

§ 30. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

30.1. Метод непосредственного интегрирования

 Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется **непосредственным интегрированием**.

При сведении данного интеграла к табличному часто используют следующие преобразования дифференциала (операция «*подведения под знак дифференциала*»):

$$du = d(u + a), \quad a — \text{число},$$

$$du = \frac{1}{a}d(au), \quad a \neq 0 — \text{число},$$

$$u \cdot du = \frac{1}{2}d(u^2),$$

$$\cos u \, du = d(\sin u),$$

$$\sin u \, du = -d(\cos u),$$

$$\frac{1}{u} \, du = d(\ln u),$$

$$\frac{1}{\cos^2 u} \, du = d(\operatorname{tg} u).$$

Вообще, $f'(u) \, du = d(f(u))$, эта формула очень часто используется при вычислении интегралов.

Примеры:

1) $\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C$ (формула 2 таблицы интегралов);

2) $\int (3x-1)^{24} dx = \frac{1}{3} \int (3x-1)^{24} d(3x-1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-1)^{25}}{25} + C$ (формула 1);

3) $\int \operatorname{ctg}^2 x \, dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C$ (формулы 10 и 1);

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3} \cdot x)}{\sqrt{(2)^2 - (\sqrt{3} \cdot x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \arcsin \frac{\sqrt{3} \cdot x}{2} + C$ (формула 13);

$$5) \int \sin^2 6x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 12x) \, dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 12x \, dx = \\ = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \int \cos 12x \, d(12x) \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{24} \sin 12x + C \text{ (формулы 1 и 6);}$$

$$6) \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = -\frac{1}{3} \int \frac{(x-1) - (x+2)}{(x-1)(x+2)} \, dx = \\ = -\frac{1}{3} \int \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} \, dx + \frac{1}{3} \int \frac{x+2}{(x-1)(x+2)} \, dx = \\ = -\frac{1}{3} \int \frac{d(x+2)}{x+2} + \frac{1}{3} \int \frac{d(x-1)}{x-1} = -\frac{1}{3} \ln|x+2| + \frac{1}{3} \ln|x-1| + C;$$

$$7) \int \operatorname{tg} u \, du = \int \frac{\sin u \, du}{\cos u} = - \int \frac{d(\cos u)}{\cos u} = -\ln|\cos u| + C \text{ (вывод формулы 7);}$$

$$8) \int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{\cos^2 \frac{u}{2} + \sin^2 \frac{u}{2}}{2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}} \, du = \int \frac{\cos^2 \frac{u}{2}}{2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}} \, du + \\ + \int \frac{\sin^2 \frac{u}{2}}{2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}} \, du = \int \operatorname{ctg} \frac{u}{2} \, d\left(\frac{u}{2}\right) + \int \operatorname{tg} \frac{u}{2} \, d\left(\frac{u}{2}\right) = \ln\left|\sin \frac{u}{2}\right| - \\ - \ln\left|\cos \frac{u}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{\sin \frac{u}{2}}{\cos \frac{u}{2}}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{u}{2}\right| + C \text{ (вывод формулы 11);}$$

$$9) \int x(x+2)^9 \, dx = \int (x+2-2)(x+2)^9 \, dx = \int (x+2)^{10} \, dx - \\ - 2 \int (x+2)^9 \, dx = \int (x+2)^{10} \, d(x+2) - 2 \int (x+2)^9 \, d(x+2) = \\ = \frac{(x+2)^{11}}{11} - 2 \frac{(x+2)^{10}}{10} + C \text{ (формула 1);}$$

$$10) \int \frac{dx}{\operatorname{ctg}^5 x \cdot \sin^2 x} = - \int (\operatorname{ctg} x)^{-5} \, d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{\operatorname{ctg}^{-4} x}{-4} + C = \\ = \frac{1}{4 \operatorname{ctg}^4 x} + C \text{ (формула 1);}$$

$$11) \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2+(x-1)^2}} = \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(x-1)^2}} = \\ = \ln|x-1+\sqrt{3-2x+x^2}| + C \text{ (формула 14);}$$

$$12) \int \left(4x^3 - \frac{5}{\cos^2 2x} + 3^{1-x}\right) \, dx = 4 \int x^3 \, dx - \frac{5}{2} \int \frac{d(2x)}{\cos^2 2x} - \\ - \int 3^{1-x} \, d(1-x) = x^4 - \frac{5}{2} \operatorname{tg} 2x - \frac{3^{1-x}}{\ln 3} + C \text{ (формулы 1, 9, 3);}$$

$$\begin{aligned}
 13) \int x^3 \cdot \sqrt[3]{1+x^2} dx &= \int (1+x^2)^{\frac{1}{3}} \cdot x \cdot (x^2+1-1) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int (1+x^2)^{\frac{4}{3}} d(1+x^2) - \frac{1}{2} \int (1+x^2)^{\frac{1}{3}} d(1+x^2) = \\
 &= \frac{3}{14} (1+x^2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{8} (1+x^2)^{\frac{4}{3}} + C.
 \end{aligned}$$

Как видно, вычисление интегралов иногда требует некоторой изобретательности, так сказать, «индивидуального подхода к каждой подынтегральной функции».

Соответствующие навыки приобретаются в результате значительного числа упражнений.

30.2. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования (т. е. подстановки). При этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся (в случае «удачной» подстановки). Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x) dx$. Сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — функция, имеющая непрерывную производную.

Тогда $dx = \varphi'(t) dt$ и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла получаем *формулу интегрирования подстановкой*

$$\boxed{\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.} \quad (30.1)$$

Формула (30.1) также называется формулой замены переменных в неопределенном интеграле. После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к переменной x .

Иногда целесообразно подбирать подстановку в виде $t = \varphi(x)$, тогда $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int f(t) dt$, где $t = \varphi(x)$. Другими словами, формулу (30.1) можно применять справа налево.

Пример 30.1. Найти $\int e^{\frac{x}{4}} dx$.

○ Решение: Положим $x = 4t$, тогда $dx = 4 dt$. Следовательно,

$$\int e^{\frac{x}{4}} dx = 4 \int e^t dt = 4e^t + C = 4e^{\frac{x}{4}} + C. \quad \bullet$$

Пример 30.2. Найти $\int x \cdot \sqrt{x-3} dx$.

