

Глава VII. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Лекции 25–28

§ 29. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

29.1. Понятие неопределенного интеграла

В дифференциальном исчислении решается задача: *по данной функции $f(x)$ найти ее производную* (или дифференциал). Интегральное исчисление решает обратную задачу: *найти функцию $F(x)$, зная ее производную $F'(x) = f(x)$* (или дифференциал). Искомую функцию $F(x)$ называют первообразной функции $f(x)$.

☐ Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, если для любого $x \in (a; b)$ выполняется равенство

$$F'(x) = f(x) \quad (\text{или } dF(x) = f(x) dx).$$

Например, первообразной функции $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, является функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$, так как

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2 = f(x).$$

Очевидно, что первообразными будут также любые функции

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C,$$

где C — постоянная, поскольку

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2 = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Теорема 29.1. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на $(a; b)$, то множество всех первообразных для $f(x)$ задается формулой $F(x) + C$, где C — постоянное число

☐ Функция $F(x) + C$ является первообразной $f(x)$. Действительно, $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

Пусть $\Phi(x)$ — некоторая другая, отличная от $F(x)$, первообразная функции $f(x)$, т. е. $\Phi'(x) = f(x)$. Тогда для любого $x \in (a; b)$ имеем

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

А это означает (см. следствие 25.1), что

$$\Phi(x) - F(x) = C,$$

где C — постоянное число. Следовательно, $\Phi(x) = F(x) + C$. ■

⇒ Множество всех первообразных функций $F(x) + C$ для $f(x)$ называется **неопределенным интегралом от функции $f(x)$** и обозначается символом $\int f(x) dx$.

Таким образом, по определению

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

⇒ Здесь $f(x)$ называется **подынтегральной функцией**, $f(x) dx$ — **подынтегральным выражением**, x — **переменной интегрирования**, $\int$ — **знаком неопределенного интеграла**.

Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется **интегрированием** этой функции.

⇒ Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство «параллельных» кривых $y = F(x) + C$ (каждому числовому значению C соответствует определенная кривая семейства) (см. рис. 165). График каждой первообразной (кривой) называется **интегральной кривой**.

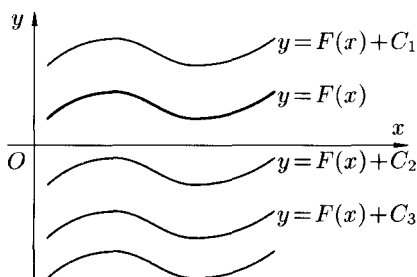


Рис. 165

Для всякой ли функции существует неопределенный интеграл?

☉ Имеет место теорема, утверждающая, что «всякая непрерывная на $(a; b)$ функция имеет на этом промежутке первообразную», а следовательно, и неопределенный интеграл.

29.2. Свойства неопределенного интеграла

Отметим ряд свойств неопределенного интеграла, вытекающих из его определения.

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx, \quad \left(\int f(x) dx\right)' = f(x).$$

□ Действительно,

$$d\left(\int f(x) dx\right) = d(F(x) + C) = dF(x) + d(C) = F'(x) dx = f(x) dx$$

и

$$\left(\int f(x) dx\right)' = (F(x) + C)' = \underset{f(x)}{F'(x)} + 0 = f(x). \quad \blacksquare$$

Благодаря этому свойству *правильность интегрирования проверяется дифференцированием*. Например, равенство

$$\int (3x^2 + 4) dx = x^3 + 4x + C$$

верно, так как $(x^3 + 4x + C)' = 3x^2 + 4$.

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

□ Действительно, $\int dF(x) = \int F'(x) dx = \int f(x) dx = F(x) + C$. ■

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x) dx = a \cdot \int f(x) dx, \quad a \neq 0 — \text{постоянная.}$$

□ Действительно,

$$\begin{aligned} \int af(x) dx &= \int aF'(x) dx = \int (aF(x))' dx = \int d(aF(x)) = \\ &= a \cdot F(x) + C_1 = a \cdot \left(F(x) + \frac{C_1}{a}\right) = a(F(x) + C) = a \int f(x) dx \\ &(\text{положили } \frac{C_1}{a} = C). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

□ Пусть $F'(x) = f(x)$ и $G'(x) = g(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int (f(x) \pm g(x)) dx &= \int (F'(x) \pm G'(x)) dx = \\ &= \int (F(x) \pm G(x))' dx = \int d(F(x) \pm G(x)) = F(x) \pm G(x) + C = \\ &= (F(x) + C_1) \pm (G(x) + C_2) = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx, \end{aligned}$$

