x и рассматриваем переменный отрезок $[a; x]$. На этом отрезке величина A становится функцией x : $A = A(x)$, т. е. считаем, что часть искомой величины A есть неизвестная функция $A(x)$, где $x \in [a; b]$ — один из параметров величины A ;

2) находим главную часть приращения ΔA при изменении x на малую величину $\Delta x = dx$, т. е. находим дифференциал dA функции $A = A(x)$: $dA = f(x) dx$, где $f(x)$, определяемая из условия задачи, функция переменной x (здесь также возможны различные упрощения);

3) считая, что $dA \approx \Delta A$ при $\Delta x \rightarrow 0$, находим искомую величину путем интегрирования dA в пределах от a до b :

$$A(b) = A = \int_a^b f(x) dx.$$

41.2. Вычисление площадей плоских фигур

Прямоугольные координаты

Как уже было установлено (см. «геометрический смысл определенного интеграла»), площадь криволинейной трапеции, расположенной «выше» оси абсцисс ($f(x) \geq 0$), равна соответствующему определенному интегралу:

$$S = \int_a^b f(x) dx \quad \text{или} \quad S = \int_a^b y dx. \quad (41.1)$$

Формула (41.1) получена путем применения схемы I — метода сумм. Обоснуем формулу (41.1), используя схему II.

Пусть криволинейная трапеция ограничена линиями $y = f(x) \geq 0$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (см. рис. 173). Для нахождения площади S этой трапеции сделаем следующие операции:

1. Возьмем произвольное $x \in [a; b]$ и будем считать, что $S = S(x)$.
2. Дадим аргументу x приращение $\Delta x = dx$ ($x + \Delta x \in [a; b]$). Функция $S = S(x)$ получит приращение ΔS , представляющее собой площадь «элементарной криволинейной трапеции» (на рисунке она выделена).

Дифференциал площади dS есть главная часть приращения ΔS при $\Delta x \rightarrow 0$, и, очевидно, он равен площади прямоугольника с основанием dx и высотой y : $dS = y \cdot dx$.

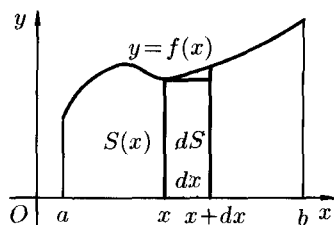


Рис. 173

3. Интегрируя полученное равенство в пределах от $x = a$ до $x = b$,

получаем $S = \int_a^b y \, dx$.

Отметим, что если криволинейная трапеция расположена «ниже» оси Ox ($f(x) < 0$), то ее площадь может быть найдена по формуле

$$S = - \int_a^b y \, dx. \quad (41.2)$$

Формулы (41.1) и (41.2) можно объединить в одну:

$$S = \left| \int_a^b y \, dx \right|.$$

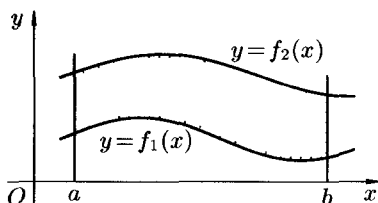


Рис 174

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ (при условии $f_2(x) \geq f_1(x)$) (см. рис. 174), можно найти по формуле

$$S = \int_a^b f_2(x) \, dx - \int_a^b f_1(x) \, dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) \, dx.$$

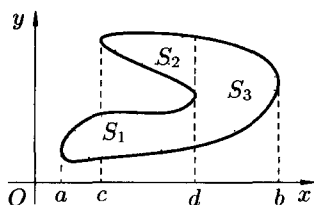


Рис 175

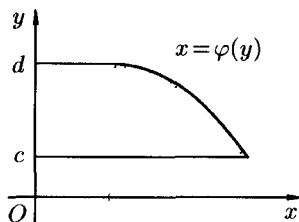


Рис 176

Если плоская фигура имеет «сложную» форму (см. рис. 175), то прямыми, параллельными оси Oy , ее следует разбить на части так, чтобы можно было бы применить уже известные формулы.

Если криволинейная трапеция ограничена прямыми $y = c$ и $y = d$, осью Oy и непрерывной кривой $x = \varphi(y) \geq 0$ (см. рис. 176), то ее площадь находится по формуле $S = \int_c^d x \, dy$.

И, наконец, если криволинейная трапеция ограничена *кривой, заданной параметрически*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta],$$

прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью Ox , то площадь ее находится по формуле

$$S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t) dt \right|,$$

где α и β определяются из равенств $x(\alpha) = a$ и $x(\beta) = b$.

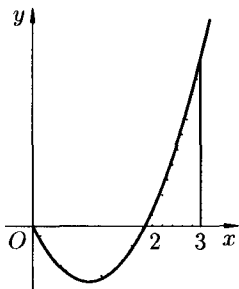


Рис 177

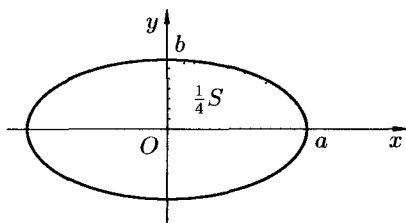


Рис 178

Пример 41.1. Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и графиком функции $y = x^2 - 2x$ при $x \in [0; 3]$.