○ Решение: Пусть $\sqrt{x-3} = t$, тогда $x = t^2 + 3$, $dx = 2t dt$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int x \cdot \sqrt{x-3} dx &= \int (t^2 + 3) \cdot t \cdot 2t dt = \\ &= 2 \int (t^4 + 3t^2) dt = 2 \int t^4 dt + 6 \int t^2 dt = 2 \cdot \frac{t^5}{5} + 6 \cdot \frac{t^3}{3} + C = \\ &= \frac{2}{5}(x-3)^{5/2} + 2(x-3)^{3/2} + C. \quad \bullet \end{aligned}$$

Пример 30.3. Получить формулу

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 + a^2}| + C.$$

□ Обозначим $t = \sqrt{u^2 + a^2} + u$ (подстановка Эйлера). Тогда

$$dt = \frac{2u}{2\sqrt{u^2 + a^2}} du + du, \quad \text{т. е.} \quad dt = \frac{\sqrt{u^2 + a^2} + u}{\sqrt{u^2 + a^2}} du.$$

Отсюда

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \frac{dt}{\sqrt{u^2 + a^2} + u} = \frac{dt}{t}.$$

Стало быть,

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|u + \sqrt{u^2 + a^2}| + C. \quad \blacksquare$$

Пример 30.4. Найти $\int x \cdot (x+2)^{100} dx$.

○ Решение: Пусть $x+2 = t$. Тогда $x = t-2$, $dx = dt$. Имеем:

$$\begin{aligned} \int x \cdot (x+2)^{100} dx &= \int (t-2) \cdot t^{100} dt = \int t^{101} dt - 2 \int t^{100} dt = \\ &= \frac{t^{102}}{102} - 2 \cdot \frac{t^{101}}{101} + C = \frac{(x+2)^{102}}{102} - \frac{2(x+2)^{101}}{101} + C. \quad \bullet \end{aligned}$$

Пример 30.5. Найти $\int \frac{dx}{e^x + 1}$.

○ Решение: Обозначим $e^x = t$. Тогда $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{e^x + 1} &= \int \frac{\frac{dt}{t}}{t + 1} = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \frac{dt}{t^2 + t} = \\ &= \int \frac{dt}{(t + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} = - \int \frac{d(t + \frac{1}{2})}{(\frac{1}{2})^2 - (t + \frac{1}{2})^2} = - \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \ln \left| \frac{\frac{1}{2} + t + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - t - \frac{1}{2}} \right| + C = \end{aligned}$$

$$= -\ln\left|\frac{t+1}{-t}\right| = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right| = \ln\frac{e^x}{e^x+1} + C.$$

Здесь используется формула 16 таблицы основных интегралов. ●

30.3. Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — функции, имеющие непрерывные производные. Тогда $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$. Интегрируя это равенство, получим

$$\int u dv = uv - \int v du \quad \text{или} \quad \int u dv = uv - \int v du.$$

☞ Полученная формула называется **формулой интегрирования по частям**. Она дает возможность свести вычисление интеграла $\int u dv$ к вычислению интеграла $\int v du$, который может оказаться существенно более простым, чем исходный.

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение заданного интеграла представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей u и dv (это, как правило, можно осуществить несколькими способами); затем, после нахождения v и du , используется формула интегрирования по частям. Иногда эту формулу приходится использовать несколько раз.

Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

1. Интегралы вида $\int P(x)e^{kx} dx$, $\int P(x) \cdot \sin kx dx$, $\int P(x) \cos kx dx$, где $P(x)$ — многочлен, k — число. Удобно положить $u = P(x)$, а за dv обозначить все остальные сомножители.

2. Интегралы вида $\int P(x) \arcsin x dx$, $\int P(x) \arccos x dx$, $\int P(x) \ln x dx$, $\int P(x) \operatorname{arctg} x dx$, $\int P(x) \operatorname{arcctg} x dx$. Удобно положить $P(x) dx = dv$, а за u обозначить остальные сомножители.

3. Интегралы вида $\int e^{ax} \cdot \sin bx dx$, $\int e^{ax} \cdot \cos bx dx$, где a и b — числа. За u можно принять функцию $u = e^{ax}$.

Пример 30.6. Найти $\int (2x+1)e^{3x} dx$.

○ Решение: Пусть $\begin{cases} u = 2x+1 & \Rightarrow & du = 2dx \\ dv = e^{3x} dx & \Rightarrow & v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{cases}$ (можно положить $C = 0$). Следовательно, по формуле интегрирования по частям:

$$\int (2x+1)e^{3x} dx = (2x+1) \cdot \frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x} 2 dx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C. \quad \bullet$$

Пример 30.7. Найти $\int \ln x \, dx$.

○ Решение: Пусть $\left[\begin{array}{l} u = \ln x \implies du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \implies v = x \end{array} \right]$. Поэтому

$$\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \cdot \ln x - x + C. \quad \bullet$$

Пример 30.8. Найти $\int x^2 e^x \, dx$.

○ Решение: Пусть $\left[\begin{array}{l} u = x^2 \implies du = 2x \, dx \\ dv = e^x \, dx \implies v = e^x \end{array} \right]$. Поэтому

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int e^x \cdot x \, dx. \quad (30.2)$$

Для вычисления интеграла $\int e^x x \, dx$ снова применим метод интегрирования по частям: $u = x$, $dv = e^x \, dx \implies du = dx$, $v = e^x$. Значит,

$$\int e^x \cdot x \, dx = x \cdot e^x - \int e^x \, dx = x \cdot e^x - e^x + C. \quad (30.3)$$

Поэтому (см. (30.2)) $\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2(x \cdot e^x - e^x + C)$. ●

Пример 30.9. Найти $\int \arctg x \, dx$.

○ Решение: Пусть $\left[\begin{array}{l} u = \arctg x \implies du = \frac{1}{1+x^2} \, dx \\ dv = dx \implies v = x \end{array} \right]$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int \arctg x \, dx &= x \cdot \arctg x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \\ &= x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \quad \bullet \end{aligned}$$

§ 31. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

31.1. Понятия о рациональных функциях

Многочлен (некоторые сведения справочного характера)

Функция вида

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \quad (31.1)$$

☞ где n — натуральное число, a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) — постоянные коэффициенты, называется **многочленом** (или **целой рациональной функцией**). Число n называется **степенью** многочлена.