где $C_1 \pm C_2 = C$. ■

5. (Инвариантность формулы интегрирования). Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то и $\int f(u) du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ — произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

□ Пусть x — независимая переменная, $f(x)$ — непрерывная функция и $F(x)$ — ее первообразная. Тогда $\int f(x) dx = F(x) + C$. Положим теперь $u = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — непрерывно-дифференцируемая функция. Рассмотрим сложную функцию $F(u) = F(\varphi(x))$. В силу инвариантности формы первого дифференциала функции (см. с. 188) имеем

$$dF(u) = F'(u) du = f(u) du.$$

Отсюда $\int f(u) du = \int d(F(u)) = F(u) + C$. ■

Таким образом, формула для неопределенного интеграла остается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой функцией от нее, имеющей непрерывную производную.

Так, из формулы $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ путем замены x на u ($u = \varphi(x)$) получаем $\int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$. В частности,

$$\int \sin^2 x d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C,$$

$$\int \ln^2 x d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C,$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

Пример 29.1. Найти интеграл $\int (2x^4 - 3x^2 + x - 5) dx$.

○ Решение:

$$\begin{aligned} \int (2x^4 - 3x^2 + x - 5) dx &= 2 \int x^4 dx - 3 \int x^2 dx + \int x dx - 5 \int dx = \\ &= 2 \frac{x^5}{5} + C_1 - 3 \frac{x^3}{3} + C_2 + \frac{x^2}{2} + C_3 - 5x + C_4 = \frac{2}{5}x^5 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + C, \end{aligned}$$

где $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$. ●

Пример 29.2. Найти интеграл $\int \frac{x+1}{x} dx$.

○ Решение: $\int \frac{x+1}{x} dx = \int (1 + \frac{1}{x}) dx = x + \ln |x| + C$. ●

29.3. Таблица основных неопределенных интегралов

Пользуясь тем, что интегрирование есть действие, обратное дифференцированию, можно получить таблицу основных интегралов путем обращения соответствующих формул дифференциального исчисления (таблица дифференциалов) и использования свойств неопределенного интеграла.

Например, так как

$$d(\sin u) = \cos u \cdot du,$$

то

$$\int \cos u \, du = \int d(\sin u) = \sin u + C.$$

Вывод ряда формул таблицы будет дан при рассмотрении основных методов интегрирования.

Интегралы в приводимой ниже таблице называются *табличными*. Их следует знать наизусть. В интегральном исчислении нет простых и универсальных правил отыскания первообразных от элементарных функций, как в дифференциальном исчислении. Методы нахождения первообразных (т. е. интегрирования функции) сводятся к указанию приемов, приводящих данный (искомый) интеграл к табличному. Следовательно, необходимо знать табличные интегралы и уметь их узнавать.

Отметим, что в таблице основных интегралов переменная интегрирования u может обозначать как независимую переменную, так и функцию от независимой переменной (согласно свойству инвариантности формулы интегрирования).

В справедливости приведенных ниже формул можно убедиться, взяв дифференциал правой части, который будет равен подынтегральному выражению в левой части формулы.

Докажем, например, справедливость формулы 2. Функция $\frac{1}{u}$ определена и непрерывна для всех значений u , отличных от нуля.

Если $u > 0$, то $\ln |u| = \ln u$, тогда $d \ln |u| = d \ln u = \frac{du}{u}$. Поэтому

$$\int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln |u| + C \text{ при } u > 0.$$

Если $u < 0$, то $\ln |u| = \ln(-u)$. Но $d \ln(-u) = \frac{-du}{-u} = \frac{du}{u}$. Значит,

$$\int \frac{du}{u} = \ln(-u) + C = \ln |u| + C \text{ при } u < 0.$$

Итак, формула 2 верна.

Аналогично, проверим формулу 15:

$$d\left(\frac{1}{a} \arctg \frac{u}{a} + C\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{u}{a}\right)^2} \cdot \frac{1}{a} du = \frac{du}{a^2 + u^2}.$$

Таблица основных интегралов

1. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \quad \left(\int du = u + C \right);$
2. $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C;$
3. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$
4. $\int e^u du = e^u + C;$
5. $\int \sin u du = -\cos u + C \quad \left(\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C \right);$
6. $\int \cos u du = \sin u + C \quad \left(\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C \right);$
7. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln |\cos u| + C;$
8. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln |\sin u| + C;$
9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C \quad \left(\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C \right);$
10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C \quad \left(\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C \right);$
11. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C;$
12. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$
13. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C;$
14. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 + a^2}| + C;$
15. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C;$
16. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C;$
17. $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C;$
18. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C.$