○ Решение: Фигура имеет вид, изображенный на рисунке 177. Находим ее площадь S :

$$\begin{aligned} S &= - \int_0^2 (x^2 - 2x) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx = \\ &= - \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 + x^2 \Big|_0^2 + \frac{x^3}{3} \Big|_2^3 - x^2 \Big|_2^3 = -\frac{8}{3} + 4 + \frac{27}{3} - \frac{8}{3} - 9 + 4 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}. \quad \bullet \end{aligned}$$

Пример 41.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

○ Решение: Найдем сначала $\frac{1}{4}$ площади S . Здесь x изменяется от 0 до a , следовательно, t изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до 0 (см. рис. 178). Находим:

$$\frac{1}{4} S = \int_{\pi/2}^0 b \sin t \cdot (-a \sin t) dt = -ab \int_{\pi/2}^0 \sin^2 t dt =$$

$$= \frac{ab}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t) dt = \frac{ab}{2} \left(t \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{\pi ab}{4}.$$

Таким образом, $\frac{1}{4}S = \frac{\pi ab}{4}$. Значит, $S = \pi ab$. ●

Полярные координаты

Найдем площадь S *криволинейного сектора*, т. е. плоской фигуры, ограниченной непрерывной линией $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$), где r и φ — полярные координаты (см. рис. 179). Для решения задачи используем схему II — *метод дифференциала*.

1. Будем считать часть искомой площади S как функцию угла φ , т. е. $S = S(\varphi)$, где $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ (если $\varphi = \alpha$, то $S(\alpha) = 0$, если $\varphi = \beta$, то $S(\beta) = S$)

2. Если текущий полярный угол φ получит приращение $\Delta\varphi = d\varphi$, то приращение площади ΔS равно площади «элементарного криволинейного сектора» OAB .

Дифференциал dS представляет собой главную часть приращения ΔS при $d\varphi \rightarrow 0$ и равен площади кругового сектора OAC (на рисунке она заштрихована) радиуса r с центральным углом $d\varphi$. Поэтому $dS = \frac{1}{2}r^2 \cdot d\varphi$.

3. Интегрируя полученное равенство в пределах от $\varphi = \alpha$ до $\varphi = \beta$, получим искомую площадь

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

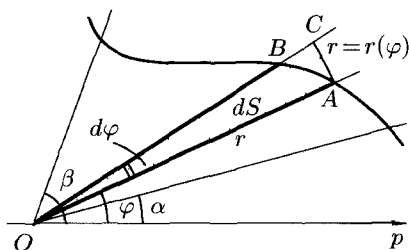


Рис. 179

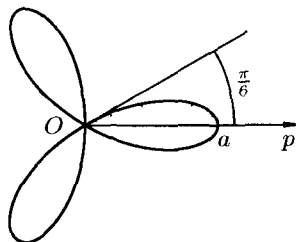


Рис. 180

Пример 41.3. Найти площадь фигуры, ограниченной «трехлепестковой розой» $r = a \cos 3\varphi$ (см. рис. 180).

○ Решение: Найдем сначала площадь половины одного лепестка «розы», т. е. $\frac{1}{6}$ часть всей площади фигуры:

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}S &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} (a \cos 3\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2}a^2 \int_0^{\pi/6} \frac{1}{2}(1 + \cos 6\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{4}(\varphi|_0^{\pi/6} + \frac{1}{6} \sin 6\varphi|_0^{\pi/6}) = \frac{a^2}{4}(\frac{\pi}{6} + 0) = \frac{\pi a^2}{24},\end{aligned}$$

т. е. $\frac{1}{6}S = \frac{\pi a^2}{24}$ Следовательно, $S = \frac{\pi a^2}{4}$ ●

Если плоская фигура имеет «сложную» форму, то лучами, выходящими из полюса, ее следует разбить на криволинейные секторы, к которым применить полученную формулу для нахождения площади. Так, для фигуры, изображенной на рисунке 181, имеем.

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\gamma} r_3^2 d\varphi - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r_1^2 d\varphi - \frac{1}{2} \int_{\beta}^{\gamma} r_2^2 d\varphi.$$

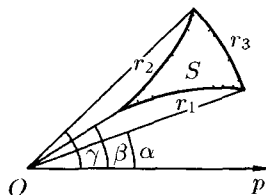


Рис 181

41.3. Вычисление длины дуги плоской кривой

Прямоугольные координаты

Пусть в прямоугольных координатах дана плоская кривая AB , уравнение которой $y = f(x)$, где $a \leq x \leq b$.

☞ Под **длиной дуги** AB понимается предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда число звеньев ломаной неограниченно возрастает, а длина наибольшего звена ее стремится к нулю.