⇒ **Корнем многочлена** (31.1) называется такое значение x_0 (вообще говоря, комплексное) переменной x , при котором многочлен обращается в нуль, т. е. $P_n(x_0) = 0$.

Теорема 31.1. Если x_1 есть корень многочлена $P_n(x)$, то многочлен делится без остатка на $x - x_1$, т. е.

$$P_n(x) = (x - x_1) \cdot P_{n-1}(x), \quad (31.2)$$

где $P_{n-1}(x)$ — многочлен степени $(n - 1)$.

Возникает вопрос: всякий ли многочлен имеет корень? Положительный ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 31.2 (основная теорема алгебры). Всякий многочлен n -й степени ($n > 0$) имеет по крайней мере один корень, действительный или комплексный

Доказательство этой теоремы мы не приводим.

Пользуясь основной теоремой алгебры, докажем теорему о разложении многочлена на линейные множители.

Теорема 31.3. Всякий многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n), \quad (31.3)$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — корни многочлена, a_0 — коэффициент многочлена при x^n .

□ Рассмотрим многочлен (31.1). По теореме 31.2 он имеет корень. Обозначим его через x_1 . Тогда имеет место соотношение (31.2). А так как $P_{n-1}(x)$ — также многочлен, то он имеет корень. Обозначим его через x_2 . Тогда $P_{n-1}(x) = (x - x_2) \cdot P_{n-2}(x)$, где $P_{n-2}(x)$ — многочлен $(n - 2)$ -й степени. Следовательно, $P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)P_{n-2}(x)$.

Продолжая этот процесс, получим в итоге:

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n). \quad \blacksquare$$

⇒ Множители $(x - x_i)$ в равенстве (31.3) называются **линейными множителями**.

Пример 31.1. Разложить многочлен $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ на множители.

○ Решение: Многочлен $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ обращается в нуль при $x = -1, x = 1, x = 2$. Следовательно,

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x + 1)(x - 1)(x - 2). \quad \bullet$$

Пример 31.2. Представить выражение $x^3 - x^2 + 4x - 4$ в виде произведения линейных множителей.

○ Решение: Легко проверить, что

$$x^3 - x^2 + 4x - 4 = (x - 1)(x - 2i)(x + 2i). \quad \bullet$$

Если в разложении многочлена (31.3) какой-либо корень встретился k раз, то он называется *корнем кратности k* . В случае $k = 1$ (т. е. корень встретился один раз) корень называется *простым*.

Разложение многочлена (31.3) можно записать в виде

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_r)^{k_r}, \quad (31.4)$$

если корень x_1 имеет кратность k_1 , корень x_2 — кратность k_2 и так далее. При этом $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$, а r — число различных корней.

Например, разложение

$$P_8(x) = (x - 3)(x + 1)(x - 4)(x - 3)(x - 3)x(x - 4)(x - 3)$$

можно записать так:

$$P_8(x) = (x - 3)^4 \cdot (x + 1) \cdot (x - 4)^2 \cdot x.$$

Пользуясь теоремой 31.3, можно доказать следующие утверждения.

Теорема 31.4. Если многочлен $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ тождественно равен нулю, то все его коэффициенты равны нулю.

Теорема 31.5. Если два многочлена тождественно равны друг другу, то коэффициенты одного многочлена равны соответствующим коэффициентам другого

Например, если $ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv x^3 - 3x^2 + 1$, то $a = 1, b = -3, c = 0, d = 1$.

Теорема 31.6. Если многочлен $P_n(x)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $a + ib$, то он имеет и сопряженный корень $a - ib$.

В разложении многочлена (31.3) комплексные корни входят сопряженными парами. Перемножив линейные множители

$$(x - (a + ib)) \cdot (x - (a - ib)),$$

получим трехчлен второй степени с действительными коэффициентами $x^2 + px + q$. В самом деле,

$$\begin{aligned} (x - (a + ib))(x - (a - ib)) &= ((x - a) - ib)((x - a) + ib) = \\ &= (x - a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q, \end{aligned}$$

где $p = -2a$, $q = a^2 + b^2$.

Таким образом, произведение линейных множителей, соответствующих сопряженным корням, можно заменить квадратным трехчленом с действительными коэффициентами.

С учетом вышеизложенного справедлив следующий факт.

Теорема 31.7. Всякий многочлен с действительными коэффициентами разлагается на линейные и квадратные множители с действительными коэффициентами, т. е. многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_r)^{k_r} \times \\ \times (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \dots (x^2 + p_mx + q_m)^{s_m}. \quad (31.5)$$

При этом $k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2(s_1 + s_2 + \dots + s_m) = n$, все квадратные трехчлены не имеют вещественных корней

Примеры разложений (31.5):

$$1) x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1);$$

$$2) x^3 - 16x = x(x^2 - 16) = x(x - 4)(x + 4);$$

$$3) x^5 - 6x^4 + 9x^3 - x^2 + 6x - 9 = x^3(x^2 - 6x + 9) - (x^2 - 6x + 9) = \\ = (x^2 - 6x + 9)(x^3 - 1) = (x - 3)^2 \cdot (x - 1)(x^2 + x + 1).$$

Дробно-рациональная функция

 **Дробно-рациональной функцией** (или **рациональной дробью**) называется функция, равная отношению двух многочленов, т. е. $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ — многочлен степени m , а $Q_n(x)$ — многочлен степени n .

☞ Рациональная дробь называется **правильной**, если степень числителя меньше степени знаменателя, т. е. $m < n$; в противном случае (если $m \geq n$) рациональная дробь называется **неправильной**.

☉ **Всякую неправильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно, путем деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы многочлена $L(x)$ и правильной рациональной дроби $\frac{R(x)}{Q(x)}$, т. е.**

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Например, $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2}$ — неправильная рациональная дробь. Разделим числитель на знаменатель в столбик:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 x^4 \\
 x^4 - 2x^3 \\
 \hline
 2x^3 \\
 -2x^3 - 4x^2 \\
 \hline
 -4x^2 - 5x + 9 \\
 -4x^2 - 8x \\
 \hline
 3x + 9 \\
 -3x - 6 \\
 \hline
 15.
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 -5x + 9 \big| x - 2 \\
 \hline
 -5x + 9 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

Получим частное $L(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 3$ и остаток $R(x) = 15$. Следовательно, $\frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2} = x^3 + 2x^2 + 4x + 3 + \frac{15}{x - 2}$.

