

10. Производная определенного интеграла по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции, в которой переменная интегрирования заменена этим пределом, т. е.

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)'_x = f(x).$$

□ По формуле Ньютона–Лейбница имеем:

$$\int_a^x f(t) dt = F(t) \Big|_a^x = F(x) - F(a).$$

Следовательно,

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)'_x = (F(x) - F(a))'_x = F'(x) - 0 = f(x). \quad \blacksquare$$

Это означает, что *определенный интеграл с переменным верхним пределом есть одна из первообразных подынтегральной функции.*

§ 39. ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

39.1. Формула Ньютона–Лейбница

Простым и удобным методом вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x) dx$ от непрерывной функции является формула Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Применяется этот метод во всех случаях, когда может быть найдена первообразная функции $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$.

Например, $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -(\cos \pi - \cos 0) = 2.$

При вычислении определенных интегралов широко используется метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

39.2. Интегрирование подстановкой (заменой переменной)

Пусть для вычисления интеграла $\int_a^b f(x) dx$ от непрерывной функции сделана подстановка $x = \varphi(t)$.

Теорема 39.1. Если:

- 1) функция $x = \varphi(t)$ и ее производная $x' = \varphi'(t)$ непрерывны при $t \in [\alpha; \beta]$,
- 2) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha, \beta]$ является отрезок $[a; b]$,
- 3) $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$,

то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt. \quad (39.1)$$

□ Пусть $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда по формуле Ньютона–Лейбница $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. Так как $(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, то $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Поэтому по формуле Ньютона–Лейбница имеем

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt &= F(\varphi(t)) \Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Формула (39.1) называется *формулой замены переменной в определенном интеграле*.

Отметим, что:

- 1) при вычислении определенного интеграла методом подстановки возвращаться к старой переменной не требуется;
- 2) часто вместо подстановки $x = \varphi(t)$ применяют подстановку $t = g(x)$;
- 3) не следует забывать менять пределы интегрирования при замене переменных!

Пример 39.1. Вычислить $\int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$.

○ Решение: Положим $x = 2 \sin t$, тогда $dx = 2 \cos t dt$. Если $x = 0$, то $t = 0$; если $x = 2$, то $t = \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx = \int_0^{\pi/2} 4 \sin^2 t \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt =$$

$$\begin{aligned}
&= 16 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t \, dt = 16 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} \sin^2 2t \, dt = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 - \cos 4t) \, dt = \\
&= 2 \left(t \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{4} \sin 4t \Big|_0^{\pi/2} \right) = 2 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \pi. \quad \bullet
\end{aligned}$$

39.3. Интегрирование по частям

Теорема 39.2. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a; b]$, то имеет место формула

$$\int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du. \quad (39.2)$$

□ На отрезке $[a, b]$ имеет место равенство $(uv)' = u'v + uv'$. Следовательно, функция uv есть первообразная для непрерывной функции $u'v + uv'$. Тогда по формуле Ньютона–Лейбница имеем:

$$\int_a^b (u'v + uv') \, dx = uv \Big|_a^b.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\int_a^b v \cdot u' \, dx + \int_a^b uv' \, dx &= uv \Big|_a^b \implies \\
\implies \int_a^b v \, du + \int_a^b u \, dv &= uv \Big|_a^b \implies \int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Формула (39.2) называется *формулой интегрирования по частям для определенного интеграла*.

Пример 39.2. Вычислить $\int_1^e x \ln x \, dx$.

○ Решение: Положим

$$\left[\begin{array}{ll} u = \ln x & \implies du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x \, dx & \implies v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right].$$

Применяя формулу (39.2), получаем

$$\begin{aligned}\int_1^e x \ln x \, dx &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \\ &= \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2 + 1). \quad \bullet\end{aligned}$$

Пример 39.3. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$.

○ Решение: Интегрируем по частям. Положим

$$\left[\begin{array}{ll} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin x \, dx & \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right].$$

Поэтому

$$J = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \, dx = -\pi \cdot (-1) + 0 + \sin x \Big|_0^{\pi} = \pi. \quad \bullet$$

39.4. Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-a; a]$, симметричном относительно точки $x = 0$. Докажем, что

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = \begin{cases} 2 \cdot \int_0^a f(x) \, dx, & \text{если } f(x) \text{ — четная функция,} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ — нечетная функция.} \end{cases} \quad (39.3)$$

□ Разобьем отрезок интегрирования $[-a; a]$ на части $[-a; 0]$ и $[0; a]$. Тогда по свойству аддитивности

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = \int_{-a}^0 f(x) \, dx + \int_0^a f(x) \, dx. \quad (39.4)$$

В первом интеграле сделаем подстановку $x = -t$. Тогда

$$\int_{-a}^0 f(x) \, dx = - \int_a^0 f(-t) \, dt = \int_0^a f(-t) \, dt = \int_0^a f(-x) \, dx$$

(согласно свойству: «определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования»). Возвращаясь к равенству (39.4), получим

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = \int_0^a f(-x) \, dx + \int_0^a f(x) \, dx = \int_0^a (f(-x) + f(x)) \, dx. \quad (39.5)$$

Если функция $f(x)$ четная ($f(-x) = f(x)$), то $f(-x) + f(x) = 2f(x)$; если функция $f(x)$ нечетная ($f(-x) = -f(x)$), то $f(-x) + f(x) = 0$.

Следовательно, равенство (39.5) принимает вид (39.3). ■

Благодаря доказанной формуле можно, например, сразу, не производя вычислений, сказать, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \cdot \sin^3 x \, dx = 0, \quad \int_{-3}^3 e^{-x^2} \cdot \sin x \, dx = 0.$$

§ 40. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Определенный интеграл $\int_a^b f(x) \, dx$, где промежуток интегрирования $[a; b]$ конечный, а подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, называют еще *собственным интегралом*.

⇒ Рассмотрим так называемые **несобственные интегралы**, т. е. определенный интеграл от непрерывной функции, но с бесконечным промежутком интегрирования или определенный интеграл с конечным промежутком интегрирования, но от функции, имеющей на нем бесконечный разрыв.

40.1. Интеграл с бесконечным промежутком интегрирования (несобственный интеграл I рода)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; +\infty)$. Если существует конечный предел $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \, dx$, то его называют *несобственным интегралом первого рода* и обозначают $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$.

Таким образом, по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \, dx.$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ *сходится*. Если же указанный предел не существует или он бесконечен, то говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ *расходится*.