Покажем, что если функция $y = f(x)$ и ее производная $y' = f'(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, то кривая AB имеет длину, равную

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (41.3)$$

Применим схему I (метод сумм).

1. Точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ ($x_0 < x_1 < \dots < x_n$) разобьем отрезок $[a; b]$ на n частей (см. рис. 182). Пусть этим точкам соответствуют точки $M_0 = A, M_1, \dots, M_n = B$ на кривой AB . Проведем хорды $M_0M_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}M_n$, длины которых обозначим соответственно через $\Delta L_1, \Delta L_2, \dots, \Delta L_n$. Получим ломаную $M_0M_1M_2 \dots M_{n-1}M_n$, длина которой равна $L_n = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \dots + \Delta L_n = \sum_{i=1}^n \Delta L_i$.

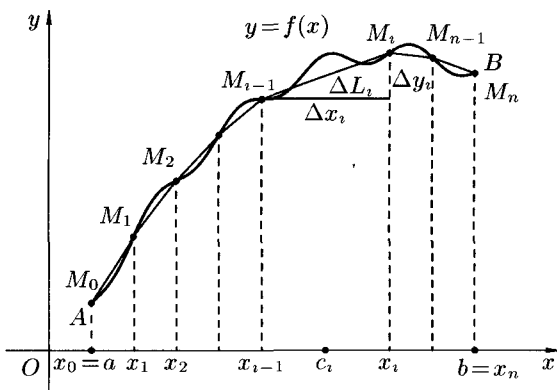


Рис 182

2. Длину хорды (или звена ломаной) ΔL_i можно найти по теореме Пифагора из треугольника с катетами Δx_i и Δy_i :

$$\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2},$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. По теореме Лагранжа о конечном приращении функции $\Delta y_i = f'(c_i) \cdot \Delta x_i$, где $c_i \in (x_{i-1}; x_i)$. Поэтому

$$\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(c_i) \cdot \Delta x_i)^2} = \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x_i,$$

а длина всей ломаной $M_0 M_1 \dots M_n$ равна

$$L_n = \sum_{i=1}^n \Delta L_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x_i. \quad (41.4)$$

3. Длина l кривой AB , по определению, равна

$$l = \lim_{\max \Delta L_i \rightarrow 0} L_n = \lim_{\max \Delta L_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta L_i.$$

Заметим, что при $\Delta L_i \rightarrow 0$ также и $\Delta x_i \rightarrow 0$ ($\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$ и, следовательно, $|\Delta x_i| < \Delta L_i$). Функция $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, так как, по условию, непрерывна функция $f'(x)$. Следовательно, существует предел интегральной суммы (41.4), когда $\max \Delta x_i \rightarrow 0$:

$$l = \lim_{\substack{\max \Delta L_i \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Таким образом, $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$, или в сокращенной записи $l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$.

Если уравнение кривой AB задано в параметрической форме

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывные функции с непрерывными производными и $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, то длина l кривой AB находится по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (41.5)$$

Формула (41.5) может быть получена из формулы (41.3) подстановкой $x = x(t)$, $dx = x'(t) dt$, $f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$.

Пример 41.4. Найти длину окружности радиуса R .

○ Решение: Найдем $\frac{1}{4}$ часть ее длины от точки $(0; R)$ до точки $(R; 0)$ (см. рис. 183). Так как $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, то

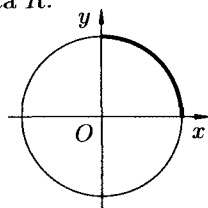


Рис. 183

$$\frac{1}{4}l = \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = R \cdot \arcsin \frac{x}{R} \Big|_0^R = R \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Значит, $l = 2\pi R$. Если уравнение окружности записать в параметрическом виде $x = R \cos t$, $y = R \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), то

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt = R t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi R. \quad \bullet$$

Вычисление длины дуги может быть основано на применении метода дифференциала. Покажем, как можно получить формулу (41.3), применив схему II (метод дифференциала).

1. Возьмем произвольное значение $x \in [a; b]$ и рассмотрим переменный отрезок $[a; x]$. На нем величина l становится функцией от x , т. е. $l = l(x)$ ($l(a) = 0$ и $l(b) = l$).

2. Находим дифференциал dl функции $l = l(x)$ при изменении x на малую величину $\Delta x = dx$: $dl = l'(x) dx$. Найдем $l'(x)$, заменяя бесконечно малую дугу $\widehat{MN}$ хордой Δl , стягивающей эту дугу (см. рис. 184):

$$\begin{aligned} l'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + (y'_x)^2}. \end{aligned}$$

Стало быть, $dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$.

3. Интегрируя dl в пределах от a до b , получаем $l = \int_a^b \sqrt{1 + y_x'^2} dx$.

⇒ Равенство $dl = \sqrt{1 + y_x'^2} dx$ называется формулой **дифференциала дуги** в прямоугольных координатах.

Так как $y_x' = \frac{dy}{dx}$, то

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

Последняя формула представляет собой теорему Пифагора для бесконечно малого треугольника MCT (см. рис. 185).