Правильные рациональные дроби вида

(I). $\frac{A}{x - a}$;

(II). $\frac{A}{(x - a)^k}$ ($k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$);

(III). $\frac{Mx + N}{x^2 + px + q}$ (корни знаменателя комплексные, т. е. $p^2 - 4q < 0$);

(IV). $\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k}$ ($k \geq 2$, корни знаменателя комплексные),

☞ где A , a , M , N , p , q — действительные числа, называются **простейшими рациональными дробями I, II, III и IV типов**.

Теорема 31.8. Всякую правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой разложен на множители

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \dots (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \dots (x^2 + p_mx + q_m)^{s_m},$$

можно представить (и притом единственным образом) в виде следующей суммы простейших дробей

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} + \\ & + \frac{B_1}{x - x_2} + \frac{B_2}{(x - x_2)^2} + \dots + \frac{B_{k_2}}{(x - x_2)^{k_2}} + \dots \\ & \dots + \frac{C_1x + D_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{C_{s_1}x + D_{s_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}} + \dots \\ & \dots + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + p_mx + q_m} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + p_mx + q_m)^2} + \dots + \frac{M_{s_m}x + N_{s_m}}{(x^2 + p_mx + q_m)^{s_m}}, \end{aligned} \quad (31.6)$$

где $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, C_1, D_1, \dots, M_1, N_1, \dots$ — некоторые действительные коэффициенты.

Поясним формулировку теоремы на следующих примерах:

$$1) \frac{x^2 + 4}{(x - 2)(x - 3)^3} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{(x - 3)^2} + \frac{D}{(x - 3)^3};$$

$$2) \frac{x^3 + 1}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1};$$

$$3) \frac{7x^2 + 8x + 9}{(x - 1)(x - 2)(x^2 + x + 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1} + \frac{Mx + N}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$ в равенстве (31.6) можно применить *метод сравнения коэффициентов*. Суть метода такова:

1. В правой части равенства (31.6) приведем к общему знаменателю $Q(x)$; в результате получим тождество $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{S(x)}{Q(x)}$, где $S(x)$ — многочлен с неопределенными коэффициентами.

2. Так как в полученном тождестве знаменатели равны, то тождественно равны и числители, т. е.

$$P(x) \equiv S(x). \quad (31.7)$$

3. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x (по теореме 31.5 о тождестве многочленов) в обеих частях тождества (31.7), получим систему линейных уравнений, из которой и определим искомые коэффициенты $A_1, A_2, \dots, B_1, \dots$

Пример 31.3. Представить дробь $\frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)}$ в виде суммы простейших дробей.

○ Решение: Согласно теореме 31.8 имеем:

$$\frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 5},$$

т. е.

$$\frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{A(x^2 - 2x + 5) + (x-1)(Bx + C)}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)}.$$

Отсюда следует

$$2x^2 - 3x - 3 \equiv Ax^2 - 2Ax + 5A + Bx^2 - Bx + Cx - C,$$

т. е.

$$2x^2 - 3x - 3 \equiv (A + B)x^2 + (-2A - B + C)x + (5A - C).$$

Приравнивая коэффициенты при x^2, x^1, x^0 , получаем

$$\begin{cases} 2 = A + B, \\ -3 = -2A - B + C, \\ -3 = 5A - C. \end{cases}$$

Решая систему, находим, что $A = -1, B = 3, C = -2$. Следовательно,

$$\frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{3x-2}{x^2 - 2x + 5}.$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов применяют также *метод отдельных значений аргумента*: после получения тождества (31.7) аргументу x придают конкретные значения столько раз, сколько неопределенных коэффициентов (обычно полагают вместо x значения действительных корней многочлена $Q(x)$).

Пример 31.4. Представить дробь $\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}$ в виде суммы простейших дробей.

○ Решение: Имеем: $\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$. Отсюда следует

$$3x - 4 \equiv A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2).$$

Положим $x = 0$, тогда $-4 = -2A$, т. е. $A = 2$; положим $x = 2$, тогда $2 = 6B$, т. е. $B = \frac{1}{3}$; положим $x = -1$, тогда $-7 = 3C$, т. е. $C = -\frac{7}{3}$. Следовательно,

$$\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)} = \frac{2}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2} + \frac{-\frac{7}{3}}{x+1}.$$

31.2. Интегрирование простейших рациональных дробей

Найдем интегралы от простейших рациональных дробей.

1. $\int \frac{A}{x-a} dx = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln|x-a| + C$ (формула (2) таблицы интегралов);

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \cdot \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \cdot \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C$ (формула (1));

3. Рассмотрим интеграл $J = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx$.

Выделив в знаменателе полный квадрат, получим:

$$J = \int \frac{Mx+N}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx,$$

причем $q - \frac{p^2}{4} > 0$. Сделаем подстановку $x + \frac{p}{2} = t$. Тогда $x = t - \frac{p}{2}$, $dx = dt$. Положим $q - \frac{p^2}{4} = a^2$. Следовательно, используя формулы (2) и (15) таблицы интегралов, получаем

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \int \frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{t^2+a^2} dt = \\ &= M \int \frac{t dt}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \\ &= \frac{M}{2} \cdot \ln(t^2+a^2) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C, \end{aligned}$$

т. е., возвращаясь к переменной x ,

$$J = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2} \ln(x^2+px+q) + \frac{N - \frac{Mp}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C.$$

Пример 31.5. Найти $\int \frac{3x+1}{x^2+2x+10} dx$.

○ Решение: $x^2 + 2x + 10 = (x + 1)^2 + 9$. Сделаем подстановку $x + 1 = t$. Тогда $x = t - 1$, $dx = dt$ и

$$\begin{aligned} \int \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 10} dx &= \int \frac{3(t - 1) + 1}{t^2 + 9} dt = 3 \int \frac{t dt}{t^2 + 9} - 2 \int \frac{dt}{t^2 + 9} = \\ &= \frac{3}{2} \ln(t^2 + 9) - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \frac{3}{2} \ln(x^2 + 2x + 10) - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{3} + C. \end{aligned}$$

4. Вычисление интеграла вида $\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k} dx$, $k \geq 2$, $q - \frac{p^2}{4} > 0$.