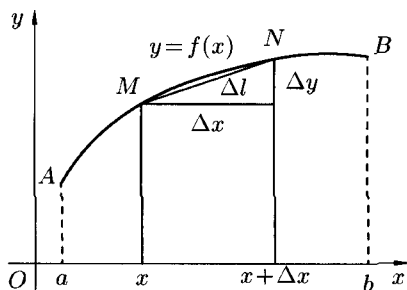


Рис. 184

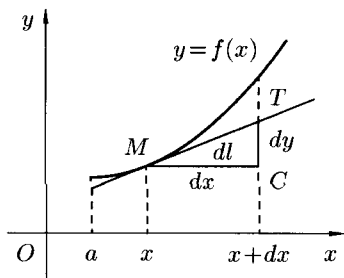


Рис. 185

Полярные координаты

Пусть кривая AB задана уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. Предположим, что $r(\varphi)$ и $r'(\varphi)$ непрерывны на отрезке $[\alpha; \beta]$.

Если в равенствах $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, связывающих полярные и декартовы координаты, параметром считать угол φ , то кривую AB

можно задать параметрически $\begin{cases} x = r(\varphi) \cos \varphi, \\ y = r(\varphi) \sin \varphi. \end{cases}$ Тогда

$$\begin{cases} x'_\varphi = r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi, \\ y'_\varphi = r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sqrt{(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2} &= \\ &= \sqrt{(r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi)^2 + (r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi)^2} = \\ &= \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}. \end{aligned}$$

Применяя формулу (41.5), получаем

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi.$$

Пример 41.5. Найти длину кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$.

● Решение: Кардиоида $r = a(1 + \cos \varphi)$ имеет вид, изображенный на рисунке 186. Она симметрична относительно полярной оси. Найдем половину длины кардиоиды:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}l &= \int_0^{\pi} \sqrt{(a(1 + \cos \varphi))^2 + (a(-\sin \varphi))^2} d\varphi = a \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2 \cos \varphi} d\varphi = \\ &= a \int_0^{\pi} \sqrt{2 \cdot 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = 2a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 4a \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 4a \end{aligned}$$

Таким образом, $\frac{1}{2}l = 4a$. Значит, $l = 8a$ ●

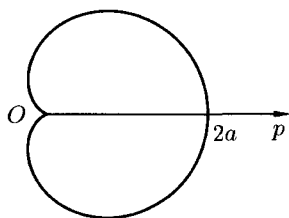


Рис 186

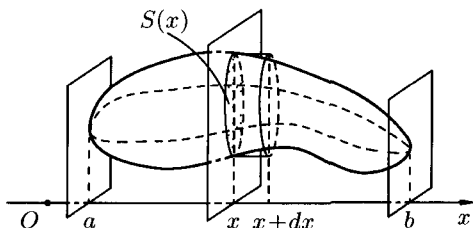


Рис 187

41.4. Вычисление объема тела

Вычисление объема тела по известным площадям параллельных сечений

Пусть требуется найти объем V тела, причем известны площади S сечений этого тела плоскостями, перпендикулярными некоторой оси, например оси Ox : $S = S(x)$, $a \leq x \leq b$.

Применим схему II (метод дифференциала).

1. Через произвольную точку $x \in [a; b]$ проведем плоскость Π , перпендикулярную оси Ox (см. рис. 187). Обозначим через $S(x)$ площадь

сечения тела этой плоскостью; $S(x)$ считаем известной и непрерывно изменяющейся при изменении x . Через $v(x)$ обозначим объем части тела, лежащее левее плоскости Π . Будем считать, что на отрезке $[a; x]$ величина v есть функция от x , т. е. $v = v(x)$ ($v(a) = 0$, $v(b) = V$).

2. Находим дифференциал dV функции $v = v(x)$. Он представляет собой «элементарный слой» тела, заключенный между параллельными плоскостями, пересекающими ось Ox в точках x и $x + \Delta x$, который приближенно может быть принят за цилиндр с основанием $S(x)$ и высотой Δx . Поэтому дифференциал объема $dV = S(x) dx$.

3. Находим искомую величину V путем интегрирования dA в пределах от a до b :

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (41.6)$$

Полученная формула называется **формулой объема тела по площади параллельных сечений**.

Пример 41.6. Найти объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Решение: Рассекая эллипсоид плоскостью, параллельной плоскости Oyz и на расстоянии x от нее ($-a \leq x \leq a$), получим эллипс (см. рис. 188):

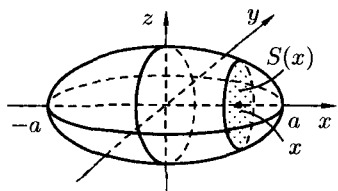


Рис. 188

$\frac{y^2}{(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}})^2} + \frac{z^2}{(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}})^2} = 1$.
Площадь этого эллипса равна $S(x) = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. Поэтому, по формуле (41.6), имеем

$$V = \pi bc \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3} \pi abc. \quad \bullet$$

Объем тела вращения

Пусть вокруг оси Ox вращается криволинейная трапеция, ограниченная непрерывной линией $y = f(x) \geq 0$, отрезком $a \leq x \leq b$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ (см. рис. 189). Полученная от вращения фигура называется **телом вращения**. Сечение этого тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox , проведенной через произвольную точку x оси Ox ($x \in [a; b]$), есть круг с радиусом $y = f(x)$. Следовательно, $S(x) = \pi y^2$.

Применяя формулу (41.6) объема тела по площади параллельных сечений, получаем

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx. \quad (41.7)$$

Если криволинейная трапеция ограничена графиком непрерывной функции $x = \varphi(y) \geq 0$ и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$ ($c < d$), то объем тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Oy , по аналогии с формулой (41.7), равен

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy. \quad (41.8)$$

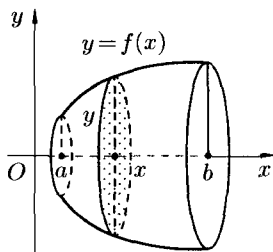


Рис. 189

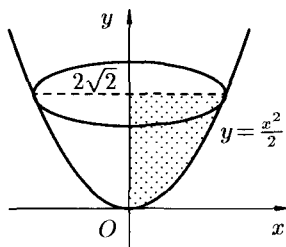


Рис. 190

Пример 41.7. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{2}$, $x = 0$, $y = 2\sqrt{2}$ вокруг оси Oy (см. рис. 190).

● Решение: По формуле (41.8) находим:

$$V_y = \pi \int_0^{2\sqrt{2}} 2y dy = \pi y^2 \Big|_0^{2\sqrt{2}} = 8\pi. \quad \bullet$$

41.5. Вычисление площади поверхности вращения

Пусть кривая AB является графиком функции $y = f(x) \geq 0$, где $x \in [a; b]$, а функция $y = f(x)$ и ее производная $y' = f'(x)$ непрерывны на этом отрезке.

Найдем площадь S поверхности, образованной вращением кривой AB вокруг оси Ox .

Применим схему II (метод дифференциала).

1. Через произвольную точку $x \in [a; b]$ проведем плоскость Π , перпендикулярную оси Ox . Плоскость Π пересекает поверхность вращения по окружности с радиусом $y = f(x)$ (см. рис. 191). Величина S поверхности части фигуры вращения, лежащей левее плоскости, является функцией от x , т. е. $s = s(x)$ ($s(a) = 0$ и $s(b) = S$).

2. Дадим аргументу x приращение $\Delta x = dx$. Через точку $x + dx \in [a; b]$ также проведем плоскость, перпендикулярную оси Ox . Функция $s = s(x)$ получит приращение Δs , изображенного на рисунке в виде «пояска».

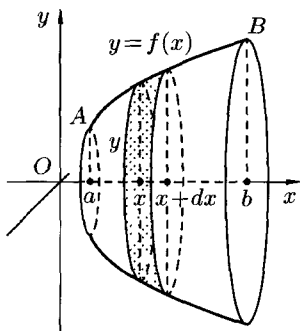


Рис. 191

Найдем дифференциал площади ds , заменяя образованную между сечениями фигуру усеченным конусом, образующая которого равна dl , а радиусы оснований равны y и $y + dy$. Площадь его боковой поверхности равна $ds = \pi(y + y + dy) \cdot dl = 2\pi y dl + \pi dy dl$. Отбрасывая произведение $dy dl$ как бесконечно малую высшего порядка, чем ds , получаем $ds = 2\pi y dl$, или, так как $dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$, то $ds = 2\pi y \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$.

3. Интегрируя полученное равенство в пределах от $x = a$ до $x = b$, получаем

$$S_x = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx. \quad (41.9)$$

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, то формула (41.9) для площади поверхности вращения принимает вид

$$S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Пример 41.8. Найти площадь поверхности шара радиуса R .

○ Решение: Можно считать, что поверхность шара образована вращением полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leq x \leq R$, вокруг оси Ox . По формуле (41.9) находим

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} dx = \\ &= 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2 + x^2} dx = 2\pi R \cdot x \Big|_{-R}^R = 4\pi R^2. \quad \bullet \end{aligned}$$

Пример 41.9. Дана циклоида

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Найти площадь поверхности, образованной вращением ее вокруг оси Ox .