Данный интеграл подстановкой $x + \frac{p}{2} = t$ сводится к сумме двух интегралов:

$$M \int \frac{t dt}{(t^2 + a^2)^k} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k}, \quad a^2 = q - \frac{p^2}{4}.$$

Первый интеграл легко вычисляется:

$$\int \frac{t dt}{(t^2 + a^2)^k} = \frac{1}{2} \int (t^2 + a^2)^{-k} d(t^2 + a^2) = \frac{1}{2(1 - k)(t^2 + a^2)^{k-1}} + C.$$

Вычислим второй интеграл:

$$\begin{aligned} J_k &= \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k} = \frac{1}{a^2} \int \frac{(t^2 + a^2) - t^2}{(t^2 + a^2)^k} dt = \\ &= \frac{1}{a^2} \left(\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{k-1}} - \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^k} \right) = \frac{1}{a^2} \left(J_{k-1} - \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^k} \right). \end{aligned} \quad (31.8)$$

К последнему интегралу применим интегрирование по частям. Положим

$$u = t, \quad dv = \frac{t dt}{(t^2 + a^2)^k}, \quad du = dt,$$

$$v = \frac{1}{2} \int (t^2 + a^2)^{-k} d(t^2 + a^2) = \frac{1}{2(1 - k)(t^2 + a^2)^{k-1}},$$

тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^k} &= \frac{t}{2(1 - k)(t^2 + a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1 - k)} \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{k-1}} = \\ &= \frac{t}{2(1 - k)(t^2 + a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1 - k)} \cdot J_{k-1}. \end{aligned}$$

Подставляя найденный интеграл в равенство (31.8), получаем

$$J_k = \frac{1}{a^2} \left(J_{k-1} - \frac{t}{2(1 - k)(t^2 + a^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(1 - k)} J_{k-1} \right),$$

т. е.

$$J_k = \frac{1}{a^2} \left(\frac{2k-3}{2k-2} J_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}} \right).$$

Полученная формула дает возможность найти интеграл J_k для любого натурального числа $k > 1$.

Пример 31.6. Найти интеграл $J_3 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^3}$.

○ Решение: Здесь $a = 1$, $k = 3$. Так как

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C,$$

то

$$J_2 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2 - 2} J_1 + \frac{t}{2 \cdot (2-1)(t^2+1)} = \\ = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2+1)} + C,$$

$$J_3 = \frac{3}{4} J_2 + \frac{t}{4(t^2+1)^2} = \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2+1)} \right) + C. \quad \bullet$$

31.3. Интегрирование рациональных дробей

Рассмотренный в пунктах 31.1–31.2 материал позволяет сформулировать *общее правило интегрирования рациональных дробей*.

📷 1. Если дробь неправильная, то представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби;

2. Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить ее в виде суммы простейших рациональных дробей;

3. Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

Пример 31.7. Найти интеграл $\int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx$.

○ Решение: Под знаком интеграла неправильная дробь; выделим ее целую часть путем деления числителя на знаменатель:

$$\begin{array}{r} \frac{x^5}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} + 2x^3 + 4x + 4 \left| \frac{x^4 + 2x^3 + 2x^2}{x - 2} \right. \\ \hline -2x^4 \qquad \qquad \qquad + 4x + 4 \\ \hline -2x^4 - 4x^3 - 4x^2 \qquad \qquad \qquad + 4x + 4 \\ \hline \qquad \qquad \qquad 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 \text{ (остаток).} \end{array}$$

Получаем:

$$\frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = x - 2 + \frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2}.$$

Разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = \frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^2(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2},$$

$$4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 \equiv Ax(x^2 + 2x + 2) + B(x^2 + 2x + 2) + (Cx + D)x^2,$$

т. е.

$$4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 \equiv (A + C)x^3 + (2A + B + D)x^2 + (2A + 2B)x + 2B.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} A + C = 4, \\ 2A + B + D = 4, \\ 2A + 2B = 4, \\ 2B = 4. \end{cases}$$

Находим: $B = 2$, $A = 0$, $C = 4$, $D = 2$. Стало быть,

$$\frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = \frac{2}{x^2} + \frac{4x + 2}{x^2 + 2x + 2}$$

и

$$\frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = x - 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{4x + 2}{x^2 + 2x + 2}.$$

Интегрируем полученное равенство:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx &= \int \left(x - 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{4x + 2}{x^2 + 2x + 2} \right) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + \int \frac{4x + 2}{(x + 1)^2 + 1} dx. \end{aligned}$$

Обозначим $x + 1 = t$, тогда $x = t - 1$ и $dx = dt$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{4x + 2}{(x + 1)^2 + 1} dx &= \int \frac{4t - 4 + 2}{t^2 + 1} dt = 4 \int \frac{t dt}{t^2 + 1} - 2 \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) - 2 \operatorname{arctg} t + C = \\ &= 2 \cdot \ln(x^2 + 2x + 2) - 2 \operatorname{arctg}(x + 1) + C. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2 \ln(x^2 + 2x + 2) - 2 \operatorname{arctg}(x + 1) + C.$$

Отметим, что любая рациональная функция интегрируется в элементарных функциях.

§ 32. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

32.1. Универсальная тригонометрическая подстановка

Рассмотрим некоторые случаи нахождения интеграла от тригонометрических функций. Функцию с переменными $\sin x$ и $\cos x$, над которыми выполняются рациональные действия (сложения, вычитание, умножение и деление) принято обозначать $R(\sin x; \cos x)$, где R — знак рациональной функции.

☞ Вычисление неопределенных интегралов типа $\int R(\sin x; \cos x) dx$ сводится к вычислению интегралов от рациональной функции подстановкой $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, которая называется **универсальной**.

$$\text{Действительно, } \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$. Поэтому

$$\int R(\sin x; \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int R_1(t) dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция от t . Обычно этот способ весьма громоздкий, зато он *всегда* приводит к результату.

На практике применяют и другие, более простые подстановки, в зависимости от свойств (и вида) подынтегральной функции. В частности, удобны следующие правила:

1) если функция $R(\sin x; \cos x)$ *нечетна относительно $\sin x$* , т. е. $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то подстановка $\cos x = t$ рационализирует интеграл;

2) если функция $R(\sin x; \cos x)$ *нечетна относительно $\cos x$* , т. е. $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то делается подстановка $\sin x = t$;

3) если функция $R(\sin x; \cos x)$ *четна относительно $\sin x$ и $\cos x$* $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$, то интеграл рационализируется подстановкой $\operatorname{tg} x = t$. Такая же подстановка применяется, если интеграл имеет вид $\int R(\operatorname{tg} x) dx$.

Пример 32.1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{3 + \sin x + \cos x}$.

○ Решение: Сделаем универсальную подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Тогда $dx =$

$= \frac{2 dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3 + \sin x + \cos x} &= \int \frac{2 dt}{(1+t^2)(3 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2})} = \int \frac{dt}{t^2 + t + 2} = \\ &= \int \frac{d(t + \frac{1}{2})}{(t + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{t + \frac{1}{2}}{\sqrt{7}/2} + C = \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1 + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{7}} + C. \quad \bullet \end{aligned}$$

Пример 32.2. Найти интеграл $I = \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$.

○ Решение: Так как

$$R(-\sin x; -\cos x) = \frac{1}{1 + (-\sin x)^2} = \frac{1}{1 + \sin^2 x} = R(\sin x; \cos x),$$

то полагаем $\operatorname{tg} x = t$. Отсюда

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \quad \text{и} \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dt}{(1+t^2)(1 + \frac{t^2}{1+t^2})} = \int \frac{dt}{2t^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2}t)}{(\sqrt{2}t)^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2}t + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C. \quad \bullet \end{aligned}$$

32.2. Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$

Для нахождения таких интегралов используются следующие приемы:

- 1) подстановка $\sin x = t$, если n — целое положительное *нечетное* число;
- 2) подстановка $\cos x = t$, если m — целое положительное *нечетное* число;
- 3) формулы понижения порядка: $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, если m и n — целые *неотрицательные четные* числа;
- 4) подстановка $\operatorname{tg} x = t$, если $m + n$ — есть четное отрицательное целое число.

Пример 32.3. Найти интеграл $I = \int \sin^4 x \cos^5 x dx$.

○ Решение: Применим подстановку $\sin x = t$. Тогда $x = \arcsin t$, $dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$, $\cos x = \sqrt{1-t^2}$ и

$$\begin{aligned} I &= \int t^4 \cdot (\sqrt{1-t^2})^5 \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int t^4 (1-t^2)^2 dt = \int (t^4 - 2t^6 + t^8) dt = \\ &= \frac{t^5}{5} - 2\frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + C. \quad \bullet \end{aligned}$$

Пример 32.4. Найти интеграл $I = \int \sin^4 x \cos^2 x dx$.

○ Решение:

$$\begin{aligned} I &= \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x dx = \int \frac{1}{4} \sin^2 2x \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{8} \int \frac{1}{2} (1 - \cos 4x) dx - \\ &\quad - \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C. \quad \bullet \end{aligned}$$

Пример 32.5. Найти интеграл

$$I = \int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x} = \int \cos^{-1} x \cdot \sin^{-3} x dx.$$

○ Решение: Здесь $m + n = -4$. Обозначим $\operatorname{tg} x = t$. Тогда $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ и

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{t^3}{(\sqrt{1+t^2})^3}} = \int \frac{1+t^2}{t^3} dt = \int t^{-3} dt + \int \frac{dt}{t} = \\ &= -\frac{1}{2t^2} + \ln |t| + C = -\frac{1}{2} \cdot \operatorname{ctg}^2 x + \ln |\operatorname{tg} x| + C. \quad \bullet \end{aligned}$$

32.3. Использование тригонометрических преобразований

Интегралы типа $\int \sin ax \cdot \cos bx dx$, $\int \cos ax \cdot \cos bx dx$, $\int \sin ax \cdot \sin bx dx$ вычисляются с помощью известных формул тригонометрии:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)),$$

$$\begin{aligned}\cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)), \\ \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).\end{aligned}$$

Пример 32.6. Найти интеграл $I = \int \sin 8x \cos 2x dx$.

○ Решение:

$$\begin{aligned}I &= \int \sin 8x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 10x + \sin 6x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{10} \cos 10x - \frac{1}{6} \cos 6x \right) + C. \quad \bullet\end{aligned}$$

§ 33. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

33.1. Квадратичные иррациональности

Рассмотрим некоторые типы интегралов, содержащих иррациональные функции.

Интегралы типа

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx, \quad \int \frac{mx + n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

называют неопределёнными интегралами от квадратичных иррациональностей. Их можно найти следующим образом: под радикалом выделить полный квадрат

$$\begin{aligned}ax^2 + bx + c &= \\ &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right)\end{aligned}$$

и сделать подстановку $x + \frac{b}{2a} = t$. При этом первые два интеграла приводятся к табличным, а третий — к сумме двух табличных интегралов.

Пример 33.1. Найти интегралы $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}$.

○ Решение: Так как $4x^2 + 2x + 1 = 4 \left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right) = 4 \left(\left(x + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{3}{16} \right)$,
то

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{4 \left(\left(x + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{3}{16} \right)}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{3}{16}}}.$$

Сделаем подстановку $x + \frac{1}{4} = t$, $x = t - \frac{1}{4}$, $dx = dt$. Тогда

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 3/16}} = \frac{1}{2} \ln \left| t + \sqrt{t^2 + \frac{3}{16}} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| x + \frac{1}{4} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}} \right| + C. \quad \bullet \end{aligned}$$

Пример 33.2. Найти интеграл $I = \int \frac{x+4}{\sqrt{6-2x-x^2}} dx$

○ Решение: Так как $6 - 2x - x^2 = -(x^2 + 2x - 6) = -((x+1)^2 - 7) = 7 - (x+1)^2$, то подстановка имеет вид $x+1 = t$, $x = t-1$, $dx = dt$. Тогда

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{t-1+4}{\sqrt{7-t^2}} dt = \int \frac{t dt}{\sqrt{7-t^2}} + 3 \int \frac{dt}{\sqrt{7-t^2}} = \\ &= -\frac{1}{2} \int (7-t^2)^{-\frac{1}{2}} d(7-t^2) + 3 \int \frac{dt}{\sqrt{(\sqrt{7})^2 - t^2}} = \\ &= -\sqrt{7-t^2} + 3 \cdot \arcsin \frac{t}{\sqrt{7}} + C = 3 \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{7}} - \sqrt{6-2x-x^2} + C. \quad \bullet \end{aligned}$$

Интегралы типа $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n , можно вычислять, пользуясь формулой

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = Q_{n-1}(x) \cdot \sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad (33.1)$$

где $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n-1$ с неопределенными коэффициентами, λ — также неопределенный коэффициент.