○ Решение: При вращении половины дуги циклоиды вокруг оси Ox площадь поверхности вращения равна

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}S_x &= 2\pi \int_0^{\pi} a(1 - \cos t) \cdot \sqrt{(a(1 - \cos t))^2 + (a \sin t)^2} dt = \\
 &= 2\pi \int_0^{\pi} a^2 \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2} \cdot \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt = \\
 &= 4\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 8\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \cdot \sin \frac{t}{2} dt = \\
 &= -8\pi a^2 \cdot 2 \int_0^{\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) d\left(\cos \frac{t}{2}\right) = -16\pi a^2 \left(\cos \frac{t}{2} \Big|_0^{\pi} - \frac{\cos^3 \frac{t}{2}}{3} \Big|_0^{\pi}\right) = \\
 &= -16\pi a^2 \left(0 - 1 - 0 + \frac{1}{3}\right) = -16\pi a^2 \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{32\pi a^2}{3}, \\
 \text{т. е. } \frac{1}{2}S_x &= \frac{32}{3}\pi a^2. \text{ Следовательно, } S_x = \frac{64}{3}\pi a^2. \quad \bullet
 \end{aligned}$$

41.6. Механические приложения определенного интеграла

Работа переменной силы

Пусть материальная точка M перемещается вдоль оси Ox под действием переменной силы $F = F(x)$, направленной параллельно этой оси. Работа, произведенная силой при перемещении точки M из положения $x = a$ в положение $x = b$ ($a < b$), находится по формуле

$$A = \int_a^b F(x) dx \quad (41.10)$$

(см. п. 36).

Пример 41.10. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м?

○ Решение: По закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению x , т. е. $F = kx$, где k — коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи, сила $F = 100$ Н растягивает пружину на $x = 0,01$ м; следовательно, $100 = k \cdot 0,01$, откуда $k = 10000$; следовательно, $F = 10000x$.

○ Решение: Из физического смысла производной известно, что при движении точки в одном направлении «скорость прямолинейного движения равна производной от пути по времени», т. е. $v(t) = \frac{dS}{dt}$. Отсюда следует, что $dS = v(t) dt$. Интегрируя полученное равенство в пределах от t_1 до t_2 , получаем $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$. ●

Отметим, что эту же формулу можно получить, пользуясь схемой I или II применения определенного интеграла.

Пример 41.12. Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела $v(t) = 10t + 2$ (м/с).

○ Решение: Если $v(t) = 10t + 2$ (м/с), то путь, пройденный телом от начала движения ($t = 0$) до конца 4-й секунды, равен

$$S = \int_0^4 (10t + 2) dt = 5t^2 \Big|_0^4 + 2t \Big|_0^4 = 80 + 8 = 88 \quad (\text{м}). \quad \bullet$$

Давление жидкости на вертикальную пластинку

По закону Паскаля давление жидкости на горизонтальную пластинку равно весу столба этой жидкости, имеющего основанием пластинку, а высотой — глубиной ее погружения от свободной поверхности жидкости, т. е. $P = g \cdot \gamma \cdot S \cdot h$, где g — ускорение свободного падения, γ — плотность жидкости, S — площадь пластинки, h — глубина ее погружения.

По этой формуле нельзя искать давление жидкости на вертикально погруженную пластинку, так как ее разные точки лежат на разных глубинах.

Пусть в жидкость погружена вертикально пластина, ограниченная линиями $x = a$, $x = b$, $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$; система координат выбрана так, как указано на рисунке 193. Для нахождения давления P жидкости на эту пластину применим схему II (метод дифференциала).

1. Пусть часть искомой величины P есть функция от x : $p = p(x)$, т. е. $p = p(x)$ — давление на часть пластины, соответствующее отрезку $[a; x]$ значений переменной x , где $x \in [a; b]$ ($p(a) = 0$, $p(b) = P$).

2. Дадим аргументу x приращение $\Delta x = dx$. Функция $p(x)$ получит приращение Δp (на рисунке — полоска-слой толщины dx). Найдем дифференциал dp этой функции. Ввиду малости dx будем приближенно считать полоску прямоугольником, все точки которого находятся на одной глубине x , т. е. пластинка эта — горизонтальная.

Тогда по закону Паскаля $dp = g \cdot \underbrace{\gamma (y_2 - y_1) \cdot dx}_S \cdot \underbrace{x}_h$.

3. Интегрируя полученное равенство в пределах от $x = a$ до $x = b$, получим

$$P = g \cdot \gamma \int_a^b (y_2 - y_1) x dx \quad \text{или} \quad P = g\gamma \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) \cdot x dx.$$

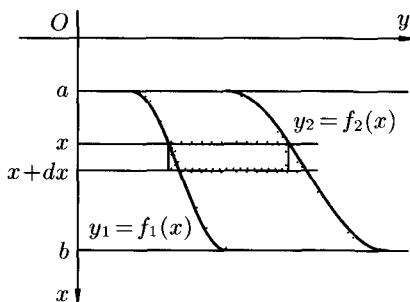


Рис 193

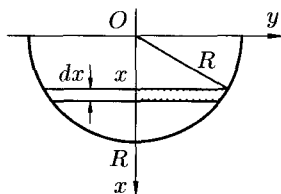


Рис 194

Пример 41.13. Определить величину давления воды на полу-круг, вертикально погруженный в жидкость, если его радиус R , а центр O находится на свободной поверхности воды (см. рис. 194).