Все неопределенные коэффициенты находятся из тождества, получаемого дифференцированием обеих частей равенства (33.1):

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \equiv (Q_{n-1}(x) \cdot \sqrt{ax^2+bx+c})' + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

после чего необходимо приравнять коэффициенты при одинаковых степенях неизвестной x .

Пример 33.3. Найти интеграл $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} dx$.

○ Решение: По формуле (33.1) имеем:

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} dx = (Ax+B)\sqrt{1-2x-x^2} + \lambda \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$$

Дифференцируя это равенство, получаем:

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} \equiv A \cdot \sqrt{1-2x-x^2} + (Ax+B) \cdot \frac{-2-2x}{2\sqrt{1-2x-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-2x-x^2}},$$

т. е.

$$\begin{aligned} x^2 &\equiv A(1-2x-x^2) + (Ax+B)(-1-x) + \lambda, \\ x^2 &\equiv A-2Ax-Ax^2-Ax-B-Ax^2-Bx+\lambda. \end{aligned}$$

Сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$\begin{cases} 1 = -A - A & \text{при } x^2, \\ 0 = -2A - A - B & \text{при } x^1, \\ 0 = A - B + \lambda & \text{при } x^0. \end{cases}$$

Отсюда $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{2}$, $\lambda = 2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} I &= \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) \sqrt{1-2x-x^2} + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{2-(x+1)^2}} = \\ &= \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) \sqrt{1-2x-x^2} + 2 \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C. \quad \bullet \end{aligned}$$

33.2. Дробно-линейная подстановка

Интегралы типа $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha/\beta}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\delta/\gamma}\right) dx$, где a, b, c, d — действительные числа, $\alpha, \beta, \dots, \delta, \gamma$ — натуральные числа, сводятся к интегралам от рациональной функции путем подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где k — наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{\alpha}{\beta}, \dots, \frac{\delta}{\gamma}$.

Действительно, из подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$ следует, что $x = \frac{b-dt^k}{ct^k-a}$ и $dx = \frac{-dkt^{k-1}(ct^k-a) - (b-dt^k)ckt^{k-1}}{(ct^k-a)^2} dt$, т. е. x и dx выражаются через рациональные функции от t . При этом и каждая степень дроби $\frac{ax+b}{cx+d}$ выражается через рациональную функцию от t .

Пример 33.4. Найти интеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt{x+2}}$.

○ Решение: Наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$ есть 6. Поэтому полагаем $x+2 = t^6$, $x = t^6 - 2$, $dx = 6t^5 dt$, $t = \sqrt[6]{x+2}$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{6t^5 dt}{t^4 - t^3} = 6 \int \frac{t^2 dt}{t - 1} = 6 \int \frac{(t^2 - 1) + 1}{t - 1} dt = \\ &= 6 \int \left(t + 1 + \frac{1}{t - 1} \right) dt = 3t^2 + 6t + 6 \ln |t - 1| + C = \\ &= 3 \cdot \sqrt[3]{x + 2} + 6 \cdot \sqrt[6]{x + 2} + 6 \ln |\sqrt[6]{x + 2} - 1| + C. \quad \bullet \end{aligned}$$

Пример 33.5. Указать подстановку для нахождения интегралов:

$$I_1 = \int \frac{\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x} - x} dx, \quad I_2 = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{(1-x)^2}.$$

○ Решение: Для I_1 подстановка $x = t^2$, для I_2 подстановка $\frac{x+1}{x-1} = t^3$. ●

33.3. Тригонометрическая подстановка

Интегралы типа

$$\int R(x; \sqrt{a^2 - x^2}) dx, \quad \int R(x; \sqrt{a^2 + x^2}) dx, \quad \int R(x; \sqrt{x^2 - a^2}) dx$$

приводятся к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций, с помощью следующих *тригонометрических подстановок*: $x = a \cdot \sin t$ для первого интеграла; $x = a \cdot \operatorname{tg} t$ для второго интеграла; $x = \frac{a}{\sin t}$ для третьего интеграла.

Пример 33.6. Найти интеграл $I = \int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2} dx$.

○ Решение: Положим $x = 2 \sin t$, $dx = 2 \cos t dt$, $t = \arcsin \frac{x}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sqrt{4 - 4 \sin^2 t}}{4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = \int \frac{4 \cos^2 t}{4 \sin^2 t} dt = \\ &= \int \frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t} dt = \int \frac{dt}{\sin^2 t} - \int dt = -\operatorname{ctg} t - t + C = \\ &= C - \arcsin \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \left(\arcsin \frac{x}{2} \right) = C - \arcsin \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} \end{aligned}$$

$$\left(\operatorname{ctg} t = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 t}}{\sin t} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}}{\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} \right).$$

33.4. Интегралы типа $\int R(x; \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$

Здесь подынтегральная функция есть рациональная функция относительно x и $\sqrt{ax^2 + bx + c}$. Выделив под радикалом полный квадрат и сделав подстановку $x + \frac{b}{2a} = t$, интегралы указанного типа приводятся к интегралам уже рассмотренного типа, т. е. к интегралам типа $\int R(t; \sqrt{a^2 - t^2}) dt$, $\int R(t; \sqrt{a^2 + t^2}) dt$, $\int R(t; \sqrt{t^2 - a^2}) dt$. Эти интегралы можно вычислить с помощью соответствующих тригонометрических подстановок.

Пример 33.7. Найти интеграл $I = \int \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 4}}{(x+1)^3} dx$.