○ Решение: Воспользуемся полученной формулой для нахождения давления жидкости на вертикальную пластинку. В данном случае пластинка ограничена линиями $y_1 = -\sqrt{R^2 - x^2}$, $y_2 = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x = 0$, $x = R$. Поэтому

$$\begin{aligned} P &= g\gamma \int_0^R (\sqrt{R^2 - x^2} - (-\sqrt{R^2 - x^2})) x dx = \\ &= 2g\gamma \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} x dx = 2g\gamma \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^R (R^2 - x^2)^{1/2} d(R^2 - x^2) = \\ &= -g\gamma \cdot \frac{2\sqrt{(R^2 - x^2)^3}}{3} \Big|_0^R = -\frac{2}{3}g\gamma(0 - R^3) = \frac{2}{3}g\gamma R^3. \quad \bullet \end{aligned}$$

Вычисление статических моментов и координат центра тяжести плоской кривой

Пусть на плоскости Oxy задана система материальных точек $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, ..., $M_n(x_n; y_n)$ соответственно с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$.

Статическим моментом S_x системы материальных точек относительно оси Ox называется сумма произведений масс этих точек на их ординаты (т. е. на расстояния этих точек от оси Ox): $S_x = \sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i$.

Аналогично определяется *статический момент* S_y этой системы относительно оси Oy : $S_y = \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i$.

Если массы распределены непрерывным образом вдоль некоторой кривой, то для выражения статического момента понадобится интегрирование.

Пусть $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) — это уравнение материальной кривой AB . Будем считать ее однородной с постоянной линейной плотностью γ ($\gamma = \text{const}$).

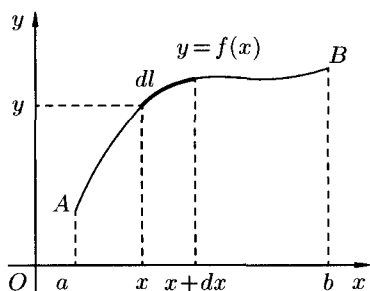


Рис. 195

Для произвольного $x \in [a, b]$ на кривой AB найдется точка с координатами (x, y) . Выделим на кривой элементарный участок длины dl , содержащий точку (x, y) . Тогда масса этого участка равна γdl . Примем этот участок dl *приблизительно за точку*, отстоящую от оси Ox на расстоянии y . Тогда дифференциал статического момента dS_x («элементарный момент») будет равен $\gamma dl \cdot y$, т. е. $dS_x = \gamma dl \cdot y$ (см. рис. 195).

Отсюда следует, что статический момент S_x кривой AB относительно оси Ox равен

$$S_x = \gamma \int_a^b y dl = \gamma \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx.$$

Аналогично находим S_y :

$$S_y = \gamma \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx.$$

Статические моменты S_x и S_y кривой позволяют легко установить положение ее центра тяжести (центра масс).

Центром тяжести материальной плоской кривой $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ называется точка плоскости, обладающая следующим свойством: если в этой точке сосредоточить всю массу m заданной кривой, то статический момент этой точки относительно любой координатной оси будет равен статическому моменту всей кривой $y = f(x)$ относительно той же оси. Обозначим через $C(x_c; y_c)$ центр тяжести кривой AB .

Из определения центра тяжести следуют равенства $m \cdot x_c = S_y$ и $m \cdot y_c = S_x$ или $\gamma l \cdot x_c = S_y$ и $\gamma l \cdot y_c = S_x$. Отсюда $x_c = \frac{S_y}{\gamma l}$, $y_c = \frac{S_x}{\gamma l}$ или

$$x_c = \frac{\int_a^b x \, dl}{l} = \frac{\int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2} \, dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} \, dx}; \quad y_c = \frac{\int_a^b y \, dl}{l} = \frac{\int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2} \, dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} \, dx}.$$

Пример 41.14. Найти центр тяжести однородной дуги окружности $x^2 + y^2 = R^2$, расположенной в первой координатной четверти (см. рис. 196).

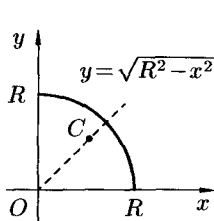


Рис. 196

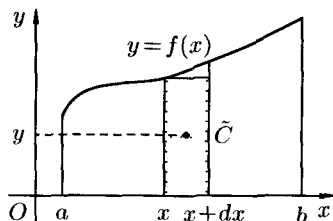


Рис. 197

○ Решение: Очевидно, длина указанной дуги окружности равна $\frac{\pi R}{2}$, т. е. $l = \frac{\pi R}{2}$. Найдем статический момент ее относительно оси Ox . Так как уравнение дуги есть $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ и $y'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, то ($\gamma = \text{const}$)

$$\begin{aligned} S_x &= \gamma \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} \, dx = \\ &= \gamma \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} \, dx = \gamma R \int_0^R dx = \gamma R x \Big|_0^R = \gamma R^2. \end{aligned}$$

Стало быть,

$$y_c = \frac{S_x}{\gamma l} = \frac{\gamma R^2}{\gamma \cdot \frac{\pi R}{2}} = \frac{2R}{\pi}.$$

Так как данная дуга симметрична относительно биссектрисы первого координатного угла, то $x_c = y_c = \frac{2R}{\pi}$. Итак, центр тяжести имеет координаты $\left(\frac{2R}{\pi}, \frac{2R}{\pi}\right)$. ●

Вычисление статических моментов и координат центра тяжести плоской фигуры

Пусть дана материальная плоская фигура (пластинка), ограниченная кривой $y = f(x) \geq 0$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (см. рис. 197).