○ Решение: Так как $x^2 + 2x - 4 = (x+1)^2 - 5$, то $x+1 = t$, $x = t-1$, $dx = dt$. Поэтому $I = \int \frac{\sqrt{t^2 - 5}}{t^3} dt$. Положим $t = \frac{\sqrt{5}}{\sin z}$, $dt = \frac{-\sqrt{5} \cdot \cos z}{\sin^2 z} dz$, $z = \arcsin \frac{\sqrt{5}}{t}$. Тогда

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sqrt{\frac{5}{\sin^2 z} - 5}}{\frac{5\sqrt{5}}{\sin^3 z}} \cdot \frac{(-\sqrt{5}) \cos z}{\sin^2 z} dz = -\frac{1}{\sqrt{5}} \int \cos^2 z dz = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2z) dz = -\frac{\sqrt{5}}{10} \left(z + \frac{1}{2} \sin 2z \right) + C = \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{10} \left(\arcsin \frac{\sqrt{5}}{t} + \frac{1}{2} \sin \left(2 \arcsin \frac{\sqrt{5}}{t} \right) \right) + C = \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{10} \left(\arcsin \frac{\sqrt{5}}{x+1} + \frac{1}{2} \sin \left(2 \arcsin \frac{\sqrt{5}}{x+1} \right) \right) + C = \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{10} \left(\arcsin \frac{\sqrt{5}}{x+1} + \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{x^2 + 2x - 4}}{(x+1)^2} \right) + C. \end{aligned}$$

Замечание: Интеграл типа $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ целесообразно находить с помощью подстановки $x = \frac{1}{t}$.

33.5. Интегрирование дифференциального бинома

Интегралы типа $\int x^m \cdot (a + bx^n)^p dx$ (называемые интегралами от дифференциального бинома), где a, b — действительные числа; m, n, p — рациональные числа, берутся, как показал Чебышев П.А., лишь в

случае, когда хотя бы одно из чисел p , $\frac{m+1}{n}$ или $\frac{m+1}{n} + p$ является целым.

Рационализация интеграла в этих случаях осуществляется следующими подстановками:

1) если p — целое число, то подстановка $x = t^k$, где k — наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n ;

2) если $\frac{m+1}{n}$ — целое число, то подстановка $a + bx^n = t^s$, где s — знаменатель дроби p ;

3) если $\frac{m+1}{n} + p$ — целое число, то подстановка $a + bx^n = x^n \cdot t^s$, где s — знаменатель дроби p .

Во всех остальных случаях интегралы типа $\int x^m(a + bx^n)^p dx$ не выражаются через известные элементарные функции, т. е. «не берутся».

Пример 33.8. Найти интеграл $I = \int \frac{\sqrt[3]{4\sqrt{x} + 1}}{\sqrt{x}} dx$.

○ Решение: Так как

$$I = \int x^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 + x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} dx,$$

то $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{3}$, $\frac{m+1}{n} = 2$. Поэтому делаем подстановку $\sqrt[4]{x} + 1 = t^3$, $x = (t^3 - 1)^4$, $dx = 4(t^3 - 1)^3 \cdot 3t^2 dt$, $t = \sqrt[3]{4\sqrt{x} + 1}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{t}{(t^3 - 1)^2} \cdot 12t^2(t^3 - 1)^3 dt = 12 \int (t^6 - t^3) dt = \\ &= 12 \cdot \frac{t^7}{7} - 12 \cdot \frac{t^4}{4} + C = \frac{12}{7} (4\sqrt{x} + 1)^{\frac{7}{3}} - 3 \cdot (4\sqrt{x} + 1)^{\frac{4}{3}} + C. \quad \bullet \end{aligned}$$

§ 34. «БЕРУЩИЕСЯ» И «НЕБЕРУЩИЕСЯ» ИНТЕГРАЛЫ

Как уже отмечалось выше, операция интегрирования функций значительно сложнее операции дифференцирования функций. Не всегда выбранный путь интегрирования является наилучшим, более коротким, простым. Интегрирование часто может быть выполнено не единственным способом. Многое зависит от знания рекомендуемых многих искусственных приемов интегрирования, от сообразительности, от тренированности. Например, $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$ можно найти, не используя реко-

мендующую подстановку $\operatorname{tg} x = t$, а применив искусственный прием:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos^6 x} &= \int \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)^2}{\cos^6 x} dx = \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 2 \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x} \right) dx = \operatorname{tg} x + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + C.\end{aligned}$$

Вряд ли стоит вычислять интеграл

$$\int \frac{3x^2 + 4x + 1}{x(x^2 + 2x + 1)} dx,$$

разлагая подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{3x^2 + 4x + 1}{x(x^2 + 2x + 1)} = \frac{3x^2 + 4x + 1}{x(x + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}.$$

Заметив, что числитель $3x^2 + 4x + 1$ является производной знаменателя $x(x^2 + 2x + 1) = x^3 + 2x^2 + x$, легко получить:

$$\int \frac{3x^2 + 4x + 1}{x(x^2 + 2x + 1)} dx = \int \frac{d(x^3 + 2x^2 + x)}{x^3 + 2x^2 + x} = \ln |x^3 + 2x^2 + x| + C.$$

На практике при вычислении неопределенных интегралов используют различные справочники, содержащие таблицы особенно часто встречающихся интегралов. В частности, «Таблицы неопределенных интегралов» М. Л. Смолянского.

Изученные методы интегрирования позволяют во многих случаях вычислить неопределенный интеграл, т. е. найти первообразную функцию для подынтегральной функции.

Как известно, *всякая непрерывная функция имеет первообразную*. В том случае, когда первообразная некоторой элементарной функции $f(x)$ является также элементарной функцией, говорят, что $\int f(x) dx$ «берется», т. е. интеграл выражается через элементарные функции (или интеграл вычисляется). Если же интеграл не выражается через элементарные функции, то говорят, что интеграл «не берется» (или «его найти нельзя»).

Так, например, нельзя взять интеграл $\int \sqrt{x} \cdot \cos x dx$, так как не существует элементарной функции, производная от которой была бы равна $\sqrt{x} \cos x$. Приведем еще примеры «небериющихся» интегралов, которые имеют большое значение в приложениях:

$\int e^{-x^2} dx$ — интеграл Пуассона (теория вероятностей),

$\int \frac{dx}{\ln x}$ — интегральный логарифм (теория чисел),

$\int \cos x^2 dx, \int \sin x^2 dx$ — интегралы Френеля (физика),

$\int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx$ — интегральные синус и косинус,

$\int \frac{e^x}{x} dx$ — интегральная показательная функция.

Первообразные от функции e^{-x^2} , $\cos x^2$, $\frac{1}{\ln x}$ и других хорошо изучены, для них составлены подробные таблицы значений для различных значений аргумента x .