Будем считать, что поверхностная плотность пластинки постоянна ($\gamma = \text{const}$). Тогда масса всей пластинки равна $\gamma \cdot S$, т. е. $m = \gamma \int_a^b f(x) dx$.

Выделим элементарный участок пластинки в виде бесконечно узкой вертикальной полосы и будем приближенно считать его прямоугольником.

Тогда масса его равна $\gamma \cdot y dx$. Центр тяжести $\tilde{C}$ прямоугольника лежит на пересечении диагоналей прямоугольника. Эта точка $\tilde{C}$ отстоит от оси Ox на $\frac{1}{2}y$, а от оси Oy на x (приближенно; точнее на расстоянии $x + \frac{1}{2}\Delta x$). Тогда для элементарных статических моментов относительно осей Ox и Oy выполнены соотношения

$$dS_x = \gamma \cdot y dx \cdot \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}\gamma \cdot y^2 dx \quad \text{и} \quad dS_y = \gamma \cdot y dx \cdot x = \gamma xy dx.$$

Следовательно, $S_x = \frac{1}{2}\gamma \int_a^b y^2 dx$, $S_y = \gamma \int_a^b xy dx$.

По аналогии с плоской кривой получаем, обозначив координаты центра тяжести плоской фигуры (пластинки) через $C(x_c; y_c)$, что $m \cdot x_c = S_y$, $m \cdot y_c = S_x$. Отсюда

$$x_c = \frac{S_y}{m} = \frac{S_y}{\gamma S} \quad \text{и} \quad y_c = \frac{S_x}{m} = \frac{S_x}{\gamma S}$$

или

$$x_c = \frac{\int_a^b xy dx}{\int_a^b y dx}, \quad y_c = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y dx}.$$

Пример 41.15. Найдём координаты центра тяжести полукруга $x^2 + y^2 \leq R^2$, $y \geq 0$ ($\gamma = \text{const}$) (см. рис. 198).

● Решение: Очевидно (ввиду симметрии фигуры относительно оси Oy), что $x_c = 0$.

Площадь полукруга равна $\frac{\pi R^2}{2}$. Найдём S_x :

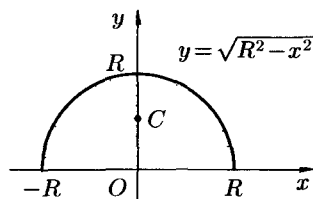


Рис. 198

$$S_x = \frac{1}{2}\gamma \int_{-R}^R (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2}\gamma \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \frac{1}{2}\gamma \left(R^3 + R^3 - \frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{3} \right) = \gamma \cdot \frac{2}{3} R^3.$$

Стало быть,

$$y_c = \frac{S_x}{\gamma S} = \frac{2\gamma R^3}{3\gamma \pi \frac{R^2}{2}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi}.$$

Итак, центр тяжести имеет координаты $C\left(0; \frac{4R}{3\pi}\right)$.

§ 42. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть требуется найти определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ от непрерывной функции $f(x)$. Если можно найти первообразную $F(x)$ функции $f(x)$, то интеграл вычисляется по формуле Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Но отыскание первообразной функции иногда весьма сложно; кроме того, как известно, не для всякой непрерывной функции ее первообразная выражается через элементарные функции. В этих и других случаях (например, функция $y = f(x)$ задана графически или таблично) прибегают к приближенным формулам, с помощью которых определенный интеграл находится с любой степенью точности.

Рассмотрим три наиболее употребительные формулы приближенного вычисления определенного интеграла — формулу прямоугольников, формулу трапеций, формулу парабол (Симпсона), основанные на геометрическом смысле определенного интеграла.

42.1. Формула прямоугольников

Пусть на отрезке $[a; b]$, $a < b$, задана непрерывная функция $f(x)$. Требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x) dx$, численно равный площади соответствующей криволинейной трапеции. Разобьем основание этой трапеции, т. е. отрезок $[a; b]$, на n равных частей (отрезков) длины $h = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$ (шаг разбиения) с помощью точек $x_0 = a$, $x_1, x_2, \dots, x_n = b$. Можно записать, что $x_i = x_0 + h \cdot i$, где $i = 1, 2, \dots, n$ (см. рис. 199).

В середине $c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ каждого такого отрезка построим ординату $\tilde{y}_i = f(c_i)$ графика функции $y = f(x)$. Приняв эту ординату за высоту, построим прямоугольник с площадью $h \cdot \tilde{y}_i$.